№5 (148) 2013
Выпуск 30
Научный рецензируемый журнал

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ
Белгородского государственного университета
Математика Физика

BELGOROD STATE UNIVERSITY
SCIENTIFIC BULLETIN
Mathematics & Physics

Основан В 1995 г.

Журнал входит
в Перечень ведущих рецензируемых
научных журналов и изданий,
выпускаемых в Российской Федерации,
в которых рекомендуется публикация
основных результатов диссертаций
на соискание ученых степеней
доктора и кандидата наук

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»)

Издатель:

НИУ «БелГУ»
Издательский дом «Белгород».

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охраны культурного наследия.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-21121 от 19 мая 2005 г.

Содержание

МАТЕМАТИКА

Статьи представлены в авторской редакции

Компьютерная верстка
Ю.П. Вирченко
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Подписано в печать 25.03.2013
Формат 60×84/8
Гарнитура Courier New
Усл.п.л. 22.78
Тираж 1000 экз.
Заказ 236

Подписные индексы в каталоге агенства «Роспечать» – 81466

Оригинал-макет тиражирован
в издательском доме «Белгород»

Адрес: 308015, г.Белгород, ул.Победы, 85

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА,
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

№5 (148) 2013
Issue 30
Scientific peer-reviewed journal
Founded in 1995
Journal included into the list of leading peer-reviewed journals and publications coming out in Russian Federation that are recommended for publishing key results of theses for Doktor and Kandidat degree-applicants.

Belgorod State University Scientific Bulletin
Mathematics & Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ
Белгородского государственного университета
Mathematics & Physics

Founder:
Federal state autonomous educational establishment of highest professional education "Belgorod National Research University".

Publisher:
Belgorod National Research University
National Research University Publishing House "Belgorod".

The journal is registered in Federal service of control over law compliance in the sphere of mass media and protection of cultural heritage.

Mass media registration certificate
ПИ №ФС77-21121 May 19, 2005.

Contents

Proposed articles are given in authors' editing

Dummy layout:
Yu.P. Virchenko
e-mail: virch@bsu.edu.ru

Passed for printing 25.03.2013
Format 60×84/8
Typeface Courier New
Printer's sheets: 22.78
Calculation: 1000 copies
Order 236

Subscription reference in Rospechat' agency catalogue: 81466

Dummy layout is replicated at Belgorod National Research University Publishing House "Belgorod"

Address: 85, Pobedy str., Belgorod, Russia, 308015

MATHEMATICAL PHYSICS, MATHEMATICAL MODELING

SHORT COMMUNICATIONS

МАТЕМАТИКА

MSC 34E05

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОКОЛО ТОЧКИ ВЫРОЖДЕНИЯ

В.П. Архипов, А.В. Глушак

Старооскольский технологический институт НИТУ МИСиС,
м-н Макаренко, 42, 309516, Старый Оскол, e-mail: varhipov@inbox.ru,
Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. В статье исследуется поведение решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности точки вырождения старшего коэффициента. Устанавливаются точные двусторонние асимптотические формулы для гладких решений. Приведены условия, обеспечивающие однозначную разрешимость рассматриваемых уравнений.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения, точка вырождения, асимптотические представления, начальные и граничные задачи.

В теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами поведение решений вблизи точек вырождения старшего коэффициента до сегодняшнего дня еще недостаточно исследовано. В настоящей работе рассматриваются вопросы существования, а также асимптотика гладких решений линейного дифференциального уравнения второго порядка, вырождающегося в некоторой точке в уравнение первого порядка. Подобные уравнения изучались Глушко В.П. [1, 2], Розовым Н.Х., Сушко В.Г., Чудовой Д.И. [3] и др. В [1, 2] исследовались вопросы разрешимости двухточечных граничных задач, в [3] — возможности постановки и разрешимости задачи типа Коши, а также применение к нелинейным уравнениям. В работе [4] получены точные асимптотические формулы решений в правой окрестности точки вырождения $t_0 = 0$, показано, что при определённых условиях, существуют бесконечно убывающие к нулю и существенно неограниченные решения уравнения. На основе результатов [4] в предлагаемой статье строятся двусторонние асимптотики гладких решений уравнения около точки вырождения и рассматривается возможность правильной постановки начальных (граничных) задач, обеспечивающей их однозначную разрешимость в классах непрерывных функций.

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00378.

1. Предварительные условия, обозначения и преобразования. Рассмотрим при $t \in [0; d]$ линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = f(t)\,, \tag{1}$$

$a(t_0) = 0,\ a(t) \neq 0$ при $t \neq t_0,\ b(t_0) = b_0 \neq 0$. Для простоты формулировок гладкость заданных коэффициентов и правой части уравнения (1) предполагается достаточной для выполнения необходимых в дальнейшем действий.

Условие 1. Коэффициенты уравнения (1) и $f(t)$ – бесконечно дифференцируемые на $[0; d]$ функции $a(t),\ b(t),\ c(t),\ f(t) \in C^\infty[0; d])$, $a(t) \neq 0$ при $t \in [0; t_0) \cup (t_0; d]$ и $0 < t_0 < d$, $a(t_0) = 0,\ b(t_0) = b_0 \neq 0$.

В дальнейшем в ряде случаев бесконечная дифференцируемость не требуется, тогда $a(t),\ b(t),\ c(t),\ f(t) \in C^N[0; d]$.

Для некоторого $\delta > 0$ на отрезке $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ определим функции

$$\alpha(t) = \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)} > 0\,,$$

$$h(t) = \frac{\alpha^{-1}(t)}{4} \cdot \left(a(t) \left(\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \right)^2 - 2 \left(a(t) \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \right)' - 2b'(t) \right).$$

Выбор параметра $\delta > 0$ обусловлен выполнением следующего условия.

Условие 2. На отрезке $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ выполняются неравенства

$$\alpha(t) = \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)} > \frac{|b_0|}{2}\,, \qquad \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |h(t_1)dt_1| < \frac{1}{2}\,, \qquad b(t) \neq 0\,. \tag{2}$$

Для любого решения $u(t)$ уравнения (1) будем рассматривать его отдельно на каждом из промежутков $[t_0 - \delta; t_0)$ и $(t_0; t_0 + \delta]$, т.е.

$$u(t) = \begin{cases} u^-(t),\ t \in [t_0 - \delta; t_0), \\ u^+(t),\ t \in (t_0; t_0 + \delta]. \end{cases}$$

Как известно, выполнение условия 1, всюду, за исключением возможно точки t_0, обеспечивает гладкость решения $u(t)$. Основное требование — непрерывность $u(t)$ достигается при выполнении предельного соотношения

$$\lim_{t \to t_0 - 0} u^-(t) = \lim_{t \to t_0 + 0} u^+(t) = u^\pm(t_0) = u(t_0).$$

Простые замены переменных в теореме 2 из [4] позволяют получить асимптотические представления для функций $u^\pm(t)$ на соответствующих промежутках. При этом они несколько отличаются при изменении знака $a(t)$.

Определим при $a(t) > 0$ на $(t_0; t_0 + \delta]$ функции

$$v_1^+(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} \exp\left(\int\limits_t^{t_0+\delta} \frac{b(\tau) + \alpha(\tau)}{2 \cdot a(\tau)} d\tau \right), \quad v_2^+(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} \exp\left(\int\limits_t^{t_0+\delta} \frac{b(\tau) - \alpha(\tau)}{2 \cdot a(\tau)} d\tau \right) \tag{3}$$

и функции

$$\Phi^+(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^+(t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k^+(t) + \hat{\varphi}_n^+(t), \quad \Psi^+(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^+(t) = \sum_{k=0}^{n} \psi_k^+(t) + \hat{\psi}_n^+(t), \tag{4}$$

как решения уравнений

$$\Phi^+(t) = 1 + K_1^+ \Phi^+(t), \qquad \Psi^+(t) = 1 + K_2^+ \Psi^+(t),$$

где интегральные операторы

$$K_1^+ \varphi(t) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} K_1^+(t, t_1) \varphi(t_1) dt_1, \qquad K_2^+ \psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} K_2^+(t, t_1) \psi(t_1) dt_1$$

имеют ядра

$$K_1^+(t, t_1) = \begin{cases} h(t_1), \qquad t_0 \le t_1 \le t \le t_0 + \delta, \\ h(t_1) \exp\left(-\int\limits_t^{t_1} \frac{\alpha(\tau)}{a(\tau)} d\tau \right), \ t \le t_1 \le t_0 + \delta, \end{cases}$$

$$K_2^+(t, t_1) = -h(t_1) + h(t_1) \exp\left(-\int\limits_{t_1}^{t} \frac{\alpha(\tau)}{a(\tau)} d\tau \right), \ t_0 \le t_1 \le t \le t_0 + \delta,$$

а

$$\varphi_{k+1}^+ = K_1^+ \varphi_k^+ = (K_1^+)^{k+1} \varphi_0^+, \qquad \psi_{k+1}^+ = K_2^+ \psi_k^+ = (K_2^+)^{k+1} \psi_0^+, \qquad \varphi_0^+(t) \equiv \psi_0^+(t) \equiv 1.$$

Как отмечено в [4] ряды в (4) являются асимптотическими при $t \to t_0 + 0$, абсолютно и равномерно на $[t_0; t_0 + \delta]$ сходятся при выполнении (2).

Функции

$$u_1^+(t) = v_1^+(t) \Phi^+(t), \quad u_2^+(t) = v_2^+(t) \Psi^+(t) \tag{5}$$

представляют фундаментальную систему решений однородного уравнения (1).

Частное решение уравнения (1) на промежутке $(t_0; t_0 + \delta]$ определим равенством

$$u_*^+(t) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} G^+(t, \tau) f(\tau) d\tau \ , \tag{6}$$

где $G^+(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{-\Phi^+(t)\Psi^+(\tau)\exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t}\dfrac{b(\tau_1)+\alpha(\tau_1)}{2\cdot a(\tau_1)}d\tau_1\right)}{a(t_0+\delta)W^+(t_0+\delta)\sqrt{\alpha(t)\alpha(\tau)}}, & t_0<\tau\le t, \\ \dfrac{-\Phi^+(\tau)\Psi^+(t)\exp\left(\int\limits_{t}^{\tau}\dfrac{b(\tau_1)-\alpha(\tau_1)}{2\cdot a(\tau_1)}d\tau_1\right)}{a(t_0+\delta)W^+(t_0+\delta)\sqrt{\alpha(t)\alpha(\tau)}}, & t\le\tau\le t_0+\delta, \end{cases}$

$$W^+(t_0+\delta) = u_1^+(t_0+\delta)(u_2^+)'(t_0+\delta) - (u_1^+)'(t_0+\delta)u_2^+(t_0+\delta).$$

Аналогично, при $a(t)<0$ на $(t_0;t_0+\delta]$ рассмотрим функции

$$\bar{v}_1^+(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}\exp\left(\int\limits_{t}^{t_0+\delta}\frac{b(\tau)-\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right), \quad \bar{v}_2^+(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}\exp\left(\int\limits_{t}^{t_0+\delta}\frac{b(\tau)+\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right), \tag{7}$$

и

$$\bar{\Phi}^+(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\bar{\varphi}_k^+(t) = \sum_{k=0}^{n}\bar{\varphi}_k^+(t) + \breve{\varphi}_n^+(t), \qquad \bar{\Psi}^+(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\bar{\psi}_k^+(t) = \sum_{k=0}^{n}\bar{\psi}_k^+(t) + \breve{\psi}_n^+(t), \tag{8}$$

как решения уравнений

$$\bar{\Phi}^+(t) = 1 + \bar{K}_1^+\bar{\Phi}^+(t), \qquad \bar{\Psi}^+(t) = 1 + \bar{K}_2^+\bar{\Psi}^+(t)$$

с интегральными операторами

$$\bar{K}_1^+\varphi(t) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\delta}\bar{K}_1^+(t,t_1)\varphi(t_1)dt_1, \quad \bar{K}_2^+\psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t}\bar{K}_2^+(t,t_1)\psi(t_1)dt_1$$

и ядрами

$$\bar{K}_1^+(t,t_1) = \begin{cases} -h(t_1), & t_0\le t_1\le t\le t_0+\delta, \\ -h(t_1)\exp\left(\int\limits_{t}^{t_1}\dfrac{\alpha(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right), & t\le t_1\le t_0+\delta, \end{cases}$$

$$\bar{K}_2^+(t,t_1) = h(t_1) - h(t_1)\exp\left(\int\limits_{t_1}^{t}\frac{\alpha(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right), \ t_0\le t_1\le t\le t_0+\delta,$$

где $\bar{\varphi}_{k+1}^+ = \bar{K}_1^+\bar{\varphi}_k^+ = (\bar{K}_1^+)^{k+1}\bar{\varphi}_0^+$, $\bar{\varphi}_0^+(t)=1$, $\bar{\psi}_{k+1}^+ = \bar{K}_2^+\bar{\psi}_k^+ = (\bar{K}_2^+)^{k+1}\bar{\psi}_0^+$, $\bar{\psi}_0^+(t)=1$.

Как и выше,

$$\bar{u}_1^+(t) = \bar{v}_1^+(t)\bar{\Phi}^+(t) \quad \text{и} \quad \bar{u}_2^+(t) = \bar{v}_2^+(t)\bar{\Psi}^+(t) \tag{9}$$

– фундаментальные решения уравнения (1), частное решение задается в виде

$$\bar{u}_*^+(t) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} \bar{G}^+(t,\tau) f(\tau) d\tau, \tag{10}$$

где $\bar{G}^+(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{-\bar{\Phi}^+(t)\bar{\Psi}^+(\tau)\exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t} \dfrac{b(\tau_1)-\alpha(\tau_1)}{2\cdot a(\tau_1)} d\tau_1\right)}{a(t_0+\delta)\bar{W}^+(t_0+\delta)\sqrt{\alpha(t)\alpha(\tau)}}, & t_0<\tau\le t, \\ \dfrac{-\bar{\Phi}^+(\tau)\bar{\Psi}^+(t)\exp\left(\int\limits_{t}^{\tau} \dfrac{b(\tau_1)+\alpha(\tau_1)}{2\cdot a(\tau_1)} d\tau_1\right)}{a(t_0+\delta)\bar{W}^+(t_0+\delta)\sqrt{\alpha(t)\alpha(\tau)}}, & t\le\tau\le t_0+\delta, \end{cases}$

$$\bar{W}^+(t_0+\delta) = \bar{u}_1^+(t_0+\delta)(\bar{u}_2^+)'(t_0+\delta) - (\bar{u}_1^+)'(t_0+\delta)\bar{u}_2^+(t_0+\delta) \ne 0.$$

Для построения двусторонних разложений решений в окрестности точки t_0, необходимо выписать асимптотические формулы для $u^-(t)$. На $[t_0-\delta; t_0)$ определим при $a(t)>0$

$$v_1^-(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} \exp\left(-\int\limits_{t_0-\delta}^{t} \frac{b(\tau)-\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)} d\tau\right), \quad v_2^-(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} \exp\left(-\int\limits_{t_0-\delta}^{t} \frac{b(\tau)+\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)} d\tau\right) \tag{11}$$

и функции

$$\Phi^-(t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k^-(t) + \hat{\varphi}_n^-(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^-(t),\ \Psi^-(t) = \sum_{k=0}^{n} \psi_k^-(t) + \hat{\psi}_n^-(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^-(t) \tag{12}$$

из уравнений

$$\Phi^-(t) = 1 + K_1^-\Phi^-(t), \qquad \Psi^-(t) = 1 + K_2^-\Psi^-(t),$$

где

$$K_1^-\varphi(t) = \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} K_1^-(t,t_1)\varphi(t_1)dt_1, \quad K_2^-\psi(t) = \int\limits_{t}^{t_0} K_2^-(t,t_1)\psi(t_1)dt_1$$

– интегральные операторы с ядрами

$$K_1^-(t,t_1) = \begin{cases} h(t_1), & t_0-\delta\le t\le t_1\le t_0, \\ h(t_1)\exp\left(-\int\limits_{t_1}^{t} \dfrac{\alpha(\tilde{t})}{a(\tilde{t})} d\tilde{t}\right), & t_0-\delta\le t_1\le t<t_0, \end{cases}$$

$$K_2^-(t,t_1) = -h(t_1) + h(t_1)\exp\left(-\int\limits_t^{t_1}\frac{\alpha(\tilde t)}{a(\tilde t)}d\tilde t\right), \quad t_0-\delta \le t \le t_1 < t_0.$$

Функции

$$u_1^-(t) = v_1^-(t)\cdot\Phi^-(t), \qquad u_2^-(t) = v_2^-(t)\cdot\Psi^-(t) \tag{13}$$

представляют фундаментальную систему решений для уравнения (1) на $[t_0-\delta; t_0)$, а частное решение для произвольной функции $f(t)$ можно записать в виде

$$u_*^-(t) = \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} G^-(t,\tilde t)f(\tilde t)d\tilde t, \tag{14}$$

где $G^-(t,\tilde t) = \begin{cases} \dfrac{-\Phi^-(t)\Psi^-(\tilde t)\exp\left(\int\limits_t^{\tilde t}\dfrac{b(t_1)-\alpha(t_1)}{2\cdot a(t_1)}dt_1\right)}{a(t_0-\delta)W^-(t_0-\delta)\sqrt{\alpha(t)\alpha(\tilde t)}}, & t\le\tilde t<t_0, \\ \dfrac{-\Phi^-(\tilde t)\Psi^-(t)\exp\left(-\int\limits_{\tilde t}^{t}\dfrac{b(t_1)+\alpha(t_1)}{2\cdot a(t_1)}dt_1\right)}{a(t_0-\delta)W^-(t_0-\delta)\sqrt{\alpha(t)\alpha(\tilde t)}}, & t_0-\delta\le\tilde t\le t, \end{cases}$

$$W^-(t_0-\delta) = u_1^-(t_0-\delta)(u_2^-)'(t_0-\delta) - (u_1^-)'(t_0-\delta)u_2^-(t_0-\delta) \ne 0.$$

Справедливо следующее утверждение (ср. с Теоремой 2 в [4]).

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) выполнены условия 1 и 2. Тогда:*

а) если $a(t) > 0$ при $t > t_0$, то общее решение уравнения (1) для любой функции $f(t)$ представимо на $(t_0; t_0+\delta]$ в виде

$$u^+(t) = \tilde C_1^+\cdot u_1^+(t) + \tilde C_2^+\cdot u_2^+(t) + u_*^+(t),$$

где $u_1^+(t), u_2^+(t), u_*^+(t)$ определены в (3)-(6); при этом

если $b(t_0) = b_0 < 0$, то $u_{1,2}^+(t) \in C^N[t_0; t_0+\delta]$, $u_*^+(t) \in C^N[t_0; t_0+\delta]$ и $u^+(t) \in C^N[t_0; t_0+\delta]$ для любых постоянных $\tilde C_1^+$, $\tilde C_2^+$, где $N = \max\{m : b_0 + m\cdot a'(t_0) < 0\}$, $\lim\limits_{t\to t_0+0}(u_2^+)^{(m)}(t) = 0$ для всех $0\le m\le N$;

если $b(t_0) = b_0 > 0$, то $u_*^+(t) \in C^\infty[t_0; t_0+\delta]$, $\lim\limits_{t\to t_0+0}(u_1^+)^{(m)}(t) = +\infty$ для всех $m\ge 0$ и $u^+(t)\in C^\infty[t_0; t_0+\delta]$, если $\tilde C_1^+ = 0$;

б) если $a(t) < 0$ при $t > t_0$, то общее решение уравнения (1) для любой функции $f(t)$ представимо на $(t_0; t_0+\delta]$ в виде

$$u^+(t) = \tilde C_1^+\cdot \bar u_1^+(t) + \tilde C_2^+\cdot \bar u_2^+(t) + \bar u_*^+(t),$$

где $\bar u_1^+(t), \bar u_2^+(t), \bar u_*^+(t)$ *определены в (7)-(10); при этом*

если $b(t_0)=b_0>0$, *то* $\bar u_{1,2}^+(t)\in C^N[t_0;t_0+\delta]$, $\bar u_*^+(t)\in C^N[t_0;t_0+\delta]$ *и* $\bar u^+(t)\in C^N[t_0;t_0+\delta]$ *для любых постоянных* $\tilde C_1^+,\ \tilde C_2^+$, *где* $N=\max\{m: b_0+m\cdot a'(t_0)>0\}$, $\lim\limits_{t\to t_0+0}(u_2^+)^{(m)}(t)=0$ *для всех* $0\le m\le N$;

если $b(t_0)=b_0<0$, *то* $u_*^+(t)\in C^\infty[t_0;t_0+\delta]$, $\lim\limits_{t\to t_0+0}(\bar u_1^+)^{(m)}(t)=+\infty$ *для всех* $m\ge 0$ *и* $\bar u^+(t)\in C^\infty[t_0;t_0+\delta]$, *если* $\tilde C_1^+=0$;

в) если $a(t)>0$ *при* $t<t_0$, *то общее решение уравнения (1) для любой функции* $f(t)$ *представимо на* $[t_0-\delta;t_0)$ *в виде*

$$u^-(t)=\tilde C_1^-\cdot u_1^-(t)+\tilde C_2^-\cdot u_2^-(t)+u_*^-(t),$$

где $u_{1,2}^-t), u_*^-(t)$ *определены в (11)-(14); при этом*

если $b(t_0)=b_0<0$, *то* $\lim\limits_{t\to t_0-0}(u_1^-)^{(m)}(t)=+\infty$ *для всех* $m\ge 0$, $u_*^-(t)\in C^\infty[t_0-\delta;t_0]$ *и* $u^-(t)\in C^\infty[t_0-\delta;t_0]$, *если* $\tilde C_1^-=0$;

если $b(t_0)=b_0>0$, *то* $u_{1,2}^-(t)\in C^N[t_0-\delta;t_0]$, $u_*^-(t)\in C^N[t_0-\delta;t_0]$ *и* $u^-(t)\in C^N[t_0-\delta;t_0]$ *для любых постоянных* $\tilde C_1^-,\ \tilde C_2^-$, *где* $N=\max\{m: b_0+m\cdot a'(t_0)>0\}$, $\lim\limits_{t\to t_0-0}(u_2^-)^{(m)}(t)=0$ *для всех* $0\le m\le N$.

Замечание.

1) Если $a'(t_0)=0$, то в Теореме 1 $N=+\infty$.

2) В точке $t=t_0$ выполнены (в случае $a(t)>0$ при $t>t_0$) предельные соотношения

$$u_1^+(t_0)=v_1^+(t_0)=\frac{1}{\sqrt{|b_0|}}\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta}\frac{b(\tau)+\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right)=\begin{cases}\theta_1^+>0 & \text{при } b_0<0\,,\\ +\infty & \text{при } b_0>0\,;\end{cases}$$

$$u_2^+(t_0)=\frac{1}{\sqrt{|b_0|}}\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta}\frac{b(\tau)-\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right)=\begin{cases}0 & \text{при } b_0<0\,,\\ \theta_2^+>0 & \text{при } b_0>0\,;\end{cases}$$

$$\lim_{t\to t_0+0}u_*^+(t)=u_*^+(t_0)=\begin{cases}0 & \text{при } b_0<0\,,\\ \theta_*^+ & \text{при } b_0>0\,;\end{cases}\ .$$

3) В точке $t=t_0$ выполнены (в случае $a(t)<0$ при $t>t_0$) предельные соотношения

$$\bar u_1^+(t_0)=\bar v_1^+(t_0)=\frac{1}{\sqrt{|b_0|}}\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta}\frac{b(\tau)-\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right)=\begin{cases}+\infty & \text{при } b_0<0\,,\\ \bar\theta_1^+>0 & \text{при } b_0>0\,;\end{cases}$$

$$\bar u_2^+(t_0)=\frac{1}{\sqrt{|b_0|}}\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta}\frac{b(\tau)+\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right)=\begin{cases}\bar\theta_2^+>0 & \text{при } b_0<0\,,\\ 0 & \text{при } b_0>0\,.\end{cases}$$

$$\lim_{t\to t_0+0}\bar u_*^+(t)=\bar u_*^+(t_0)=\begin{cases}\bar\theta_*^+ & \text{при } b_0<0\,,\\ 0 & \text{при } b_0>0\,.\end{cases}$$

4) В точке $t = t_0$ выполнены (в случае $a(t) > 0$ при $t < t_0$) следующие предельные соотношения

$$v_1^-(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(- \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b(\tau) - \alpha(\tau)}{2 \cdot a(\tau)} d\tau \right) = \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad b_0 < 0\,, \\ \theta_1^- > 0 & \text{при} \quad b_0 > 0\,; \end{cases}$$

$$u_1^-(t_0) = v_1^-(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(- \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b(\tau) - \alpha(\tau)}{2 \cdot a(\tau)} d\tau \right) = \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad b_0 < 0\,, \\ \theta_1^- > 0 & \text{при} \quad b_0 > 0\,; \end{cases}$$

$$v_2^-(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(- \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b(\tau) + \alpha(\tau)}{2 \cdot a(\tau)} d\tau \right) = \begin{cases} \theta_2^- > 0 & \text{при} \quad b_0 < 0\,, \\ 0 & \text{при} \quad b_0 > 0\,; \end{cases}$$

$$u_2^-(t_0) = v_2^-(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(- \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b(\tau) + \alpha(\tau)}{2 \cdot a(\tau)} d\tau \right) = \begin{cases} \theta_2^- > 0 & \text{при} \quad b_0 < 0\,, \\ 0 & \text{при} \quad b_0 > 0 \end{cases} \qquad (15)$$

и
$$\lim_{t \to t_0 - 0} u_*^-(t) = u_*^-(t_0) = \begin{cases} \theta_*^- & \text{при} \ \ b_0 < 0\,, \\ 0 & \text{при} \ \ b_0 > 0\,. \end{cases}$$

Полученные результаты позволяют построить двусторонние асимптотические формулы гладких решений уравнения (1) в окрестности точки t_0.

2. Двусторонние асимптотики решений.

I. Рассмотрим вопрос о существовании гладких решений уравнения (1) на всем отрезке $[0; d]$ при условии сохранения знака функции $a(t) > 0$ на $[0; t_0) \cup (t_0; d]$. При выполнении условия 1 в этом случае $a(t_0) = a'(t_0) = 0$ и в Теореме 1 $N = +\infty$.

Напомним, что $u(t) = \begin{cases} u^-(t), \ t \in [t_0 - \delta; t_0) \\ u^+(t), \ t \in (t_0; t_0 + \delta] \end{cases}$ и непрерывное на $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ решение $u(t)$ должно удовлетворять условию:

$$\lim_{t \to t_0 - 0} u^-(t) = \lim_{t \to t_0 + 0} u^+(t) = u^{\pm}(t_0) = u(t_0). \qquad (16)$$

а). При $b_0 < 0$ для $u^-(t) = \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t)$ при $t \in [t_0 - \delta; t_0)$ $\tilde{C}_1^- = 0$ (требование непрерывности (ограниченности)), $u(t) = u^-(t) = C_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t)$ и

$$\lim_{t \to t_0 - 0} u^-(t) = \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t_0) + u_*^-(t_0) = \tilde{C}_2^- \cdot \theta_2^- + \theta_*^-;$$

при $t \in (t_0; t_0 + \delta]$ для $u(t) = u^+(t) = \tilde{C}_1^+ \cdot u_1^+(t) + \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t) + u_*^+(t)$ при любых $\tilde{C}_{1,2}^+$:

$$\lim_{t \to t_0 + 0} u^+(t) = \tilde{C}_1^+ \cdot u_1^+(t_0) + \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t_0) + u_*^+(t_0) = \tilde{C}_1^+ \cdot \theta_1^+ (u_2^+(t_0) = u_*^+(t_0) = 0)$$

и из (16) следует

$$\tilde{C}_2^- \cdot \theta_2^- + \theta_*^- = \tilde{C}_1^+ \cdot \theta_1^+ \quad \text{или} \quad \tilde{C}_2^- = \frac{\tilde{C}_1^+ \cdot \theta_1^+ - \theta_*^-}{\theta_2^-} \qquad \left(\tilde{C}_1^+ = \frac{\tilde{C}_2^- \cdot \theta_2^- + \theta_*^-}{\theta_1^+} \right). \tag{17}$$

Таким образом, непрерывное на $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ решение уравнения (1) имеет вид:

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta; t_0], \\ \tilde{C}_1^+ \cdot u_1^+(t) + \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t) + u_*^+(t) & \text{при } t \in [t_0; t_0 + \delta], \end{cases} \tag{18}$$

где постоянные $\tilde{C}_2^-, \tilde{C}_2^+$ произвольны, а $\tilde{C}_1^+$ находится из условия (17). При этом $u(t_0) = \tilde{C}_1^+ \cdot \theta_1^+ = \tilde{C}_2^- \cdot \theta_2^- + \theta_*^-$.

Таким образом, в этом случае при $t > t_0$ происходит «qqраздвоение» гладкого решения уравнения (1). С другой стороны, двухпараметрическое семейство решений уравнения (1) при $t < t_0$ расщепляется в левой окрестности в точке t_0 на однопараметрические ограниченное и неограниченное семейства решений.

Рассмотрим вопрос о гладкости этих решений в точке t_0. Для производной

$$u'(t) = \begin{cases} \tilde{C}_2^- \cdot (u_2^-)'(t) + (u_*^-)'(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta; t_0), \\ \tilde{C}_1^+ \cdot (u_1^+)'(t) + \tilde{C}_2^+ \cdot (u_2^+)'(t) + (u_*^+)'(t) & \text{при } t \in (t_0; t_0 + \delta], \end{cases} \tag{19}$$

кроме того, $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} a(t)(u^+)''(t) = \lim\limits_{t \to t_0 - 0} a(t)(u^-)''(t) = 0$. Тогда

$$\lim_{t \to t_0 + 0} (f(t) - b(t)(u^+)'(t) - c(t)u^+(t)) = 0, \qquad (u^+)'(t_0) = \frac{f(t_0) - c(t_0)u^+(t_0)}{b_0},$$

$$\lim_{t \to t_0 - 0} (f(t) - b(t)(u^-)'(t) - c(t)u^-(t)) = 0,$$

$$(u^-)'(t_0) = \frac{f(t_0) - c(t_0)u^-(t_0)}{b_0} = (u^+)'(t_0) = u'(t_0).$$

Таким образом, функция $u(t)$, определенная в (18), непрерывно дифференцируема на $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$, т.е. $u(t) \in C^1[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ для любой постоянной $\tilde{C}_2^+$. Отметим, что для справедливости этих рассуждений вполне достаточно непрерывности функции $f(t)$ на $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ и не требуется бесконечная гладкость коэффициентов уравнения. Несложные стандартные рассуждения позволяют при выполнении условия 1 установить бесконечную дифференцируемость решений уравнения (1), определенных формулами (18)-(19) (см. замечание, п. 1). Действительно, обозначив

$$v(t) = u'(t) = \begin{cases} \tilde{C}_2^- \cdot (u_2^-)'(t) + (u_*^-)'(t) & t \in [t_0 - \delta; t_0), \\ \tilde{C}_1^+ \cdot (u_1^+)'(t) + \tilde{C}_2^+ \cdot (u_2^+)'(t) + (u_*^+)'(t), & t \in (t_0; t_0 + \delta] \end{cases}$$

и продифференцировав (1), видим, что функция $v(t)$ является непрерывным на $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ решением вырождающегося дифференциального уравнения

$$(a(t)v'(t))' + \hat{b}(t)v'(t) + \hat{c}(t)v(t) = \hat{f}(t), \quad t \in [0; d], \quad a(t_0) = 0, \; \hat{b}(t_0) = b_0 \neq 0, \tag{20}$$

где $\hat{b}(t) = b(t) + a'(t)$, $\hat{c}(t) = c(t) + b'(t) + a''(t)$, $\hat{f}(t) = f'(t) - c'(t)u(t)$.

Теперь, согласно утверждению Теоремы 1 (при $f(t) \in C^1[t_0-\delta; t_0+\delta]$), применённой к уравнению (20), следует, что $v(t) \in C^1[t_0-\delta; t_0+\delta]$ и $u(t) \in C^2[t_0-\delta; t_0+\delta]$. Далее эти рассуждения неограниченно продолжаются по индукции.

б). При $b_0 > 0$ для $u^-(t) = \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t)$ при $t \in [t_0-\delta; t_0)$

$$\lim_{t \to t_0 - 0} u^-(t) = \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t_0) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t_0) + u_*^-(t_0) = \tilde{C}_1^- \cdot \theta_1^- (u_2^-(t_0) = u_*^-(t_0) = 0),$$

для $u^+(t) = \tilde{C}_1^+ \cdot u_1^+(t) + \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t) + u_*^+(t)$ при $t \in (t_0; t_0+\delta]$ $\quad \Rightarrow \tilde{C}_1^+ = 0$ (требование непрерывности (ограниченности)),

$$\lim_{t \to t_0+0} u^+(t) = \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t_0) + u_*^+(t_0) = \tilde{C}_2^+ \cdot \theta_2^+ + \theta_*^+,$$

а из (16) следует

$$\tilde{C}_2^+ \cdot \theta_2^+ + \theta_*^+ = \tilde{C}_1^- \cdot \theta_1^- \quad \text{или} \quad \tilde{C}_2^+ = \frac{\tilde{C}_1^- \cdot \theta_1^- - \theta_*^+}{\theta_2^+} \qquad \left(\tilde{C}_1^- = \frac{\tilde{C}_2^+ \cdot \theta_2^+ + \theta_*^+}{\theta_1^-} \right). \tag{21}$$

Таким образом, непрерывное на $[t_0-\delta; t_0+\delta]$ решение уравнения (1) имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0-\delta; t_0], \\ \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t) + u_*^+(t) & \text{при } t \in [t_0; t_0+\delta], \end{cases} \tag{22}$$

где постоянные $\tilde{C}_2^-$,$\tilde{C}_2^+$ произвольны, а константа $\tilde{C}_1^-$ определяется формулой (21).

При этом, $u(t_0) = \tilde{C}_1^- \cdot \theta_1^- = \tilde{C}_2^+ \cdot \theta_2^+ + \theta_*^+$. Как и ранее при выполнении условия 1 может быть установлена бесконечная дифференцируемость построенного решения (22). Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть в уравнении (1), выполнены условия 1, 2 и $a(t) > 0$ при $t \in [t_0-\delta; t_0) \cup (t_0; t_0+\delta]$. Для любой функции $f(t) \in C^\infty[t_0-\delta; t_0+\delta]$ уравнение (1) имеет на $[t_0-\delta; t_0+\delta]$ бесконечное множество ограниченных решений. Любое непрерывное на отрезке $[t_0-\delta; t_0+\delta]$ решение уравнения (1) является бесконечно дифференцируемым на нём и может быть представлено в виде:*

а) при $b_0 < 0$ формулой (18)

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t) & \textit{при } t \in [t_0-\delta; t_0], \\ \tilde{C}_1^+ \cdot u_1^+(t) + \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t) + u_*^+(t) & \textit{при } t \in [t_0; t_0+\delta], \end{cases}$$

где постоянные $\tilde{C}_1^+$, $\tilde{C}_2^+$ произвольны, а константа $\tilde{C}_2^- = \dfrac{\tilde{C}_1^+ \theta_1^+ - \theta_*^-}{\theta_2^-}$, функции $u_{1,2}^\pm(t)$, $u_*^\pm(t)$ определяются соотношениями (3)-(6), (4)-(14) и

$$u(t_0) = \tilde{C}_1^+ \theta_1^+ = \tilde{C}_2^- \theta_2^- + \theta_*^-, \qquad u'(t_0) = \frac{f(t_0) - c(t_0)u(t_0)}{b_0};$$

б) при $b_0 > 0$ в виде (22)

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t) & t \in [t_0 - \delta; t_0], \\ \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t) + u_*^+(t) & t \in [t_0; t_0 + \delta], \end{cases}$$

где постоянные $\tilde{C}_1^-$,$\tilde{C}_2^-$ произвольны, а $\tilde{C}_2^+$ определяется из условия (21), при этом $u(t_0) = \tilde{C}_1^- \cdot \theta_1^- = \tilde{C}_2^+ \cdot \theta_2^+ + \theta_*^+$, $u'(t_0) = \dfrac{f(t_0) - c(t_0)u(t_0)}{b_0}$, функции $u_{1,2}^{\pm}(t)$, $u_*^{\pm}(t)$ определяются соотношениями (3)-(6), (11)-(14).

II. Рассмотрим теперь вопрос о существовании гладких решений уравнения (1) на отрезке $[0; d]$ при условии, что функция $a(t)$ изменяет знак при переходе через точку t_0: $(t_0 - t)a(t) > 0$ при $t \in [t_0 - \delta; t_0) \cup (t_0; t_0 + \delta]$. Такие же рассуждения, как и выше, приводят к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть в уравнении (1), выполнены условия 1, 2 и $(t_0 - t)a(t) > 0$ при $t \in [t_0 - \delta; t_0) \cup (t_0; t_0 + \delta]$. Для любой функции $f(t) \in C^\infty[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ уравнение (1) имеет на $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ бесконечное множество ограниченных решений. Любое непрерывное на отрезке $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ решение $u(t)$ уравнения (1) обладает свойством:*

а) при $b_0 < 0$ является бесконечно дифференцируемым и может быть представлено в виде

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta; t_0], \\ \tilde{C}_2^+ \cdot \bar{u}_2^+(t) + \bar{u}_*^+(t) & \text{при } t \in [t_0; t_0 + \delta], \end{cases} \tag{23}$$

где постоянная $\tilde{C}_2^-$ произвольна, а

$$\tilde{C}_2^+ = \frac{\tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t_0) + u_*^-(t_0) - \bar{u}_*^+(t_0)}{\bar{u}_2^+(t_0)} = \frac{\tilde{C}_2^- \cdot \theta_2^- + \theta_*^- - \bar{\theta}_*^+}{\bar{\theta}_2^+},$$

функции $u_2^-(t)$, $u_*^-(t), \bar{u}_2^+(t)$, $\bar{u}_*^+(t)$ определяются соотношениями (7) – (14), при этом $u(t_0) = \tilde{C}_2^- \cdot \theta_2^- + \theta_*^- = \tilde{C}_2^+ \cdot \bar{\theta}_2^+ + \bar{\theta}_*^+$, $u'(t_0) = \dfrac{f(t_0) - c(t_0)u(t_0)}{b_0}$;

б) при $b_0 > 0$ $u(t) \in C^N[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ при $N = \max\{m : b_0 + m \cdot a'(t_0) > 0\}$ и может быть представлено в виде

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t) & t \in [t_0 - \delta; t_0], \\ \tilde{C}_1^+ \cdot \bar{u}_1^+(t) + \tilde{C}_2^+ \cdot \bar{u}_2^+(t) + \bar{u}_*^+(t) & t \in [t_0; t_0 + \delta], \end{cases} \tag{24}$$

где постоянные $\tilde{C}_1^-, \tilde{C}_2^-, \tilde{C}_2^+$ произвольны, а $\tilde{C}_1^+$ однозначно выражается через $\tilde{C}_1^-$: $\tilde{C}_1^+ = \dfrac{\tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t_0)}{\bar{u}_1^+(t_0)} = \dfrac{\tilde{C}_1^- \cdot \theta_1^-}{\bar{\theta}_2^+}$, функции $u_1^-(t)$, $u_2^-(t)$, $u_*^-(t)$, $\bar{u}_1^+(t)$, $\bar{u}_2^+(t)$, $\bar{u}_*^+(t)$ определяются соотношениями (7)-(14), при этом $u(t_0) = \tilde{C}_1^+ \cdot \bar{\theta}_1^+ = \tilde{C}_1^- \cdot \theta_1^-$, $u'(t_0) = \dfrac{f(t_0) - c(t_0)u(t_0)}{b_0}$.

Отметим, что асимптотические ряды в формулах (18), (22)-(24) абсолютно и равномерно сходятся на $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$.

3. Условия однозначной разрешимости на отрезке $[0; d]$**.** Полученные асимптотические представления решений в формулах (18), (22) - (24) позволяют полностью исследовать вопрос о возможности правильной постановки начальных (граничных) условий для уравнения (1), обеспечивающих однозначную разрешимость уравнения на отрезке $[0; d]$.

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения (1): найти функцию $u(t)$, удовлетворяющую уравнению (1)

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = f(t), \quad t \in [0; d], \quad a(t_0) = 0,\ b(t_0) = b_0 \neq 0\,,$$

и начальным условиям при $t_1 \in [0; d]$

$$u(t_1) = A, \quad u'(t_1) = B. \tag{25}$$

Вопросы разрешимости задачи Коши для уравнения (1) существенно зависят от знаков функции $a(t)$ на отрезке $[0; d]$ и $b_0 \neq 0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть для коэффициентов уравнения (1) и функции $f(t)$ выполнено условие 1, $a(t) > 0$ при $t \in [0; t_0) \cup (t_0; d]$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

а). При $b(t_0) = b_0 > 0$ для любых произвольных постоянных $A,\ B$ и любой точки $t_1 \in [0; t_0)$ существует единственное на $[0; d]$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (25). Функция $u(t)$, доставляющая решение этой задачи, бесконечно дифференцируема на $[0; d]$. Асимптотика решения в точке t_0 задаётся формулами (22) при постоянных, однозначно определяемых значениями $A,\ B$ и t_1.

б). При $b(t_0) = b_0 < 0$ для любых произвольных постоянных $A,\ B$ и любой точки $t_1 \in (t_0, d]$ существует единственное на $[0; d]$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (25). Функция $u(t)$, доставляющая решение этой задачи, бесконечно дифференцируема на $[0; d]$. Асимптотика решения в точке t_0 задаётся формулами (18) при постоянных, однозначно определяемых значениями $A,\ B$ и t_1.

□ а). Выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось условие 2. Если $t_1 \in [0; t_0 - \delta]$ то, следуя классической теореме существования и единственности решения задачи Коши, найдем функцию $\hat{u}^-(t) \in C^\infty[0; t_0)$, дающую решение задачи Коши на $[0; t_0)$ для любых заданных A, B. Пусть $\hat{u}^-(t_0 - \delta) = A_\delta,\ (\hat{u}^-)'(t_0 - \delta) = B_\delta$. Как следует из Теоремы 2 п.б), любое ограниченное решение уравнения (1) может быть представлено в виде (22). Определим для функции

$$u_0(t) = \begin{cases} \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta; t_0], \\ \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t) + u_*^+(t) & \text{при } t \in [t_0; t_0 + \delta], \end{cases}$$

постоянные $\tilde{C}_1^-,\ \tilde{C}_2^-$ из условий $u_0(t_0 - \delta) = A_\delta,\ \ u_0'(t_0 - \delta) = B_\delta$ как решения системы

$$\begin{cases} \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t_0 - \delta) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t_0 - \delta) + u_*^-(t_0 - \delta) = A_\delta, \\ \tilde{C}_1^-(u_1^-)'(t_0 - \delta) + \tilde{C}_2^-(u_2^-)'(t_0 - \delta) + (u_*^-)'(t_0 - \delta) = B_\delta. \end{cases} \tag{26}$$

Так как функции $u^-_{1,2}(t)$ линейно независимы и определитель системы $W^-(t_0-\delta) = u^-_1(t_0-\delta)(u^-_2)'(t_0-\delta) - (u^-_1)'(t_0-\delta)u^-_2(t_0-\delta) \neq 0$ отличен от нуля, то $\tilde{C}^-_1$, $\tilde{C}^-_2$ определяются однозначно для каждой пары A, B и произвольной точки $t_1 \in [0;t_0)$, при этом постоянная $\tilde{C}^+_2 = \dfrac{\tilde{C}^-_1 \cdot \theta^-_1 - \theta^+_*}{\theta^+_2}$ также определяется однозначно. Это позволяет построить единственное решение задачи на отрезке $[0;t_0+\delta]$. Продолжение решения на весь отрезок $[0;d]$ очевидно. Находим функцию $\hat{u}^+(t) \in C^\infty(t_0;d]$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям Коши $\hat{u}^+(t_0+\delta) = u_0(t_0+\delta), \quad (u^+)'(t_0+\delta) = u'_0(t_0+\delta)$. Итак, требуемая в теореме функция при выполнении условий (17) и (26) имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} \hat{u}^-(t) \;\; t \in [0;t_0-\delta], \\ u_0(t) \;\; t \in [t_0-\delta;t_0+\delta], \\ \hat{u}^+(t) \;\; t \in [t_0+\delta, d]. \end{cases} \tag{27}$$

В точках склейки функция (27) является решением задачи Коши для уравнения (1), что и обеспечивает её бесконечную дифференцируемость. Заметим, что функция $u_0(t)$ при выполнении условий (17) и (26) дает асимптотическое представление решения рассматриваемой задачи вблизи точки t_0. Пункт а) теоремы доказан, т.к. при $t_1 \in [t_0-\delta;t_0)$ первый шаг доказательства – построение $\hat{u}^-(t)$ – можно опустить. Для доказательства пункта б) теоремы проводятся аналогичные рассуждения. ■

Если функция $a(t)$ изменяет знак при переходе через точку t_0: $(t_0-t)a(t) > 0$ при $t \in [t_0-\delta;t_0) \cup (t_0;t_0+\delta]$, то дополнительные условия для однозначной разрешимости уравнения (1) выглядят иначе. Так, например, имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть для коэффициентов уравнения (1) и функции $f(t)$ выполнено условие 1, $(t_0-t)a(t) > 0$ при $t \in [0;t_0) \cup (t_0;d]$. Справедливы следующие утверждения.*

а). Если $b(t_0) = b_0 < 0$, то при некотором $\delta > 0$ для любой произвольной постоянной A и любой точки $t_1 \in [t_0-\delta;t_0+\delta]$ существует единственное на $[0;d]$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(t_1) = A$. Функция $u(t)$, доставляющая решение этой задачи, бесконечно дифференцируема на $[0;d]$. Асимптотика решения в точке t_0 задаётся формулами (23) при постоянных, однозначно определяемых значениями A и t_1.

б). Если $b(t_0) = b_0 > 0$, то при некотором $\delta > 0$ для любых произвольных постоянных A, B, C и любой точки $t_1 \in [0;t_0) \cup (t_0;d]$ существует единственное на $[0;d]$ решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (25) и $u(t_0-\delta) = C$ (или $u(t_0+\delta) = C$). Функция $u(t) \in C^N[0;d]$ при $N = \max\{m : b_0 + m \cdot a'(t_0) > 0\}$, асимптотика решения в точке t_0 задаётся формулами (24) при постоянных, однозначно определяемых значениями A, B, C и t_1.

□ Доказательство Теоремы 5 проводится по той же схеме, что и доказательство Теоремы 4. ■

Теоремы 4 и 5 не исчерпывают все возможности постановки начально-краевых задач для уравнения (1). Результаты теорем 1-5 позволяют практически полностью охарактеризовать все решения дифференциального уравнения второго порядка в окрестности точки вырождения старшего коэффициента. Они показывают существенные отличия в их поведении в зависимости от знака выражения $\Delta = b_0 \cdot (t_0 - t)a(t)$ в окрестности точки t_0. Отметим, что ни в каком случае для существования гладкого решения невозможно задание более одного условия непосредственно в точке вырождения. Полученные точные асимптотические формулы позволяют строить правильные расчетные схемы для численного решения начально-краевых задач для вырождающихся уравнений, так как именно вблизи особой точки возникают существенные изменения в поведении решений уравнения.

Литература

1. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. II, III // Дифференц. уравнения. – 1968. – 4;11; 1969. – 5;3.
2. Глушко В.П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения / Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1972.
3. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной // Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. – 4;3. – С.1063-1095.
4. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной // Дифференц. уравнения. – 2011. – 47;10. – С.1383-1393.

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS THE SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION NEAR DEGENERATING POINT

V.P. Arhipov, A.V. Glushak

Stary Oskol technological institute NITU MISiS,
Makarenko dist., 42, Stary Oskol, 309516, Russia, e-mail: varhipov@inbox.ru
Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. Solutions of ordinary linear second-order differential equations are studied. Their behavior in the neighborhood of high-order coefficient degeneracy point is investigated. Exact double-sided asymptotic formulas of smooth solutions are found. Conditions ensuring the single-valued solvability of equations under consideration are described.

Key words: degenerating differential equations, solutions near the degenerating point, asymptotic representations, initial and boundary value problems.

MSC 35Q05

О ВОЗМУЩЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ ПЕРЕМЕННЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

А.Н. Бабаев, А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул.Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Babaev@bsu.edu.ru, Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается задача Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу при возмущении постоянного неограниченного оператора переменным ограниченным оператором.

Ключевые слова: уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, возмущение, переменный ограниченный оператор.

Пусть A — неограниченный замкнутый оператор и $k > 0$. В банаховом пространстве E рассмотрим задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \ \ u'(0) = 0. \tag{2}$$

Под решением задачи Коши (1), (2) мы будем понимать дважды непрерывно дифференцируемую на интервале $(0, +\infty)$ функцию $u(t)$, удовлетворяющую уравнению (1) на интервале $(0, +\infty)$ и условию (2).

Класс операторов A, с которым задача Коши (1), (2) равномерно корректна, обозначим через G_k, а соответствующий разрешающий оператор, который назовем операторной функцией Бесселя (ОФБ), — через $Y_k(t)$, т.е.

$$u(t) = Y_k(t)u_0\,. \tag{3}$$

Критерий равномерной корректности и свойства ОФБ $Y_k(t)$ изучались в работе [1]. В работе [2] исследован вопрос о принадлежности $G_k, k \geq 0$ возмущённого оператора $A + B$ в случаях, когда B — постоянный ограниченный оператор или $B \in G_m, \ m \geq 0$.

В настоящей работе рассматривается случай, когда уравнение (1) возмущается переменным ограниченным оператором $B(t)$. При доказательстве основного утверждения использованы результаты работ [3], [4].

Пусть $B(t)$ — переменный, ограниченный сильно непрерывный оператор. В банаховом пространстве E рассмотрим уравнение

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = (A + B(t))u(t). \tag{4}$$

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00378.

Теорема 1. *Пусть $A \in G_k$, $k \geq 0$, а $G(t,s)$ — сильно непрерывный при $t \geq s > 0$ оператор, удовлетворяющий операторному дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} - \frac{k^2-2k}{4t^2}G(t,s) - B(t)G(t,s) = \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial s^2} - \frac{k^2-2k}{4s^2}G(t,s) \tag{5}$$

и граничным условиям

$$\frac{dG(t,t)}{dt} = \frac{1}{2}B(t), \quad \lim_{s\to 0} G(t,s)s^{(k-3)/4} = 0. \tag{6}$$

Тогда функция

$$u(t) = Y_k(t)u_0 + t^{-k/2}\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0 ds \tag{7}$$

является решением задача Коши (4), (2).

□ Заметим, что из (1), (3) следует, что для первого слагаемого в представлении (7) справедливо равенство

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(Y_k(t)u_0\right) + \frac{k}{t}\frac{d}{dt}\left(Y_k(t)u_0\right) = AY_k(t)u_0. \tag{8}$$

Обозначим второе слагаемое в представлении (7) через $\Phi(t)$, т.е.

$$\Phi(t) = t^{-k/2}\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0\, ds. \tag{9}$$

Дважды дифференцируя (9) по t, будем иметь

$$\Phi'(t) = t^{-k/2}\int\limits_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) - \frac{k}{2}t^{-1}G(t,s)\right)s^{k/2}Y_k(s)u_0\, ds + G(t,t)Y_k(t)u_0, \tag{10}$$

$$\Phi''(t) = t^{-k/2}\int\limits_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s) - kt^{-1}\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) + \frac{2k+k^2}{4}t^{-2}G(t,s)\right) \times$$
$$\times\; s^{k/2}Y_k(s)u_0\, ds + \left(2\frac{d}{dt}G(t,t) - \frac{k}{2}t^{-1}G(t,t)\right)Y_k(t)u_0 + G(t,t)\frac{d}{dt}Y_k(t)u_0. \tag{11}$$

Пусть теперь

$$\Psi(t) = \Phi''(t) + \frac{k}{t}\Phi'(t). \tag{12}$$

Тогда, используя равенства (10), (11), получим

$$\Psi(t) = t^{-k/2}\int\limits_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s) - \frac{k^2-2k}{4t^2}G(t,s)\right)s^{k/2}Y_k(s)u_0\, ds +$$

$$+\left(2\frac{d}{dt}G(t,t)+\frac{k}{2t}G(t,t)\right)Y_k(t)u_0+G(t,t)\frac{d}{dt}Y_k(t)u_0. \tag{13}$$

Обозначим интеграл, стоящий в правой части (13) через $I(t)$ и упростим его, используя (5). В результате, находим

$$I(t)=\int\limits_0^t\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s)-\frac{k^2-2k}{4}t^{-2}G(t,s)\right)s^{k/2}Y_k(s)u_0\,ds=$$

$$=\int\limits_0^t\frac{\partial^2}{\partial s^2}G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0\,ds-\frac{k^2-2k}{4}\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2-2}Y_k(s)u_0\,ds+$$

$$+\int\limits_0^t B(t)G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0\,ds. \tag{14}$$

Рассмотрим первый интеграл, стоящий в правой части (14), проинтегрировав дважды по частям,

$$\int\limits_0^t\frac{\partial^2}{\partial s^2}G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0\,ds=-t^{k/2}\left(\frac{k+2t}{2t}G(t,t)\left(Y_k(t)+\frac{d}{dt}Y_k(t)\right)u_0\right)+$$

$$+\frac{k^2-2k}{4}\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2-2}Y_k(s)u_0\,ds+\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2}\left(\frac{d^2}{ds^2}Y_k(s)+\frac{k}{s}\frac{d}{ds}Y_k(s)\right)u_0\,ds. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14) и упростив, получим

$$I(t)=-t^{k/2}\left(\frac{k+2t}{2t}G(t,t)\left(Y_k(t)+\frac{d}{dt}Y_k(t)\right)u_0\right)+\int\limits_0^t B(t)G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0\,ds+$$

$$+\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2}\left(\frac{d^2}{ds^2}Y_k(s)+\frac{k}{s}\frac{d}{ds}Y_k(s)\right)u_0\,ds. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (13) и упростив, будем иметь

$$\Psi(t)=(A+B(t))t^{-k/2}\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0\,ds+B(t)Y_k(t)u_0=$$

$$=(A+B(t))\varphi(t)+B(t)Y_k(t)u_0. \tag{17}$$

Возвращаясь к (7), используя (8), (9), (12) и (17), находим

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)=AY_k(t)u_0+(A+B(t))\Phi(t)+B(t)Y_k(t)u_0$$

или

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = (A + B(t))u(t).$$

Таким образом, определяемая равенством (7) функция $u(t)$ является решением задачи Коши (4), (2) для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. ■

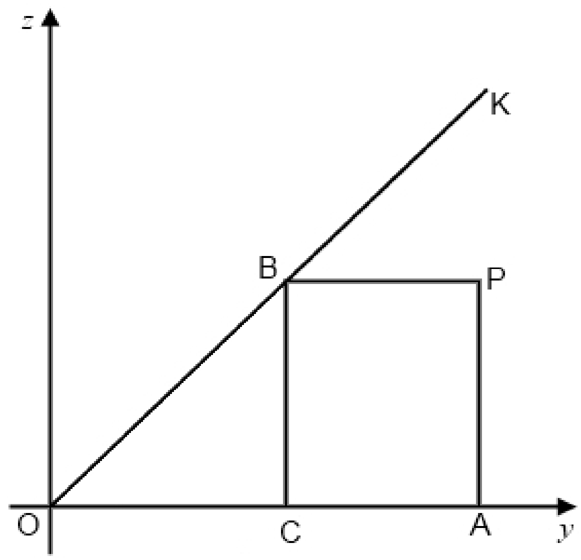

Рис. 1. Области интегрирования.

Теорема 2. *Дифференциальное уравнение* (5) *с условиями* (6) *эквивалентно интегральному уравнению*

$$H(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\xi} v(y,\eta)B(\sqrt{y})y^p\, dy + \int\int_{OBPA} v(z,y)B(\sqrt{y}+\sqrt{z})H(y,z)\, dydz, \qquad (18)$$

где

$$y = \frac{1}{4}(t+s)^2, \quad z = \frac{1}{4}(t-s)^2, \ \ G(t,s) = (y-z)^{-p+\frac{1}{2}}H(y,z), \ \ p = \frac{k-1}{4}\ ,$$

а функция $v(z,s)$ *непрерывна внутри областей* OBC *и* $CAPB$ (см. рис. 1)*и задаётся формулами*

$$v(y,z) = (\eta-y)^{-\alpha}(z-\xi)^{-\alpha}(z-y)^{2\alpha}{}_2F_1\left(\alpha,\alpha,1,\frac{(y-\xi)(z-\eta)}{(y-\eta)(z-\xi)}\right)$$

в области $CAPB$*. Здесь* ${}_2F_1$ *— гипергеометрическая функция, и*

$$v(y,z) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{(\Gamma(1-\alpha))^2}{\Gamma(2-2\alpha)}(\eta-\xi)^{1-2\alpha}(y-s)(z-\xi)^{\alpha-1}(\eta-y)^{\alpha-1} \ \ \times$$

$$\times\ \ {}_2F_1\left(1-\alpha,1-\alpha,2-2\alpha,\frac{(y-s)(\eta-\xi)}{(y-\eta)(z-\xi)}\right),$$

в области OBC.

На рис. 1, граничные условия заданы на оси Oy и прямой OK, прямые PA, PB и BC – это $y = \xi$, $z = \eta$ и $y = \eta$, соответственно.

□ Доказательство теоремы аналогично рассуждениям § 2 работы [3]. ■

Теорема 3. *Интегральное уравнение* (18) *имеет решение внутри области* $0 < \eta < \xi$.

□ Доказательство теоремы проводится методом последовательных приближений и повторяет рассуждения § 3 работы [3]. ■

Обозначим далее

$$J(t,s)u_0 = \begin{cases} (1-k)^{-1}\left(t^{1-k}s^kY_{2-k}(t)Y_k(s) - sY_k(t)Y_{2-k}(s)\right)u_0, \text{ для } k>0,\ k\neq 1; \\ s\left(Z_1(t)Y_1(s) - Y_1(t)Z_1(s)\right)u_0, \text{ для } k=1, \end{cases} \tag{19}$$

где $Z_1(t)u_0$ – оператор-функция, определяемая равенством

$$Z_1(t)u_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 (1-s^2)^{-1/2}\ln\left(t(1-s^2)\right)Y_0(t)u_0.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть для* $s < t$ *справедлива оценка*

$$\|J(t,s)\| \le M(t-s)e^{\omega(t-s)}. \tag{20}$$

Тогда определяемая равенством (7) *функция* $u(t)$ *является единственным решением задачи Коши* (4), (2) *для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.*

□ Учитывая теоремы 1 – 3, нам осталось доказать лишь единственность решения задачи Коши (4), (2) с нулевыми начальными условиями (2).

Предположим противное, а именно, что существует $w(t): R \to D(A)$, удовлетворяющая задаче Коши (4), (2) с нулевыми начальными условиями (2). Тогда $w(t)$ удовлетворяет (см. [4]) интегральному уравнению

$$w(t) = \int\limits_0^t J(t,\tau)B(\tau)w(\tau)\,d\tau, \tag{21}$$

где $J(t,\tau)$ определена в (19).

Обозначив $K = \sup\left(\|B(\tau)\|\right)$ и $m_t = \sup\limits_{\tau\in[0;t]}\left(\|w(\tau)\|\right)$, мы получим

$$m_t \le \int\limits_0^t M(t-\tau)e^{\omega(t-\tau)}Km_t d\tau \le MKm_te^{\omega t}\,\frac{t}{\omega} < m_t\,,$$

если t выбрано достаточно малым. Это значит, $w = 0$ на $[0;t_0]$. Аналогично, $w = 0$ на $[t_0;2t_0]$ и, следовательно, $w = 0$ на $[0;+\infty)$. Последнее и означает единственность. ■

Отметим, что частный случай теоремы 4, когда $B(t) = q(t)I$ и $q(t)$ – скалярная функция, рассмотрен ранее в работе [15].

Литература

1. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // ДАН. – 1997. – 352;5. – С.587-589.
2. Глушак А.В. О возмущении абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Матем. заметки. – 1996. – 60;3. – С.363-369.
3. Волк В.Я. Научные сообщения и задачи о формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при x=0 // Успехи математических наук. – 1953. – VIII №4 (56) №6. – С.141-151.
4. Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Известия ВУЗов. Математика. – 1986. – №6. – С.55–56.
5. Глушак А.В. Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Математические заметки. – 1999. – 66;3. – С.364–371.

ABOUT PERTURBATION OF CAUCHY PROBLEM FOR THE EULER-POISSON-DARBOUX EQUATION BY VARIABLE BOUNDED OPERATOR

A.N. Babaev, A.V. Glushak

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, email: Babaev@bsu.edu.ru, Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. Cauchy's problem for the Euler-Poisson-Darboux equation is under consideration in the case when constant unbounded operator is perturbed by variable bounded operator.

Key words: The Euler-Poisson-Darboux equation, perturbation, variable bounded operator.

MSC 35G15

К НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

М.Х. Бештоков

Кабардино-Балкарский государственный университет,
ул. Чернышевского, 173, Нальчик, 360004, Россия, e-mail: beshtokov_murat@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматриваются нелокальные краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами в одномерном и в многомерном случаях. С помощью метода функции Римана доказаны существование и единственность решения нелокальной краевой задачи в одномерном случае. Для решения нелокальных задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных оценок следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи.

Ключевые слова: краевые задачи, метод функции Римана, нелокальное условие, априорная оценка, разностная схема, устойчивость и сходимость разностных схем, уравнение в частных производных третьего порядка, псевдопараболическое уравнение.

Введение. Математическое моделирование многих процессов приводит к изучению нестандартных начально-краевых, прямых и обратных задач для уравнений в частных производных, не имеющих аналогов в классической математической физике. Хорошо известно, что вопросы фильтрации жидкости в пористых средах [1], [2], передачи тепла в гетерогенной среде [3], [4], влагопереноса в почво-грунтах [5], (см. [6, с. 137]) приводят к модифицированным уравнениям диффузии, которые являются псевдопараболическими уравнениями в частных производных третьего порядка. Краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка изучались в работах [7-16].

В настоящей работе рассматриваются нелокальные краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами в одномерном и в многомерном случаях. С помощью метода функции Римана доказаны существование и единственность решения нелокальной краевой задачи в одномерном случае(см. [7], [8], [13 -16]). Для решения нелокальных задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных оценок следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи.

1. Постановка задачи. Существование и единственность решения. В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу

$$u_t = (k(x,t)u_x)_x + (\eta(x,t)u_{xt})_x + r(x,t)u_x - q(x,t)u + f(x,t)\,, \quad 0 < x < l,\ 0 < t \le T, \quad (1.1)$$

$$\Pi(0,t) = \beta_1(t)\int_0^l u(x,t)dx + \int_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)d\tau - \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

$$-\Pi(l,t) = \beta_2(t)u(l,t) - \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{1.4}$$

где

$$r(0,t) = r_0 \le 0,\ r(l,t) = r_N \ge 0,\ 0 < c_0 \le \eta(x,t)\,, \quad k(x,t) \le c_1,$$

$$|\eta_t(x,t)|,\ |r(x,t)|,\ |q(x,t)|,\ |k_x|,\ |r_x|,\ |\beta_1(t)|,\ |\beta_2(t)|,\ |\rho(t,\tau)| \le c_2, \tag{1.5}$$

$$u \in C^{4,3}(Q_T),\ \eta \in C^{3,2}(Q_T),\ k \in C^{3,2}(Q_T), \quad r,q,f \in C^{2,2}(Q_T), \quad \beta_1(t),\ \beta_2(t) \in C[0,T],$$

$Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$, $\quad \Pi(x,t) = ku_x + \eta u_{xt}$, $\quad 0 \le \tau \le t$, $\quad u_0(x) \in C^2[0,l]$, $\rho(t,\tau)$ – функция, непрерывная на $[0,T]$, c_0, c_1, c_2 – положительные числа.

Заметим, что нелокальное условие (1.2) можно заменить условием

$$\Pi(0,t) = \beta_1(t)\int_0^\alpha u(x,t)dx + \int_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)d\tau - \mu_1(t),$$

где α – глубина корнеобитаемого слоя (см. [17]) или активный слой почвы, который участвует в водоснабжении корневой системы, в процессах испарения и транспирации. Поставленные и исследованные в работе задачи характерны также тем, что содержат в краевых условиях нелокальность по времени, впервые изученную А.И. Кожановым [12].

По ходу изложения будем использовать положительные постоянные числа M_i, $i = 1, 2, ...$, зависящие только от входных данных задачи (1.1)-(1.4). Имеет место следующая

Теорема. *Пусть коэффициенты уравнения (1.1) и граничных условий (1.2)-(1.4) удовлетворяют условиям гладкости (1.5). Тогда задача (1.1)-(1.4) имеет единственное регулярное в* $\overline{Q}_T$ *решение.*

□ Следуя [14,18], введем аналог функции Римана $\nu = \nu(x,t;\ \xi,\tau)$ для уравнения (1.1) в области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \xi, 0 < t < \tau\}$ в следующей форме

$$M\nu(x,t;\xi,\tau) = -(\eta(x,t)\nu_x)_{xt} + (k(x,t)\nu_x)_x - (r(x,t)\nu)_x + \nu_t - q(x,t)\nu = 0,$$

$$\nu(\xi,t;\xi,\tau) = 0, \tag{1.6}$$

$$\nu_x(\xi,t;\xi,\tau) = \frac{1}{\eta(\xi,\tau)}\exp\left\{\int_\tau^t \frac{k(\xi,t_1)}{\eta(\xi,t_1)}dt_1\right\},$$

$$\nu(x,\tau;\xi,\tau) = \omega_1(x,\tau),$$

где $\omega_1(x,\tau)$ – решение следующей задачи Коши

$$(\eta(x,\tau)\nu_x(x,\tau;\xi,\tau))_x - \nu(x,\tau;\xi,\tau) = 0,$$
$$\nu(\xi,\tau;\xi,\tau) = 0\,,$$
$$\nu_x(\xi,\tau;\xi,\tau) = \frac{1}{\eta(\xi,\tau)}\ .$$

Имеет место соотношение

$$\nu Lu - uM\nu = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\ , \tag{1.7}$$

где

$$Lu = (\eta u_{xt})_x + (ku_x)_x + ru_x - u_t - qu + f(x,t)\,,$$
$$Q = \eta\nu u_{xt} + u(\eta\nu_x)_t + k\nu u_x - k\nu_x u + ru\nu,$$
$$P = \eta\nu_x u_x + u\nu.$$

Пусть производные P_x, Q_t непрерывны в $\overline{Q}_T$, что влечет их ограниченность в этой области, а также непрерывность и ограниченность самих функций P, Q. В этих условиях проинтегрируем соотношение (1.7) по области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \xi, 0 < t < \tau\}$, где ξ, τ – произвольная точка области Q_T

$$\int_\Omega \big(\nu Lu - uM\nu\big)dxdt = \int_0^\xi \int_0^\tau \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\Big)dxdt. \tag{1.8}$$

Тогда из (1.8) получим представление

$$\begin{gathered} u(\xi,\tau) = u(0,\tau)\eta(0,\tau)\nu_x(0,\tau;\xi,\tau) - \int_0^\tau \Big(\eta(0,t)\nu(0,t;\xi,\tau)u_{xt}(0,t) + k(0,t)\nu(0,t;\xi,\tau)u_x(0,t) + \\ + u(0,t)\Big[\big(\eta(0,t)\nu_x(0,t;\xi,\tau)\big)_t - k(0,t)\nu_x(0,t;\xi,\tau) + r(0,t)\nu(0,t;\xi,\tau)\Big]\Big)dt + \\ + \int_0^\xi \Big(\eta(x,0)\nu_x(x,0;\xi,\tau)u_x(x,0) + \nu(x,0;\xi,\tau)u(x,0)\Big)dx + \int_0^\tau \int_0^\xi \nu(x,t;\xi,\tau)f(x,t)dxdt, \end{gathered} \tag{1.9}$$

где (ξ,τ) – произвольная фиксированная точка области Q_T. Существование и единственность аналога функции Римана доказаны в работе [14].

Проинтегрируем, далее, (1.9) по ξ от 0 до l. Тогда с учетом (1.2), (1.4) получим

$$\Pi(0,\tau) - u(0,\tau)\beta_1(\tau)\eta(0,\tau)\int_0^l \nu_x(0,\tau;\xi,\tau)d\xi + \int_0^\tau \Big(K_1(\tau,t)\Pi(0,t) + K_2(\tau,t)u(0,t)\Big)dt = \gamma_1(\tau), \tag{1.10}$$

где

$$K_1(\tau,t) = \beta_1(\tau)\int_0^l \nu(0,t;\xi,\tau)d\xi,$$

$$K_2(t,\tau) = \beta_1(\tau)\int_0^l \Big(\big(\eta(0,t)\nu_x(0,t;\xi,\tau)\big)_t - k(0,t)\nu_x(0,t;\xi,\tau) + r(0,t)\nu(0,t;\xi,\tau)\Big)d\xi - \rho(\tau,\tau),$$

$$\gamma_1(\tau) = \beta_1(\tau) \int_0^l \int_0^\xi \Big(\eta(x,0)\nu_x(x,0;\xi,\tau)u_0'(x) + \nu(x,0;\xi,\tau)u_0(x)\Big)dxd\xi +$$

$$+\beta_1(\tau) \int_0^l \int_0^\tau \int_0^\xi \nu(x,t;\xi,\tau)f(x,t)dxdtd\xi - \mu_1(\tau).$$

Из представления (1.9) при $\xi = l$ следует интегральное уравнение:

$$u(l,\tau) - u(0,\tau)\eta(0,\tau)\nu_x(0,\tau;l,\tau) + \int_0^\tau \Big(K_3(\tau,t)\Pi(0,t) + K_4(\tau,t)u(0,t)\Big)dt = \gamma_2(\tau), \quad (1.11)$$

где

$$K_3(\tau,t) = \nu(0,t;l,\tau)dp,$$

$$K_4(t,\tau) = \big(\eta(0,t)\nu_x(0,t;l,\tau)\big)_t - k(0,t)\nu_x(0,t;l,\tau) + r(0,t)\nu(0,t;l,\tau),$$

$$\gamma_2(\tau) = \int_0^l \Big(\eta(x,0)\nu_x(x,0;l,\tau)u_x(x,0) + \nu(x,0;l,\tau)u(x,0)\Big)dx + \int_0^\tau \int_0^l \nu(x,t;l,\tau)f(x,t)dxdt.$$

Точно также как и в [14], введем аналог функции Римана $w = w(x,t;\alpha,\tau)$ для уравнения (1.1) в области $\Omega = \{(x,t) : \alpha < x < l, 0 < t < \tau\}$ в следующей форме

$$Mw(x,t;\alpha,\tau) = -(\eta(x,t)w_x)_{xt} + (k(x,t)w_x)_x - (r(x,t)w)_x + w_t - q(x,t)w = 0,$$

$$w(\alpha,t;\alpha,\tau) = 0, \quad (1.12)$$

$$w_x(\alpha,t;\alpha,\tau) = \frac{1}{\eta(\alpha,\tau)} \exp\left\{ \int\limits_\tau^t \frac{k(\alpha,t_1)}{\eta(\alpha,t_1)} dt_1 \right\},$$

$$w(x,\tau;\alpha,\tau) = \omega_2(x,\tau),$$

где $\omega_2(x,\tau)$ – решение следующей задачи Коши

$$(\eta(x,\tau)w_x(x,\tau;\alpha,\tau))_x - w(x,\tau;\alpha,\tau) = 0,$$

$$w(\alpha,\tau;\alpha,\tau) = 0,$$

$$w_x(\alpha,\tau;\alpha,\tau)) = \frac{1}{\eta(\alpha,\tau)} \ .$$

Имеет место представление

$$u(\alpha,\tau) = u(l,\tau)\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;\alpha,\tau) - \int_0^\tau \Big(\big(\eta(l,t)u_{xt}(l,t) + k(l,t)u_x(l,t)\big)w(l,t;\alpha,\tau) +$$

$$+ u(l,t)\Big[\big(\eta(l,t)w_x(l,t;\alpha,\tau)\big)_t - k(l,t)w_x(l,t;\alpha,\tau) + r(l,t)w(l,t;\alpha,\tau)\Big]\Big)dt - \quad (1.13)$$

$$- \int_\alpha^l \Big(w(x,0;\alpha,\tau)u(x,0) + \eta(x,0)w_x(x,0;\alpha,\tau)u_x(x,0)\Big)dx - \int_0^\tau \int_\alpha^l w(x,t;\alpha,\tau)f(x,t)dxdt,$$

где (α, τ) – произвольная фиксированная точка области Q_T.

Из представления (1.13) при $\alpha = 0$, с учетом условий (1.3), (1.4), получим интегральное уравнение:

$$u(0,\tau) - u(l,\tau)\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau) + \int_0^\tau \Big(K_7(\tau,t)u(l,t)\Big)dt = \gamma_3(\tau), \tag{1.14}$$

где

$$K_7(t,\tau) = \big(\eta(l,t)w_x(l,t;0,\tau)\big)_t - k(l,t)w_x(l,t;0,\tau) + r(l,t)w(l,t;0,\tau) - \beta_2(\tau)w(l,t;0,\tau),$$

$$\gamma_3(\tau) = -\int_0^l \Big(w(x,0;0,\tau)u_0(x) + \eta(x,0)w_x(x,0;0,\tau)u_0'(x)\Big)dx -$$

$$-\int_0^\tau \int_0^l w(x,t;0,\tau)f(x,t)dxdt - \int_0^\tau K_7(t,\tau)\mu_2(t)dt.$$

Систему интегральных уравнений (1.10), (1.11), (1.14) перепишем в операторном виде

$$A(\tau)\vec{u}(\tau) + \int_0^\tau B(\tau,t)\vec{u}(t)dt = \vec{\gamma}(\tau), \tag{1.15}$$

где

$$\det|A(\tau)| = \eta(0,\tau)\nu_x(0,\tau;l,\tau)\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau) - 1.$$

Отличие определителя $\det|A(\tau)|$ от нуля при $0 \le \tau \le T$ следует из доказываемой ниже леммы. Поэтому система уравнений (1.10), (1.11), (1.14) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая безусловно разрешима. Таким образом, находя из интегральных уравнений Вольтерра $u(0,\tau) = f(\tau)$, $u(l,\tau) = \varphi(\tau)$, где $f(\tau),\ \varphi(\tau) \in C^1[0,T]$ задачу (1.1)-(1.4) редуцируем к первой начально-краевой задаче, однозначная разрешимость которой установлена также в работе [14]. Отсюда следуют существование и единственность решения задачи (1.1)-(1.4). ■

Имеет место следующая

Лемма. *Функция $\nu(x,t;\xi,\tau)$ и $w(x,t;\alpha,\tau)$ удовлетворяют неравенствам:*

$$\nu(x,\tau;l,\tau) < 0, \quad \text{для любого} \ \ x \in [0,l), \quad \eta(0,\tau)\nu_x(0,\tau;l,\tau) > 1\,,$$

$$w(x,\tau;0,\tau) > 0, \quad \text{для любого} \ \ x \in (0,l], \quad \eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau) > 1\,,$$

если только $\eta(x,t) \ge c_0 > 0$ для любого $(x,t) \in Q_T$.

□ Следуя рассуждениям [14], рассмотрим задачу

$$(\eta(x,\tau)\nu_x(x,\tau;\xi,\tau))_x - \nu(x,\tau;\xi,\tau) = 0,$$

$$\nu(\xi,\tau;\xi,\tau) = 0, \tag{1.16}$$

$$\nu_x(\xi,\tau;\xi,\tau) = \frac{1}{\eta(\xi,\tau)}\ .$$

С помощью принципа максимума и принципа Заремба-Жиро из (1.16) получаем $\nu(x,\tau;l,\tau) < 0$ для любого $(x,t) \in [0,l)$. Тогда из равенства

$$\eta(0,\tau)\nu_x(0,\tau;l,\tau) = \eta(l,\tau)\nu_x(l,\tau;l,\tau) - \int_0^l \nu(x,\tau;l,\tau)dx$$

имеем, что $\eta(0,\tau)\nu_x(0,\tau;l,\tau) > 1$. Аналогично получаем, что $\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau) > 1$. ■

2. Априорная оценка в дифференциальной трактовке. В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$, получим априорную оценку для решения задачи (1.1) – (1.4). Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (1.1) скалярно на u:

$$\big(u_t,u\big) = \big((ku_x)_x,u\big) + \big((\eta u_{xt})_x,u\big) + \big(r(x,t)u_x,u\big) - \big(q(x,t)u,u\big) + \big(f(x,t),u\big), \qquad (2.1)$$

где $\big(u,v\big) = \displaystyle\int_0^l uv dx, \quad \|u\|_0^2 = (u,u)$.

Пользуясь неравенством Коши с ε, из (2.1) получим

$$\frac{d}{dt}\|u\|_0^2 + \frac{d}{dt}\int_0^l \eta u_x^2 dx + 2\int_0^l k(x,t)u_x^2 dx \le$$

$$\le 2\Big(\Pi(l,t)u(l,t) - \Pi(0,t)u(0,t)\Big) + 3c_2\|u_x\|_0^2 + (3c_2+1)\|u\|_0^2 + \|f\|_0^2. \qquad (2.2)$$

Имеет место оценка (см.[19, стр.124]):

$$u^2(l,t) \le \varepsilon\|u_x\|_0^2 + c_\varepsilon\|u\|_0^2, \qquad (2.3)$$

где $\varepsilon > 0, \quad c_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon} + \dfrac{1}{l}$.

Первое и второе слагаемые в правой части неравенства (2.2), пользуясь неравенством Коши с ε и граничными условиями (1.3) и (1.4), оценим так:

$$\Pi(l,t)u(l,t) - \Pi(0,t)u(0,t) = -u(l,t)\Big(\beta_2(t)u(l,t) - \mu_2(t)\Big) -$$

$$- u(0,t)\Big(\beta_1(t)\int_0^l u(x,t)dx + \int_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)d\tau - \mu_1(t)\Big) \le M_1\Big[u^2(l,t) + u^2(0,t) +$$

$$+ \Big(\beta_1(t)\int_0^l u(x,t)dx\Big)^2\Big] + \frac{1}{2}\Big(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\Big) + M_2\int_0^t u^2(0,\tau)d\tau. \qquad (2.4)$$

Из (2.4), пользуясь (2.3) и неравенством Буняковского, получим

$$\Pi(l,t)u(l,t) - \Pi(0,t)u(0,t) \le$$

$$\le M_3\Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big) + M_4\int_0^t\Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big)d\tau + \frac{1}{2}\Big(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\Big). \qquad (2.5)$$

Учитывая (2.5), из (2.2) находим

$$\frac{d}{dt}\|u\|_0^2 + \frac{d}{dt}\int_0^l \eta u_x^2 dx + c_0\|u_x\|_{2,Q_t}^2 \le M_5\Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big) +$$

$$+2M_4\int_0^t \Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big)d\tau + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) + \|f\|_0^2. \qquad (2.6)$$

Проинтегрируем (2.6) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u_x\|_{2,Q_t}^2 \le M_6\int_0^t \Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big)d\tau + M_7\int_0^t\int_0^\tau \Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big)d\tau_1 d\tau +$$

$$+M_8\bigg(\int_0^t \Big(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(\tau) + \mu_2^2(\tau)\Big)d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2\bigg), \qquad (2.7)$$

где

$$\|u_x\|_{2,Q_t}^2 = \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau.$$

Второе слагаемое в правой части (2.7) оценим следующим образом:

$$\int_0^t\int_0^\tau \Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big)d\tau_1 d\tau \le T\int_0^t \Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big)d\tau. \qquad (2.8)$$

В силу (2.8) из (2.7) находим

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \le M_9\int_0^t \Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big)d\tau +$$

$$+\ M_8\bigg(\int_0^t \Big(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(\tau) + \mu_2^2(\tau)\Big)d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2\bigg). \qquad (2.9)$$

Применяя к неравенству (2.9) лемму Гронуолла (см.[19, стр.152]), из (2.7) с учетом (2.8) получим

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \|u_x\|_{2,Q_t}^2 \le M(t)\bigg(\int_0^t \Big(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(\tau) + \mu_2^2(\tau)\Big)d\tau + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2\bigg), \qquad (2.10)$$

где $M(t)$ зависит только от входных данных задачи (1.1)–(1.4).

Из априорной оценки (2.10) следует единственность решения исходной задачи (1.1)–(1.4), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме пространства $W_2^1(0,l)$.

3. Устойчивость и сходимость разностной схемы. Для решения задачи (1.1)–(1.4) применим метод конечных разностей. Для этого в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$ введем равномерную сетку [20]:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j),\ x \in \overline{\omega}_h,\ t \in \overline{\omega}_\tau\},$$

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, ..., N,\ Nh = l\},$$
$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, ..., m,\ m\tau = T\}.$$

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1)–(1.4) поставим в соответствие разностную схему:

$$y_{t,i} = \widetilde{\Lambda}(\overline{t})y_i^{(\sigma)} + \delta y + \varphi_i, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \tag{3.1}$$

$$a_1\chi_0 y_{x,0}^{(\sigma)} + \gamma_1 y_{xt,0} = \beta_1 \sum_{\overline{s}=0}^{N} y_{\overline{s}}^{(\sigma)}\hbar + \sum_{s=0}^{j} \overline{\tau}\rho_{s,j} y_{s,0}^{(\sigma)} - \mu_1 + \frac{h}{2}\Big(y_{t,0} + d_0 y_0^{(\sigma)} - \varphi_0\Big),\ t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{3.2}$$

$$-\Big(a_N\chi_N y_{\overline{x},N}^{(\sigma)} + \gamma_N y_{\overline{x}t,N}\Big) = \beta_2 y_N^{(\sigma)} - \mu_2 + \frac{h}{2}\Big(y_{t,N} + d_N y_N^{(\sigma)} - \varphi_N\Big),\ t \in \overline{\omega}_\tau \tag{3.3}$$

$$y(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\omega}_h, \tag{3.4}$$

где

$$\widetilde{\Lambda}(\overline{t})y_i^{(\sigma)} = \chi_i\big(a y_{\overline{x}}^{(\sigma)}\big)_{x,i} + b_i^+ a_{i+1} y_{x,i}^{(\sigma)} + b_i^- a_i y_{\overline{x},i}^{(\sigma)} - d_i y_i^{(\sigma)},$$

$$\delta y = \big(\gamma y_{\overline{x}t}\big)_{x,i},\ y^{(\sigma)} = \sigma\hat{y} + (1-\sigma)y,\ y = y_i^j = y(x_i, t_j),\ r = r^+ + r^-,\ b^\pm = \frac{r^\pm}{k} + O(h^2),$$

$$|r| = r^+ - r^-,\ r^+ = (r + |r|)/2 \ge 0,\ r^- = (r - |r|)/2 \le 0,$$

$$a_i = k(x_{i-1/2}, \overline{t}),\quad \gamma_i = \eta(x_{i-1/2}, \overline{t}),\quad d_i = q(x_i, \overline{t}),\quad \varphi_i = f(x_i, \overline{t}),$$

$$\overline{t} = t_{j+1/2} = t_j + \tau/2,\quad x_{i-1/2} = x_i - h/2\,,\quad h,\ \tau - \text{шаги сетки.}$$

$$\chi = (1+R)^{-1}\ ,\quad R = \frac{h|r|}{2k} - \text{разностное число Рейнольдса,}$$

$$\chi_0 = \frac{1}{1 + \dfrac{h|r_0|}{2k_{1/2}}}\ ,\quad \text{если}\ \ r_0 \le 0,\qquad \chi_N = \frac{1}{1 + \dfrac{h|r_N|}{2k_{N-1/2}}},\quad \text{если}\ \ r_N \ge 0,$$

$$\overline{\tau} = \begin{cases} \dfrac{\tau}{2}\ , \text{если}\ s = 0,\ s = j, \\ \tau\ ,\ \text{если}\ s = \overline{1, j-1}. \end{cases} \qquad \hbar = \begin{cases} \dfrac{h}{2}\ ,\ \text{если}\ \overline{s} = 0,\ \overline{s} = N, \\ h\ ,\ \text{если}\ \overline{s} = \overline{1, N-1}. \end{cases}$$

Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Тогда задачу (3.1)-(3.4) перепишем в другой форме

$$y_{t,i} = \chi_i\big(a y_{\overline{x}}^{(\sigma)}\big)_{x,i} + \big(\gamma y_{\overline{x}t}\big)_{x,i} + b_i^+ a_{i+1} y_{x,i}^{(\sigma)} + b_i^- a_i y_{\overline{x},i}^{(\sigma)} - d_i y_i^{(\sigma)} + \varphi_i\,, \tag{3.5}$$

$$y_{t,0} = \frac{a_1\chi_0 y_{x,0}^{(\sigma)} - h d_0 y_0^{(\sigma)}/2 - \beta_1 \sum\limits_{\overline{s}=0}^{N} y_{\overline{s}}^{(\sigma)}\hbar - \sum\limits_{s=0}^{j} \overline{\tau}\rho_{s,j} y_{s,0}^{(\sigma)} + \mu_1}{h/2} + \frac{\gamma_1 y_{xt,0}}{h/2}\ , \tag{3.6}$$

$$y_{t,N} = \frac{-a_N \chi_N y^{(\sigma)}_{\overline{x},N} - hd_N y^{(\sigma)}_N/2 - \beta_2 y^{(\sigma)}_N + \mu_2}{h/2} - \frac{\gamma_N y_{\overline{x}t,N}}{h/2}\,, \tag{3.7}$$

$$y(x,0) = u_0(x). \tag{3.8}$$

Полагая $\sigma = 1/2$ и обозначая $\hat{y} + y = Y$, перепишем задачу (3.5)-(3.8)

$$y_t = \widetilde{\Lambda}^*(\overline{t})Y/2 + \overline{\delta} y + \Phi\,, \tag{3.9}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{3.10}$$

где

$$\widetilde{\Lambda}^*(\overline{t})Y = \begin{cases} \widetilde{\Lambda}Y = \chi_i\big(aY_{\overline{x}}\big)_{x,i} + b_i^+ a_{i+1} Y_{x,i} + b_i^- a_i Y_{\overline{x},i} - d_i Y_i\,, & \text{при} \;\; x \in \omega_h, \\ \Lambda^- Y = \dfrac{a_1 \chi_0 Y_{x,0} - hd_0 Y_0/2 - \beta_1 \sum\limits_{\overline{s}=0}^{N} y^{(\sigma)}_{\overline{s}} \overline{h} - \sum\limits_{s=0}^{j} \overline{\tau} \rho_{s,j} Y_{s,0}}{h/2}\,, & \text{при} \;\; x = 0, \\ \Lambda^+ Y = \dfrac{-a_N \chi_N Y_{\overline{x},N} - hd_N Y_N/2 - \beta_2 Y_N}{h/2}\,, & \text{при} \;\; x = l, \end{cases}$$

$$\overline{\delta} y = \begin{cases} \delta y = \big(\gamma y_{\overline{x}t}\big)_{x,i}\,, & \text{при } x \in \omega_h\,, \\ \delta^- y = \dfrac{\gamma_1 y_{xt,0}}{h/2}, & \text{при } x = 0\,, \\ \delta^+ y = -\dfrac{\gamma_N y_{\overline{x}t,N}}{h/2}, & \text{при } x = l\,; \end{cases} \qquad \Phi = \begin{cases} \varphi = \varphi_i\,, & \text{при } x \in \omega_h\,, \\ \varphi^- = \dfrac{\mu_1}{h/2}\,, & \text{при } x = 0\,, \\ \varphi^+ = \dfrac{\mu_2}{h/2}, & \text{при } x = l\,; \end{cases}$$

$$\overline{\chi} = \begin{cases} \chi = \left(1 + \dfrac{h|r|}{2k}\right)^{-1}, & \text{при } x \in \omega_h, \\ \chi^- = \left(1 + \dfrac{h|r_0|}{2k_{1/2}}\right)^{-1}, & \text{при } x = 0, \quad r_0 \le 0, \\ \chi^+ = \left(1 + \dfrac{h|r_N|}{2k_{N-1/2}}\right)^{-1}, & \text{при } x = l, \quad r_N \ge 0. \end{cases}$$

Введем скалярное произведение

$$[u,v] = \sum_{i=0}^{N} u_i v_i \overline{h}, \quad \overline{h} = \begin{cases} \dfrac{h}{2}, & i = 0, \; i = N, \\ h, & i = \overline{1, N-1}, \end{cases}$$

и норму

$$|[u]|^2 = [u,u], \quad \|u]|^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \overline{h} = (u,u].$$

Умножим теперь разностное уравнение (3.9) скалярно на $Y = \hat{y} + y$:

$$\big[y_t, Y\big] = \frac{1}{2}\big[\widetilde{\Lambda}^*(\overline{t})Y, Y\big] + \big[\,\overline{\delta}y, Y\big] + \big[\,\Phi, Y\big]. \tag{3.11}$$

Преобразуем суммы, входящие в (3.11):

$$\big[y_t, Y\big] = \Big[\frac{1}{\tau}(\hat{y} - y), (\hat{y} + y)\Big] = \frac{\big[1, \hat{y}^2\big] - \big[1, y^2\big]}{\tau} = \big[1, y^2\big]_t, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\big[\widetilde{\Lambda}^*(\overline{t})Y, Y\big] &= \big(\widetilde{\Lambda}Y, Y\big) + \frac{1}{2}hY_0\Lambda^- Y_0 + \frac{1}{2}hY_N\Lambda^+ Y_N = \\ &= -(a\chi, Y_{\overline{x}}^2\,] - (aY, \chi_{\overline{x}} Y_{\overline{x}}) + (b^+ a^{+1} Y_x, Y) + (b^- a Y_{\overline{x}}, Y) - \\ &\quad - \big[d, Y^2\big] - \beta_1 Y_0 \sum_{\overline{s}=0}^{N} Y_{\overline{s}} \bar{h} - \beta_2 Y_N^2 - Y_0 \sum_{s=0}^{j} \overline{\tau} \rho_{s,j} Y_0^s\,,\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\big[\,\overline{\delta}y, Y\big] = (\delta y, Y) + \frac{1}{2}hY_0\delta^- y + \frac{1}{2}hY_N\delta^+ y = -\big(\gamma y_{\overline{x}t}, Y_{\overline{x}}\big], \tag{3.14}$$

$$\big[\,\Phi, Y\big] = (\varphi, Y) + \frac{1}{2}h\varphi^- Y_0 + \frac{1}{2}h\varphi^+ Y_N = (\varphi, Y) + \mu_1 Y_0 + \mu_2 Y_N\,. \tag{3.15}$$

Учитывая (3.12)-(3.15), из (3.11) находим

$$\begin{aligned}\big[1, y^2\big]_t = &-\frac{1}{2}(a\chi, Y_{\overline{x}}^2\,] - \big(\gamma y_{\overline{x}t}, Y_{\overline{x}}\big] - \frac{1}{2}(a\chi_{\overline{x}} Y, Y_{\overline{x}}) + \frac{1}{2}(b^+ a^{+1} Y_x, Y) + \frac{1}{2}(b^- a Y_{\overline{x}}, Y) - \frac{1}{2}[d, Y^2] - \\ &-\frac{1}{2}\beta_1 Y_0 \sum_{\overline{s}=0}^{N} Y_{\overline{s}}\,\bar{h} - \frac{1}{2}\beta_2 Y_N^2 - \frac{1}{2}Y_0 \sum_{s=0}^{j} \overline{\tau}\rho_{s,j} Y_0^s + (\varphi, Y) + \mu_1 Y_0 + \mu_2 Y_N.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Оценим суммы, входящие в (3.16):

$$[1, y^2]_t = \big(|[y]|^2\big)_t, \tag{3.17}$$

$$(a\chi, Y_{\overline{x}}^2\,] \geq M_1(1, Y_{\overline{x}}^2] = M_1\|Y_{\overline{x}}]|^2, \tag{3.18}$$

$$(\gamma y_{\overline{x}t}, Y_{\overline{x}}] = (1, \gamma(y_{\overline{x}}^2)_t] = (1, (\gamma y_{\overline{x}}^2)_t] - (1, \gamma_t \hat{y}_{\overline{x}}^2], \tag{3.19}$$

$$-(a\chi_{\overline{x}} Y, Y_{\overline{x}}) + (b^+ a^{+1} Y, Y_x) + (b^- a Y, Y_{\overline{x}}) \leq M_2\|Y_{\overline{x}}]|\,|[Y]| \leq M_3\bigg(\|Y_{\overline{x}}]|^2 + |[Y]|^2\bigg), \tag{3.20}$$

$$-[d, Y^2] \leq c_1[1, Y^2] = c_1|[Y]|^2, \tag{3.21}$$

$$[\varphi, Y] \leq \frac{1}{2}\Big(|[Y]|^2 + |[\varphi]|^2\Big). \tag{3.22}$$

Справедлива следующая [21]

Лемма. *Для любой функции $y(x)$, заданной на сетке $\overline{\omega}_h$, справедливо неравенство*

$$\max_{x\in\overline{\omega}_h} y^2(x) \le \varepsilon \|y_{\overline{x}}]|^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l}\right)|[\,y]|^2,$$

где ε – произвольная положительная постоянная, l – длина интервала, на котором введена сетка $\overline{\omega}_h$.

С помощью этой леммы и неравенства Коши получаем оценку

$$-\beta_1 Y_0 \sum_{\overline{s}=0}^{N} Y_{\overline{s}}\bar{h} - \beta_2 Y_N^2 - Y_0 \sum_{s=0}^{j} \overline{\tau}\rho_{js} Y_0^s + \mu_1 Y_0 + \mu_2 Y_N \le$$

$$\le \frac{\mu_1^2}{2} + \frac{\mu_2^2}{2} + M_4\Big(\|Y_{\overline{x}}]|^2 + |[Y]|^2\Big) + M_5 \sum_{s=0}^{j} \Big(\|Y_{\overline{x}}]|^2 + |[Y]|^2\Big)\overline{\tau}. \tag{3.23}$$

Учитывая оценки (3.17)-(3.23), из (3.16) находим:

$$\big(|[y]|^2\big)_t + (1, (\gamma y_{\overline{x}}^2)_t] + M_1\|Y_{\overline{x}}]|^2 \le c_1||y_x^{j+1}]|^2 + M_6\Big(|[Y]|^2 + \|Y_{\overline{x}}]|^2\Big) +$$

$$+ M_5 \sum_{s=0}^{j} \Big(|[Y]|^2 + \|Y_{\overline{x}}]|^2\Big)\overline{\tau} + M_7\Big(|[\varphi]|^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big). \tag{3.24}$$

Умножим обе части (3.24) на τ и просуммируем по $j\,'$ от 0 до j :

$$|[y^{j+1}]|^2 + \|y_{\overline{x}}^{j+1}]|^2 + \sum_{j\,'=0}^{j} \|Y_{\overline{x}}^{j\,'}]|^2\tau \le M_8 \sum_{j\,'=0}^{j} \Big(|[Y^{j\,'}]|^2 + \|Y_{\overline{x}}^{j\,'}]|^2\Big)\tau +$$

$$+M_9\left(||y_x^{j+1}]|^2 + \sum_{j\,'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j} \Big(|[Y^{j\,'}]|^2 + \|Y_{\overline{x}}^{j\,'}]|^2\Big)\overline{\tau}\tau\right)+$$

$$+M_{10}\Big(\sum_{j\,'=0}^{j} \Big(|[\varphi]|^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big)\tau + |[y^0]|^2 + \|y_{\overline{x}}^0]|^2\Big). \tag{3.25}$$

Обозначая $F(t_j) = M_{10}\Big(\sum\limits_{j\,'=0}^{j} \Big(|[\varphi]|^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big)\tau + |[y^0]|^2 + \|y_{\overline{x}}^0]|^2\Big)$, из (3.25) получим

$$|[y^{j+1}]|^2 + \|y_{\overline{x}}^{j+1}]|^2\tau + \sum_{j\,'=0}^{j} \|Y_{\overline{x}}^{j\,'}]|^2\tau \le M_8 \sum_{j\,'=0}^{j} \Big(|[Y^{j\,'}]|^2 + \|Y_{\overline{x}}^{j\,'}]|^2\Big)\tau+$$

$$+M_9\left(||y_x^{j+1}]|^2 + \sum_{j\,'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j} \Big(|[Y^{j\,'}]|^2 + \|Y_{\overline{x}}^{j\,'}]|^2\Big)\overline{\tau}\tau\right) + F(t_j). \tag{3.26}$$

Второе выражение в правой части (3.26) преобразуем следующим образом

$$\sum_{j'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j}\Big(|[Y^{j'}]|^2+\|Y^{j'}_{\overline{x}}]|^2\Big)\overline{\tau}\tau\le T\sum_{j'=0}^{j}\Big(|[Y^{j'}]|^2+\|Y^{j'}_{\overline{x}}]|^2\Big)\tau. \tag{3.27}$$

В силу (3.27) из (3.26) находим

$$|[y^{j+1}]|^2+\|y^{j+1}_{\overline{x}}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\|Y^{j'}_{\overline{x}}]|^2\tau\le M_{11}\Big(||y^{j+1}_{x}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\Big(|[Y^{j'}]|^2+\|Y^{j'}_{\overline{x}}]|^2\Big)\tau\Big)+F(t_j). \tag{3.28}$$

Учитывая неравенство $|[y^{j'+1}+y^{j'}]|^2\le 2|[y^{j'+1}]|^2+2|[y^{j'}]|^2$, преобразуем сумму $||y^{j+1}_{x}]|^2+\sum\limits_{j'=0}^{j}\Big(|[Y^{j'}]|^2+\|Y^{j'}_{\overline{x}}]|^2\Big)\tau$. Тогда

$$||y^{j+1}_{x}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\Big(|[Y^{j'}]|^2+\|Y^{j'}_{\overline{x}}]|^2\Big)\tau=||y^{j+1}_{x}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\Big(|[y^{j'+1}+y^{j'}]|^2+\|y^{j'+1}_{\overline{x}}+y^{j'}_{\overline{x}}]|^2\Big)\tau\le$$

$$\le M_{12}\Big(|[y^{j+1}]|^2+\|y^{j+1}_{\overline{x}}]|^2\Big)\tau+M_{13}\sum_{j'=1}^{j}\Big(|[y^{j'}]|^2+\|y^{j'}_{\overline{x}}]|^2\Big)\tau+M_{14}\Big(|[y^{0}]|^2+\|y^{0}_{\overline{x}}]|^2\Big)\tau. \tag{3.29}$$

Подставляя (3.29) в (3.28), получим

$$|[y^{j+1}]|^2+\|y^{j+1}_{\overline{x}}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\|\big(y^{j'+1}+y^{j'}\big)_{\overline{x}}]|^2\tau\le$$

$$\le M_{15}\Big(|[y^{j+1}]|^2+\|y^{j+1}_{\overline{x}}]|^2\Big)\tau+M_{16}\sum_{j'=1}^{j}\Big(|[y^{j'}]|^2+\|y^{j'}_{\overline{x}}]|^2\Big)\tau+\widetilde{F}(t_j). \tag{3.30}$$

Выбирая τ таким образом, что для всех $\tau\le\tau_0,\tau_0=M_{15}^{-1}$ и обозначая через $\widetilde{F}(t_j)=M_{17}\Big(\sum\limits_{j'=0}^{j}\Big(|[\varphi^{j'}]|^2+\mu_1^{j'\,2}+\mu_2^{j'\,2}\Big)\tau+|[y^0]|^2+\|y^0_{\overline{x}}]|^2\Big)$, из (3.30) получим

$$|[y^{j+1}]|^2+\|y^{j+1}_{\overline{x}}]|^2\le M_{18}\sum_{j'=1}^{j}\Big(|[y^{j'}]|^2+||y^{j'}_{\overline{x}}]|^2\Big)\tau+M_{19}\widetilde{F}(t_j). \tag{3.31}$$

Оценивая первое слагаемое в правой части (3.31) с помощью Леммы 4 [22, стр. 171], из (3.28) с учетом (3.29), (3.30) получим априорную оценку

$$|[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)}+\sum_{j'=0}^{j}\|\big(y^{j'+1}+y^{j'}\big)_{\overline{x}}]|^2\tau\le M\Big(\sum_{j'=0}^{j}\Big(|[\varphi^{j'}]|^2+\mu_1^{j'\,2}+\mu_2^{j'\,2}\Big)\tau+|[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)}\Big), \tag{3.32}$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ. Из полученной априорной оценки следует следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (1.5), тогда при $\sigma = 1/2$ существует такое τ_0, что если $\tau \le \tau_0$, для решения разностной задачи (3.9)-(3.10) справедлива априорная оценка*

$$|[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)} + \sum_{j'=0}^{j} \|\left(y^{j'+1} + y^{j'}\right)_{\overline{x}}]|^2 \tau \le M\Big(\sum_{j'=0}^{j} \Big(|[\varphi^{j'}]|^2 + \mu_1^{j'\,2} + \mu_2^{j'\,2}\Big)\tau + |[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)}\Big)$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Таким образом, доказана устойчивость решения разностной задачи (3.9)-(3.10) по начальным данным и правой части в сеточной норме $|[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)}$ на слое.

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (3.1)-(3.4), y_i^j – решение разностной задачи (3.5) – (3.8), тогда обозначим через $z = y - u$ погрешность. Подставляя $y = z + u$ в (3.5)-(3.8) и считая $u(x,t)$ заданной функцией, получим задачу для z:

$$z_{t,i} = \chi_i\left(a z_{\overline{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i} + \left(\gamma z_{\overline{x}t}\right)_{x,i} + b_i^+ a_{i+1} z_{x,i}^{(\sigma)} + b_i^- a_i z_{\overline{x},i}^{(\sigma)} - d_i z_i^{(\sigma)} + \psi_i, \tag{3.33}$$

$$a_1\chi_0 z_{x,0}^{(\sigma)} + \gamma_1 z_{xt,0} = \beta_1 \sum_{\overline{s}=0}^{N} z_{\overline{s}}^{(\sigma)} \overline{h} + \sum_{s=0}^{j} \overline{\tau}\rho_{s,j} z_{s,0}^{(\sigma)} + \frac{h}{2}\Big(z_{t,0} + d_0 z_0^{(\sigma)}\Big) - \nu_1, \tag{3.34}$$

$$-\Big(a_N\chi_N z_{\overline{x},N}^{(\sigma)} + \gamma_N z_{\overline{x}t,N}\Big) = \beta_2 z_N^{(\sigma)} + \frac{h}{2}\Big(z_{t,N} + d_N z_N^{(\sigma)}\Big) - \nu_2, \tag{3.35}$$

$$z(x,0) = 0, \tag{3.36}$$

$\psi_i = O(h^2+\tau^2)$, $\nu_1 = O(h^2+\tau^2)$, $\nu_2 = O(h^2+\tau^2)$ – погрешности аппроксимации на решении исходной задачи при каждом фиксированном t, в силу построения оператора $\widetilde{\Lambda}$ при $\sigma = 1/2$.

Применяя априорную оценку (3.32) к задаче для погрешности, при $\sigma = 1/2$ получим оценку

$$|[z^{j+1}]|^2 + \|z_{\overline{x}}^{j+1}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j} \|\left(z^{j'+1} + z^{j'}\right)_{\overline{x}}]|^2\tau \le M \sum_{j'=0}^{j} \Big(|[\Psi^{j'}]|^2 + \nu_1^{j'\,2} + \nu_2^{j'\,2}\Big)\tau,$$

где – положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из полученной априорной оценки следует сходимость схемы (3.33)-(3.36) при $\sigma = 1/2$ со скоростью $O(h^2+\tau^2)$ на слое.

4. Априорная оценка решения задачи в многомерной области. В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \le t \le T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $\overline{G} = \{x = (x_1, ..., x_p) : \ 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \ \alpha = 1, 2, ..., p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$ рассматривается нелокальная краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{4.1}$$

$$\Pi_\alpha(x,t) = \beta_{-\alpha}(x,t)\int_0^{l_\alpha} u(x,t)dx_\alpha + \int_0^t \rho_{-\alpha}(t,\tau)u(x,\tau)d\tau - \mu_{-\alpha}(x,t), \quad \text{при } x_\alpha = 0, \quad (4.2)$$

$$-\Pi_\alpha(x,t) = \beta_{+\alpha}(x,t)u(x,t) - \mu_{+\alpha}(x,t), \quad \text{при } x_\alpha = l_\alpha, \quad (4.3)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad (4.4)$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u,$$

$$L_\alpha u = \big(k_\alpha(x,t)u_{x_\alpha}\big)_{x_\alpha} + \big(\eta_\alpha(x,t)u_{x_\alpha t}\big)_{x_\alpha} + r_\alpha(x,t)u_{x_\alpha} - q_\alpha(x,t)u,$$

$$Q_T = G \times [0 < t \le T], \quad 0 < c_0 \le \eta_\alpha(x,t), k_\alpha(x,t) \le c_1,$$

$$|r_\alpha|,\ |q_\alpha|,\ |\beta_{-\alpha}(x,t)|,\ |\beta_{+\alpha}(x,t)|,\ |\rho_{-\alpha}(t,\tau)| \le c_2, \quad (4.5)$$

$$\Pi_\alpha(x,t) = k_\alpha(x,t)u_{x_\alpha} + \eta_\alpha(x,t)u_{x_\alpha t} - \text{полный поток}, \quad 0 \le \tau \le t.$$

$$c_0, c_1, c_2 - \text{положительные постоянные}, \ \alpha = \overline{1,p}\,.$$

По ходу изложения будем использовать положительные постоянные числа M_i, $i = 1,2,...,$ зависящие только от входных данных задачи (1)-(4).

Относительно коэффициентов задачи (4.1)-(4.4) предположим, что они обладают таким количеством непрерывных производных, которое необходимо для обеспечения нужной гладкости решения $u(x,t)$ в цилиндре Q_T.

Допуская существование решения дифференциальной задачи (4.1)-(4.4) в цилиндре $\overline{Q}_T$, получим априорную оценку для ее решения. Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств.

В дальнейшем изложении будем пользоваться скалярным произведением и нормой

$$(u,v) = \int_G uv dx, \quad (u,u) = \|u\|_0^2, \quad \|u\|_0^2 = \int_G u^2 dx, \quad u_x^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} u_{x_\alpha}^2,$$

$$\|u\|^2_{L_2(0,l_\alpha)} = \int_0^{l_\alpha} u^2(x,t)dx_\alpha\,.$$

Умножим тогда уравнение (4.1) скалярно на $\mathbf{u}$:

$$\Big(u_t, u\Big) = \Big(\sum_{\alpha=1}^{p}\big(k_\alpha(x,t)u_{x_\alpha}\big)_{x_\alpha}, u\Big) + \Big(\sum_{\alpha=1}^{p}\big(\eta_\alpha(x,t)u_{x_\alpha t}\big)_{x_\alpha}, u\Big) +$$

$$+\Big(\sum_{\alpha=1}^{p} r_\alpha(x,t)u_{x_\alpha}, u\Big) - \Big(\sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t)u, u\Big) + \Big(f(x,t), u\Big). \quad (4.6)$$

Преобразуем интегралы, входящие в (4.6):

$$\Big(u_t, u\Big) = \int_G u_t u dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_0^2, \quad (4.7)$$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left(k_\alpha u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha}, u\right) = \int_G \sum_{\alpha=1}^{p}\left(k_\alpha u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha} u dx = \sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha} k_\alpha u u_{x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha} dx' - \sum_{\alpha=1}^{p}\int_G k_\alpha \left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx, \tag{4.8}$$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\eta_\alpha u_{x_\alpha t}\right)_{x_\alpha}, u\right) = \int_G \sum_{\alpha=1}^{p}\left(\eta_\alpha u_{x_\alpha t}\right)_{x_\alpha} u dx = \sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha} u\eta_\alpha u_{x_\alpha t}\Big|_0^{l_\alpha} dx' +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \eta_{t\alpha}\left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx - \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \frac{\eta_\alpha}{2}\left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx. \tag{4.9}$$

Далее, для оценки слагаемых в правой части применим неравенство Коши с ε

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p} r_\alpha(x,t) u_{x_\alpha}, u\right) = \int_G \sum_{\alpha=1}^{p} r_\alpha(x,t) u_{x_\alpha} u dx \le \frac{c_2}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx + \frac{c_2}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G u^2 dx, \tag{4.10}$$

$$-\left(\sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t) u, u\right) = -\int_G \sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t) u^2 dx \le c_2 \sum_{\alpha=1}^{p}\int_G u^2 dx, \tag{4.11}$$

$$\Big(f(x,t), u\Big) = \int_G f(x,t) u dx \le \frac{1}{2}\|f\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_0^2, \tag{4.12}$$

где

$$G_\alpha = \{x' = (x_1, x_2, ..., x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, ..., x_p):\ 0 < x_k < l_k,$$
$$k = 1, 2, ..., \alpha-1, \alpha+1, ..., p\},\ dx' = dx_1 dx_2 \cdots dx_{\alpha-1} dx_{\alpha+1} \cdots dx_p.$$

Подставляя (4.7)-(4.12) в (4.6), получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\|u\|_0^2 + \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \eta_\alpha \left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx + \sum_{\alpha=1}^{p}\int_G k_\alpha \left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx \le$$

$$\le 2\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha} u\left(k_\alpha u_{x_\alpha} + \eta_\alpha u_{x_\alpha t}\right)\Big|_0^{l_\alpha} dx' + 3c_2 \sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx + (3pc_2+1)\|u\|_0^2 + \|f\|_0^2. \tag{4.13}$$

Первое слагаемое в правой части (4.13), пользуясь теоремой 6.5 [19], краевыми условиями (4.2), (4.3) и неравенством Коши с ε, оценим так:

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha} u\left(k_\alpha u_{x_\alpha} + \eta_\alpha u_{x_\alpha t}\right)\Big|_0^{l_\alpha} dx' = \sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha}\Big(\Pi_\alpha(x,t)u(x,t)|_{x_\alpha=l_\alpha} - \Pi_\alpha(x,t)u(x,t)|_{x_\alpha=0}\Big) dx' =$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha}\left[u(x,t)\Big(\beta_{+\alpha}(x,t)u(x,t) - \mu_{+\alpha}(x,t)\Big)\Big|_{x_\alpha=l_\alpha} - \right.$$

$$-u(x,t)\Big(\beta_{-\alpha}(x,t)\int_0^{l_\alpha} u(x,t)dx_\alpha+\int_0^t \rho_{-\alpha}(t,\tau)u(x,\tau)d\tau-\mu_{-\alpha}(x,t)\Big)\Big]\Big|_{x_\alpha=0}dx' \leq \quad (4.14)$$

$$\leq M_1\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)+M_2\int_0^t\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)d\tau+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha}\Big(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\Big)dx'.$$

Тогда из (4.13), с учетом (4.14), находим

$$\frac{d}{dt}\|u\|_0^2+\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \eta_\alpha\big(u_{x_\alpha}\big)^2dx+\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G k_\alpha\big(u_{x_\alpha}\big)^2dx\leq M_3\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)+$$

$$+M_4\int_0^t\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)d\tau+\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha}\Big(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\Big)dx'+\|f\|_0^2. \quad (4.15)$$

Проинтегрируем (4.15) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2+\|u_x\|_{2,Q_t}^2\leq M_5\int_0^t\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)d\tau+M_6\int_0^t\int_0^\tau\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)d\tau_1d\tau+$$

$$+M_7\Big(\int_0^t\Big(\|f\|_0^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha}\Big(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\Big)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2+\|u_0'(x)\|_0^2\Big). \quad (4.16)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (4.16) следующим образом:

$$\int_0^t\int_0^\tau\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)d\tau_1d\tau\leq T\int_0^t\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)d\tau. \quad (4.17)$$

С помощью (4.17) из (4.16) находим

$$\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\leq M_8\int_0^t\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)d\tau+$$

$$+M_7\Big(\int_0^t\Big(\|f\|_0^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha}\Big(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\Big)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2+\|u_0'(x)\|_0^2\Big). \quad (4.18)$$

На основании леммы Гроноулла из (4.18) получим неравенство

$$\int_0^t\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)d\tau\leq$$

$$\leq M(t)\Big(\int_0^t\Big(\|f\|_0^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha}\Big(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\Big)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2+\|u_0'(x)\|_0^2\Big). \quad (4.19)$$

Учитывая неравенство (4.17)-(4.19), из (4.16) получаем априорную оценку

$$\|u\|_{W_2^1(G)}^2+\|u_x\|_{2,Q_t}^2\leq M(t)\Big(\int_0^t\Big(\|f\|_0^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha}\Big(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\Big)d\tau+\|u_0(x)\|_{W_2^1(G)}^2\Big), \quad (4.20)$$

где $M(t)$ – зависит только от входных данных задачи (4.1)-(4.4).

Из априорной оценки (4.20) следует единственность решения исходной задачи (4.1)-(4.4), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме пространства $W_2^1(G)$.

5. Устойчивость и сходимость разностной схемы. Для решения задачи (4.1) – (4.4) применим метод конечных разностей. В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$ введем равномерную сетку [20, 23]:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j),\ x \in \overline{\omega}_h,\ t \in \overline{\omega}_\tau\},$$

$$\overline{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \overline{\omega}_{h_\alpha}, \quad \overline{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1, ..., N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, ..., m,\ m\tau = T\}.$$

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (4.1)-(4.4) поставим в соответствие разностную схему, порядка аппроксимации $O\big(|h| + \tau\big)$:

$$y_t = \Lambda(t)y + \delta(t)y + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \tag{5.1}$$

$$a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} + \gamma_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha t} = \beta_{-\alpha} \sum_{\overline{s}=0}^{N} y_{\overline{s}} \overline{h} + \sum_{s=0}^{j} \rho_{-\alpha,s,j} y_\alpha^{(0)} \overline{\tau} - \mu_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0, \tag{5.2}$$

$$-\Bigg(a_{+\alpha} y_{\overline{x}_\alpha} + \gamma_{+\alpha} y_{\overline{x}_\alpha t,}\Bigg) = \beta_{+\alpha} y_\alpha^{(N_\alpha)} - \mu_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha, \tag{5.3}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{5.4}$$

где

$$\Lambda(t) = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha(t), \qquad \delta(t) = \sum_{\alpha=1}^{p} \delta_\alpha(t),$$

$$\Lambda_\alpha(t) y_{(\alpha)} = \big(a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha}\big)_{x_\alpha} + r_\alpha^+ y_{x_\alpha} + r_\alpha^- y_{\overline{x}_\alpha} - d_\alpha y, \qquad \delta_\alpha(t) y_{(\alpha)} = \big(\gamma_\alpha y_{\overline{x}_\alpha t}\big)_{x_\alpha}$$

$$y_{\overline{x}_\alpha} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_\alpha}, \quad y_{x_\alpha} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_\alpha}, \quad y_t = \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau}, \quad y = y^j, \quad \hat{y} = y^{j+1},$$

$$r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-, \qquad |r_\alpha| = r_\alpha^+ - r_\alpha^-, \quad r_\alpha^+ = \frac{1}{2}(r_\alpha + |r_\alpha|) \geq 0,$$

$$r_\alpha^- = \frac{1}{2}(r_\alpha - |r_\alpha|) \leq 0, \qquad t_j = j\tau, \quad t_j + \tau = (j+1)\tau, \quad \tau,\ h - \text{шаги сетки}, \quad i_\alpha = 1, ..., N_\alpha$$

$$a_\alpha = k_\alpha(x^{-\alpha/2}, t_j), \quad \gamma_\alpha = \eta_\alpha(x^{-\alpha/2}, t_j), \quad d_\alpha = q_\alpha(x_i, t), \quad \varphi_i = f(x_i, t_j), \quad x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha,$$

$$x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, ..., x_\alpha^{(i_\alpha)}, ..., x_p^{(i_p)}), \qquad x^{-\alpha/2} = x_1, ..., x_{\alpha-1}, x_\alpha - h_\alpha/2, x_{\alpha+1}, ..., x_p, \quad x_\alpha^{(0)} = 0,$$

$y_\alpha^{(0)} = (x_1, x_2, ..., x_\alpha^{(0)}, ..., x_p, \tau), \qquad y_\alpha^{(N_\alpha)} = (x_1, x_2, ..., x_\alpha^{(N_\alpha)}, ..., x_p, \tau), \qquad x_\alpha^{(N_\alpha)} = N_\alpha h_\alpha = l_\alpha.$

Для решения задачи (5.1)-(5.4) получим априорную оценку, для чего воспользуемся методом энергетических неравенств. В пространстве функции определим норму и введем ее в таком виде:

$$(u,u) = \|u\|^2, \quad (u,u] = \|u]|^2,$$

$$(u,v] = \sum_{\alpha=1}^{p} (u,v]_\alpha, \ \|Y_{\overline{x}}]|^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} \|Y_{\overline{x}_\alpha}]|^2.$$

Умножим тогда разностное уравнение (5.1) скалярно на $2\tau\hat{y}$:

$$2\tau(y_t, \hat{y}) = 2\tau(\Lambda(t)\hat{y}, \hat{y}) + 2\tau(\delta(t)y, \hat{y}) + 2\tau(\varphi, \hat{y}). \tag{5.5}$$

Преобразуем суммы, входящие в (5.5), с учетом условий (5.2), (5.3) и формулы $2\hat{y}y_t = (y^2)_t + \tau(y_t)^2$:

$$2\tau(y_t, \hat{y}) = (1, \hat{y}^2) - (1, y^2) + \tau^2(1, y_t^2), \tag{5.6}$$

$$\big(\Lambda(t)\hat{y}, \hat{y}\big) + \big(\delta(t)y, \hat{y}\big) = \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha(t)\hat{y}, \hat{y}\right) + \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \delta_\alpha(t)y, \hat{y}\right) = \sum_{\alpha=1}^{p} \Big(\Lambda_\alpha(t)\hat{y}, \hat{y}\Big) + \sum_{\alpha=1}^{p} \Big(\delta_\alpha(\overline{t})y, \hat{y}\Big) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p} \Big(\big((a_\alpha \hat{y}_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \hat{y}\big) + \big((\gamma_\alpha y_{\overline{x}_\alpha t})_{x_\alpha}, \hat{y}\big) + \big(r_\alpha^+ \hat{y}_{x_\alpha}, \hat{y}\big) + \big(r_\alpha^- \hat{y}_{\overline{x}_\alpha}, \hat{y}\big) - \big(d_\alpha \hat{y}, \hat{y}\big)\Big). \tag{5.7}$$

Применяя первую разностную формулу Грина в (5.7) и подставляя преобразованные таким образом выражения в (5.5), с учетом (5.6), получаем

$$(1, \hat{y}^2) - (1, y^2) + \tau^2(1, y_t^2) + \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big(1, (\gamma_\alpha y_{\overline{x}_\alpha}^2)_t\big]_\alpha + \tau^2 \sum_{\alpha=1}^{p} \big(\gamma_\alpha, (y_{\overline{x}_\alpha t})^2\big]_\alpha =$$

$$= -2\tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big(a_\alpha, y_{\overline{x}_\alpha}^2\big]_\alpha - \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big(\gamma_{t\alpha}, \hat{y}_{\overline{x}_\alpha}^2\big]_\alpha + 2\tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big(r_\alpha^+ y_{x_\alpha}, y\big) + 2\tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big(r_\alpha^- y_{\overline{x}_\alpha}, y\big) -$$

$$-2\tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big(d_\alpha, y^2\big) - 2\tau \sum_{\alpha=1}^{p} y_\alpha^{(0)} \sum_{\overline{s}=0}^{N} \beta_{-\alpha,\overline{s}} y \bar{h} - 2\tau \sum_{\alpha=1}^{p} \beta_{+\alpha} \big(y_\alpha^{(N_\alpha)}\big)^2 + 2\tau \sum_{\alpha=1}^{p} \mu_{+\alpha} y_\alpha^{(N_\alpha)} +$$

$$+2\tau \sum_{\alpha=1}^{p} \mu_{-\alpha} y_\alpha^{(0)} - 2\tau \sum_{\alpha=1}^{p} y_\alpha^{(0)} \sum_{s=0}^{j} \rho_{-\alpha,s,j} y_\alpha^{(N_\alpha),s+1} \overline{\tau} + 2\tau\big(\varphi, y\big). \tag{5.8}$$

Оценим суммы, входящие в (5.8):

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \big(a_\alpha, y_{\overline{x}_\alpha}^2\big]_\alpha \geq c_1 \sum_{\alpha=1}^{p} \big(1, y_{\overline{x}_\alpha}^2\big]_\alpha = c_1\big(1, y_{\overline{x}}^2\big] = c_1 \|y_{\overline{x}}]|^2, \tag{5.9}$$

$$\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{p} \big(\gamma_\alpha, (y_{\overline{x}_\alpha t})^2\big]_\alpha \geq \tau^2 c_0 \|y_{\overline{x}t}]|^2, \tag{5.10}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \big(r_\alpha^+ y_{x_\alpha}, y\big) + \sum_{\alpha=1}^{p} \big(r_\alpha^- y_{\overline{x}_\alpha}, y\big) \leq 2c_2 \|y_{\overline{x}}]| \, \|y\| \leq c_2\big(\|y\|^2 + \|y_{\overline{x}}]|^2\big), \tag{5.11}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{p} (d_\alpha, y^2) \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^{p} (1, y^2) = c_2 \|y\|^2, \tag{5.12}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{p} y_\alpha^{(0)} \beta_{-\alpha} \sum_{\overline{s}=0}^{N} y_{\overline{s}}\,\bar{h} - \sum_{\alpha=1}^{p} \beta_{+\alpha}\big(y_\alpha^{(N_\alpha)}\big)^2 \leq \sum_{\alpha=1}^{p} \left[\frac{1}{2}\big(y_\alpha^{(0)}\big)^2 - \beta_{+\alpha}\big(y_\alpha^{(N_\alpha)}\big)^2\right] +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \left[\left(\beta_{-\alpha} \sum_{\overline{s}=0}^{N} y_{\overline{s}}\,\bar{h}\right)^2\right] \leq M_1\big(\|y_{\overline{x}}]|^2 + \|y\|^2\big), \tag{5.13}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \mu_{-\alpha} y_\alpha^{(0)} \leq \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\mu_{-\alpha}^2 + \big(y_\alpha^{(0)}\big)^2\right) \leq \frac{1}{2}\Big(\varepsilon \|y_{\overline{x}}]|^2 + c(\varepsilon)\|y\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \mu_{-\alpha}^2\Big), \tag{5.14}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \mu_{+\alpha} y_\alpha^{(N_\alpha)} \leq \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\mu_{+\alpha}^2 + \big(y_\alpha^{(N_\alpha)}\big)^2\right) \leq \frac{1}{2}\Big(\varepsilon \|y_{\overline{x}}]|^2 + c(\varepsilon)\|y\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \mu_{+\alpha}^2\Big), \tag{5.15}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{p} y_\alpha^{(0)} \sum_{s=0}^{j} \rho_{-\alpha,s,j} y_\alpha^{(0),s+1} \overline{\tau} \leq \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\Big(\sum_{s=0}^{j} \rho_{-\alpha,s,j} y_\alpha^{(0),s+1}\overline{\tau}\Big)^2 + \big(y_\alpha^{(0)}\big)^2\right), \tag{5.16}$$

Из (5.16) получим

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\Big(\sum_{s=0}^{j} \rho_{-\alpha,s,j} y_\alpha^{(0),s+1}\overline{\tau}\Big)^2 + \big(y_\alpha^{(0)}\big)^2\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\Big(\varepsilon \|y_{\overline{x}}]|^2 + c(\varepsilon)\|y\|^2\Big) + M_2 \sum_{s=0}^{j} \Big(\varepsilon \|y_{\overline{x}}^{s+1}]|^2 + c(\varepsilon)\|y^{s+1}\|^2\Big)\overline{\tau}, \tag{5.17}$$

$$(\varphi, y) \leq \frac{1}{2}\|y\|^2 + q\frac{1}{2}\|\varphi\|^2. \tag{5.18}$$

Учитывая оценки (5.9) – (5.18), после несложных преобразований из (5.8) находим:

$$\|\hat{y}\|^2 - \|y\|^2 + \tau\big(1, (\gamma y_{\overline{x}}^2)_t\,\big] + \tau^2 \|\hat{y}_t]|^2 + \tau^2 c_0 \|\hat{y}_{\overline{x}t}]|^2 + 2\tau c_1 \|\hat{y}_{\overline{x}}]|^2 \leq$$

$$\leq M_3(\|\hat{y}\|^2 + \|\hat{y}_{\overline{x}}]|^2)\tau + M_4 \sum_{s=0}^{j} \left(\|y^{s+1}\|^2 + \|y_{\overline{x}}^{s+1}]|^2\right)\overline{\tau}\tau + M_5\Big(\|\varphi\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\right)\Big)\tau. \tag{5.19}$$

Просуммируем (5.19) по $j\,'$ от 0 до j :

$$\|y^{j+1}\|^2 + \|y_{\overline{x}}^{j+1}]|^2 + \sum_{j\,'=0}^{j} \Big(\|y_t^{j\,'+1}]|^2\tau + \|y_{\overline{x}t}^{j\,'+1}]|^2\tau + \|y_{\overline{x}}^{j\,'+1}]|^2\Big)\tau \leq$$

$$\leq M_6\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|y^{j'+1}\|^2+\|y_{\overline{x}}^{j'+1}]|^2\Big)\tau+M_7\sum_{j'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j'}\Big(\|y^{s+1}\|^2+\|y_{\overline{x}}^{s+1}]|^2\Big)\overline{\tau}\tau+$$

$$+M_8\Bigg(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\big(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\big)\Big)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\overline{x}}^0]|^2\Bigg). \tag{5.20}$$

Второе слагаемое в правой части (5.20) оценим так

$$\sum_{j'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j'}\Big(\|y^{s+1}\|^2+\|y_{\overline{x}}^{s+1}]|^2\Big)\overline{\tau}\tau\leq T\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|y^{j'+1}\|^2+\|y_{\overline{x}}^{j'+1}]|^2\Big)\tau. \tag{5.21}$$

В силу (5.21) из (5.20) имеем

$$\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\overline{x}}^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|y_t^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\overline{x}t}^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\overline{x}}^{j'+1}]|^2\Big)\tau\leq M_9\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|y^{j'+1}\|^2+\|y_{\overline{x}}^{j'+1}]|^2\Big)\tau+$$

$$M_8\Bigg(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\big(\mu_{-\alpha}^{j'2}+\mu_{+\alpha}^{j'2}\big)\Big)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\overline{x}}^0]|^2\Bigg)=M_9\Big(\|y^{j'+1}\|^2+\|y_{\overline{x}}^{j'+1}]|^2\Big)\tau+$$

$$+M_9\sum_{j'=1}^{j}\Big(\|y^{j'}\|^2+\|y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\Big)\tau+M_{10}\Bigg(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\big(\mu_{-\alpha}^{j'2}+\mu_{+\alpha}^{j'2}\big)\Big)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\overline{x}}^0]|^2\Bigg). \tag{5.22}$$

Выбирая τ таким образом, что для всех $\tau\leq\tau_0,\ \tau_0=(2M_9)^{-1}$, из (5.22) получим

$$\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\overline{x}}^{j+1}]|^2\leq M_{11}\sum_{j'=1}^{j}\Big(\|y^{j'}\|^2+\|y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\Big)\tau+$$

$$+M_{12}\Bigg(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\big(\mu_{-\alpha}^{j'2}+\mu_{+\alpha}^{j'2}\big)\Big)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\overline{x}}^0]|^2\Bigg). \tag{5.23}$$

Оценивая первое слагаемое в правой части (5.23) с помощью леммы Гронуолла для сеточной функций [24], из (5.20) с учетом (5.21), (5.22) получим априорную оценку

$$\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\overline{x}}^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|y_t^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\overline{x}t}^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\overline{x}}^{j'+1}]|^2\Big)\tau\leq$$

$$\leq M\Bigg(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\big(\mu_{-\alpha}^{j'2}+\mu_{+\alpha}^{j'2}\big)\Big)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\overline{x}}^0]|^2\Bigg). \tag{5.24}$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (4.5). Тогда существует такое* τ_0*, что если* $\tau \le \tau_0$*, для решения разностной задачи (5.1) – (5.4) справедлива априорная оценка*

$$\|y^{j+1}\|^2_{W_2^1(G)} + \sum_{j'=0}^{j} \Big(\|y_{\bar t}^{j'+1}]|^2\tau + \|y_{\bar x\bar t}^{j'+1}]|^2\tau + \|y_{\bar x}^{j'+1}]|^2 \Big)\tau \le$$

$$\le M\Bigg(\sum_{j'=0}^{j} \Big(\|\varphi^{j'}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \big(\mu_{-\alpha}^{j'\,2} + \mu_{+\alpha}^{j'\,2}\big)\Big)\tau + \|y^0\|^2_{W_2^1(G)} \Bigg).$$

где – положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ *и* τ*.*

$\square$ Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (4.1)-(4.4), $y(x_i,t_j) = y_i^j$ – решение разностной задачи (5.1)-(5.4). Обозначим через $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ погрешность. Тогда, подставляя $y = z + u$ в (5.1)-(5.4), получим задачу для z:

$$z_t = \Lambda(t)z + \delta(t)z + \Psi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,, \tag{5.25}$$

$$a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha} + \gamma_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha t} = \beta_{-\alpha} \sum_{\bar s=0}^{N} z_{\bar s}\,\bar h + \sum_{s=0}^{j} \rho_{-\alpha,s,j} z_\alpha^{(0)} \overline{\tau} - \nu_{-\alpha}, \quad \text{при} x_\alpha = 0, \tag{5.26}$$

$$-\Big(a_{+\alpha} z_{\bar x_\alpha} + \gamma_{+\alpha} z_{\bar x_\alpha t} \Big) = \beta_{+\alpha} z_\alpha^{N_\alpha} - \nu_{+\alpha}, \quad \text{при } x_\alpha = l_\alpha, \tag{5.27}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{5.28}$$

где $\Psi = O\big(|h| + \tau\big)$, $\nu_{-\alpha} = O\big(|h| + \tau\big)$, $\nu_{+\alpha} = O\big(|h| + \tau\big)$ – погрешности аппроксимации на решении задачи (4.1)-(4.4).

Применяя априорную оценку (5.24) к решению задачи (5.25)-(5.28), получим оценку

$$\|z^{j+1}\|^2_{W_2^1(G)} + \sum_{j'=0}^{j} \Big(\|z_{\bar t}^{j'+1}]|^2\tau + \|z_{\bar x\bar t}^{j'+1}]|^2\tau + \|z_{\bar x}^{j'+1}]|^2 \Big)\tau \le M \sum_{j'=0}^{j} \Big(\|\Psi^{j'}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \big(\nu_{-\alpha}^{j'\,2} + \nu_{+\alpha}^{j'\,2}\big)\Big)\tau,$$

где – положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ.

Из полученной априорной оценки следует сходимость схемы (5.25)-(5.28) со скоростью $O(|h| + \tau)$ в сеточной норме $W_2^1(G)$.

Замечание. Полученные результаты имеют место и в случае, когда уравнение имеет вид:

$$u_t = (k(x,t)u_x)_x + (\eta(x,t)u_x)_{xt} + r(x,t)u_x - q(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t \le T,$$

если потребовать условие $\eta \in C^{3,3}(Q_T)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации. Регистрационный номер НИР: 1.6197.2011.

Литература

1. Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. – 1960. – 25;5. – С.852-864.
2. Дзекцер Е.С. Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // ДАН СССР. – 1875. – 220;3. – С.540-543.
3. Рубинштейн Л.И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Известия АН СССР, сер. геогр. – 1948. – 12;1. – С.27-45.
4. Ting T., Cooling A. Process According to Two Temperature theory of heat Conduction // J. Math. Anal. Appl. – 1974. – 45;9.
5. Hallaire M. L'eau et la production vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique. – 1964. – №9.
6. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв // М: Наука, 1976.
7. Colton D.L. Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Different. equations. – 1972. – 12;8. – P.559-565.
8. Colton D.L. Integral operators and the first initial-boundary value problems for pseudoparabolic equations with analytic coefficients // J. Different. equations. – 1973. – 13. – P.506-522.
9. Ахиев С.С., Гусейнов О.М. О фундаментальном решении одной краевой задачи для гиперболического уравнения третьего порядка // Баку: Азерб. унив-т, 1983. – 9 с.
10. Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Диффер урав. – 1982. – 18;2. – С.280-285.
11. Жегалов В.И. Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными // Казань.: Изд. Казанское математическое общество, 2001. – 226 с.
12. Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Диффер урав. – 2004. – 40;6. – С.763-774.
13. Шхануков М.Х. Исследование краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка методом функции Римана // Сообщения АН ГССР. – 1983.
14. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дффер урав. – 1982. – 18;4. – С.689-699.
15. Coleman B.D., Duffin R.J., Mizel V.J. Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xxt}$ on a strip // Arch. Rat. Mech. Anal.
16. Showalter R.E., Ting T. Pseudoparabolic partial differential equations // Siam. J. Math. Anal. – 1970. – 1. – P.1-26.
17. Чудновский А.Ф. Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло- и влагопереноса в почве // Сборник трудов по агрофизике. – 1969. – №23, Гидрометеоиздат.
18. Карсанова Ж.Т., Нахушева Ф.М. Об одной нелокальной краевой задаче для псевдопараболического уравнения третьего порядка // Владикавказский математический журнал. – 2002. – 4;2. – С.31-37.
19. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / М: Наука, 1973.
20. Самарский А.А. Теория разностных схем / М: Наука, 1983.
21. Андреев В.Б. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ. – 1968. – 8;6. – С.1218-1231.
22. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем / М: Наука, 1973.
23. Бештоков М.Х. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих третью краевую задачу для уравнения гиперболического типа в многомерной области с нелокальным краевым условием.Ч.1 // Известия КБНЦ РАН.-Нальчик. – 2007. – №3(19). – С.88-96.
24. Самарский А.А. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа // ЖВМ и МФ. – 1963. – 3;2. – С.266-298.

ON NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

M.Kh. Beshtokov

Kabardino-Balkarian State University,
Chernyshevskiy St., 173, Nalchik, 360004, Russia, e-mail: beshtokov_ murat@rambler.ru

Abstract. Nonlocal boundary value problems for pseudo-parabolic equations of third order with variable coefficients in one-dimensional and multidimensional cases are under consideration. Using the Riemann function method, existence and uniqueness of the solution of a nonlocal boundary value problem are proved in one-dimensional case. A priori estimates are obtained for nonlocal problems both in differential and difference interpretations. The estimates obtained imply uniqueness, stability and convergence of the difference problem solution to the correspondent differential problem solution.

Key words: boundary value problems, Riemann's function method, nonlocal condition, a priori estimate, difference scheme, stability and convergence of difference schemes, partial differential equation of third order, pseudo-parabolic equation.

MSC 11L03

ОБ ОЦЕНКЕ ОДНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ ПО ПРОСТЫМ ЧИСЛАМ

С.А. Гриценко, Н.А. Зинченко

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, г.Белгород, 308007, Россия, e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru

Аннотация. Оценена тригонометрическая сумма по простым числам, лежащим в арифметической прогрессии с большой разностью, и на основе этой оценки получен вариант теоремы Бомбьери–Виноградова для простых чисел специального вида.

Ключевые слова: тригонометрическая сумма, простые числа специального вида, оценки.

1. Введение. В 30–40-х годах XX века И.М. Виноградов создал метод тригонометрических сумм и с большим успехом решил на его основе ряд задач теории чисел (см. [1], [2]).

В настоящей работе дано краткое изложение оценки тригонометрической суммы по простым числам, лежащим в арифметической прогрессии с «предельно большой» разностью. Оценка проводится методом И.М. Виноградова. Кроме того, мы с помощью указанной оценки уточняем в частном случае следующую теорему, принадлежащую Д. Толеву [3].

Теорема 1. *Пусть $c \in (1,2]$ — константа и $\pi_c(x,q,l)$ — число таких простых чисел p, не превосходящих x и сравнимых с l по модулю q, для которых $\{0.5p^{1/c}\} \le 0.5$. Тогда для любого $A>0$ существует $\varepsilon>0$ такое, что*

$$\sum_{q:\, q\le x^{1/4-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \pi_c(x,q,l) - \frac{\operatorname{Li} x}{2\varphi(q)} \right| \le c\, x(\ln x)^{-A},$$

где $c=c(A)>0$, $\operatorname{Li} x = \int_2^x \frac{dx}{\ln x}$.

Сформулируем наши результаты.

Теорема 2. *Пусть $c\in(1,2]$ — константа. Пусть $A>1$ — произвольная константа, $f(n)=0.5mn^{1/c}$, где $1\le m\le (\ln N)^{2A}$. Пусть, далее, $0<\varepsilon\le 0.001$ — сколь угодно малое число, q — натуральное число, $q\le N^{1/3-\varepsilon}$.*

Тогда справедлива оценка

$$\sum_{\substack{n\le N,\\ n\equiv r (\operatorname{mod} q)}} \Lambda(n) e^{2\pi i f(n)} = O(Nq^{-1}N^{-\varkappa}),$$

где $\varkappa=\varkappa(\varepsilon)>0$.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракт 14.A18.21.0357

Теорема 3. Пусть $c \in (1,2]$ — константа и $\pi_c(x,q,l)$ — число таких простых чисел p, не превосходящих x и сравнимых с l по модулю q, для которых $\{0.5p^{1/c}\} \leq 0.5$.

Тогда для любого $A > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\sum_{q\colon q\leq x^{1/3-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \pi_c(x,q,l) - \frac{\mathrm{Li}\, x}{2\varphi(q)} \right| \leq c\, x(\ln x)^{-A},$$

где $c = c(A) > 0$.

2. Схема доказательства теоремы 2.

Пусть $u = N^{1/3}$. Оценим сумму S,

$$S = \sum_{\substack{u<n\leq N,\\ n\equiv r(\mathrm{mod}\, q)}} \Lambda(n) e^{2\pi i f(n)}.$$

1) Воспользуемся тождеством Вона (см. [4, глава 3]):

$$S = W_1 - W_2 - W_3,$$

где

$$W_1 = \sum_{d\leq u} \mu(d) \sum_{\substack{n\leq Nd^{-1}\\ dn\equiv r(\mod q)}} \ln n\, e^{2\pi i f(dn)},$$

$$W_2 = \sum_{d\leq u} \mu(d) \sum_{n\leq u} \Lambda(n) \sum_{\substack{dnt\leq N\\ dnt\equiv r(\mod q)}} e^{2\pi i f(dnt)},$$

$$W_3 = \sum_{u<x\leq Nu^{-1}} a_x \sum_{\substack{u<y\leq Nx^{-1}\\ xy\equiv r(\mod q)}} \Lambda(y) e^{2\pi i f(xy)},$$

$$a_x = \sum_{d\leq u, d|x} \mu(d).$$

2) Оценим W_2. Для этого зафиксируем $d \leq u$ и $n \leq u$ и оценим внутреннюю сумму по t, обозначив ее как $W_2(d,n)$. Имеем:

$$W_2(d,n) = \sum_{\substack{t\leq Nd^{-1}n^{-1}\\ t\equiv r_0(\mathrm{mod}\, q)}} e^{2\pi i l f(dnt)}\ ,$$

где $r_0 \equiv rd^{-1}n^{-1}(\mathrm{mod}\, q)$.

Поскольку $d \leq N^{1/3}$, $n \leq N^{1/3}$, $q \leq N^{1/3-\varepsilon}$, число слагаемых суммы $W_2(d,n)$ не меньше, чем N^{ε}. Оценивая ее методом ван дер Корпута, приходим к асимптотическим равенствам

$$W_2(d,n) = O(N^{1-2\varkappa}), \quad W_2 = O(N^{1-\varkappa}).$$

Для суммы W_1 тем же способом получается оценка $W_1 = O(N^{1-\varkappa})$.

3) Оценим W_3. Разобьем промежутки суммирования по x и по y на промежутки вида $X < x \le 2X$, $Y < y \le 2Y$, где $u < X$, $u < Y$, $(2X)(2Y) \le N$. Тогда

$$|W_3| \ll L^2 \sum_{X<x\le 2X} |a_x| \cdot \left| \sum_{\substack{Y<y\le 2Y \\ xy\equiv r(\bmod q)}} \Lambda(y) e^{2\pi i f(xy)} \right|,$$

где $L = \ln N$.

Без ограничения общности считаем, что $X \ge Y$. Пользуясь неравенством Коши и неравенством

$$\sum_{x\le 2X} \tau^2(x) \ll XL^3,$$

получаем:

$$|W_3|^2 \ll XL^7 \sum_{X<x\le 2X} \left| \sum_{\substack{Y<y\le 2Y \\ xy\equiv r(\bmod q)}} \Lambda(y) e^{2\pi i f(xy)} \right|^2.$$

Разобьем промежуток суммирования по x по арифметической прогрессии с разностью q. Имеем:

$$|W_3|^2 \ll XL^7 \sum_{b=1}^{q-1}{}' \sum_{X<l+qx\le 2X} \left| \sum_{\substack{Y<y\le 2Y \\ ly\equiv r(\bmod q)}} \Lambda(y) e^{2\pi i f((l+qx)y)} \right|^2,$$

где $\sum'$ обозначает суммирование по l, взаимно простым с q.

Далее имеем:

$$W_3^2 \ll XL^9 \sum_{b=1}^{q}{}' \sum_{y_1 b\equiv r(\bmod q)} \sum_{\substack{yb\equiv r(\bmod q), \\ Y<y_1<y\le 2Y}} \sum_{X<b+qx\le 2X} e^{2\pi i (f((l+qx)y)-f((l+qx)y_1))} +$$

$$+ \frac{(XY)^2}{q^2} L^9 \frac{q}{X}.$$

Поскольку $q \le N^{1/3-\varepsilon}$, $X > u = N^{1/3}$, имеем неравенство:

$$L^9 \frac{q}{X} \ll N^{-3\varkappa}.$$

Так как $X > u = N^{1/3}$, $q \le N^{1/3-\varepsilon}$, оставшаяся сумма по x имеет по меньшей мере N^{ε} слагаемых. Оценивая ее методом ван дер Корпута, получаем:

$$W_3 = O(N^{1-\varkappa} q^{-1}).$$

3. Схема доказательства теоремы 3.

1) Определим функцию

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x < 1/2, \\ 0, & \text{если } 1/2 \le x < 1, \end{cases}$$

и продолжим ее периодически с периодом 1 на всю числовую ось. Тогда

$$\pi_c(x,q,l) = \sum_{\substack{n \le N, \\ n \equiv l (\operatorname{mod} q)}} \psi_0(0.5p^{1/c}).$$

2) «Сглаживаем» $\psi_0(x)$, приближая ее «стаканчиками Виноградова» $\psi(x)$. При надлежащем выборе параметров (см., например, [15]) будем иметь:

$$\sum_{\substack{n \le N, \\ n \equiv l (\operatorname{mod} q)}} \psi_0(0.5p^{1/c}) = \sum_{\substack{n \le N, \\ n \equiv l (\operatorname{mod} q)}} \psi(0.5p^{1/c}) + O(Nq^{-1}L^{-A-1}).$$

3) Приближаем функцию $\psi(x)$ конечным отрезком ее ряда Фурье:

$$\psi(x) = \sum_{|m| \le M} c(m) e^{\pi i m p^{1/c}} + O(L^{-A-1}).$$

Здесь $M = L^{2A}$, $c(0) = \frac{1}{2} + O(L^{-A})$, $|c(m)| \le \frac{1}{|m|}$ при $0 < |m| \le M$.

Далее,

$$\sum_{q:\, q \le x^{1/3-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \pi_c(x,q,l) - \frac{\operatorname{Li} x}{2\varphi(q)} \right| \le \frac{1}{2} \sum_{q:\, q \le x^{1/3-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \pi(x,q,l) - \frac{\operatorname{Li} x}{\varphi(q)} \right| +$$

$$+ \sum_{0<|m|\le M} \frac{1}{|m|} \sum_{q:\, q \le x^{1/3-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv l \operatorname{mod} q}} e^{\pi i m p^{1/c}} \right| + O(NL^{-A-1}).$$

Из «обычной» теоремы Бомбьери-Виноградова имеем:

$$\sum_{q:\, q \le x^{1/3-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \pi_c(x,q,l) - \frac{\operatorname{Li} x}{2\varphi(q)} \right| \le \sum_{0<|m|\le M} \frac{1}{|m|} \sum_{q:\, q \le x^{1/3-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \le x, \\ p \equiv l \operatorname{mod} q}} e^{\pi i m p^{1/c}} \right| +$$

$$+ O(NL^{-A}).$$

Наконец, из теоремы 2 и преобразования Абеля следует, что

$$\max_{(l,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \le x, \\ p \equiv l \operatorname{mod} q}} e^{\pi i m p^{1/c}} \right| = O(N^{1-\varkappa} q^{-1}),$$

а значит

$$\sum_{q:\, q \le x^{1/3-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \pi_c(x,q,l) - \frac{\operatorname{Li} x}{2\varphi(q)} \right| = O(NL^{-A}).$$

Литература

1. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / М.: Наука, 1980. – 160 с.
2. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм / М.: Наука, 1976. – 120 с.
3. Tolev D. On a theorem of Bombieri-Vinogradov type for prime numbers from a thin set. // Acta Arithmetic. – 1997. – 81;1. – P.57-68.
4. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М: Наука, 1975. – 184 с.
5. Гриценко С.А. Об одной задаче И.М. Виноградова // Математические заметки. – 1986. – 39;5. – С.625-640.

ON THE ESTIMATE OF A TRIGONOMETRIC SUM OVER PRIMES

S.A. Gritsenko, N.A. Zinchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru

Abstract. The trigonometric sum on primes in arithmetic progression with big difference is estimated. The theorem of Bombieri-Vinogradov's type for specific primes is proved.

Key words: trigonometric sum, specific primes, estimates.

MSC 11S40

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДРОБНЫХ МОМЕНТОВ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

С.А. Гриценко, Л.Н. Куртова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru, kurtova@bsu.edu.ru

Аннотация. Пусть v – натуральное число, $\Phi(T)$ – сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $T \to +\infty$ функция. Получена асимптотическая формула для дробных моментов дзета-функции Римана вида $\int\limits_T^{2T} |\zeta(\sigma+it)|^{2/v} dt$ при $1/2 + \Phi(T)/\log T \le \sigma < 1$.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, дробные моменты дзета-функции Римана, асимптотическая формула.

1. Введение

Пусть k — неотрицательное вещественное число, $\frac{1}{2} \le \sigma < 1$, $T \ge 2$. Интеграл вида

$$I_k(\sigma, T) = \int\limits_T^{2T} |\zeta(\sigma+it)|^{2k} dt$$

будем называть моментом дзета-функции Римана степени $2k$.

Определим мультипликативную функцию $d_k(n)$ из равенства

$$\zeta^k(s) = \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s} \quad (\mathrm{Re}\, s > 1).$$

В 1981 году Р.Т. Турганалиев [1] на основе одной идеи С.М. Воронина доказал, что при $0 < k < 2$, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ справедливо равенство

$$\int\limits_T^{2T} |\zeta(\sigma+it)|^{2k} dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}} + O(T^{1-\kappa}), \tag{1}$$

где $\kappa = \kappa(\sigma, k) > 0$. В этой формуле параметр $\sigma > \frac{1}{2}$ фиксирован, то есть не зависит от основного параметра T.

Для приложений особый интерес вызывает случай, когда σ равно $\frac{1}{2}$ или хотя бы стремится к $\frac{1}{2}$ справа с ростом T. В 1985 году И.Ш. Джаббаров [2] доказал, что равенство (1) справедливо при $\frac{1}{2} + \frac{\log\log\log T}{\log\log T} \le \sigma < 1$.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракт 14.A18.21.0357

В настоящей статье получена асимптотическая формула для $I_k(\sigma, T)$ в частном случае, когда $k = \frac{1}{m}$, $m \in N$. Важно отметить, что параметр k фиксирован (не зависит от T). Наша формула справедлива при весьма близких к $1/2$ значениях σ и в этом смысле представляет собой уточнение цитированных выше теорем.

Теорема 1. *Пусть m — натуральное число, $\Phi(T)$ — сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $T \to +\infty$ функция. Тогда при $\frac{1}{2} + \frac{\Phi(T)}{\ln T} \le \sigma < 1$ справедлива асимптотическая формула*

$$\int_T^{2T} |\zeta(\sigma+it)|^{2/m} dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2_{1/m}(n)}{n^{2\sigma}} + O\left(T(\sigma - 1/2)^{-1/m^2} e^{-0,1\Phi(T)}\right).$$

Возникает вопрос о существовании асимптотических формул для дробных моментов других функций, представимых в виде ряда Дирихле.

В 1991 году А. Сельберг [3] определил класс S рядов Дирихле

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1),$$

удовлетворяющих следующим условиям:

1) функция $(s-1)^m L(s)$ целая конечного порядка при некотором $m \ge 0$;

2) коэффициенты Дирихле $a(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$a(1) = 1, \quad a(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon$$

для любого положительного ε и всех $n \ge 1$;

3) при $\mathrm{Re}\, s > 1$ функция $L(s)$ раскладывается в эйлерово произведение:

$$L(s) = \prod_p \left(1 + a(p)p^{-s} + a(p^2)p^{-2s} + \cdots\right),$$

где p пробегает простые числа, $\log L(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}$, где $b(n) = 0$, если n не равно положительной степени простого числа, причем $b(n) \ll n^\theta$ для некоторого $\theta \ge 1/2$;

4) $L(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению вида: $\Lambda(s) = \overline{\Lambda(1-\overline{s})}$, где $\Lambda(s) = \eta A^s \prod\limits_{j=1}^{k} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) L(s)$ и $|\eta| = 1, \quad A > 0, \quad \lambda_j > 0, \quad \mathrm{Re}\, \mu_j \ge 0$.

В статье [4] для любой функции $L(s)$ из S определена ее степень: $d_L = 2\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j$.

Для примитивных (не представляющихся в виде $L_1(s)L_2(s)$, $L_1(s) \in S$, $L_2(s) \in S$) функций из класса S А. Сельберг высказал в работе [3] ряд гипотез, в частности следующую.

Гипотеза. *При $x \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{n\le x} |a(n)|^2 n^{-1} = \log x + O(1), \qquad (2)$$

где $a(n)$ — коэффициенты Дирихле функции $L(s)$.

Интеграл вида

$$I'_k(\sigma,T) = \int\limits_T^{2T} |L(\sigma+it)|^{2k} dt$$

будем называть моментом функции $L(s)$ из класса Сельберга S степени $2k$.

Определим мультипликативную функцию $a_k(n)$ из равенства

$$L^k(s) = \prod_p \left(1 - \frac{a(p)}{p^s}\right)^{-k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)a(n)}{n^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1).$$

Вторым основным результатом данной статьи является вывод асимптотической формулы для дробных моментов $I'_{1/m}(\sigma,T)$, $m \in N$ функций $L(s)$ из класса Сельберга, $d_L = 2$. Эта задача представляет трудность потому, что в отличие от $\zeta(s)$ точная верхняя оценка дробных моментов для таких функций на критической прямой не известна.

Теорема 2. *Пусть m — натуральное число, $\Phi(T)$ — сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $T \to +\infty$ функция. Тогда при $\frac{1}{2} + \frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}} \le \sigma < 1$, в предположении гипотезы Сельберга (2), справедлива асимптотическая формула*

$$\int\limits_T^{2T} |L(\sigma+it)|^{2/m} dt = T\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{1/m}(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(Te^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}}\right).$$

Введем некоторые обозначения. Пусть N — натуральное число, $N \le T/\log T$ в теореме 1 и $N \le Te^{\sqrt{\ln T}}$ в теореме 2. Положим

$$S_N(s) = \sum_{n=1}^{N} d_{1/m}(n)n^{-s}, \quad g(s) = \zeta(s) - S_N^m(s),$$

$$S'_N(s) = \sum_{n=1}^{N} a_{1/m}(n)n^{-s}, \quad g'(s) = L(s) - (S'_N(s))^m.$$

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть $f(s)$ — регулярная в полосе $\alpha < \operatorname{Re} s < \beta$ и непрерывная в полосе $\alpha \le \operatorname{Re} s \le \beta$ функция. Предположим, что $f(s) \to 0$ при $|\operatorname{Im} s| \to \infty$ равномерно по $\alpha \le \operatorname{Re} s \le \beta$. Тогда при $\alpha \le \gamma \le \beta$ и $q > 0$ имеем:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\gamma+it)|^q dt \le \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\alpha+it)|^q dt\right)^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\beta+it)|^q dt\right)^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}.$$

□ Доказательство см. в [5]. ■

Лемма 2. *Пусть*

$$K(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(\sigma+it)|^{2/m} w(t)dt, \quad K'(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g'(\sigma+it)|^{2/m} w(t)dt\,,$$

где $w(t) = \int\limits_{T}^{2T} e^{-2(t-\tau)^2/m} d\tau$. *Пусть, далее, α, β, σ выбраны так, что $0,49 \le \alpha \le \sigma \le \frac{7}{8} \le \beta$, $1,1 \le \beta \le 2$. Тогда справедливы неравенства:*

$$K(\sigma) \ll \{K(\alpha)\}^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}} \{K(\beta)\}^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}} + T^5 e^{-\frac{T^2}{4m}\frac{(\beta-\sigma)}{(\beta-\alpha)}} + T^5 e^{-\frac{T^2}{4m}\frac{(\sigma-\alpha)}{(\beta-\alpha)}}\,,$$

$$K'(\sigma) \ll \{K'(\alpha)\}^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}} \{K'(\beta)\}^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}} + T^5 e^{-\frac{T^2}{4m}\frac{(\beta-\sigma)}{(\beta-\alpha)}} + T^5 e^{-\frac{T^2}{4m}\frac{(\sigma-\alpha)}{(\beta-\alpha)}}\,.$$

□ Докажем первое неравенство. Доказательство второго неравенства проводится аналогично. Положим в лемме 1 $f(z) = (z-1)g(z)e^{(z-i\tau)^2}$, где $\tau \in [T, 2T]$. Пусть κ — одно из чисел α, σ, β. Тогда, используя оценку $|g(\sigma+it)|^{2/m} \ll 1+(t-\tau)^2+\tau^2$, получаем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\kappa+it)|^{2/m} dt \ll \tau^{2/m} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(\kappa+it)|^{2/m} e^{-2(t-\tau)^2/m} dt + \tau^4 e^{-\frac{\tau^2}{4m}}.$$

Пользуясь неравенствами

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(\alpha+it)|^{2/m} \exp(-2(t-\tau)^2/m)dt \ll T^2, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(\beta+it)|^{2/m} \exp(-2(t-\tau)^2/m)dt \ll 1,$$

получаем,что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(\sigma+it)|^{2/m} \exp(-2(t-\tau)^2/m)dt \ll \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(\alpha+it)|^{2/m} \exp(-2(t-\tau)^2/m)dt\right\}^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}} \times$$

$$\times\Big\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\beta+it)|^{2/m}\exp(-2(t-\tau)^2/m)dt\Big\}^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}}+$$

$$+T^4\exp\Big(-\frac{T^2(\beta-\sigma)}{4m(\beta-\alpha)}\Big)+T^4\exp\Big(-\frac{T^2(\sigma-\alpha)}{4m(\beta-\alpha)}\Big)\,.$$

Интегрирование этого неравенства по τ от T до $2T$ и использование неравенства Гельдера завершает доказательство. ■

Лемма 3. *При* $1,01<\sigma_0\le 2$ *справедливы неравенства:*

$$K(\sigma_0)\ll TN^{-(2\sigma_0-1)/m},\quad K'(\sigma_0)\ll TN^{-(2\sigma_0-1)/m}\,.$$

□ Сравнивая коэффициенты рядов Дирихле слева и справа в равенстве $\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_{1/m}(n)n^{-s}\Big)^m=\zeta(s)$, $\mathrm{Re}\,s>1$, получаем $\sum\limits_{n_1\cdots n_m=n}d_{1/m}(n_1)\cdots d_{1/m}(n_m)=1$. Отсюда и из положительности $d_{1/m}(n)$ следует, что

$$0\le\beta(n)=1-\sum_{\substack{n_1\cdots n_m=n\\1\le n_1,\ldots,n_m\le N}}d_{1/m}(n_1)\cdots d_{1/m}(n_m)\le 1\,.$$

Если $n\le N$, то $\beta(n)=0$. Тогда $|g(\sigma_0+it)|\ll 1$, и требуемая оценка следует из неравенства Гельдера.

Неравенство для $K'(\sigma_0)$ доказывается аналогично. ■

Лемма 4. *Пусть* $J(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\zeta(\sigma+it)|^{2/m}w(t)dt$, $J'(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|L(\sigma+it)|^{2/m}w(t)dt$. *Пусть* $1/2\le\sigma\le 3/4$, $m\ge 1$, $T\ge 2$, *тогда справедливы неравенства:*

$$J(1/2)\ll T^{\frac{1}{m}(\sigma-1/2)}J(\sigma),\quad J'(1/2)\ll T^{\frac{2}{m}(\sigma-1/2)}J'(\sigma).$$

□ Первое неравенство доказывается в [6, p. 70]. При доказательстве второго неравенства учитываем, что в функциональное уравнение для функции из класса Сельберга степени 2 входит множитель $\Gamma(z+\mu)/\Gamma(1-z+\mu)$. ■

Лемма 5. *Пусть* $I(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|S_N(\sigma+it)|^2w(t)dt$. *Для фиксированного* $m\ge 0$ *существует* $c_m>0$, *такое, что для всех* σ, *удовлетворяющих неравенству* $\frac{1}{2}+\frac{c_m}{\ln T}\le\sigma\le\frac{3}{4}$, *справедливы оценки:*

$$I(\sigma)\ll T(\sigma-1/2)^{-1/m^2},\quad I(1/2)\ll T(\ln T)^{1/m^2}\,.$$

□ Доказательство см. в [6]. ■

Лемма 6. Пусть $I'(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|S'_N(\sigma+it)|^2w(t)dt$, $N\le Te^{\sqrt{\ln T}}$. Для всех σ, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{2}+\frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}}\le\sigma<1$, где $\Phi(T)$ — сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $T \to +\infty$ функция, в предположении гипотезы Сельберга (2) справедливы оценки:

$$I'(\sigma) \ll T e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}}\ , \quad I'(\frac{1}{2}) \ll T e^{\sqrt{\ln T}} \ln T\ .$$

□ Доказательство следует из свойств функции $w(t)$ и оценок сумм

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|a_{1/m}(n)|^2}{n^{2\sigma}} \ll N^{1-2\sigma} \ln N, \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{|a_{1/m}(n)|^2}{n} \ll \ln N,$$

которые получаем, используя гипотезу Сельберга (2) и условие $0 < d_{1/m}(n) \leq 1$. ■

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1.

1. Главный член асимптотической формулы для дробных моментов дзета-функции Римана получается из асимптотического вычисления интеграла $\int\limits_T^{2T} |S_N(\sigma+it)|^2\,dt$, а для оценки остаточного члена достаточно оценить интеграл $\int\limits_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/m}dt$. При $m \geq 2$ нужно воспользоваться неравенством

$$|z_1|^{2/m} - |z_2|^{2/m} \leq |z_1+z_2|^{2/m} \leq |z_1|^{2/m} + |z_2|^{2/m}, \tag{3}$$

справедливом для любых комплексных чисел z_1 и z_2. При этом мы положим в (3) $z_1 = S_N^m(\sigma+it)$, $z_2 = g(\sigma+it)$ и проинтегрируем получившееся неравенство по t от T до $2T$.

2. Заметим, что при $t \in [T, 2T]$ $\ w(t) \gg 1$, поэтому $\int\limits_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/m}dt \ll K(\sigma)$. Применим лемму 2 с параметрами $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{5}{4}$. В результате, получим неравенство

$$K(\sigma) \ll \{K(1/2)\}^{\frac{5-4\sigma}{3}} \{K(5/4)\}^{\frac{4\sigma-2}{3}} + 1\,.$$

Здесь мы учли, что $\sigma - 1/2 \geq \frac{\Phi(T)}{\ln T} \geq \frac{1}{\ln T}$ и поэтому $\exp\Big(-\frac{T^2(\sigma-\frac{1}{2})}{3m}\Big) \ll T^{-A}$ для любого $A > 0$ и достаточно большого T. Если $K(1/2) \leq T$, то, так как $K(5/4) \ll T$, то и $K(\sigma) \ll T$.

3. Пусть $K(1/2) > T$. Тогда $K(\sigma) \ll K(1/2)(T^{-1}K(5/4))^{\frac{4\sigma-2}{3}} + 1$. Используем оценку из леммы 3: $K(5/4) \ll TN^{-3/(2m)}$. Тогда

$$K(\sigma) \ll K(1/2)N^{-\frac{2}{m}(\sigma-1/2)} + 1 \ll K(1/2)N^{-\frac{2}{m}(\sigma-1/2)}. \tag{4}$$

Из (3) получаем, что

$$K(\sigma) - I(\sigma) \ll J(\sigma) \ll K(\sigma) + I(\sigma). \tag{5}$$

Тогда $K(1/2) \ll J(1/2)+I(1/2)$. Функцию $J(1/2)$ оценим, используя лемму 4: $J(1/2) \ll T^{\frac{1}{m}(\sigma-1/2)}J(\sigma)$. Для $J(\sigma)$ используем правую часть неравенства (5). Тогда

$$K(1/2) \ll T^{\frac{1}{m}(\sigma-1/2)}(K(\sigma)+I(\sigma))+I(1/2)\ .$$

Подставляем полученную оценку в (4). результате, получаем, что

$$K(\sigma) \ll N^{-\frac{2}{m}(\sigma-1/2)}T^{\frac{1}{m}(\sigma-1/2)}(K(\sigma)+I(\sigma))+N^{-\frac{2}{m}(\sigma-1/2)}I(1/2)$$

С учетом условий $N \le T$, $\sigma-\frac{1}{2} \ge \frac{\Phi(T)}{\ln T}$ будем иметь $N^{-\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}T^{\frac{1}{m}(\sigma-\frac{1}{2})} \ll e^{-0{,}1\Phi(T)}$. Тогда $K(\sigma) \ll e^{-0{,}1\Phi(T)}I(\sigma)+e^{-0{,}1\Phi(T)}I(1.2)$, и требуемая оценка следует из оценок для $I(\sigma)$ и $I(1/2)$ из леммы 5. ■

Доказательство теоремы 2. Проводится по схеме доказательства теоремы 1. Более подробно остановимся на оценке $K'(\sigma)$, если $K'(1/2) > T$. Тогда

$$K'(\sigma) \ll K'(1/2)N^{-\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}. \tag{6}$$

Из (3) получаем, что

$$K'(\sigma)-I'(\sigma) \ll J'(\sigma) \ll K'(\sigma)+I'(\sigma). \tag{7}$$

Тогда $K'(1/2) \ll J'(1/2)+I'(1/2)$. Функцию $J'(1/2)$ оценим, используя лемму 4. Имеем $J'(1/2) \ll T^{\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}J'(\sigma)$. Для $J'(\sigma)$ используем правую часть неравенства (7). Тогда

$$K'(1/2) \ll T^{\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}(K'(\sigma)+I'(\sigma))+I'(1/2)\ .$$

Подставляем полученную оценку в (6), после чего получаем, что

$$K'(\sigma) \ll N^{-\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}T^{\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}(K'(\sigma)+I'(\sigma))+N^{-\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}I'(1/2)\,.$$

С учетом условий $N \le Te^{\sqrt{\ln T}}$, $\sigma-1/2 \ge \Phi(T)/\sqrt{\ln T}$ будем иметь

$$N^{-\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}T^{\frac{2}{m}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)} \ll \exp\left\{-2\Phi(T)/m\right\} \ll 1\,.$$

Тогда

$$K'(\sigma) \ll I'(\sigma)+\Delta I'\,(1/2) \ll I'(\sigma)+I'\,(1/2)\exp\{-\Phi(T)\sqrt{\ln T}\}\ ,$$

и требуемая оценка следует из оценок для $I'(\sigma)$ и $I'\,(1/2)$ из леммы 6.

Замечание. L-функции Гекке, соответствующие комплексным характерам, составляют подкласс класса Сельберга S степени 2 (см. [17]), для которого утверждение теоремы 2 безусловно.

Литература

1. Турганалиев Р.Т. Асимптотическая формула для средних значений дробной степени дзета-функции Римана // Труды Математического института АН СССР. – 1981. – 158. – С.203–226.

2. Джаббаров И.Ш. Дробные моменты ζ-функции // Математические заметки. – 1985. – 38(4). – С.481-493.
3. Selberg A. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // Proc. of the Amalfi conference on Analytic Number Theory. Univ. di. Salerno / 1992. – P.365-387.
4. Corney J.B., Ghosh A. On the Selberg class of Dirichlet series: small degrees // Duke Math. J. – 1993. – 72, 3. – P.673-695.
5. Gabriel R.M. Some results concerning the integrals of moduli of regular functions along certain curves // J. London Math. Soc. – 1927. – 2. – P.112-117.
6. Heath-Brown D.R. Fractional moments of the Riemann Zeta-function // J. London Math. Soc. – 1981. – 24(2). – P.65-78.
7. Гриценко С.А. О нулях специального вида функций, связанных с L-функциями Гекке мнимых квадратичных полей // Изв. РАН. Сер. матем. – 1997. – 61:1. – С.45-68.

ASYMPTOTIC FORMULA FOR FRACTIONAL MOMENTS OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION

S.A. Gritsenko, L.N. Kurtova

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru, kurtova@bsu.edu.ru

Abstract. Let $v \in \mathbb{N}$ and the function $\Phi(T)$ tends sufficiently slowly to $+\infty$ when $T \to +\infty$. The asymptotic formula for fractional moments of the Riemann Zeta-function $\int\limits_T^{2T} |\zeta(\sigma+it)|^{2/v} dt$ at $1/2 + \Phi(T)/\log T \le \sigma < 1$ is obtained.

Key words: Riemann's Zeta-function, fractional moments of the Riemann Zeta-function, asymptotic formula.

MSC 30H20

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Р.В. Даллакян

Государственный инженерный университет Армении,
ул. Терян, 105, кор. 12, Ереван, Армения, e-mail: dallakyan57@mail.ru

Аннотация. Пусть $\mathcal{D}$ единичный круг комплексной плоскости $\mathcal{C}$. Аналитическая в $\mathcal{D}$ функция f принадлежит классу A_α^p, если

$$\int_{\mathcal{D}} (1-|z|)^\alpha |f(z)|^p \, dxdy < +\infty.$$

В настоящей работе доказывается, что для функций классов A_α^p дробный интеграл порядка β в частных случаях может принадлежать классам Харди H^p. Пользуясь этими результатами приводятся два представления (соответственно для случаев $0 < p \le 2$ и $2 \le p < \infty$) функций классов A_α^p, которые в частном случае $p = 2$ совпадают с одним представлением функций класса A_α^2, полученным М. М. Джрбашяном.

Ключевые слова: Классы функций H^p, A_α^p, дробный интеграл порядка β функции f.

1. Введение. Пусть $\mathcal{D} = \{z; |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathcal{C}$. Множество аналитических в круге $\mathcal{D}$ функций обозначим через $Hol(D)$. Далее пусть $0 \le r < 1$, $0 < p < \infty$, $f \in Hol(D)$ и пусть

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \; M_\infty(r,f) = \sup_{0\le\theta\le 2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|.$$

Скажем, что $f \in Hol(D)$ принадлежит классу Харди H^p, $0 < p \le \infty$, если

$$\|f\|_{H^p} \overset{def}{\equiv} \sup_{0<r<1} M_p(r,f) < +\infty\,.$$

Свойства функций классов Харди описаны в [1], [2]. Обозначим через A_α^p, $0 < p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$, множество тех функций $f, f \in Hol(D)$ для которых

$$\|f\|_{A_\alpha^p} \equiv \left(\int_{\mathcal{D}} (1-|z|)^\alpha |f(z)|^p \, dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\,.$$

где $dA(z) = \pi^{-1}dxdy = \pi^{-1}rdrd\theta$ – мера Лебега. Определим $A^p \equiv A_0^p$ Классы A_α^p некоторыми специалистами называются классами Бергмана (см. например [3]). Функции этих классов были исследованы и М.М. Джрбашяном [4], который эти классы обозначил через $H_p(\alpha)$. Свойства этих классов описаны и в [5].

В вышеуказанных работах [3], [4], [5] доказывается, что если $f \in A^p_\alpha$, то

$$|f(z)| \leq \frac{C\|f\|_{A^p_\alpha}}{(1-|z|)^{(2+\alpha)/p}}\ , \qquad z \in \mathcal{D}\ . \tag{1}$$

Пусть $\beta > 0$ и $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in Hol\mathcal{D}$. Дробным интегралом порядка β функции f называется следующая функция:

$$f_{[\beta]}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+1+\beta)}\, a_n z^n,\ z \in \mathcal{D}\ .$$

В [6] доказано, что $f_{[\beta]}(z) \in Hol(D)$. Взяв $\beta = \frac{\alpha+1}{p}$ из теоремы F работы [7] получаем, что если $f(z) = \sum a_n z^n \in A^p_\alpha$, то $f_{[\frac{\alpha+1}{p}]}(z) \in A^{2p}$. Известно, что (см. [6]) $H^p \subset A^{p(\alpha+2)}$.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Если $f(z) = \sum a_n z^n \in A^p_\alpha$, $0 < p \leq 2$, $\alpha > -1$, то функция*

$$h(z) = \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1+n\right)}\, a_n z^n\ , \quad |z| < 1$$

принадлежит классу H^p.

В случае $2 \leq p < +\infty$, взяв $\beta = \frac{p+\alpha-1}{p}$ также доказывается, что дробный интеграл порядка β функции f, $f \in A^p_\alpha$ принадлежит классу H^p т.е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A^p_\alpha$, $2 \leq p < +\infty$, $a > -1$, то*

$$h(z) = \frac{p+\alpha-1}{p} \int\limits_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{p}} f(\rho z) d\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}\right) n!}{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p}+1+n\right)}\, a_n z^n \tag{2}$$

принадлежит классу H^p.

В работах [3], [4], [5] доказано, что если $f \in A^p_\alpha$, $1 \leq p < +\infty$, $a > -1$, то f имеет следующий вид

$$f(z) = \frac{1+\alpha}{\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (1-r)^\alpha \frac{f\left(\rho e^{i\varphi}\right)}{\left(1 - z\rho e^{-i\varphi}\right)^{2+\alpha}}\, \rho d\rho d\varphi\ .$$

М.М. Джрбашяном в [4] (см. также [5]) дано еще одно представление функций класса A^2_α, $a > -1$:

Теорема 3. (М.М. Джрбашян). *Если* $f \in A^2_\alpha$, $a > -1$, *то*

$$h(z) = \frac{1+\alpha}{2} \int\limits_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{p}} f(\rho z) d\rho, \ |z| < 1$$

принадлежит классу H^2, *а* $f(z)$ *имеет следующее интегральное представление:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{h\left(e^{i\theta}\right) d\theta}{\left(1 - ze^{-i\theta}\right)^{\frac{3+\alpha}{2}}}. \tag{3}$$

В частном случае $\alpha = 0$ это утверждение доказано М.В. Келдышем [8]. Пользуясь результатами теорем 1 и 2, далее удалось получить интегральные представления типа (3) для функций классов A^p_α, $0 < p < +\infty$, $a > -1$.

Теорема 4. *Пусть* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A^p_\alpha$, $0 < p \leq 2$, $a > -1$. *Тогда* $f(z)$ *допускает следующее интегральное представление*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{h\left(e^{i\theta}\right) d\theta}{\left(1 - e^{-i\theta} z\right)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} \ ,$$

где

$$h(z) = \frac{1+\alpha}{p} \int\limits_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha+1}{p}-1} f(\rho z) d\rho =$$

$$= \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p} + 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p} + 1 + n\right)} a_n z^n \ , \qquad |z| < 1 \ . \tag{4}$$

Теорема 5. *Пусть* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A^p_\alpha$, $2 \leq p < +\infty$, $a > -1$. *Тогда* $f(z)$ *имеет следующее интегральное представление*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{h\left(e^{i\theta}\right) d\theta}{\left(1 - e^{-i\theta} z\right)^{\frac{2p+\alpha-1}{p}}},$$

где

$$h(z) = \frac{p+\alpha-1}{p} \int\limits_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{p}-1} f(\rho z) d\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p} + 1\right) n!}{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p} + 1 + n\right)} a_n z^n \ .$$

3. Доказательство теорем.

Доказательство теоремы 1. Пользуясь формулой Стирлинга, нетрудно убедиться, что

$$\frac{\Gamma(1+n)\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)}{\Gamma\left(1+n+\frac{\alpha+1}{p}\right)}\sim n^{-\frac{\alpha+1}{p}},$$

когда $n\to+\infty$. Следовательно по лемме 1.1 работы [9], действительно дробный интеграл $h(z)$ принадлежит классу H^p. ■

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем справедливость равенства (2). Легко заметить, что

$$h(z)=\frac{p+\alpha-1}{p}\int_0^1(1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{p}}f(\rho z)d\rho=\frac{p+\alpha-1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\int_0^1\rho^n(1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{p}}d\rho=$$

$$=\frac{p+\alpha-1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}B\left(n+1,\frac{p+\alpha-1}{p}\right)a_nz^n=$$

$$=\frac{p+\alpha-1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p}+1+n\right)}a_nz^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p}+1\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p}+1+n\right)}a_nz^n\ .$$

Таким образом равенство (2) доказано. В случае $p=2$ принадлежность функции $h(z)$ классу H^2 доказана в [4]. Пусть $p>2$ и пусть $z=re^{i\theta}$. Пользуясь неравенством Гельдера легко видеть, что

$$|h(z)|^p\le\left(\frac{p+\alpha-1}{p}\right)^p\left(\int_0^1(1-\rho)^{\alpha}\left|f\left(r\rho e^{i\theta}\right)\right|^pd\rho\right)\left[\int_0^1(1-\rho)^{-\frac{q}{p}}d\rho\right]^{\frac{p}{q}},$$

где q – такое число, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Значит

$$|h(z)|^p\le\left(\frac{p+\alpha-1}{p}\right)^p\left(\int_0^1(1-\rho)^{\alpha}\left|f\left(r\rho e^{i\theta}\right)\right|^pd\rho\right)\left[\int_0^1(1-\rho)^{-\frac{1}{p-1}}d\rho\right]^{p-1}.$$

Откуда, так как $p>2$ получаем

$$|h(z)|^p\le C\cdot\int_0^1(1-\rho)^{\alpha}\left|f\left(r\rho e^{i\theta}\right)\right|^pd\theta\ ,$$

где C зависит только от p и α. Пользуясь последним неравенством будем иметь

$$\int\limits_0^{2\pi} \left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta \le C \cdot \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (1-\rho)^\alpha \left|f\left(r\rho e^{i\theta}\right)\right|^p d\rho d\theta \ .$$

Теперь, так как $\int\limits_0^{2\pi} \left|f\left(te^{i\theta}\right)\right|^p d\theta$ является монотонно возрастающей функцией от t и $f \in A^p_\alpha$, легко заметить что

$$\int_0^{2\pi} \left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta < C \cdot \|f\|^p_{A^p_\alpha} \ . \quad \blacksquare$$

Доказательство теоремы 4. Сначала докажем справедливость равенства (4). Легко видеть, что

$$h(z) = \frac{\alpha+1}{p}\sum_{n=0}^\infty a_n z^n \int\limits_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha+1}{p}-1}\rho^n d\rho =$$

$$= \frac{\alpha+1}{p}\sum_{n=0}^\infty B\left(n+1, \frac{\alpha+1}{p}\right) a_n z^n = \frac{\alpha+1}{p}\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}\right)\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1+n\right)} a_n z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1+n\right)} a_n z^n \ .$$

Таким образом равенство (4) доказано. Из биномиальной теоремы имеем

$$\frac{1}{(1-e^{-i\theta}z)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1+k\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)\Gamma(1+k)} e^{-ik\theta} z^k \ .$$

Пользуясь этим равенством нетрудно убедиться, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{h(e^{i\theta})d\theta}{(1-e^{-i\theta}z)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1+n\right)} a_n e^{in\theta} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1+k\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)\Gamma(1+k)} e^{-ik\theta} z^k\right] d\theta =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty a_n z^n = f(z) \ . \quad \blacksquare$$

Доказательство теоремы 5. Из биномиальной теоремы имеем

$$\frac{1}{(1-e^{-i\theta}z)^{\frac{2p+\alpha-1}{p}}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}\right)\Gamma(1+k)}e^{-ik\theta}z^k\ .$$

Пользуясь этим равенством, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{h(e^{i\theta})d\theta}{(1-e^{-i\theta}z)^{\frac{2p+\alpha-1}{p}}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}\right)\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}+n\right)}a_ne^{in\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}\right)\Gamma(1+k)}e^{-ik\theta}z^k\right]d\theta=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=f(z)\ . \qquad \blacksquare$$

Заключение. В статье доказано, что для $0<p\le 2$, $\alpha>-1$ дробный интеграл порядка $\beta=\frac{\alpha+1}{p}$ аналитической функции класса A^p_α принадлежит классу H^p. Для случая же $2\le p<+\infty$, $a>-1$ доказано, что аналогичное утверждение верно при $\beta=\frac{p+\alpha-1}{p}$. Пользуясь этими утверждениями, получены представления функций классов A^p_α, соответственно для случая $0<p\le 2$ и случая $2\le p<+\infty$. Оба эти представления при $p=2$ совпадают с уже известным представлением функций классов A^2_α

Литература

1. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций / М.: Гос.изд технико-теоретической литературы, 1950.
2. Duren P.L. Theory of H^p Spaces / NY: Academic Press, 1970.
3. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. "Theory of Bergman Spaces-/ in: Graduate Texts in Mathematics. V.199. – Berlin: Springer 2000, 2000.
4. Джрбашян М.М. К проблеме представимости аналитических функций // Сообщения инст. мат. и механики АН Арм.ССР. – 1948. – 2. – С3-40.
5. Djrbashian A.E., Shamoian F.A. Topics in tne theory of A^p_α spaces / in: Teubner Texts in Mathematics, 105. – Leipzig: Teubner, 1988.
6. Duren P.L., Romberg B., Shields A.L. Linear functionals on H^p spaces with $0<p<1$, j // Reine Angew. Math. – 1969. – 238. – P.32-60.
7. Maher M., Marzuq H. Linear functionals on some weighted Bergman spaces // Bull. Austral. Math. Soc. – 1980. – 42. – P.417-425.
8. Keldysch M.V. Sur les Conditions pour Qu'un Systeme de Polynomes Orthogonaux Avec un Poids Soit Ferme // Coptes Rendus (Doklady) Academie des Sciences USSR (ns) – 1941. – 30. – С.778-780.
9. Buckley S.M., Koskela P., Vukotic D. Functional unite gration differentiation, and weighted Bergman spaces / Math. Proc. Comb. Soc. – 1999. – 126. – P.369-385.

ON THE REPRESENTATION OF A CLASS OF FUNCTIONS ANALYTIC IN THE UNIT CIRCLE

R.V. Dallakyan

State Engineering University of Armenia,
Teryan St., 105-12, Yerevan, Armenia, e-mail: dallakyan57@mail.ru

Abstract. Let $\mathcal{D}$ be the unit circle on the complex plane $\mathcal{C}$. A function f being analytic in $\mathcal{D}$ belongs to the class A^p_α if

$$\int_{\mathcal{D}} (1-|z|)^\alpha |f(z)|^p \, dxdy < +\infty .$$

We show that the fractional integral of order β of functions from the class A^p_α may belong in some cases to Hardy's classes H^p. Using this result we obtain two representations (for cases $0 < p \leq 2$ and $2 \leq p < \infty$, respectively) of functions from classes A^p_α, which coincide in the particular case $p = 2$ with the representation obtained by M.M. Djrbashyan for the class A^2_α.

Key words: Classes of functions H^p and A^p_α, fractional integral of order β.

MSC 47G99

C_0-ОПЕРАТОРНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В.А. Костин, М.Н. Небольсина, Салим Бадран

Воронежский государственный университет,
Университетская пл. 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: vlkostin@mail.ru,
marinanebolsina@yandex.ru

Аннотация. В работе устанавливается корректная разрешимость операторных уравнений вида $\sum_{m=0}^{n} a_m A^m u = f$, где A-генератор полугруппы класса C_0 операторов, действующих в банаховом пространстве E, $f \in E$. Результаты применяются к задачам для дифференциальных уравнений с операторами дробного дифференцирования в пространствах функций непреобразуемых по Лапласу.

Ключевые слова: корректная разрешимость, генератор полугруппы класса C_0, гипервозрастающие и гиперубывающие весовые функции.

Введение

В настоящее время все более актуальными становятся приложения дифференциальных уравнений с дробными производными в механике, гидродинамике, теории тепломассопереноса, радиофизике и т.д. (см. [1]-[5]). Однако, как правило, проводимые при этом исследования касаются только вопросов существования решений соответствующих задач и их интегро-дифференциальных представлений. Вопрос же устойчивости этих решений по исходным данным, один из основных при установлении корректной разрешимости (см. [1]-[5]), в этих работах не обсуждается.

Как известно, понятие корректной постановки задач математической физики, было введено Ж. Адамаром в связи с определением наиболее «естественных» граничных условий для различных типов дифференциальных уравнений, что на языке функционального анализа означает следующее. Пусть U- и F-метрические пространства. Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f \ , \tag{1}$$

где $f \in F$, $u \in U$. Задача (1) называется *корректной*, если выполнены условия:

1) уравнение (1) разрешимо для любых $f \in F$ единственным образом;

2) оператор A^{-1}, определенный на всем F, является непрерывным, т.е. имеет место неравенство

$$\|A^{-1} f\|_U \leq M \|f\|_F \ , \tag{2}$$

где константа M не зависит от $f \in F$.

Важное место в классе корректных задач занимают задачи в которых U и F плотно вложены в некоторое банахово пространство B и неравенство (2) понимается в смысле $\|.\|_B$. Такие задачи будем называть *равномерно корректными*. Классические результаты в исследовании таких задач для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах получены С.Г. Крейном. Здесь фундаментальную роль играет теория полугрупп преобразований, развитая в работах Э. Хилле, Р. Филлипса, К. Иосиды и др.

В настоящем сообщении устанавливается равномерно корректная разрешимость задач для дифференциальных уравнений с дробными производными. При этом применяемые здесь методы функционального анализа позволяют рассматривать случаи когда не возможно применение преобразования Лапласа, которое является основным в дробно-дифференциальных моделях.

§1. Корректная разрешимость C_0-полиномиальной задачи

Пусть E-банахово пространство и A-генератор полугруппы преобразований $U(t)$, $t \geq 0$ класса C_0, действующей в E и удовлетворяющей оценке

$$\|U(t)\| \leq Me^{-\omega t}. \tag{1.1}$$

Это значит, что область определения $\mathbb{D}(A)$ оператора A плотна в E, а область его значений $\mathbb{R}(A)$ совпадает со всем пространством E. Резольвентное множество этого оператора содержит комплексную полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > -\omega$ и для степеней резольвенты $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ выполнены оценки

$$\|R^m(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{(Re\lambda + \omega)^m}\ , \tag{1.2}$$

$m = 1, 2, ...,$ M и ω из (1.1).

В соответствии с [7], для оператора A определены многочлены

$$P_n(A)u = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k u\ , \tag{1.3}$$

$u \in \mathbb{D}(A^n)$, $a_k \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. При этом $\mathbb{D}(A^n)$ плотно в E, и спектр оператора $P_n(A)$ совпадает с множеством $P_n(\Lambda(A))$, где $\Lambda(A)$ — спектр оператора A [7] с. 125. Многочлены $P_n(A)$ будем называть C_0-операторными многочленами (см.[10]).

Пользуясь подходом В.П. Маслова, примененного в [6] с.12 к операции $A = \dfrac{d}{dx}$, обозначим множество операторов вида (1.3) через $K[A]$, а через $K[x]$ обозначим множество полиномов над полем комплексных чисел $x \in \mathbb{C}$,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \tag{1.4}$$

Также как и в [6] с.12 полином $P_n(x)$, отвечающий оператору $P_n(A)$, будем называть *символом оператора* $P_n(A)$.

Очевидно, что множества $K[x]$ и $K[A]$ изоморфны, при этом сумма полиномов $K[x]$ переходит в сумму операторов $K[A]$, а произведение в произведение. В силу этого изоморфизма каждому разложению

$$P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i)^{k_i} \ , \qquad \sum_{i=1}^{n} k_i = m$$

соответствует представление

$$P_n(A) = a_n \prod_{i=1}^{m} (A - \alpha_i I)^{k_i}, \tag{1.5}$$

где α_i-корни полинома $P_n(x)$, k_i-их кратность, I-тождественный оператор.

Рассмотрим задачу отыскания решения уравнения

$$\mathbb{A}u = P_n(A)u = f \ , \tag{1.6}$$

где $u \in \mathbb{D}(A^n)$, $f \in E$. Здесь справедлива следующая

Теорема 1.1. *Если корни многочлена $P_n(x)$ принадлежат резольвентному множеству оператора A, то задача (1.6) равномерно корректна, ее решение представимо в виде*

$$u = \frac{1}{a_n} \prod_{i=1}^{m} R^{k_i}(\alpha_i, A) f \ , \tag{1.7}$$

где $R(\alpha_i, A)$ – значения резольвенты оператора A в точках α_i; и справедлива оценка

$$\|u\| \leq \frac{M}{|a_n|} \prod_{i=1}^{m} (\mathrm{Re}\alpha_i + \omega)^{-k_i} \|f\| \ . \tag{1.8}$$

□ Существование и единственность решения задачи (1.6) следует из непосредственного применения оператора $\mathbb{A}$ к элементу u, представленным соотношением (1.7), и из того, что ядро резольвенты генератора полугруппы класса C_0 состоит из одного нуля.

Для доказательства неравенства (1.8) воспользуемся известным соотношением

$$R(\lambda, A)f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) f dt \ , \qquad \mathrm{Re}\,\lambda > -\omega, \tag{1.9}$$

из которого следует более общее равенство

$$\prod_{i=1}^{p} R(\lambda_i, A) f = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty e^{-\sum_{i=1}^{p} \lambda_i t_i} U\Big(\sum_{i=1}^{p} t_i\Big) f dt_1 \ldots dt_p \ . \tag{1.10}$$

Пользуясь (1.10), оценим

$$\Big\| \prod_{i=1}^{p} R(\lambda_i, A) f \Big\| \leq \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty e^{-\sum_{i=1}^{p} \lambda_i t_i} \Big\| U(\sum_{i=1}^{p} t_i) \Big\| dt_1 \ldots dt_p \ ,$$

$$\|f\| \leq \frac{M}{\prod_{i=1}^{p}(\mathrm{Re}\,\lambda_i + \omega)}\|f\|\,. \tag{1.11}$$

Наконец, из (1.7), оценки (1.11)), получаем (1.8) и доказательство теоремы. ■

Следствие 1.1. *Если корни α_i действительные, то оценка принимает вид*

$$\|u\| \leq \frac{M}{|P_n(-\omega)|}\|f\|\ . \tag{1.12}$$

В качестве другого следствия, рассмотрим задачу о разрешимости уравнения

$$P_n(A)u = Q_r(A)f, \tag{1.13}$$

где $Q_r(A) = \sum\limits_{j=0}^{r} b_j A^j$ — C_0-операторный многочлен степени $r < n$, $f \in \mathbb{D}(A^r)$.

В этом случае, применяя оператор $\mathbb{A}^{-1}$ в (1.13) получим представление решения

$$u = \mathbb{A}^{-1}f = \prod_{i=1}^{m} R^{k_i}(\lambda_i, A)Q_r(A)f\ . \tag{1.14}$$

Отсюда, пользуясь очевидным неравенством

$$\|AR(\lambda, A)\| \leq 1 + |\lambda|\cdot\|R(\lambda, A)\|\ , \tag{1.15}$$

получаем доказательство ограниченности оператора $\mathbb{A}^{-1}$.

2. Гипервозрастающие и гиперубывающие весовые функции

Обозначим через Φ_m^+ класс монотонно возрастающих при $t > 0$ функций $\rho_+(t) > 0$ и таких, что при некотором $m > 0$ выполняется соотношение

$$\rho_+'(t) - m\rho_+(t) \geq 0\ . \tag{2.1}$$

Так как из (2.1) при $t \to \infty$ следует оценка $\rho_+(t) \geq \rho_0\exp(mt)$ $(\rho_0 > 0)$, то классы таких весовых функций будем называть *гипервозрастающими*, а $\inf m$, при котором выполняется (2.1) будем называть *символом* гипервеса весовой функции $\rho_+(t)$. Например, для весов вида

$$\rho_+(t) \ = \ t\exp(\exp\, t), \qquad m = 1. \tag{2.2}$$

Заметим, что веса, как угодно сильно отличающиеся порядком роста при $t \to \infty$, могут иметь одинаковые символы.

Нетрудно видеть, что символы произведения весов складываются. Так, если m_1 порядок роста веса ρ_1, а m_2 – веса ρ_2, то для $\rho_+(t) = \rho_1(t)\cdot\rho_2(t)$ имеем соотношения

$$\rho_+'(t) = \rho_1'(t)\cdot\rho_2(t) + \rho_1(t)\cdot\rho_2'(t) \geq m_1\rho_1\cdot\rho_2 + m_2\rho_1\rho_2 = (m_1+m_2)\rho_+\ .$$

Отсюда при $m+\lambda>0$ следуют оценки

$$(e^{\lambda t}\rho_+(t) \le \frac{1}{m+\lambda}(e^{\lambda t}\cdot\rho_+(t))' \ , \tag{2.3}$$

$$\int\limits_0^t e^{\lambda s}\cdot\rho_+(s)ds \le \frac{e^{\lambda t}}{m+\lambda}\rho_+(t) \ . \tag{2.4}$$

Кроме того, по индукции устанавливается оценка для n-кратного интеграла, $n=1,2,\dots$,

$$J_+^n\rho_+(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^t (t-s)^{n-1}\rho_+(s)ds \le \frac{\rho_+(t)}{m^n} \ . \tag{2.5}$$

Очевидно, что при соответствующем m классы Φ_m^+ содержат как угодно быстро растущие на бесконечности функции.

Классы Φ_m^-. Наряду с классами Φ_m^+, введём также сопряженные классы Φ_m^- весовых положительных функций $\rho_-(t)$, монотонно убывающих и таких, что для некоторого $m>0$ выполняется соотношение

$$\rho_-'(t) + m\rho_-(t) \le 0 \ . \tag{2.6}$$

Нетрудно видеть, что если $\rho_+\in\Phi_m^+$, то ${\rho_+}^{-1}=\rho_-\in\Phi_m^-$.

Таким образом, при $t\to\infty$ функция $\rho_-(t)$ могут убывать как угодно быстро. В связи с этим, мы их будем называть *гиперубывающими*. Заметим, что при $t\to 0$ они могут как угодно быстро расти. Например, веса $\rho_n(t)=t^{-n}\exp(-\exp(t))$ удовлетворяют условию (2.6) при $m=\min\limits_{t>0}(e^t+\frac{n}{t})$.

Число $\sup m$, при котором выполняется (2.6) будем называть *символом* гипервеса весовой функции $\rho_-(t)$.

Заметим, что символ возрастания функции $\rho_+(t)$ совпадает с символом убывания функции $\rho_-(t)=\rho_+(t)^{-1}$.

Весовые функции $\rho_-(t)$ обладают следующим очевидным свойством: $\rho_-(\infty)=0$ и для них при $\lambda+m>0$ выполняются оценки

$$J_-\rho_-(t) = \int\limits_t^\infty e^{-\lambda s}\rho_-(s)ds \le \frac{\rho_-(t)\exp(\lambda t)}{m+\lambda} \ , \tag{2.7}$$

$$J_-^n\rho_-(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_t^\infty (s-t)^{n-1}\rho_-(s)ds \le \frac{\rho_-(s)}{m^n}, \quad n=1,2,\dots \ . \tag{2.8}$$

Полумультипликативные гипервесовые функции. Важными подклассами гипервесовых функций Φ_m^+ и Φ_m^- являются функции связанные с полумультипликативными функциями рассмотренными в [11] и [12], с. 154, которые определяются как действительные, измеримые по Борелю функции на $\mathbb{R}^+$, удовлетворяющие условию *полумультипликативности*

$$0 \le \psi_-(t+s) \le \psi_-(t)\psi_-(s), \tag{2.9}$$

при всех

$$t, s \in \mathbb{R}^+ \qquad \psi_-(0) = 1\ . \tag{2.10}$$

Так как мы будем рассматривать также и функции $\psi_+(t)$, удовлетворяющие условию обратному (2.9), то есть

$$\psi_+(t)\psi_+(s) \le \psi_+(t+s)\ , \tag{2.11}$$

то классы функций, удовлетворяющие (2.9), будем называть *левомультипликативными* и обозначать Ψ^-, а классы, удовлетворяющие условиям (2.10) и (2.11), — *правомультипликативными* и обозначать через Ψ^+.

Очевидно что из $\psi_+ \in \Psi^+$ следует ${\psi_+}^{-1} = \psi_- \in \Psi^-$ и наоборот, из $\psi_- \in \Psi^-$ следует $\psi_+ = {\psi_-}^{-1} \in \Psi^+$.

На связь классов Ψ^+, Ψ^-, Φ_m^+, Φ_m^- указывает следующая

Лемма 2.1. *Если $\psi_+(t)$ непрерывно дифференцируема и $\psi'_+(t) > 0$, то справедливо включение $\Psi^+ \subset \Phi^+_{\psi'(0)}$; если $\psi_-(t)$ непрерывно дифференцируема и $\psi_-(t) < 0$, то $\Psi^- \subset \Phi^-_{\psi'_-(0)}$.*

☐ В случае класса Ψ^+ из (2.11) следует неравенство

$$\frac{\psi_+(t)[\psi_+(s) - 1]}{s} \le \frac{\psi_+(t+s) - \psi_+(t)}{s}\ . \tag{2.12}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $s \to 0$, получаем выполнение условия

$$\psi'_+(0)\psi_+(t) \le \psi'_+(t)\ , \tag{2.13}$$

доказывающее справедливость леммы в случае классов ψ_+.

Доказательство для случая ψ^- следует из соотношения $\psi_-(t) = \psi_+(t)^{-1}$.

Теперь покажем, что классы Φ_m^+ и Φ_m^- шире Ψ^+ и Ψ^-, соответственно. Для этого, наряду с функциями, заданными (2.2), рассмотрим функции вида

$$\psi_1(t) = \exp\left[\int_0^t \varphi(\xi)\, d\xi\right], \qquad \psi_2(t) = \psi_1(t) - 1\,, \tag{2.14}$$

где функция $\varphi(s)$ монотонно возрастает и удовлетворяет условию $\varphi(s) \ge m > 0$.

Покажем, что функции (2.14) удовлетворяют условию (2.11). Для этого оценим

$$\psi_1(t+s) = \exp\left[\int_0^{t+s} \varphi(\xi)\, d\xi\right] = \exp\left[\int_0^t \varphi(\xi)\, d\xi + \int_t^{t+s} \varphi(\xi)\, d\xi\right] =$$

$$= \exp\left[\int_0^t \varphi(\xi)\, d\xi + \int_0^s \varphi(\tau + t)\, d\tau\right] \ge$$

$$\geq \exp\left[\int_0^t \varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^s \varphi(\tau)\,d\tau\right] = \psi_1(t)\cdot\psi_1(s). \tag{2.15}$$

Здесь мы воспользовались возрастанием функции $\varphi(s)$. Аналогичное неравенство для функции ψ_2 доказывается с помощью соотношения

$$\psi_2(t+s) = \psi_1(t+s) - 1 = [\psi_1(t)-1][\psi_1(s)-1] + \psi_1(t) + \psi_2(t) - 2 \geq$$

$$\geq [\psi_1(t)-1][\psi_1(s)-1] = \psi_2(t)\cdot\psi_2(s)\ .$$

Таким образом, $\psi_1 \in \Psi^+$, но $\psi_2 \overline{\in} \Psi^+$, так как $\psi_2(0) = 0$. Отсюда же следует, что и ${\psi_1}^{-1} \in \Psi^-$, но ${\psi_2}^{-1} \notin \Psi^-$. Кроме того, заметим, что и функции вида (2.2) также не принадлежат Ψ^+, в силу того, что для них не выполнено условие (2.11). Такое же замечание относится и к функциям вида $\psi_n(t) = t^{-n}\exp(-t)$. ■

В дальнейшем, мы будем использовать только весовые пространства Φ_m^+ и Φ_m^-.

3. Операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана-Лиувилля в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$. На полуоси $t \in [0,\infty)$ будем рассматривать гипервесовые пространства $\mathfrak{C}_{\rho_+}$ и $\mathfrak{C}_{\rho_-}$ непрерывных функций $f(t)$, для которых конечны нормы

$$\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} = \sup_{t>0}\left|\frac{f(t)}{\rho_+(t)}\right|\,, \qquad \rho_+ \in \Phi_m^+\,;$$

$$\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_-}} = \sup_{t>0}\left|\frac{f(t)}{\rho_-(t)}\right|\,, \qquad \rho_- \in \Phi_m^-\,.$$

Функции $f \in \mathfrak{C}_{\rho_+}(0)$ удовлетворяют условию $f(0) = 0$. Известно, что $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ – банаховы пространства.

Рассмотрим операторы $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$, заданные дифференциальными выражениями

$$l_+\varphi(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad l_-\varphi(t) = -\frac{d\varphi(x)}{dt} \tag{3.1}$$

и областями определения:

$D(\mathfrak{D}_+)$ множество значений оператора $J_+\varphi = \int\limits_0^t \varphi(s)ds$ определенного на $\mathfrak{C}_{\rho_+}$.

$D(\mathfrak{D}_-)$ множество значений оператора $J_-\varphi = \int\limits_t^\infty \varphi(s)ds$ определенного на $\mathfrak{C}_{\rho_-}$.

Справедлива следующая

Теорема 3.1. *Операторы $-\mathfrak{D}_\pm$ является генераторами полугрупп $U(x,-\mathfrak{D}_\pm)$ класса C_0, для которых выполняется оценка*

$$\|U(x,\mathfrak{D}_\pm)\varphi\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} \leq e^{-mx}\|\varphi\|_{\mathfrak{C}_{\rho_\pm}}, \tag{3.2}$$

где m – порядок роста или убывания соответствующего веса.

□ Доказательство проведём для $\mathfrak{D}_+$. Для этого рассмотрим интеграл.

$$J(\lambda)f(t) = \int\limits_0^t e^{\lambda(s-t)}f(s)ds. \tag{3.3}$$

В предположении $f \in \mathfrak{C}_{\rho_+}$ и $\lambda + m > 0$ оценим

$$|J(\lambda)f(t)| \leq \int\limits_0^t e^{\lambda(s-t)}|f(s)|ds \leq \|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} \cdot e^{-\lambda t}\int\limits_0^t e^{\lambda s}\rho_+(s)ds.$$

Отсюда, пользуясь оценкой (2.4), после очевидных операций, получаем неравенство

$$\|J(\lambda)f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} \leq \frac{\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}}}{\lambda + m}\ . \tag{3.4}$$

Таким образом, при $\lambda > -m$ операторы $R(\lambda)$ определены и ограничены на пространстве $\mathfrak{C}_{\rho_+}$.

Меняя порядок интегрирования, нетрудно установить, что для них выполняется резольвентное тождество

$$J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda)J(\lambda)J(\mu)\ . \tag{3.5}$$

Следовательно (см. [8], с. 299), операторы $J(\lambda)$ являются псевдорезольвентами, имеющими общее нуль-подпространство $N(J)$ и общую область значений. Кроме того, нетрудно видеть, что нуль пространство $N(J)$ для $J_+f(t) = \int\limits_0^t f(s)ds$ состоит из одного нуля, то есть $N(J_+) = 0$.

Отсюда, по теореме 1, [8], с. 300, получаем, что псевдорезольвента $J(\lambda)$ является резольвентой оператора $-\mathfrak{D}_+$.

Наконец, оценка (3.4), в силу теоремы Хилле-Филлипса-Феллера-Миадеры-Иосиды [8], с. 343, [13], с. 261, показывает, что оператор $-\mathfrak{D}_+$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $U(x, -\mathfrak{D}_+)$ класса C_0 с оценкой (3.2).

Случай $\mathfrak{D}_-$ рассматривается аналогично. ■

Из теоремы 3.1 следует

Теорема 3.2. *Для операторов $\mathfrak{D}_\pm$ определены дробные степени $\mathfrak{D}_\pm^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ равенствами*

$$\mathfrak{D}_\pm^\alpha\varphi(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha-1}(\lambda I + \mathfrak{D}_\pm)^{-1}\mathfrak{D}_\pm\varphi(t)d\lambda \tag{4.6}$$

для $\varphi \in D(\mathfrak{D}_\pm)$.

□ Доказательство следует из формулы Балакришнана (см. [7], с. 358), записанной для $A = -\mathfrak{D}_\pm$, и оценки (2.3). ■

Далее, подставляя в (3.6) резольвенты

$$(\lambda I + \mathfrak{D}_+)^{-1})\varphi(t) = R(\lambda, -\mathfrak{D}_+)_\varphi = \int\limits_0^t e^{\lambda(s-t)}\varphi(s)ds$$

и

$$(\lambda I + \mathfrak{D}_-)^{-1})\varphi(t) = R(\lambda, -\mathfrak{D}_-)_\varphi = -\int\limits_t^\infty e^{\lambda(t-s)}\varphi(s)ds$$

получаем представление операторов $\mathfrak{D}_{\pm}^{\alpha}$ через дробные производные в форме Капуто (см. [1], с. 168)

$$\mathfrak{D}_{+}^{\alpha}\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\varphi'(s)ds, \tag{3.7}$$

$$\mathfrak{D}_{-}^{\alpha}\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{t}^{\infty}(t-s)^{-\alpha}\varphi'(s)ds\,, \tag{3.8}$$

Их можно записать и в форме Римана-Лиувилля

$$\mathfrak{D}_{+}^{\alpha}\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int\limits_{0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\varphi(s)ds\,, \tag{3.9}$$

$$\mathfrak{D}_{-}^{\alpha}\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int\limits_{t}^{\infty}(t-s)^{-\alpha}\varphi(s)ds\,, \tag{3.10}$$

в случае (3.9) в силу равенства $\varphi(0)=0$, а в случае (3.10) – в силу соотношений

$$\int\limits_{t}^{\infty}(s-t)^{-\alpha}\varphi'(s)ds=\int\limits_{0}^{\infty}\tau^{-\alpha}\varphi'_{\tau}(\tau+t)d\tau=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}\tau^{-\alpha}\varphi'_{t}(\tau+t)d\tau=\frac{d}{dt}\int\limits_{0}^{\infty}\tau^{-\alpha}\varphi(\tau+t)d\tau=\frac{d}{dt}\int\limits_{t}^{\infty}(s-t)^{-\alpha}\varphi(s)ds\,.$$

Заметим, что отрицательные дробные степени $\mathfrak{D}_{+}^{-\alpha}$ операторов $\mathfrak{D}_{\pm}$ в силу [13], с. 275, определены соотношением

$$\mathfrak{D}_{\pm}^{-\alpha}\varphi=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\lambda^{-\alpha}R(\lambda,-\mathfrak{D}_{\pm})\varphi d\lambda\,,\qquad 0<\alpha<1\,. \tag{3.11}$$

Операторы $\mathfrak{D}_{\pm}$ являются генераторами C_0-полугруппы. Отсюда, пользуясь неравенством (3.4), получаем оценку

$$\|\mathfrak{D}_{\pm}^{-\alpha}\varphi\|_{\rho_{\pm}}\le\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{\alpha}(\lambda+m)}\|\varphi\|_{\rho_{\pm}}=\frac{1}{m^{\alpha}}\|\varphi\|_{\rho_{\pm}}. \tag{3.12}$$

показывающую ограниченность операторов $\mathfrak{D}_{\pm}^{-\alpha}$ в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_{\pm}}$, соответственно.

Далее, подставляя в (3.11) значение резольвент $R(\lambda,-\mathfrak{D}_{\pm})$, также как и в случае (3.9), (3.10), получаем для $\mathfrak{D}_{\pm}^{-\alpha}$ представления в виде дробных интегралов Римана-Лиувилля

$$\mathfrak{D}_{+}^{-\alpha}\varphi=I_{+}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)ds\,, \qquad (3.13))$$

$$\mathfrak{D}_-^{-\alpha}\varphi = -I_-^{\alpha}\varphi = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_t^{\infty}(s-t)^{\alpha-1}\varphi(s)ds\,. \tag{3.14)}$$

Важным фактом, следующим из (3.12)-(3.14) является

Следствие 3.1. *Пространство $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ является инвариантными относительно операции дробного интегрирования Римана-Лиувилля.*

Как известно см. [9], с.92 для пространств $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ со степенными весами $\rho(t) = (1+t)^{\gamma}$ этот факт не имеет места.

4. Дифференциальные уравнения рационального порядка.

Применим результаты разд. 1-3 к задаче нахождения функции $u(x)$, $x \in (0,\infty)$, имеющей все производные порядка $m\gamma$, $0 < \gamma < 1$, $m = 0, 1, ..., n$ и удовлетворяющей уравнению

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \mathfrak{D}_{\pm}^{m\gamma} u(x) = f(x)\,, \qquad a_n \neq 0\,. \tag{4.1}$$

где $f \in \mathfrak{C}_{\rho_\pm}$.

Нетрудно видеть, что следствием теоремы 1.1 является

Теорема 4.1. *Задача (4.1) равномерно корректно разрешима в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$, соответственно. Ее решение имеет вид*

$$u(x) = \frac{1}{a_n}\sum_{i=0}^{n} R^{k_i}(\alpha_i, \mathfrak{D}_{\pm}^{\gamma}) f(x), \tag{4.2}$$

и справедливо неравенство

$$\|u\|_{\rho_\pm} \leq \frac{M}{m^{\gamma}\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}\,\alpha_i + m)^{k_i}}\|f\|_{\rho_\pm}\,, \tag{4.3}$$

где α_i – корни многочлена $P_n(\alpha) = \sum_{m=0}^{n} a_m\alpha^m$, k_i – их кратности, m – символ веса ρ_+ или ρ_-, соответственно.

Замечание 4.1. Уравнение (4.1) в случае производных Капутто рассматривается в [1] с. 222, когда $f(x)$ преобразуема по Лапласу, при этом приводится представление решения

$$u(x) = \int_0^x G(x-s)f(s)ds\,, \tag{4.4}$$

где $G(s)$ – соответствующая функция Грина.

Таким образом, оценка (4.3) показывает ограниченность интегрального оператора (4.4) в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_+}$.

Отметим, что для $\mathfrak{D}_-^{\gamma}$ разрешимость задачи (4.1) вообще ранее не рассматривалась.

Литература

1. Учайкин В.В. Методы дробных производных / Ульяновск: Изд. «Логос», 2002. – 512 с.
2. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации // М.: Логос, 2002. – 664 с.
3. Бабенко Ю.И. Методы дробного интегродифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена // СПб.: НПО «Профессионал», 2009. – 584 с.
4. Бабенко Ю.И. Тепломассообмен: Методы расчета тепловых и диффузных потоков / Л.: Химия, 1986. – 144 с.
5. Mainardi F. The time fractional diffusion equation / Изв. ВУЗов, Радиофизика. – 1995. – 87;1-2.
6. Маслов В.П. Операторные методы // М. :Наука, 1973. 544 с.
7. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / М.: Наука, 1967. – 464 с.
8. Иосида К. Функциональный анализ: Учебник / пер. с англ. В.М,Волосова. М.: Мир, 1967. – 624 с.
9. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
10. Костин В.А., Небольсина М.Н. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка // ДАН. – 2009. – 428;1. – С.20-22.
11. Гельфанд И.М. Об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах и интегралах // Матем. сборник. – 1941. – 9(51). – С.51-66.
12. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р.Филлипс. М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 829 с.
13. Забрейко П.П. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносльский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский. М. Наука, 1966. – 499 с.
14. Костин Д.В. К решению задачи о распространении сигналов во фрактальных средах в классах функций не преобразуемых по Лапласу / Д.В. Костин, В.А. Костин, А.В. Костин. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2012. Материалы международной конференции, Воронеж, С.109-111.

C_0-OPERATOR POLYNOMIALS AND CORRECT SOLVABILITY OF EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

V.A. Kostin, M.N. Nebolsina, Salim Badran

Voronezh State University
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: vlkostin@mail.ru, marinanebolsina@yandex.ru

Abstract. Correct solvability of operator equations of the $\sum_{m=0}^{n} a_m A^m u = f$ type where A is the semi-group generator of the class C_0 which contains operators acting in the Banach space of E, $f \in E$ is established. Results are applied to problems of differential equations with operators of fractional differentiation in spaces of functions not transformed according to Laplace.

Key words: correct solvability, semi-group's generator of the class C_0, hyper increasing and hyper decreasing weight functions.

MSC 58A35

ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ СОБОЛЕВА ДЛЯ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВ

П.А. Кулешов

Воронежский Государственный Университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: pavkuleshov@yandex.ru

Аннотация. Доказываются теоремы вложения Соболева для стратифицированных множеств определенного класса. Показано, что для множества Ω выполнено вложение пространства $W^{1,p}_{0,\mu}(\Omega)$ в $L^q_\mu(\Omega)$ при некотором q, зависящем от p и от размерностей стратов. Доказательство опирается на процедуру симметризации по Шварцу и её свойства.

Ключевые слова: теорема вложения, симметризация Шварца, стратифицированные множества.

В последние десятилетия, в связи с некоторыми физическими приложениями, обозначился устойчивый интерес к дифференциальным уравнениям на, так называемых, стратифицированных множествах. Особенно интенсивно изучались уравнения на геометрических графах (в нашей терминологии — «одномерных» стратифицированных множествах), см. [8]. В этом случае, полученные к настоящему времени результаты составляют уже достаточно развитую теорию. Что касается общего случая, то здесь делаются пока только первые шаги. В частности, вопрос об аналогах теорем вложения Соболева практически не рассматривался. В данной работе предлагается подход позволяющий сравнительно просто получать такие теоремы. Вопрос о точности константы пока не обсуждается. Очевидно, что этот вопрос значительно сложнее чем его классический аналог. Наше доказательство опирается на результаты М. Браманти [2], которые в свою очередь являются обобщением результатов Д. Таленти [5], относящихся к известному принципу Пойя-Сегё. Этот принцип, утверждающий, что интеграл Дирихле не возрастает при симметризации, имеет большое количество применений в классической теории.

1. Стратифицированные множества

Связное замкнутое подмножество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется стратифицированным, если оно представлено в виде объединения открытых подмногообразий $\sigma_{kj} \subset \Omega$ пространства $\mathbb{R}^n$, называемых стратами, примыкающих друг к другу по типу клеточного комплекса. В обозначении σ_{kj} первый индекс означает размерность страта, а второй его номер при автономной нумерации стратов данной размерности. Будем писать $\sigma_{li} \prec \sigma_{kj}$ или $\sigma_{kj} \succ \sigma_{li}$ и говорить, что σ_{li} примыкает к σ_{kj} , если $l < k$ и $\sigma_{li} \subset \partial\sigma_{kj} = \overline{\sigma_{kj}} \setminus \sigma_{kj}$. Страт σ_{kj} назовем свободным если в Ω нет стратов к которым бы он примыкал. К примеру, страты старшей размерности всегда будут являться свободными.

Обозначим через Σ множество всех стратов из Ω. Мы предполагаем выполненными следующие два условия, первое из которых – обычное требование на примыкания клеток в клеточном комплексе.

- Любые два страта не пересекаются, а их замыкания либо не пересекаются, либо пересечение их является объединением стратов из Σ. Граница страта σ_{kj} является объединением стратов, размерность которых меньше k.

- Для любого $X \in \sigma_{k-1i}$ «звезда»

$$S = \sigma_{k-1i} \cup \Big(\bigcup_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1i}} \sigma_{kj} \Big)$$

допускает локальное (вблизи X) выпрямление, что означает существование такой окрестности V точки X в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$ и такого диффеоморфизма $\Phi : V \to W$, что образ множества $V \cap S$ представляет собой объединение $(k-1)$-мерного шара (образа части σ_{k-1i}, попавшей в V) и примыкающих к нему полушарий (аналогичных образов частей σ_{kj}). Это наглядно представлено на рис. 1.

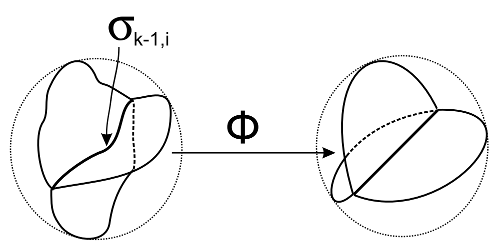

Рис. 1. Локальное выпрямление звезды.

Вообще говоря, стратифицированное множество — это тройка (Ω, Σ, ϕ), где ϕ — отображение описывающее «склейку» Ω из стратов семейства Σ), а Σ множество всех стратов из Ω, но нам будет удобнее называть стратифицированным множеством само Ω.

Топология на Ω индуцируется стандартной топологией пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. подмножество Ω_0 стратифицированного множества Ω называется открытым если существует открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ пересечение которого с Ω дает Ω_0. Все дальнейшие топологические понятия будут связаны именно с этой топологией.

Пусть Ω_0 — связное и открытое подмножество Ω, составленное из стратов семейства Σ и такое, что $\overline{\Omega}_0 = \Omega$. Тогда разность $\Omega \setminus \Omega_0$, очевидно, является границей множества Ω_0 и будет тоже состоять из стратов, а потому будет обозначаться через $\partial\Omega_0$. В дальнейшем, под обозначением $\Omega = (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ мы будем понимать, что данное стратифицированное множество Ω разбито на Ω_0 и $\partial\Omega_0$ указанным способом. Возможен случай когда $\partial\Omega_0$ пусто, однако, в данной работе этот случай исключен. Для более подробного знакомства со стратифицированными множествами см. [8].

2. Пространства $L^p_\mu(\Omega)$ и $W^{1,p}_{0,\mu}(\Omega_0)$

Назовем подмножество $\omega \subset \Omega$ измеримым, если измеримы по Лебегу пересечения $\omega \cap \sigma_{kj}$ по всем значениям индексов k и j. Мерой такого множества назовем число

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj}} \mu_k(\omega \cap \sigma_{kj}) \,,$$

где μ_k — k-мерная мера Лебега на σ_{kj}. Легко показать, что так определенные измеримые множества образуют σ-алгебру, а функция μ обладает свойствами меры. Измеримые по мере μ функции определяются также как и в классическом случае. Интеграл Лебега суммируемой функции f на Ω оказывается равным сумме интегралов Лебега сужений этой функции на страты, т.е.

$$\int\limits_{\Omega} f\, d\mu = \sum_{k,j} \int\limits_{\sigma_{kj}} f\, d\mu_k\ ,$$

где суммирование осуществляется по всем стратам.

В соответствии с этим, пространство $L^p_\mu(\Omega)$ определяется как пространство измеримых на Ω функций f таких, что $|f|^p$ суммируема, т.е. $\int\limits_{\Omega} |f|^p\, d\mu < \infty$. Норма в $L^p_\mu(\Omega)$ определяется также как и в классическом случае:

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |f|^p\, d\mu \right)^{1/p} .$$

Расстоянием между двумя точками на множестве Ω будем называть минимальную длину кривой, лежащей в Ω и соединяющей их. При этом длину кривой будем считать как длину в некотором $\mathbb{R}^m$, содержащем Ω.

Пусть $\Omega = (\Omega_0, \partial\Omega_0)$. Обозначим через $C_\mu(\Omega_0)$ $(C_\mu(\Omega))$ множество непрерывных на $\Omega_0(\Omega)$ функций. Через $C^1_\mu(\Omega_0)$ обозначим множество таких непрерывных на Ω_0 функций, что их сужения на любой страт из Ω_0 являются непрерывно дифференцируемыми функциями. Через $C_{0,\mu}(\Omega_0)$ обозначим множество тех функций из $C_\mu(\Omega)$, которые обращаются в нуль на $\partial\Omega_0$. Теперь мы можем определить стратифицированный аналог пространства $W^{1,p}_0$ как пополнение пространства $C^1_{0,\mu}(\Omega_0) = C^1_\mu(\Omega_0) \cap C_{0,\mu}(\Omega_0)$ по норме

$$\|f\|^{1,p}_{0,\mu} = \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla f|^p\, d\mu \right)^{1/p} .$$

Здесь ∇f на каждом k-мерном страте есть классический k-мерный градиент сужения функции на данный страт. Обозначать данное пространство будем $W^{1,p}_{0,\mu}(\Omega_0)$. Аналогично, пространство $W^{1,p}_\mu(\Omega)$ определяется как пополнение пространства $C^1_\mu(\Omega)$ по норме

$$\|f\|^{1,p}_\mu = \left(\int\limits_{\Omega} (|f|^p + |\nabla f|^p)\, d\mu \right)^{1/p} .$$

3. Теорема вложения Соболева

Введем следующее определение.

Определение 1. *Стратифицированное множество $\Omega = (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ будем называть «спрямляемым» если для любого $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ при $k > 0$ существует страт $\sigma_{k-1i} \subset \partial\Omega_0$, для которого найдется такое связное подмножество Ω, обозначаемое $\widetilde{\Omega}_{kj}$, которое содержит страты σ_{kj} и σ_{k-1i}, состоит только из стартов размерности k и $(k-1)$ и допускает изометричное отображение в некоторое подмножество $\mathbb{R}^k$; в свою очередь, при $k = 0$ для страта $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ должен найтись страт $\sigma_{ki} \subset \partial\Omega_0$, а множество $\widetilde{\Omega}_{kj}$ должно состоять из стартов размерности k и $(k+1)$, быть связным и допускать изометричное отображение в $\mathbb{R}^{k+1}$.*

Здесь и далее считается, что множество $\widetilde{\Omega}_{kj}$ таково, что для его стратов, имеющих старшую в рамках этого множества размерность, пересечение замыканий любых двух из них либо представляет собой поверхность класса C^2, либо пусто, а пересечение замыканий любых трех всегда пусто.

Мы также будем считать, что $\widetilde{\Omega}_{kj} \cap \partial\Omega_0$ состоит ровно из одного страта. Если их более одного, то некоторый набор стратов входящих в $\widetilde{\Omega}_{kj}$ является «лишним» и может быть из него выброшен.

Пример, иллюстрирующий это определение, показан на рис. 2, где в качестве $\partial\Omega_0$ взято замыкание страта σ_{11}(обозначен жирной линией). В множество $\widetilde{\Omega}_{25}$ войдут следующие страты: $\sigma_{25}, \sigma_{13}, \sigma_{24}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{11}$. Объединение всех этих стратов изометрично отображается в прямоугольник.

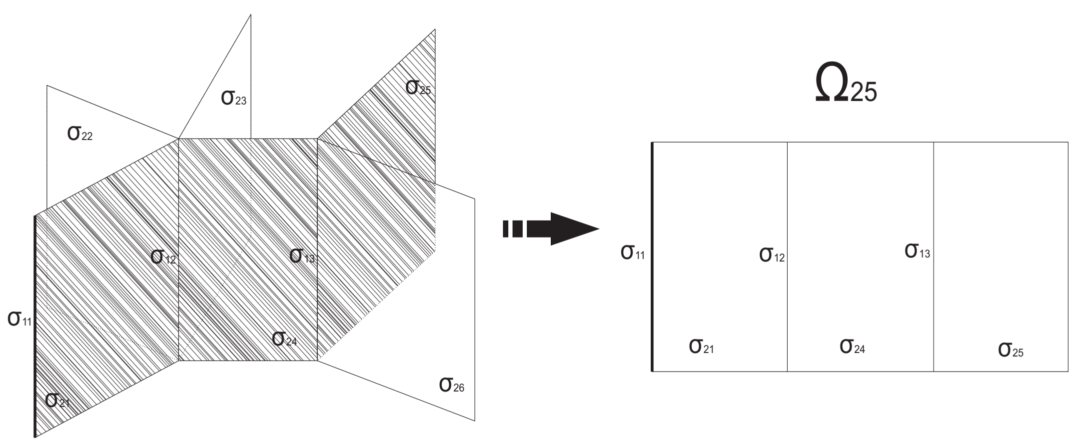

Рис. 2. Пример стратифицированного множества.

Теперь мы можем сформулировать основной результат данной работы.

Теорема 1. *Пусть дано спрямляемое стратифицированное множество $\Omega = (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ так, что $\{1 < k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n = n\}$ — размерности стратов, входящих в Ω_0 (исключая 0 и 1) в порядке возрастания, и $f \in W^{1,p}_{0,\mu}(\Omega_0)$. Тогда $f \in L^q_\mu(\Omega_0)$ и выполнено*

$$\left(\int\limits_{\Omega_0} |f|^q \, d\mu \right)^{1/q} \leq C \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla f|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \tag{1}$$

где q определяется следующим образом:

$$\begin{cases} 1 \le q < \infty, & \text{если } p = n; \\ 1 \le q \le np/(n-p), & \text{если } p \in [k_{n-1}, n); \\ 1 \le q \le k_{n-1}p/(k_{n-1}-p), & \text{если } p \in [k_{n-2}, k_{n-1}); \\ \dots \\ 1 \le q \le k_2p/(k_2-p), & \text{если } p \in [k_1, k_2); \\ 1 \le q \le k_1p/(k_1-p), & \text{если } p \in [1, k_1). \end{cases} \tag{2}$$

□ В силу того, что, по определению, $C^1_{0,\mu}(\Omega_0)$ плотно в $W^{1,p}_{0,\mu}(\Omega_0)$ по норме последнего, требуемый результат достаточно доказать для случая когда $f \in C^1_{0,\mu}(\Omega_0)$. Возьмем произвольный страт $\sigma_{kj} \subset \Omega_0,\ k > 0$. По условию найдется $\widetilde{\Omega}_{kj}$, допускающее изометричное отображение в подмножество $\mathbb{R}^k$, которое мы будем обозначать Ω_{kj}. Функция $f \in C^1_{0,\mu}(\Omega_0)$ очевидным образом переносится на Ω_{kj}. Обозначать её, ради простоты, будем тоже через f. Множество Ω_{kj} является объединением непересекающихся образов стратов из $\widetilde{\Omega}_{kj}$ размерности k, которые примыкают друг к другу по поверхностям класса C^2, образованным образами стартов из $\widetilde{\Omega}_{kj}$ размерности $(k-1)$. Для наглядности см. рис. 2. На каждом из этих образов f непрерывно дифференцируема, а значит принадлежит классу $W^{1,p}$, и кроме того, f непрерывна на всем Ω_{kj}. В этом случае, согласно результатам Ю.В. Кузнецова [6], получим, что $f \in W^{1,p}(\Omega_{kj})$. Вдобавок, f обращается в нуль на части границы Ω_{kj} положительной меры, а именно, на образе единственного страта из $\widetilde{\Omega}_{kj}$ лежащего в $\partial\Omega_0$.

При этом выполнены следующие неравенства:

$$\int\limits_{\sigma_{kj}} |f|^p \, d\mu \le \int\limits_{\Omega_{kj}} |f|^p \, dx \,, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega_{kj}} |\nabla f|^p \, dx \le \int\limits_{\Omega_0} |\nabla f|^p \, d\mu \,. \tag{4}$$

Теперь применим к функции f на Ω_{kj} симметризацию Шварца. Получим радиальную, т.е. зависящую только от расстояния до центра шара, функцию f^*, определенную в шаре B_{kj} и невозрастающую при отдалении от центра. Причем по известным свойствам подобной симметризации (см. [7]) будет:

$$\int\limits_{\Omega_{kj}} |f|^p \, dx = \int\limits_{B_{kj}} |f^*|^p \, dx \,. \tag{5}$$

Пользуясь (3), (5) мы можем написать:

$$\int\limits_{\Omega_0} |f|^q \, d\mu = \sum_{k,j} \int\limits_{\sigma_{kj}} |f|^q \, d\mu \le \sum_{k,j} \int\limits_{\Omega_{kj}} |f|^q \, dx = \sum_{k,j} \int\limits_{B_{kj}} |f^*|^q \, dx \,. \tag{6}$$

Кроме того, согласно [2] из того, что $f \in W^{1,p}(\Omega_{kj})$ и обращается в нуль на части границы положительной меры будем иметь:

$$\widetilde{C}_{kj} \int\limits_{\Omega_{kj}} |\nabla f|^p \, dx \geq \int\limits_{B_{kj}} |\nabla f^*|^p \, dx \,, \tag{7}$$

где $\widetilde{C}_{kj} \geq 1$ и зависит от меры той части границы на которой функция равна нулю, в частности, если она совпадает с мерой всей границы Ω_{kj}, то будет $\widetilde{C}_{kj} = 1$ (заметим, что $\widetilde{C}_{kj}$ не зависит от f, а зависит от Ω_{kj}, т.е. от Ω_0). При этом f^* будет обращаться в нуль уже на всей границе шара B_{kj} и мы будем иметь $f^* \in W_0^{1,p}(B_{kj})$. А потому мы можем применить к ней классическую теорему вложения. Используя её, неравенства (4), (7), а также тот факт, что $q \geq 1$, получим

$$\left(\sum_{k,j} \int\limits_{B_{kj}} |f^*|^q \, dx \right)^{1/q} \leq \sum_{k,j} \left(\int\limits_{B_{kj}} |f^*|^q \, dx \right)^{1/q} \leq \sum_{k,j} C_{kj} \left(\int\limits_{B_{kj}} |\nabla f^*|^p \, dx \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{k,j} C_{kj} \widetilde{C}_{kj} \left(\int\limits_{\Omega_{kj}} |\nabla f|^p \, dx \right)^{1/p} \leq C \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla f|^p \, d\mu \right)^{1/p} .$$

Пользуясь последним неравенством и (6), в итоге получаем

$$\left(\int\limits_{\Omega_0} |f|^q \, d\mu \right)^{1/q} \leq C \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla f|^p \, d\mu \right)^{1/p} , \tag{8}$$

где $C = \sum\limits_{k,j} C_{kj} \widetilde{C}_{kj}$ не зависит от f.

Однако, в классическом случае теорем вложения, которым мы пользуемся, q зависит от размерности множества n и от p, а именно, когда $1 \leq p < n$ пространство $W_0^{1,p}(\Omega)$ вложено в $L^q(\Omega)$ при $1 \leq q \leq np/(n-p)$, когда $p = n$ при $1 \leq q < \infty$, а когда $p > n$ вложение будет в $C_0(\Omega)$, а значит и в $L^\infty(\Omega)$. Кроме того, как и в классическом случае, если $1 \leq q_1 < q_2$, то $L_\mu^{q_1}(\Omega) \supset L_\mu^{q_2}(\Omega)$. Поэтому, фиксировав p и выбрав минимум среди максимальных допустимых q при каждой размерности, мы получим показатель q удовлетворяющий всему стратифицированному множеству при данном p. Именно такому выбору и соответствует (2).

Вернемся к пропущенному случаю, когда страт σ_{kj} из Ω_0 имеет размерность равную нулю. В этом случае мы поступим следующим образом. По условию, существует множество $\widetilde{\Omega}_{0j}$ состоящее из стратов размерности 0 и 1, содержащее σ_{0j} и некоторый страт $\sigma_{0i} \subset \partial\Omega_0$, которое связно и допускает изометричное отображение в отрезок. Добавим к $\widetilde{\Omega}_{0j}$ новый страт σ_{1j}, который является интервалом с длиной равной единице, одним из концов которого будет страт σ_{0j}, например, см. рис. 3, здесь граница состоит из замыкания страта σ_{11}, и при рассмотрении страта σ_{05} мы добавляем к множеству страт σ_{17}, полученное множество $\widetilde{\Omega}_{05}$ выделено жирной линией. Функцию f на σ_{1j} положим всюду равной значению f в σ_{0j}, который, напомним, является точкой. Тогда будем иметь

$$\int\limits_{\sigma_{0j}} |f|^p \, d\mu = \int\limits_{\sigma_{1j}} |f|^p \, d\mu \,,$$

$$\int\limits_{\sigma_{0j}} |\nabla f|^p \, d\mu = \int\limits_{\sigma_{1j}} |\nabla f|^p \, d\mu = 0 \,.$$

Кроме того, функция f будет непрерывна на множестве $\widetilde{\Omega}_{1j} = \widetilde{\Omega}_{0j} \cup \sigma_{1j}$ и непрерывно дифференцируема на σ_{1j}. Поэтому, вместо страта σ_{0j} мы можем рассмотреть страт σ_{1j} и построенное для него множество $\widetilde{\Omega}_{1j}$, удовлетворяющее всем требованиям определения 1. Таким образом, ситуация свелась к уже рассмотренному случаю $k = 1$. ■

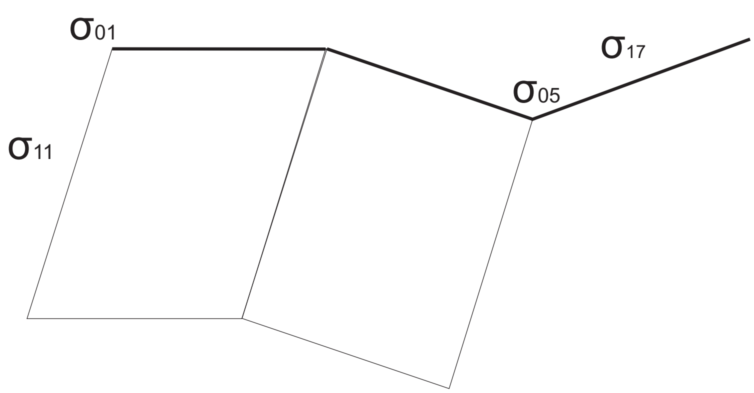

Рис. 3. Добавление вспомогательного страта.

Замечание 1. Теорему можно естественным образом обобщить для пространств $W^{m,p}_{0,\mu}(\Omega_0)$. Действительно, для функции класса $W^{m,p}_{0,\mu}$ все её производные до порядка $(k-1)$ включительно будут из $W^{1,p}_{0,\mu}(\Omega_0)$. Поэтому последовательно применив к каждой из них данную теорему получим вложение в $L^q_\mu(\Omega_0)$, где q определяется из:

$$\begin{cases} 1 \le q < \infty, & \text{если } mp = n; \\ 1 \le q \le np/(n-mp), & \text{если } mp \in [k_{n-1}, n); \\ 1 \le q \le k_{n-1}p/(k_{n-1}-mp), & \text{если } mp \in [k_{n-2}, k_{n-1}); \\ \dots \\ 1 \le q \le k_2 p/(k_2 - mp), & \text{если } mp \in [k_1, k_2); \\ 1 \le q \le k_1 p/(k_1 - mp), & \text{если } mp \in [1, k_1). \end{cases} \tag{9}$$

Замечание 2. Отметим важный случай, так называемого, мягкого лапласиана (см. [8]), в некоторых задачах с ним связанных приходится рассматривать интеграл вида

$\int\limits_{\Omega_0} p|\nabla f|^p \, d\mu$ (именуемый интегралом Дирихле), где коэффициент p равен единице на свободных (т.е. не содержащихся в границе других) стратах и равен нулю на остальных. В этом случае Теорема 1 применима, но в (2) будут учитываться размерности только свободных стратов. Например, если свободными являются только страты максимальной размерности, то требования на q и p не будут ни чем отличаться от классического случая.

К случаю мягкого лапласиана можно свести следующий случай. Пусть в определении нормы пространства $L^p_\mu(\Omega_0)$ показатель p одинаков только для стратов одной размерности, т.е.

$$||f|| = \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{\Omega_0} \rho_k |f|^{p_k} \, d\mu \right)^{1/p_k},$$

где ρ_k равен единице на стартах размерности k и нулю на остальных. Так как p_k не зависят друг от друга и норма представляет собой просто сумму слагаемых зависящих только от некоторого p_k, то мы можем оценить каждое из них в отдельности. Для этого нам достаточно несколько раз применить Теорему 1 для случая мягкого лапласиана, причем в каждом случае свободными будут только страты какой-то одной размерности. Нам неизвестны примеры задач, в которых возникает необходимость рассмотрения подобных норм, что не так странно, учитывая, что касательно стратифицированных множеств на данный момент получено не так много результатов, однако, мы предполагаем их существование возможным.

Отметим, что частный случай теорем вложения — неравенство Пуанкаре - уже был доказан в стратифицированном случае А.А. Гавриловым и О.М. Пенкиным (см. [3]), причем для более широкого класса множеств, но его доказательство существенно более громоздкое, нежели приведенное нами. Класс множеств рассмотренный нами не допускает «слишком кривых» множеств, «сложных» примыканий стратов, наличия углов внутри множества и т.д., хотя даже в таких случаях возможно сведение ситуации к рассмотренной путем добавления вспомогательных стратов, включения в $\widetilde{\Omega}_{kj}$ не целых стратов, а их некоторых подмножеств и т.п. Однако, это все частности на которых останавливаться нет смысла. Тем более, что подавляющее большинство случаев, возникающих в приложениях попадают в установленные нами рамки.

Что касается вопроса о точной константе в неравенстве (8), то он разумеется представляет большой интерес. К сожалению, рассуждения проведенные нами в ходе доказательства Теоремы 1 не позволяют о нем говорить по причине грубости использованных оценок, которая возникает прежде всего из-за того, что каждый страт рассматривается фактически отдельно. Применить же использованные инструменты из классической теории ко всему стратифицированному множеству невозможно, что ставит перед необходимостью обобщения данных вспомогательных фактов, прежде всего принципа Пойа-Сегё, на стратифицированный случай.

Автор благодарит О.М. Пенкина за постановку задачи и полезные обсуждения вопросов, касающихся данной статьи.

Литература

1. Adams R.A. Sobolev spaces / AP, 1975
2. Bramanti M. On the gradient of Schwarz symmetrization of functions in Sobolev spaces // Boll. Un. Mat. Ital. – 1993. – B(7). – №2. – P.413-430.
3. Gavrilov A., Nicaise S., Penkin O. Poincare's inequality on stratified sets and applications // Rapport de recherche 01.2, Universite de Valenciennes. – Fevrier 2001. -— P.1-20.
4. Saloff-Coste L. Aspects of Sobolev type inequalities / Cambridge University Press, 2002.
5. Talenti G. Best Constant in Sobolev Inequality // Ann. Mat. Pura Appl. – 1976. – 110. – P.353-372.
6. Кузнецов Ю.В. О склейке функций из пространств $W^r_{p,\theta}$ / Труды Математического института АН СССР. – 1976. – 140. – с. 191-200.
7. Либ Э., Лосс М. Анализ / Новосибирск: Научная книга, 1998.
8. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / М.:Физматлит, 2005.
9. Пойа Г., Сегё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике / М.: Физматлит, 1962.

SOBOLEV'S IMBEDDING THEOREM ON STRATIFIED SETS

P.A. Kuleshov

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: pavkuleshov@yandex.ru

Abstract. It is proved Sobolev's imbedding theorem connected with stratified sets of certain class. It turns out that for the stratified set Ω, there exists the embedding of the space $W^{1,p}_{0,\mu}(\Omega)$ into $L^q_\mu(\Omega)$ with some q depending on p and dimensions of strats. The proof relies on Schwartz's symmetrization and its properties.

Key words: Sobolev's imbedding theorem, Schwartz's symmetrization, stratified sets.

MSC 26A15

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЫСОКОЙ ГЛАДКОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ СУММАМИ ФУРЬЕ

О.А. Новиков, О.Г. Ровенская

Донбасский государственный педагогический университет,
ул. Г. Батюка, 19, Славянск, 84116, Украина, e-mail: o.rovenskaya@mail.ru

Аннотация. Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фурье на классах периодических функций многих переменных высокой гладкости. Эти соотношения в некоторых важных случаях обеспечивают решение известной задачи Колмогорова-Никольского для прямоугольных сумм Фурье и указанных классов функций.

Ключевые слова: (ψ,β)-производная, прямоугольные суммы Фурье, задача Колмогорова-Никольского.

1. Введение. Следуя работе [1] (см. также [2]), классы $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных, позволяющие учитывать по отдельности свойства обыкновенных и смешанных частных производных, будем задавать следующим образом.

Пусть R^m — евклидово пространство с елементами $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_m)$, $T^m=\prod\limits_{i=1}^{m}[-\pi;\pi]$ — m-мерный куб с ребром 2π,

$$N^m=\left\{\vec{x}\in R^m|x_i\in\mathbb{N},\ \ i=1,2,...,m\right\},$$

$$N_*^m=\left\{\vec{x}\in R^m|x_i\in N_*=\mathbb{N}\cup\{0\},\ \ i=1,2,...,m\right\},$$
$$N_i^m=\left\{\vec{x}\in R^m|x_i\in\mathbb{N},\ \ x_j\in N_*,\ \ i\neq j\right\},$$
$$E^m=\left\{\vec{x}\in R^m|x_i\in\{0;1\},\ \ i=1,2,...,m\right\}.$$

Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной суммируемых на кубе T^m функций $f(\vec{x})=f(x_1,x_2,...,x_m)$.

Пусть $f\in L(T^m)$. Каждой паре точек $\vec{s}\in E^m$, $\vec{k}\in N_*^m$ поставим в соответствие величину

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)=\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m}f(\vec{x})\prod_{i=1}^{m}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)dx_i\,.$$

Величины $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)$, $\vec{s}\in E^m$, $\vec{k}\in N_*^m$ являются коэффициентами Фурье функции $f\in L(T^m)$ [1].

Каждому вектору $\vec{k}\in N_*^m$ поставим в соответствие основную гармонику функции $f(\vec{x})$,

$$A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^m}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\prod_{i=1}^{m}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)$$

и гармонику, сопряженную по переменной x_i,

$$A^{\vec{e}_i}_{\vec{k}}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s}\in E^m} a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(f) \prod_{j\in\overline{m}\setminus\{i\}} \cos\left(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\right)\cos\left(k_i x_i - \frac{(s_i+1)\pi}{2}\right).$$

Следуя [1], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением

$$S[f] = \sum_{\vec{k}\in N^m_*} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}),$$

в котором $q(\vec{k})$ — количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $G_{\vec{n}} = \prod\limits_{i=1}^{m}[1;n_i-1]$ — прямоугольный параллелепипед, соответствующий вектору $\vec{n}$. Прямоугольной частичной суммой ряда Фурье будем называть тригонометрический полином вида

$$S_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{k}\in G_{\vec{n}}} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Пусть $f\in L(T^m)$ и $\psi_{ij}(k)$, $\Psi_{ij}(k)$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2$ — фиксированные наборы систем чисел, $k\in N_*$. Положим

$$\overline{\psi}_i(k) = \sqrt{\psi^2_{i1}(k)+\psi^2_{i2}(k)},\quad \overline{\Psi}_i(k) = \sqrt{\Psi^2_{i1}(k)+\Psi^2_{i2}(k)}$$

и будем считать, что выполнены условия: $\overline{\psi}_i(k)\neq 0$, $\overline{\Psi}_i(k)\neq 0$, $k\in\mathbb{N}$, $\psi_{i1}(0)=1$, $\Psi_{i1}(0)=1$, $\psi_{i2}(0)=0$, $\Psi_{i2}(0)=0$, $i=1,2,...,m$.

Пусть ряд

$$\sum_{\vec{k}\in N^m_i} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}\overline{\psi}^2_i(k_i)} [\psi_{i1}(k_i)A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) - \psi_{i2}(k_i)A^{\vec{e}_i}_{\vec{k}}(f;\vec{x})]$$

является рядом Фурье некоторой функции из $L(T^m)$. Обозначим ее символом $f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \dfrac{\partial^{\overline{\psi}_i} f(\vec{x})}{\partial x_i}$ и назовем $\overline{\psi}_i$-производной функции $f(\vec{x})$ по переменной x_i, $i=1,2,...,m$.

Пусть $\overline{m}=\{1,2,...,m\}$. Для фиксированного r-элементного множества $\mu(r)\subset\overline{m}$, $\mu(r)=\{i_1,i_2,...,i_r\}$, смешанной $\overline{\Psi}_\mu$-производной по переменным x_i, $i\in\mu(r)$, по аналогии с определением обыкновенной смешанной частной производной, будем называть функцию $f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})$, которая задается соотношением

$$f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_{i_r}}\partial^{\overline{\Psi}_{i_{r-1}}}...\partial^{\overline{\Psi}_{i_1}} f(\vec{x})}{\partial x_{i_r}\partial x_{i_{r-1}}...\partial x_{i_1}}\ .$$

Для заданного набора функций ψ_{ij}, Ψ_{ij}, $i=1,2,...,m$, $j=1,2$, символом $C^{m\overline{\psi}}_{\infty}$ обозначим множество непрерывных функций $f\in L(T^m)$, имеющих почти везде ограниченные $\overline{\Psi}_\mu$- и $\overline{\psi}_i$-производные:

$$\operatorname{ess\,sup}|f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})|\le 1,\qquad \operatorname{ess\,sup}|f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})|\le 1,\qquad i=1,2,...,m,\qquad \mu\subset\overline{m},\qquad \vec{x}\in T^m\ .$$

Если для наборов функций $\psi_{ij}(k)$ и $\Psi_{ij}(k)$, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2$, определяющих класс $C_\infty^{m\overline{\psi}}$, существуют функции $\psi_i(k)$, $\Psi_i(k)$ и числа β_i, β_i^*, $i = 1,2,...,m$, такие, что

$$\psi_{i1}(k) = \psi_i(k)\cos\frac{\beta_i\pi}{2}\ , \qquad \psi_{i2}(k) = \psi_i(k)\sin\frac{\beta_i\pi}{2}\ ,$$

$$\Psi_{i1}(k) = \Psi_i(k)\cos\frac{\beta_i^*\pi}{2}\ , \qquad \Psi_{i2}(k) = \Psi_i(k)\sin\frac{\beta_i^*\pi}{2}\ , \qquad i = 1,2,...,m,$$

то класс $C_\infty^{m\overline{\psi}}$ является классом (ψ,β)-дифференцируемых периодических функций многих переменных и обозначается $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$ [2]. В этом случае для производных используют естественные обозначения $f_{\beta_i}^{\psi_i}(\vec{x})$ и $f_{\beta_\mu}^{\Psi_\mu}(\vec{x})$. Если $m = 2$ и, кроме того, для чисел $r > 0$, $s > 0$, $r_1 \geq r$, $s_1 \geq s$ выполнены условия $\Psi_1(k) = k^{-r}$, $\Psi_2(k) = k^{-s}$, $\psi_1(k) = k^{-r_1}$, $\psi_2(k) = k^{-s_1}$, $\beta_1 = r$, $\beta_1^* = s$, $\beta_2 = r_1$, $\beta_2^* = s_1$, то классы $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$ совпадают с классами $W_{r_1,s_1}^{r,s}$. В работе [3] изучены вопросы приближения классов $W_{r_1,s_1}^{r,s}$ прямоугольными суммами Фурье

$$S_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = S_{n_1,n_2}(f;\vec{x}) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1} 2^{-q(\vec{k})} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Там же для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фурье $S_{\vec{n}}(f;\vec{x})$, взятых по классам $W_{r_1,s_1}^{r,s}$, получено асимптотическое равенство при $n_i \to \infty$, $i = 1,2$

$$\mathcal{E}(W_{r_1,s_1}^{r,s}; S_{\vec{n}}) = \sup_{f\in W_{r_1,s_1}^{r,s}} ||f(\vec{x}) - S_{\vec{n}}(f;x)||_C =$$

$$= \frac{4\ln n_1}{\pi^2 n_1^{r_1}} + \frac{4\ln n_2}{\pi^2 n_2^{s_1}} + O(1)\left(\frac{\ln n_1 \ln n_2}{n_1^r n_2^s} + \frac{1}{n_1^{r_1}} + \frac{1}{n_2^{s_1}}\right).$$

В случае, когда функции, задающие класс, определяются соотношениями $\psi_i(k) = q_i^k$, $q_i \in (0;1)$, $\Psi_i(k) = Q_i^k$, $Q_i \in (0;1)$, $i = 1,2$, классы $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$ обозначаются $C_{\beta,\infty}^{mq}$.

В работе [4] С.М. Никольский получил асимптотическую формулу для верхних граней уклонений сумм Фурье на классах аналитических функций одной переменной $C_{\beta,\infty}^q$

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^q; S_n) = \sup_{f\in C_{\beta,\infty}^q} ||f(x) - S_n(f;x)||_C = \frac{8q^n}{\pi^2}K(q) + O(1)q^n n^{-1},$$

где

$$K(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - q^2\sin^2 t}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. С.Б. Стечкин [15] этот результат получил другим способом, что позволило уточнить остаточный член последнего равенства.

В роботе [16] рассмотрены вопросы приближения классов функций многих переменных $C_{\beta,\infty}^{mq}$ прямоугольными суммами Фурье $S_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ и получена асимптотическая при $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$ формула

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{mq}; S_{\vec{n}}) = \sup_{f\in C_{\beta,\infty}^{mq}} ||f(\vec{x}) - S_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\sum_{i=1}^{m} q_i^{n_i}\mathrm{K}(q_i) + O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i^{n_i}}{n_i(1-q_i)} + \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\frac{Q_j^{n_j}}{1-Q_j}\right).$$

Обозначим символом D_q множество последовательностей $\psi(k)$, $k\in\mathbb{N}$, для которых выполняются соотношения

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q,\ \ q\in(0;1).$$

Для верхних граней уклонений сумм Фурье на классах функций одной переменной $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi(k)\in D_q$ в роботе [17] получена асимптотическая при $n\to\infty$ формула

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty};S_n) = \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}K(q) + O(1)(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2})\right),$$

где

$$\varepsilon_n = \sup_{k\geq n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|.$$

В настоящей работе получена асимптотическая при $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$ формула, которая является многомерным аналогом последнего равенства для классов функций $C^{m\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi_i(k)\in D_{q_i}$, $q_i\in(0;1)$, $\Psi_i(k)\ \in D_{Q_i}$, $Q_i\in(0;1)$, $i=1,2,...,m$.

2. Основной результат. Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\psi_i(x)\in D_{q_i}$, $\Psi_i(x)\in D_{Q_i}$, $q_i\in(0;1)$, $Q_i\in(0;1)$, β_i, $\beta_i^*\in\mathbb{R}$, $i=1,2,...,m$. *Тогда при* $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}(C^{m\psi}_{\beta,\infty};S_{\vec{n}}) = \sup_{f\in C^{m\psi}_{\beta,\infty}}||f(\vec{x}) - S_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C = \frac{8}{\pi^2}\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n_i)K(q_i) +$$

$$+ O(1)\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)q_i}{(1-q_i)n_i} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2} + \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s)}{1-Q_s}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j}(\Psi_j)}{1-Q_j}\right], \quad (1)$$

где

$$K(q) = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода,

$$\varepsilon_m(\psi) = \sup_{k\geq m}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|,\quad q = \lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}\ , \quad (2)$$

$O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная относительно* n_i, q_i, Q_i, β_i, β_i^*, $i=1,2,...,m$.

□ Используя результат работы [18], показывается, что

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x}) \stackrel{\text{df}}{=} f(\vec{x}) - S_{\vec{n}}(f;\vec{x}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_i}^{\psi_i}(\vec{x} + t_i\vec{e}_i) \sum_{k=n_i}^{\infty} \psi_i(k_i) \cos\left(k_i t_i + \frac{\beta_i \pi}{2}\right) dt_i +$$

$$+ \sum_{r=2}^{m} (-1)^{r+1} \sum_{\mu(r)\subset\overline{m}} \frac{1}{\pi^r} \int_{T^r} f_{\beta_\mu}^{\Psi_\mu}\left(\vec{x} + \sum_{j\in\mu(r)} t_j \vec{e}_j\right) \times$$

$$\times \prod_{j\in\mu(r)} \sum_{\nu_j=n_j}^{\infty} \Psi_{\nu_j}(\nu_j) \cos\left(\nu_j t_j + \frac{\beta_j^* \pi}{2}\right) dt_j\,.$$

Далее понадобится вспомогательное утверждение [17].

Лемма. *Пусть $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$. Тогда для любой последовательности чисел γ_k, $k = 1, 2, ...$ имеет место равенство*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \gamma_k) = \psi(n)\left[q^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos(kt - \gamma_k) + r_n(t,\psi)\right],$$

в котором

$$r_n(t,\psi) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{l=0}^{i-1} \frac{\psi(n+l+1)}{\psi(n+l)} - q^i \right) \cos((n+i)t - \gamma_{n+i})\,.$$

Кроме того, начиная с некоторого n_0,

$$|r_n(t,\psi)| \le \frac{\varepsilon_n(\psi)}{(1 - q - \varepsilon_n(\psi))(1-q)}\,,$$

где $\varepsilon_n(\psi)$ определено (2).

Используя утверждение леммы, имеем

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_i}^{\psi_i}(\vec{x} + t_i\vec{e}_i) \left[\psi_i(n_i) q_i^{-n_i} \sum_{k=n_i}^{\infty} q_i^{k_i} \cos\left(k_i t_i + \frac{\beta_i\pi}{2}\right) + \psi_i(n_i) r_{n_i}(t_i,\psi_i)\right] dt_i +$$

$$+ \sum_{r=2}^{m} (-1)^{r+1} \sum_{\mu(r)\subset\overline{m}} \frac{1}{\pi^r} \int_{T^r} f_{\beta_\mu}^{\Psi_\mu}\left(\vec{x} + \sum_{j\in\mu(r)} t_j\vec{e}_j\right) \times$$

$$\times \prod_{j\in\mu(r)} \left[\Psi_j(n_j) Q_j^{-n_j} \sum_{\nu_j=n_j}^{\infty} Q_j^{\nu_j} \cos\left(\nu_j t_j + \frac{\beta_j^*\pi}{2}\right) + \Psi_j(n_j) r_{n_j}(t_j,\Psi_j)\right] dt_j.$$

Поскольку имеет место равенство

$$\prod_{j\in\mu(r)} (a_j - b_j) = \sum_{\varsigma\subset\mu(r)} \prod_{p\in\mu\setminus\varsigma} a_p \prod_{j\in\varsigma} (-b_j),$$

то

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n_i)q_i^{-n_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_i}^{\psi_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)\sum_{k=n_i}^{\infty} q_i^{k_i}\cos(k_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2})dt_i+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n_i)\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_i}^{\psi_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)r_{n_i}(t_i,\psi_i)dt_i+$$

$$+\sum_{r=2}^{m}(-1)^{r+1}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\frac{1}{\pi^r}\int\limits_{T^r} f_{\beta_\mu}^{\Psi_\mu}\Big(\vec{x}+\sum_{j\in\mu(r)}t_j\vec{e}_j\Big)\times$$

$$\times\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu\setminus\xi}\Psi_s(n_s)Q_s^{-n_s}\sum_{\nu_s=n_s}^{\infty}Q_s^{\nu_s}\cos\Big(\nu_st_s+\frac{\beta_s^*\pi}{2}\Big)dt_s\cdot\prod_{j\in\xi}\Psi_j(n_j)r_{n_j}(t_j,\Psi_j)dt_j.$$

Выполняя элементарные преобразования [19, с. 123], находим

$$\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos\Big(kt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)=$$

$$=q^n\bigg(\sum_{k=0}^{\infty}q^k\cos kt\cos(nt+\frac{\beta\pi}{2})-\sum_{k=0}^{\infty}q^k\sin kt\sin\Big(nt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\bigg)=$$

$$=\frac{q^n}{1-2q\cos t+q^2}\bigg((1-q\cos t)\cos\Big(nt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)-q\sin t\sin\Big(nt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\bigg)=$$

$$=\frac{q^n}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}}\cos\Big(nt+\frac{\beta\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{q\sin t}{1-q\cos t}\Big).$$

Тогда

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x})=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_{\beta_i}^{\psi_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)h_{q_i,n_i}^{\beta_i}(t_i)dt_i+$$

$$+O(1)\Bigg[\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2}+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s)}{1-Q_s}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j}(\Psi_j)}{1-Q_j}\Bigg], \tag{3}$$

где

$$h_{q_i,n_i}^{\beta_i}(t_i)=\sum_{k=n_i}^{\infty}q_i^{k_i}\cos\Big(k_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2}\Big).$$

Так как $f(\vec{x})\in C_{\beta,\infty}^{m\psi}$, то

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{m\psi};S_{\vec{n}})\le\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|h_{q_i,n_i}^{\beta_i}(t_i)|dt_i+$$

$$+ O(1)\Big[\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2} + \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s)}{1-Q_s}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j}(\Psi_j)}{1-Q_j}\Big]. \tag{4}$$

Найдем функцию $f_0(\vec{x}) \in C^{m\psi}_{\beta,\infty}$, для которой имеет место соотношение

$$\rho_{\vec{n}}(f_0;\vec{0}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int_{-\pi}^{\pi}|h^{\beta_i}_{q_i,n_i}(t_i)|dt_i +$$

$$+O(1)\Big[\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)q_i}{(1-q_i)n_i} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2} +$$

$$+ \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s)}{1-Q_s}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j}(\Psi_j)}{1-Q_j}\Big]. \tag{5}$$

На основании соотношения (3), для каждой $f \in C^{m\psi}_{\beta,\infty}$ можно записать

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{0}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_i}(\vec{0}+t_i\vec{e}_i)h^{\beta_i}_{q_i,n_i}(t_i)dt_i +$$

$$+ O(1)\Big[\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2} + \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s)}{1-Q_s}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j}(\Psi_j)}{1-Q_j}\Big]. \tag{6}$$

Покажем, что каждую функцию $\operatorname{sign} h^{\beta_i}_{n_i}(t_i)$, $i = 1, 2, ..., m$ можно изменить на периоде на множестве точек, мера которого не превышает $Kq_i n_i^{-1}(1-q_i)^{-1}$, где K — некоторая постоянная, так, чтобы для полученных функций $y_i(t_i)$ выполнялось условие $\int\limits_{-\pi}^{\pi} y_i(t_i)dt_i = 0$. Рассмотрим функцию

$$h^{\beta_i}_{n_i}(t_i) = \frac{q_i^{n_i}}{\sqrt{1-2q_i\cos t_i + q_i^2}}\cos\Big(n_i t_i + \frac{\beta_i\pi}{2} + \Phi(t_i)\Big),$$

где

$$\Phi(t_i) = \operatorname{arctg}\frac{q_i\sin t_i}{1-q_i\cos t_i}\,.$$

На интервале $(0;\pi)$, на котором функция $\Phi(t_i)$ непрерывна и выполняется условие

$$0 \le \Phi(t_i) \le \frac{\pi}{2}\,. \tag{7}$$

Кроме того, для $\forall t_i \in (0;\pi)$

$$|\Phi'(t_i)| = \left|\frac{q_i\cos t_i - q_i^2}{1-2q_i\cos t_i + q_i^2}\right| \le \frac{q_i}{1-q_i}\,. \tag{8}$$

Функция $h_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ на промежутке $(0;\pi)$ обращается в нуль и изменяет знак только в точках вида

$$t_{ik} = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{\beta_i\pi}{2} - \Phi(t_{ik})}{n_i}\ , \quad k = 3, 4, ..., n_i - 1.$$

Найдем оценки длин промежутков $[t_{ik}; t_{i(k+1)}]$ и $[t_{i(k+1)}; t_{i(k+2)}]$.

$$t_{i(k+1)} - t_{ik} = \frac{\pi}{n_i} - \frac{\Phi(t_{ik+1}) - \Phi(t_{ik})}{n_i}\ ,$$

$$t_{i(k+2)} - t_{i(k+1)} = \frac{\pi}{n_i} - \frac{\Phi(t_{i(k+2)}) - \Phi(t_{i(k+1)})}{n_i}\ .$$

Учитывая (8), видим, что модуль разности $|(t_{i(k+2)} - t_{i(k+1)}) - (t_{i(k+1)} - t_{ik})|$ не превышает

$$\frac{|\Phi(t_{i(k+2)}) - \Phi(t_{i(k+1)})| + |\Phi(t_{i(k+1)}) - \Phi(t_{ik})|}{n_i} \le \frac{2q_i(t_{i(k+1)} - t_{ik})}{n_i(1 - q_i)}\ .$$

На основании (7) имеем

$$\frac{2k\pi - \beta_i\pi}{2n_i} \le t_{ik} \le \frac{\pi + 2k\pi - \beta_i\pi}{2n_i}\ ,$$

$$\frac{2k\pi + 2\pi - \beta_i\pi}{2n_i} \le t_{i(k+1)} \le \frac{3\pi + 2k\pi - \beta_i\pi}{2n_i}\ ,$$

$$\frac{\pi}{2n_i} \le t_{i(k+1)} - t_{ik} \le \frac{3\pi}{2n_i}\ . \tag{9}$$

Поэтому разность длин промежутков $[t_{ik}; t_{i(k+1)}]$ и $[t_{i(k+1)}; t_{i(k+2)}]$ не больше, чем $\dfrac{3q_i\pi}{2n_i^2(1 - q_i)}$. Функция $h_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ сохраняет знак на этих промежутках, причем правее и левее от $t_{i(k+1)}$ знаки разные. Таким образом, функцию sign $h_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ на промежутке $[t_{ik}; t_{i(k+2)}]$ можно переопределить на множестве, мера которого не превосходит $\dfrac{3q_i\pi}{2n_i^2(1 - q_i)}$ так, чтобы для полученной функции $y_i(t_i)$ среднее значение на периоде было равным нулю. На основании (9), количество промежутков, на которых функция $h_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ изменяет знак, не превосходит $4n_i$. Аналогичные рассуждения можно провести для промежутка $(-\pi; 0)$. Значит, функции, построенные на $(-\pi; \pi)$, имеют свойства

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} y_i(t_i) dt_i = 0$$

и отличаются от sign $h_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ на множествах, меры которых не превосходят $K q_i n_i^{-1}(1 - q_i)^{-1}$, $i = 1, 2, ..., m$.

Далее построим функции $\varphi_i(\vec{t}) = y_i(t_i)$, $\vec{t} \in T^m$ и функции $f_i(\vec{x})$ такие, что $(f_i)^{\overline{\psi}_i} = \varphi_i(\vec{x})$. Можно показать (см., напр., [16]), что функция

$$f_0(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\vec{x})$$

удовлетворяет условию $(f_0)^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{x})$, $i = 1, 2, ..., m$. Поэтому $f_0(\vec{x}) \in C^{m\psi}_{\beta,\infty}$ и имеет место следующее соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f_0)^{\overline{\psi}_i}(\vec{0} + t_i\vec{e}_i) h^{\beta_i}_{q_i,n_i}(t_i) dt_i = \int_{-\pi}^{\pi} |h^{\beta_i}_{q_i,n_i}(t_i)| dt_i + O(1) \cdot \frac{q_i^{n_i+1}}{n_i(1-q_i)} \,.$$

На основании (6) можно сделать вывод, что для найденной функции $f_0(\vec{x})$ имеет место соотношение (5). Объединяя (4) и (5), получаем

$$\mathcal{E}(C^{m\psi}_{\beta,\infty}; S_{\vec{n}}) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}} \int_{-\pi}^{\pi} |h^{\beta_i}_{q_i,n_i}(t_i)| dt_i \, +$$

$$+ \, O(1) \Bigg[\sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_i(n_i) q_i}{(1-q_i) n_i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_i(n_i) \varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2} + \sum_{r=2}^{m} \sum_{\mu(r) \subset \overline{m}} \sum_{\xi \subset \mu(r)} \prod_{s \in \mu} \frac{\Psi_s(n_s)}{1-Q_s} \prod_{j \in \xi} \frac{\varepsilon_{n_j}(\Psi_j)}{1-Q_j} \Bigg].$$

Из результатов работы [4] следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h^{\beta_i}_{q_i,n_i}(t_i)| dt_i = \frac{8 q_i^{n_i}}{\pi} K(q_i) + O(1) \, \frac{q_i^{n_i}}{n_i} \,, \quad i = 1, 2, ..., m \,.$$

Объединяя два последних равенства, получаем асимптотическую формулу (1). ■

Заключение. Отметим, что при выполнении условий

$$q_i = Q_i, \qquad i = 1, 2, ..., m \,,$$

асимптотическое соотношение (1) обеспечивает решение соответствующей задачи Колмогорова–Никольского [19, с. 57].

Литература

1. Степанец А.И., Пачулиа Н.Л. Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1991. – 43, № 4. – С.545-555.
2. Ласурия Р.А. Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 2003. – 55,№ 7. – С.911-918.
3. Степанец А.И. Приближение некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных суммами Фурье // Укр. мат. журн. – 1973. – 25,№ 5. – С.599-609.
4. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – 10, № 3. – С.207-256.

5. Стечкин С.Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – 45. – С. 126-151.
6. Рукасов В.И., Новиков О.А., Величко В.Е. [и др.] Приближение периодических функций высокой гладкости многих переменных прямоугольными суммами Фурье // Труды Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2008. – 16. – С.163-170.
7. Степанец А.И., Сердюк А.С. Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2000. – 52,№ 3. – С.375-395.
8. Ровенская О.Г. Интегральные представления уклонений прямоугольных линейных средних рядов Фурье на классах $C^{m\overline{\psi}}$ // Научный вестник Черновицкого национального университета. Сер. Математика. – 2011. – 1,№ 3. – С.99-104.
9. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций / К. : Наук. думка, 1987. – 268 с.

APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS OF HIGH SMOOTHNESS BY RIGHT-ANGLED FOURIER SUMS

O.A. Novikov, O.G. Rovenska

Donbass State Pedagogical University,
G. Batyuk St., 19, Slavyansk, 84116, Ukraine, e-mail: o.rovenskaya@mail.ru

Abstract. Asymptotic equalities for upper bounds of deviations of right-angled Fourier sums on classes of high smoothness periodical functions wight many variables are obtained. These equalities guarantee the solvability of the Kolmogorov-Hikol'skii problem for right-angled Fourier sums on specified classes of functions.

Key words: (ψ, β)-derivative, right-angled Fourier sums, Kolmogorov-Nikol'skii's problem.

MSC 47G99

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

И.М. Примак

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, Россия, e-mail: iilika@yandex.ru

Аннотация. Найдены условия однозначной разрешимости краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений с ограниченным оператором.

Ключевые слова: краевая задача, дробная производная, однозначная разрешимость.

В первой части работы в банаховом пространстве E рассматривается решение краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений дробного порядка $\alpha \in (1,2)$, содержащих дробную производную Герасимова-Капуто, во второй — дробную производную Римана-Лиувилля. Дробная производная Герасимова-Капуто определяется следующим образом:

$$\partial^\alpha u(t) = D^\alpha(u(t) - u(0) - tu'(0)),$$

где

$$D^\alpha u(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 I^{2-\alpha}u(t)$$

— дробная производная Римана-Лиувилля [1, с. 44],

$$I^{2-\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}}d\tau$$

— дробный интеграл Римана-Лиувилля, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Абстрактные краевые задачи для уравнений дробного порядка рассматриваются впервые. Ранее в [2] авторами была исследована краевая задача для уравнения порядка $\alpha \in (0,1)$. Примеры конкретных краевых задач для уравнений, младшие члены которых содержат дробные производные можно найти в [3, 4].

1. Рассмотрим краевую задачу

$$\partial^\alpha u(t) = Au(t), \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

с краевыми условиями общего вида

$$a_{11}u(0) + a_{12}\partial^\beta u(0) + b_{11}u(T) + b_{12}\partial^\gamma u(T) = u_1, \tag{2}$$

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357).

$$a_{21}u(0)+a_{22}\partial^{\beta}u(0)+b_{21}u(T)+b_{22}\partial^{\gamma}u(T)=u_2, \tag{3}$$

где $0<\beta<\alpha$ и $0<\gamma<\alpha$. В уравнении (1) будем считать A ограниченным оператором в банаховом пространстве E.

Определение 1. *Функция $u(t)\in C([0;T],E)$ такая, что $I^{2-\alpha}u(t)\in C^2((0,T],E)$, называется решением задачи (1) – (3), если она удовлетворяет уравнению (1) на интервале $(0,T)$ и краевым условиям (2), (3).*

Будем использовать следующие обозначения. Пусть I — единичный оператор,

$$E_{\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu k+1)}\ (\mu>0),\quad E_{\mu,\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu k+\nu)}\ (\mu>0)$$

— функции Миттаг-Леффлера. Тогда

$$B_{11}=a_{11}I+b_{11}E_{\alpha}(T^{\alpha}A)+b_{12}T^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(T^{\alpha}A)\,. \tag{4}$$

Если $0<\beta\le 1$ и $0<\gamma\le 1$ или $1<\beta<\alpha$ и $0<\gamma\le 1$, то

$$B_{12}=b_{11}TE_{\alpha,2}(T^{\alpha}A)+b_{12}T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^{\alpha}A)\,. \tag{5}$$

Если $0<\beta\le 1$ и $1<\gamma<\alpha$ или $1<\beta<\alpha$ и $1<\gamma<\alpha$, то

$$B_{12}=b_{11}TE_{\alpha,2}(T^{\alpha}A)+b_{12}T^{\alpha+1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma+\alpha}(T^{\alpha}A)\,. \tag{6}$$

$$B_{21}=a_{21}I+b_{21}E_{\alpha}(T^{\alpha}A)+b_{22}T^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(T^{\alpha}A)\,. \tag{7}$$

Если $0<\beta\le 1$ и $0<\gamma\le 1$ или $1<\beta<\alpha$ и $0<\gamma\le 1$, то

$$B_{22}=b_{21}TE_{\alpha,2}(T^{\alpha}A)+b_{22}T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^{\alpha}A)\,. \tag{8}$$

Если $0<\beta\le 1$ и $1<\gamma<\alpha$ или $1<\beta<\alpha$ и $1<\gamma<\alpha$, то

$$B_{22}=b_{21}TE_{\alpha,2}(T^{\alpha}A)+b_{22}T^{\alpha+1-\gamma}AE_{\alpha,2-\gamma+\alpha}(T^{\alpha}A)\,. \tag{9}$$

Если $0<\beta\le 1$ и $0<\gamma\le 1$ или $1<\beta<\alpha$ и $0<\gamma\le 1$, то

$$\Phi(\lambda)=(a_{11}b_{21}-a_{21}b_{11})TE_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha})+(a_{11}b_{22}-a_{21}b_{12})T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(\lambda T^{\alpha})+$$
$$+(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(\lambda T^{\alpha})E_{\alpha}(\lambda T^{\alpha})\,. \tag{10}$$

Если $0<\beta\le 1$ и $1<\gamma<\alpha$ или $1<\beta<\alpha$ и $1<\gamma<\alpha$, то

$$\Phi(\lambda)=(a_{11}b_{21}-a_{21}b_{11})TE_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha})+(a_{11}b_{22}-a_{21}b_{12})T^{\alpha+1-\gamma}\lambda E_{\alpha,2-\gamma+\alpha}(\lambda T^{\alpha})+$$
$$+(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})T^{\alpha-\gamma}\lambda E_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(\lambda T^{\alpha})E_{\alpha}(\lambda T^{\alpha})\,. \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть A — ограниченный оператор в банаховом пространстве E и $\Phi(\lambda)\ne 0$ для любого λ принадлежащего спектру $\sigma(A)$ оператора A. Тогда для любых $u_1,u_2\in E$ решение краевой задачи (1)-(3) существует, единственно и имеет вид*

$$u(t)=(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}\left((E_{\alpha}(t^{\alpha}A)B_{22}-tE_{\alpha,2}(t^{\alpha}A)B_{21})u_1-\right.$$

$$-(E_\alpha(t^\alpha A)B_{12} - tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)B_{11})u_2)\ . \tag{12}$$

□ Пусть $u(t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям $u(0) = v_0$, $u'(0) = v_1$. Тогда [5, с. 13]

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)v_0 + tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)v_1, \quad t \in [0,T]. \tag{13}$$

Вычислим нужные нам дробные производные. Если $0 < \beta \le 1$, то

$$\partial^\beta u(t) = D^\beta\left(u(t) - u(0)\right) = D^\beta(E_\alpha(t^\alpha A)v_0 + tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)v_1 - v_0) =$$

$$= t^{-\beta}E_{\alpha,1-\beta}(t^\alpha A)v_0 + t^{1-\beta}E_{\alpha,2-\beta}(t^\alpha A)v_1 - \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}v_0 =$$

$$= t^{-\beta}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t^\alpha A)^k}{\Gamma(\alpha(k-1)+1-\beta+\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\right)v_0 + t^{1-\beta}E_{\alpha,2-\beta}(t^\alpha A)v_1 =$$

$$= t^{\alpha-\beta}A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t^\alpha A)^k}{\Gamma(\alpha k+1-\beta+\alpha)}v_0 + t^{1-\beta}E_{\alpha,2-\beta}(t^\alpha A)v_1 =$$

$$= t^{\alpha-\beta}AE_{\alpha,1-\beta+\alpha}(t^\alpha A)v_0 + t^{1-\beta}E_{\alpha,2-\beta}(t^\alpha A)v_1\,.$$

Аналогично, для $0 < \gamma \le 1$ получим

$$\partial^\gamma u(t) = t^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(t^\alpha A)v_0 + t^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(t^\alpha A)v_1\,.$$

Если $1 < \beta < \alpha$, то

$$\partial^\beta u(t) = D^\beta(u(t) - u(0) - tu(0)) = D^\beta(E_\alpha(t^\alpha A)v_0 + tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)v_1 - v_0 - tv_1) =$$

$$= t^{-\beta}E_{\alpha,1-\beta}(t^\alpha A)v_0 + t^{1-\beta}E_{\alpha,2-\beta}(t^\alpha A)v_1 - \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}v_0 - \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\beta)}t^{1-\beta}v_1 =$$

$$= t^{\alpha-\beta}A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t^\alpha A)^k}{\Gamma(\alpha k+1-\beta+\alpha)}v_0 + t^{\alpha+1-\beta}A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t^\alpha A)^k}{\Gamma(\alpha k+2-\beta+\alpha)}v_1 =$$

$$= t^{\alpha-\beta}AE_{\alpha,1-\beta+\alpha}(t^\alpha A)v_0 + t^{\alpha+1-\beta}AE_{\alpha,2-\beta+\alpha}(t^\alpha A)v_1\,.$$

Аналогично, для $1 < \gamma < \alpha$

$$\partial^\gamma u(t) = t^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(t^\alpha A)v_0 + t^{\alpha+1-\gamma}AE_{\alpha,2-\gamma+\alpha}(t^\alpha A)v_1\,.$$

Рассмотрим для определенности случай, когда $0 < \beta \le 1$ и $0 < \gamma \le 1$. Учитывая граничные условия (2) и (3), составим систему

$$\left\{\begin{aligned} & a_{11}v_0 + b_{11}E_\alpha(T^\alpha A)v_0 + b_{11}TE_{\alpha,2}(T^\alpha A)v_1 + b_{12}T^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(T^\alpha A)v_0 + \\ & \qquad\qquad + b_{12}T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^\alpha A)v_1 = u_1, \\ & a_{21}v_0 + b_{21}E_\alpha(T^\alpha A)v_0 + b_{21}TE_{\alpha,2}(T^\alpha A)v_1 + b_{22}T^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(T^\alpha A)v_0 + \\ & \qquad\qquad + b_{22}T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^\alpha A)v_1 = u_2\,. \end{aligned}\right.$$

или

$$\begin{cases} (a_{11}I + b_{11}E_\alpha(T^\alpha A) + b_{12}T^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(T^\alpha A))v_0 + (b_{11}TE_{\alpha,2}(T^\alpha A)+ \\ \qquad\qquad +b_{12}T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^\alpha A))v_1 = u_1, \\ (a_{21}I + b_{21}E_\alpha(T^\alpha A) + b_{22}T^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(T^\alpha A))v_0 + (b_{21}TE_{\alpha,2}(T^\alpha A)+ \\ \qquad\qquad +b_{22}T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^\alpha A))v_1 = u_2\,. \end{cases} \tag{14}$$

С помощью операторов (4)-(9) запишем систему (14) в виде

$$\begin{cases} B_{11}v_0 + B_{12}v_1 = u_1\,, \\ B_{21}v_0 + B_{22}v_1 = u_2\,. \end{cases} \tag{15}$$

Будем считать, что в краевых условиях (2) и (3) коэффициенты таковы, что существует $(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}$. Решая систему (15) методом исключения, получим

$$\begin{cases} B_{11}B_{22}v_0 + B_{12}B_{22}v_1 = B_{22}u_1, \\ -B_{12}B_{21}v_0 - B_{12}B_{22}v_1 = -B_{12}u_2, \end{cases}$$

откуда

$$(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})v_0 = B_{22}u_1 - B_{12}u_2,$$

$$v_0 = (B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}(B_{22}u_1 - B_{12}u_2). \tag{16}$$

Аналогично,

$$\begin{cases} -B_{11}B_{21}v_0 - B_{12}B_{21}v_1 = -B_{21}u_1, \\ B_{21}B_{11}v_0 + B_{22}B_{11}v_1 = B_{11}u_2, \end{cases}$$

откуда

$$(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})v_1 = B_{11}u_2 - B_{21}u_1,$$

$$v_1 = (B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}(B_{11}u_2 - B_{21}u_1). \tag{17}$$

Подставляя (16), (17) в решение (13), имеем

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}(B_{22}u_1 - B_{12}u_2)+$$

$$+tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}(B_{11}u_2 - B_{21}u_1) =$$

$$= (B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}((E_\alpha(t^\alpha A)B_{22} - tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)B_{21})u_1-$$

$$-(E_\alpha(t^\alpha A)B_{12} - tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)B_{11})u_2),$$

что и приводит к равенству (12).

Отметим теперь, что из условия $\Phi(\lambda) \neq 0$ для любого $\lambda \in \sigma(A)$ вытекает существование оператора $(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}$, который с помощью контурного интеграла можно представить в виде (см. [6, с. 20])

$$(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1} = ((a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11})TE_{\alpha,2}(T^\alpha A) + (a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12})T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^\alpha A)+$$

$$+(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})(T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^\alpha A)E_\alpha(T^\alpha A))^{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{1}{\Phi(\lambda)}R(\lambda, A)d\lambda\,,$$

где $\Phi(\lambda)$ выражается формулой (10).

Аналогично рассматриваются и следующие случаи:

$$1 < \beta < \alpha \quad \text{и} \quad 0 < \gamma \le 1,$$

$$0 < \beta \le 1 \quad \text{и} \quad 1 < \gamma < \alpha,$$

$$1 < \beta < \alpha \quad \text{и} \quad 1 < \gamma < \alpha.$$

Таким образом, если решение краевой задачи существует, то оно единственно и имеет вид (12). С другой стороны, задаваемая равенством (12) функция $u(t)$ определена при любых $u_1, u_2 \in E$ и, как нетрудно проверить, является решением рассматриваемой краевой задачи (1)-(3).

В заключение отметим, что условие разрешимости задачи (1) – (3) не зависит от β, поскольку, как легко видеть из (10), (11), функция $\Phi(\lambda)$ зависит только от α и γ, т.е., $\Phi(\lambda) = \Phi_{\alpha,\gamma}(\lambda)$. ■

Пример 1. В частном случае, если $a_{12} = a_{22} = b_{12} = b_{22} = 0$, получим задачу

$$\partial^\alpha u(t) = Au(t), \quad 0 < t < T, \tag{18}$$

$$a_{11}u(0) + b_{11}u(T) = u_1, \tag{19}$$

$$a_{21}u(0) + b_{21}u(T) = u_2\,. \tag{20}$$

Подставим $a_{12} = a_{22} = b_{12} = b_{22} = 0$ в (10). Тогда

$$\Phi(\lambda) = (a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11})TE_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha)\,.$$

Если для любого $\lambda \in \sigma(A)$ функция $\Phi^{-1}(\lambda) \neq 0$, т.е., если $a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11} \neq 0$ и для любого $\lambda \in \sigma(A)$ функция $E_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha) \neq 0$, то при любых $u_1,\ u_2 \in E$ решение краевой задачи (18)-(20) существует, единственно и имеет вид

$$u(t) = ((a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11})TE_{\alpha,2}(T^\alpha A))^{-1}((E_\alpha(t^\alpha A)b_{21}TE_{\alpha,2}(T^\alpha A) -$$
$$-tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)(a_{21}I + b_{21}E_\alpha(T^\alpha A))u_1 -$$
$$-(E_\alpha(t^\alpha A)b_{11}TE_{\alpha,2}(T^\alpha A) - tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)(a_{11}I + b_{11}E_\alpha(T^\alpha A)))u_2)\,.$$

Пример 2. Рассмотрим ещё один частный случай граничной задачи (1)-(3)

$$\partial^\alpha u(t) = Au(t), \quad 0 < t < \pi, \tag{21}$$

$$u(0) = u_1, \tag{22}$$

$$u(\pi) = u_2, \tag{23}$$

Подставим $a_{12} = a_{21} = a_{22} = b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ в (10). Тогда $\Phi(\lambda) = \pi E_{\alpha,2}(\lambda\pi^\alpha)$, и, если $E_{\alpha,2}(\lambda\pi^\alpha) \neq 0$ для любого $\lambda \in \sigma(A)$, то решение краевой задачи (21)-(23) существует, единственно и имеет вид

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)u_1 + tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)(\pi E_{\alpha,2}(\pi^\alpha A))^{-1}(u_2 - E_\alpha(\pi^\alpha A)u_1) =$$

$$= (\pi E_{\alpha,2}(\pi^\alpha A))^{-1}((E_\alpha(t^\alpha A)\pi E_{\alpha,2}(\pi^\alpha A) - E_\alpha(\pi^\alpha A)tE_{\alpha,2}(t^\alpha A))u_1 + tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)u_2)\ . \quad (24)$$

При $\alpha = 2$ формула (24) примет вид

$$u(t) = (\pi E_{2,2}(\pi^2 A))^{-1}((E_2(t^2 A)\pi E_{2,2}(\pi^2 A) - E_2(\pi^2 A)tE_{2,2}(t^2 A))u_1 + tE_{2,2}(t^2 A)u_2),$$

и происходит «стыковка» решений для уравнений дробного и целого порядков.

2. Рассмотрим краевую задачу с дробными производными Римана-Лиувилля

$$D^\alpha \nu(t) = A\nu(t), \quad 0 < t < T, \tag{25}$$

и краевыми условиями общего вида

$$a_{11}I^{2-\alpha}\nu(0) + a_{12}D^{\alpha-1}\nu(0) + b_{11}D^\delta\nu(T) + b_{12}D^\gamma\nu(T) = \nu_1, \tag{26}$$

$$a_{21}I^{2-\alpha}\nu(0) + a_{22}D^{\alpha-1}\nu(0) + b_{21}D^\delta\nu(T) + b_{22}D^\gamma\nu(T) = \nu_2, \tag{27}$$

где $0 \le \delta < \gamma < \alpha$. В уравнении (25), по-прежнему, будем считать A ограниченным оператором в банаховом пространстве .

Определение 2. *Функция $\nu(t) \in C((0,T],E)$ такая, что $D^{\alpha-2}\nu(t) \in C([0,T],E)\bigcap C^2((0,T],E)$, $D^{\alpha-1}\nu(t) \in C([0,T],E)$, называется решением задачи (25)-(27), если она удовлетворяет уравнению (25) на интервале $(0,T)$ и краевым условиям (26), (27).*

Введем следующие обозначения:

$$B_{11} = a_{11}I + b_{11}T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(T^\alpha A) + b_{12}T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-1-\gamma}(T^\alpha A), \tag{28}$$

$$B_{12} = a_{12}I + b_{11}T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(T^\alpha A) + b_{12}T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(T^\alpha A), \tag{29}$$

$$B_{21} = a_{21}I + b_{21}T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(T^\alpha A) + b_{22}T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-1-\gamma}(T^\alpha A), \tag{30}$$

$$B_{22} = a_{22}I + b_{21}T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(T^\alpha A) + b_{22}T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(T^\alpha A), \tag{31}$$

$$\begin{gathered}\Phi(\lambda) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})I + (a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11})T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(\lambda T^\alpha) + \\ +(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(\lambda T^\alpha) + (a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21})T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(\lambda T^\alpha) + \\ +(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})T^{2\alpha-3-\delta-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,\alpha-\gamma}(\lambda T^\alpha) + \\ +(a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22})T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(\lambda T^\alpha) + \\ +(b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22})T^{2\alpha-3-\delta-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\delta}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(\lambda T^\alpha).\end{gathered} \tag{32}$$

Теорема 2. *Пусть A — ограниченный оператор в банаховом пространстве E и $\Phi(\lambda) \ne 0$ для любого λ принадлежащего спектру $\sigma(A)$ оператора A . Тогда для любых $v_1, v_2 \in E$ решение краевой задачи (25)-(27) существует, единственно и имеет вид*

$$\begin{gathered}v(t) = (B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}((t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)B_{22} - t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)B_{21})v_1 + \\ +(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)B_{11} - t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)B_{12})v_2)\,.\end{gathered} \tag{33}$$

□ Пусть $v(t)$ — решение уравнения (25), удовлетворяющее условиям $D^{\alpha-2}v(0)=w_0$, $D^{\alpha-1}v(0)=w_1$. Тогда (см. [1, с. 601], [5, с. 13])

$$v(t)=t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)w_0+t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)w_1, t\in[0,T]\,. \tag{34}$$

Вычислим нужные нам дробные производные. Имеем

$$I^{2-\alpha}v(t)=I^{2-\alpha}(t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)w_0+t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)w_1)=E_\alpha(t^\alpha A)w_0+tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)w_1,$$

$$D^{\alpha-1}v(t)=D^{\alpha-1}(t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)w_0+t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)w_1)=$$
$$=t^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t^\alpha A)^k}{\Gamma(\alpha k)}w_0+E_\alpha(t^\alpha A)w_1=t^{\alpha-1}AE_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)w_0+E_\alpha(t^\alpha A)w_1,$$

$$D^\delta v(t)=D^\delta(t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)w_0+t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)w_1=$$
$$=t^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(t^\alpha A)w_0+t^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(t^\alpha A)w_1,$$
$$D^\gamma v(t)=t^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(t^\alpha A)w_0+t^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(t^\alpha A)w_1\,.$$

Учитывая граничные условия (26) и (27), составим систему

$$\begin{cases} a_{11}w_0+a_{12}w_1+b_{11}(T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(T^\alpha A)w_0+T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(T^\alpha A)w_1)+\\ \qquad +b_{12}(T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(T^\alpha A)w_0+T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(T^\alpha A)w_1)=v_1,\\ a_{21}w_0+a_{22}w_1+b_{21}(T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(T^\alpha A)w_0+T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(T^\alpha A)w_1)+\\ \qquad +b_{22}(T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(T^\alpha A)w_0+T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(T^\alpha A)w_1)=v_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11}I+b_{11}T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(T^\alpha A)+b_{12}T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(T^\alpha A))w_0+\\ +(a_{12}I+b_{11}T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(T^\alpha A)+b_{12}T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(T^\alpha A))w_1=v_1,\\ (a_{21}I+b_{21}T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(T^\alpha A)+b_{22}T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(T^\alpha A))w_0+\\ +(a_{22}I+b_{11}T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(T^\alpha A)+b_{22}T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(T^\alpha A))w_1=v_2. \end{cases} \tag{35}$$

Запишем систему (35) с помощью операторов (28) – (31) в виде

$$\begin{cases} B_{11}w_0+B_{12}w_1=v_1,\\ B_{21}w_0+B_{22}w_1=v_2. \end{cases} \tag{36}$$

Будем считать, что в краевых условиях (26) и (27) коэффициенты таковы, что существует $(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}$. Решая систему (36) методом исключения, получим

$$w_0=(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}(B_{22}v_1-B_{12}v_2). \tag{37}$$

$$w_1=(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}(B_{11}v_2-B_{21}v_1). \tag{38}$$

Подставляя (37), (38) в решение (34), имеем

$$v(t)=t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}(B_{22}v_1-B_{12}v_2)+$$

$$+(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)B_{21})(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}(B_{11}v_2-B_{21}v_1)v_1=$$
$$=(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}((t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)B_{22}-t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)B_{21})v_1+$$
$$+(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)B_{11}-t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)B_{12})v_2),$$

что и приводит к равенству (33). ■

Отметим теперь, что из условия $\Phi(\lambda)\neq 0$ для любого $\lambda\in\sigma(A)$ вытекает существование оператора $(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}$, который с помощью контурного интеграла можно представить в виде (см. [6, с. 20])

$$(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}=((a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})I+(a_{11}b_{21}-a_{21}b_{11})T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(\lambda T^\alpha)+$$
$$+(a_{11}b_{22}-a_{21}b_{12})T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(\lambda T^\alpha)+(a_{22}b_{11}-a_{12}b_{21})T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(\lambda T^\alpha)+$$
$$+(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})T^{2\alpha-3-\delta-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,\alpha-\gamma}(\lambda T^\alpha)+$$
$$+(a_{22}b_{12}-a_{12}b_{22})T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(\lambda T^\alpha)+$$
$$+(b_{12}b_{21}-b_{11}b_{22})(T^{2\alpha-3-\delta-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\beta}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(\lambda T^\alpha))^{-1}=$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{1}{\Phi(\lambda)}R(\lambda,A)d\lambda\,,$$

где $\Phi(\lambda)$ выражается формулой (32).

Таким образом, если решение краевой задачи существует, то оно единственно и имеет вид (33). С другой стороны, задаваемая равенством (33) функция $v(t)$ определена при любых $v_1,v_2\in E$ и, как нетрудно проверить, является решением рассматриваемой краевой задачи (25)-(27).

Заметим, что в отличие от задачи (1)-(3) условие разрешимости задачи (25)-(27) зависит и от δ и от γ, поскольку, как легко видеть из (32), $\Phi(\lambda)=\Phi_{\alpha,\delta,\gamma}(\lambda)$.

Пример 3. В частном случае, если $a_{12}=a_{22}=b_{12}=b_{22}=0$, получим задачу

$$\partial^\alpha u(t)=Au(t),\quad 0<t<T, \tag{39}$$

$$a_{11}I^{2-\alpha}v(0)+b_{11}D^\delta v(T)=v_1, \tag{40}$$

$$a_{21}I^{2-\alpha}v(0)+b_{21}D^\delta v(T)=v_2. \tag{41}$$

Подставим $a_{12}=a_{22}=b_{12}=b_{22}=0$ в (33). Тогда

$$\Phi(\lambda)=(a_{11}b_{21}-a_{21}b_{11})T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(\lambda T^\alpha)\,.$$

Если для любого $\lambda\in\sigma(A)$ функция $\Phi^{-1}(\lambda)\neq 0$, т.е., если $a_{11}b_{21}-a_{21}b_{11}\neq 0$ и для любого $\lambda\in\sigma(A)$ функция $E_{\alpha,\alpha-\delta}(\lambda T^\alpha)\neq 0$, то для любых $u_1,\ u_2\in E$ решение краевой задачи (39) – (41) существует, единственно и имеет вид

$$v(t)=(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}\left((t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)b_{21}T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(t^\alpha A)-\right.$$
$$-\,t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)(a_{21}I+b_{21}T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(t^\alpha A))v_1\,+$$

$$+ t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)(a_{11}I + b_{11}T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(t^\alpha A)) -$$

$$- t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)b_{11}T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(t^\alpha A))v_2\big) \,. \qquad (42)$$

В заключение отметим, что при $\alpha = 2,\ \beta = \gamma = 1,\ \delta = 0$ равенства (12) и (33) совпадают, и происходит «стыковка» решений для уравнений дробного и целого порядков. В частности, если $a_{11} = b_{11} = a_{21} = b_{22} = 1,\ a_{12} = b_{12} = a_{22} = b_{21} = 0$, то

$$u(t) = v(t) = (E_2(T^2A) + E_2^2(T^2A) - TE_{2,2}(T^2A) - T^2AE_{2,2}^2(T^2A)^{-1}((E_2(t^2A)E_2(T^2A) -$$

$$- tE_{2,2}(t^2A)(I + TAE_{2,2}(T^2A))u_1 + (tE_{2,2}(t^2A)(I + E_2(T^2A)) - TE_2(t^2A)E_{2,2}(T^2A))u_2)\,.$$

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987.
2. Глушак А.В., Примак И.М. Краевые задачи для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными / Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2011. – №17(112). – Вып.24. – С.125-140.
3. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / М.: Физматлит, 2003.
4. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка / М.: Наука, 2005.
5. Bajlekova E. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / Ph. D. Thesis. Eindhoven University of Technology, 2001.
6. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / М.: Наука, 1970.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ABSTRACT FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A BOUNDED OPERATOR

I.M. Primak

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: iilika@yandex.ru

Abstract. Conditions of unique solvability of boundary value problems are found for abstract differential equations of fractional order with a bounded operator.

Key words: boundary value problem, fractional derivative, unique solvability.

MSC 17B63

О НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАХ ПУАССОНА С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

С.М. Рацеев

Ульяновский государственный университет,
ул. Льва Толстого, 42, Ульяновск, 432017, Россия, e-mail: RatseevSM@mail.ru

Аннотация. Приводятся некоторые многообразия алгебр Пуассона с экстремальными свойствами, а также описывается наименьшее многообразие алгебр Пуассона, в котором не выполнено ни одно лиево стандартное тождество.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

На протяжении всей работы, если это специально не оговорено, предполагается, что основное поле имеет нулевую характеристику. Алгебра $A = A(+,\cdot,\{,\},K)$ над полем K называется алгеброй Пуассона, если $A(+,\cdot,K)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+,\{,\},K)$ — алгебра Ли с операцией умножения $\{,\}$, которая называется скобкой Пуассона, и выполняется правило Лейбница:

$$\{a\cdot b,c\} = a\cdot\{b,c\}+\{a,c\}\cdot b, \qquad a,b,c\in A\,.$$

Алгебры Пуассона возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физики (см., например [1]) и т.д.

Пусть $L(X)$ — свободная алгебра Ли с умножением $[,]$, где $X = \{x_1, x_2, ...\}$ — счетное множество свободных образующих. Пусть также $F(X)$ — свободная алгебра Пуассона. Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1,...,x_n$, а через P_n^L пространство полилинейных элементов степени n в свободной алгебре Ли $L(X)$.

Обозначим через $L_{\geq 2}(X)$ подалгебру в свободной алгебре Ли $L(X)$, каждый элемент которой является линейной комбинацией мономов степени ≥ 2.

Пусть V — некоторое многообразие алгебр Пуассона, $Id(V)$ — идеал тождеств многообразия V. Обозначим

$$P_n(V) = P_n/(P_n\cap Id(V)),\; c_n(V) = \dim\, P_n(V)\,.$$

Соответственно, если V_L — некоторое многообразие алгебр Ли, то

$$P_n^L(V_L) = P_n^L/(P_n^L\cap Id(V_L)),\; c_n^L(V_L) = \dim\, P_n^L(V_L)\,.$$

Лемма [2]. *Пусть A_L — некоторая алгебра Ли с лиевым умножением $[,]$ над произвольным полем K. Рассмотрим векторное пространство $A = A_L\oplus K$, в котором определим операции $\cdot$ и $\{,\}$ следующим образом:*

$$\begin{aligned}(a+\alpha)\cdot(b+\beta) &= (\beta a+\alpha b)+\alpha\beta,\\ \{a+\alpha,b+\beta\} &= [a,b],\; a,b\in A_L,\; \alpha,\beta\in K.\end{aligned} \tag{1}$$

Тогда полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{,\}, K)$ *будет являться алгеброй Пуассона.*

Если многообразие V имеет экспоненциальный рост, то введем в рассмотрение нижнюю и верхнюю экспоненты:

$$\underline{EXP}(V) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)}, \qquad \overline{EXP}(V) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)}.$$

Если имеет место равенство $\underline{EXP}(V) = \overline{EXP}(V)$, то будем обозначать $EXP(V)$.

Теорема 1 [3]. *Пусть* V_L *— некоторое многообразие алгебр Ли над произвольным полем* K*, определенное системой тождеств* $\{f_i = 0 \mid f_i \in L_{\geq 2}(X),\ i \in I\}$*. Пусть также* V *— многообразие алгебр Пуассона, определенное тождествами* $f_i = 0$*,* $i \in I$*, и* $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$*. Тогда будут верны следующие утверждения.*

1. $Id(V_L) = Id(V) \cap L_{\geq 2}(X)$.

2. *Для любого* n *выполнено равенство*

$$c_n(V) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot \dim\, P_k^L(V_L)\,.$$

3. *Если существует* $EXP(V_L)$*, то* $EXP(V) = EXP(V_L) + 1$*, в частности, если найдутся такие действительные числа* $d \geq 0$*,* α *и* β*, что для всех достаточно больших* n *выполнено двойное неравенство*

$$n^{\alpha} d^n \leq c_n^L(V_L) \leq n^{\beta} d^n\,,$$

то найдутся такие γ *и* δ*, что для всех достаточно больших* n *будет выполнено такое двойное неравенство:*

$$n^{\gamma}(d+1)^n \leq c_n(V) \leq n^{\delta}(d+1)^n\,.$$

4. *Если поле* K *бесконечно и некоторая алгебра Ли* A_L *порождает многообразие* V_L*, то алгебра* $A = A_L \oplus K$ *с операциями* (1) *будет порождать многообразие* V*.*

5. *Пусть поле* K *бесконечно и* W *— некоторое собственное подмногообразие в* V*. Тогда идеал тождеств* $Id(W) \cap L_{\geq 2}(X)$ *определяет некоторое собственное подмногообразие в* V_L*.*

Теорема 2 [2]. *Пусть* V *— нетривиальное многообразие алгебр Пуассона над произвольным полем. Тогда*

(i) *либо* $c_n(V) \geq 2^{n-1}$ *для любого* n*,*

(ii) *либо найдется такой многочлен* $f(x)$ *степени* $N \geq 0$ *из кольца* $\mathbb{Q}[x]$*, что для любого* $n \geq N$ *будет выполнено равенство* $c_n(V) = f(n)$*.*

На сегодняшний день известны всего пять многообразий алгебр Ли почти полиномиального роста. Для однородности записи обозначим их через V_0, V_1, V_2, V_3, V_4.

$V_0 = \mathrm{var}(\mathrm{sl}_2)$ — многообразие алгебр Ли, порожденное алгеброй матриц порядка 2 со следом 0. Это единственное известное многообразие алгебр Ли почти полиномиального роста, не являющееся разрешимым. Оно подробно исследовано в работах Ю.П. Размыслова [4, 15] и В. Дренски [16].

Многообразие алгебр Ли $V_1 = N_2A$ определяется таким тождеством (см. [17]):

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4], [x_5, x_6]] = 0\,.$$

Многообразие V_2 построено И.Б. Воличенко в работах [18, 19]. Оно порождается алгеброй Ли $A_L = \begin{pmatrix} G & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где G — бесконечномерная алгебра Грассмана, а 0 — нулевая алгебра. Это многообразие является наименьшим в классе многообразий алгебр Ли, в которых не выполняется ни одно лиево стандартное тождество.

Многообразия V_3 и V_4 построены С.П. Мищенко следующим образом [20]. Рассмотрим кольцо многочленов $R = K[t]$ от переменной t, трехмерную нильпотентную алгебру Гейзенберга N_3 с базисом $\{a, b, c\}$ и таблицей умножения $ba = c, ac = bc = 0$, и двумерную метабелеву (разрешимую ступени 2) алгебру M_2 с базисом $\{h, e\}$ и таблицей умножения $he = h$. Гомоморфизмы $\sigma : N_3 \to \operatorname{Der} R$ и $\phi : M_2 \to \operatorname{Der} R$ определяются так:

$$\sigma(e)f(t) = tf'(t),\ \sigma(a)f(t) = tf(t)\,;$$

$$\phi(a)f(t) = f'(t),\ \phi(b)f(t) = tf(t),\ \phi(c)f(t) = f(t)\,.$$

Полупрямые произведения алгебр $N_L = R \leftthreetimes N_3$, $M_L = R \leftthreetimes M_2$ порождают соответственно многообразия V_3 и V_4.

Обозначим через $\mathrm{sl}_2(K) \oplus K$, $A_L \oplus K$, $N_L \oplus K$ и $M_L \oplus K$ алгебры Пуассона с операциями (1), а через V_0^P, V_2^P, V_3^P и V_4^P — многообразия алгебр Пуассона, порожденные соответственно алгебрами $\mathrm{sl}_2(K) \oplus K$, $A_L \oplus K$, $N_L \oplus K$ и $M_L \oplus K$. Также обозначим через V_1^P многообразие алгебр Пуассона, порожденное тождествами

$$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_6\}\} = 0,\ \ \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0.$$

Теорема 3. *Экспоненты многообразий V_i^P, $i = 0, ..., 4$, существуют, причем*

$$EXP(V_0^P) = 4,\ EXP(V_1^P) = 3,\ EXP(V_2^P) = 3,\ EXP(V_3^P) = 4,\ EXP(V_4^P) = 3.$$

Если V — некоторое собственное подмногообразие одного из многообразий V_i^P, $0 \le i \le 4$, то рост многообразия V либо ограничен полиномом, либо найдется такое β, что для любого n будет выполнено неравенство

$$2^{n-1} \le c_n(V) \le n^{\beta} 2^n. \tag{2}$$

□ Для экспонент рассмотренных выше многообразий алгебр Ли почти полиномиального роста выполнены следующие равенства: $EXP(V_0) = 3$ (см. [16]), $EXP(V_1) = 2$ (см. [17]), $EXP(V_2) = 2$ (см. [18, 19]), $EXP(V_3) = 3$ и $EXP(V_4) = 2$ (см. [20]). Поэтому значения экспонент многообразий V_i^P, $i = 0, ..., 4$, следуют из данных равенств и теоремы 1.

Пусть V — некоторое собственное подмногообразие одного из многообразий V_i^P, $i = 0, ..., 4$. Тогда идеал тождеств $Id(V) \cap L_{\ge 2}(X)$ определяет некоторое собственное подмногообразие в V_i, которое будет иметь рост не выше полиномиального. Поэтому, с учетом теорем 1 и 2, либо рост многообразия V будет ограничен полиномом, либо для него будет выполнено двойное неравенство (2). ■

Теорема 4. V_2^P *является наименьшим многообразием алгебр Пуассона, в котором не выполнено ни одно лиево стандартное тождество.*

□ Доказательство следует из работ [18, 19] и теоремы 1. ■

Литература

1. Борисов А.В., Мамаев И.С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике / М.-Иж.: РХД, 1999.
2. Рацеев С.М. Коммутативные алгебры Лейбница-Пуассона полиномиального роста // Вестн. Сам. гос. ун-та. Естеств. сер. – 2012. – 94;№ 3/1. – С.54-65.
3. Рацеев С.М. О многообразии алгебр Пуассона с тождеством $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$ // Тольятти: Изд-во ТГУ. – Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов. Материалы III международной школы-конференции, посвящённой 75-летию Э.Б. Винберга (25-30 июня 2012 г.), 2012. – С.43-45.
4. Размыслов Ю.П. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль // Алгебра и логика. – 1973. – 12;1. – С.83-113.
5. Размыслов Ю.П. Конечная базируемость некоторых многообразий алгебр // Алгебра и логика. – 1974. – 13;6. – С.685-693.
6. Дренски В.С. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр // Матем. сб. – 1981. – 115;1. – С.98-115.
7. Мищенко С.П. Многообразия алгебр Ли с двуступенно нильпотентным коммутантом // Весці АН БССР: Сер. фіз. матем. наук. – 1987. – 6. – С.39-43.
8. Воличенко И.Б. Об одном многообразии алгебр Ли, связанном со стандартными тождествами // Весці АН БССР: Сер. фіз. матем. наук. – 1980. – 1. – С.23-30.
9. Воличенко И.Б. Об одном многообразии алгебр Ли, связанном со стандартными тождествами // Весці АН БССР: Сер. фіз. матем. наук. – 1980. – 2. – С.22-29.
10. Мищенко С.П. О многообразиях разрешимых алгебр Ли // ДАН СССР. – 1990. – 313;6. – С.1345-1348.

ON VARIETIES OF POISSON ALGEBRAS WITH EXTREMAL PROPERTIES

S.M. Ratseev

Ulyanovsk State University,
Lev Tolstoy St., 42, Ulyanovsk, 432017, Russia, e-mail: RatseevSM@mail.ru

Abstract. Varieties of Poisson algebras with extremal properties are studied. It is proposed the least variety of Poisson algebras where all Lie standard identities are not hold.

Key words: Poisson algebra, variety of algebras, growth of variety.

УДК 519.21

ОБ ОДНОЙ АДДИТИВНОЙ ЗАДАЧЕ С ДРОБНЫМИ ДОЛЯМИ

А.В. Шутов

Владимирский государственный университет
пр. Строителей, 11, Владимир, 600024, Россия, e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация. В работе получена асимптотическая формула для числа решений уравнения $n_1 + \ldots + n_k = n$ с дополнительными условиями на слагаемые $\{n_i\alpha\} \in I_i$.

Ключевые слова: аддитивные задачи, дробные доли, теорема Вейля.

Введение. В работе рассматривается задача об асимптотике для числа решений линейного диофантова уравнения

$$n_1 + \ldots + n_k = n \tag{1}$$

с дополнительными условиями на слагаемые

$$\{n_i\alpha\} \in I_i, i = 1, \ldots, k\,. \tag{2}$$

Здесь α – иррациональное число, $\{\cdot\}$ – дробная доля и $I_i \subset (0;1)$ – множества с интегрируемой по Риману характеристической функцией.

В.Г. Журавлев [3] рассмотрел бинарную аддитивную задачу для так называемых четно-фибоначчевых чисел. Напомним, что любое натуральное число n разлагается по жадному алгоритму в систему счисления Фибоначчи

$$n = \sum_{i\geq 1} \varepsilon_i(n) F_i,$$

где $F_0 = F_1 = 1$, $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ и $\varepsilon_i(n)\varepsilon_{i+1}(n) = 0$. Число n называется четно-фибоначчевым, если $\varepsilon_1(n) = 0$. Оказывается, что условие четно-фибоначчевости эквивалентно попаданию дробной доли $\{n\tau\}$, $\tau = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ в некоторый интервал.

Условие попадания дробной доли $n\tau$ в некоторый интервал описывает также множества $F(\delta_1, \ldots, \delta_m) = \{n : \varepsilon_1(n) = \delta_1, \ldots, \varepsilon_m(n) = \delta_m\}$. Бинарная задача для чисел из $F(0, \ldots, 0)$ с любым количеством нулей рассмотрена в [4].

К условию (2) сводится также описание аналогов множеств $F(\delta_1, \ldots, \delta_m)$, связанных с разложениями натуральных чисел по линейным рекуррентным последовательностям второго порядка, а также с разложениями натуральных чисел по знаменателям подходящих дробей к иррациональности α (разложение Островского-Цеккендорфа).

Гриценко и Моткина рассмотрели тернарную проблему Гольдбаха и проблему Хуа-Логена с дополнительными условиями типа (2) [1], [2].

Обозначим через $r_k(\alpha, I_1, \ldots, I_k, n)$ число решений уравнения (1) с дополнительными условиями (2). В случае $I_1 = \ldots = I_k = (a, b)$ будем обозначать число решений просто $r_k(\alpha, I, n)$. В работах [1], [2] фактически доказан следующий результат

Теорема 1. *Пусть α – квадратичная иррациональность. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$r_k(\alpha, I, n) \sim \sigma_k(a, b, n) n^{k-1},$$

где $\sigma_k(a, b, n)$ – особый ряд, вычисляемый по формуле

$$\sigma_k(a, b, n) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\alpha n - 0{,}5k(a+b))} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k}.$$

При этом остались открытыми вопросы об явном вычислении особого ряда, а также об условиях, при которых данный особый ряд отличен от нуля.

В настоящей работе будет получена альтернативная асимптотическая формула для $r_k(\alpha, I_1, \ldots, I_k, n)$, дающая ответы на эти вопросы.

Автор выражает свою благодарность Владимиру Георгиевичу Журавлеву, благодаря которому возникла рассматриваемая задача, а также Сергею Александровичу Гриценко за стимулирующие обсуждения.

2. Бинарная задача

Вначале рассмотрим случай $k = 2$. Для любого ε введем отображение

$$\iota_\varepsilon : x \to 1 - x + \varepsilon \pmod 1.$$

Теорема 2. *Справедлива асимптотическая формула*

$$r_2(\alpha, I_1, I_2, n) \sim |I_1 \cap I^2(\{n_1\alpha\})| n, \tag{3}$$

где $I^2(\varepsilon) = \iota_\varepsilon(I_2)$.

□ Действительно,

$$r_2(\alpha, I_1, I_2, n) = \sum_{\substack{n_1 + n_2 = n, \\ \{n_1\alpha\} \in I_1, \\ \{n_2\alpha\} \in I_2}} 1 = \sum_{\substack{n_1 = 1, \\ \{n_1\alpha\} \in I_1, \\ \{(n-n_1)\alpha\} \in I_2}}^{n} 1 =$$

$$= \sum_{\substack{n_1 = 1, \\ \{n_1\alpha\} \in I_1, \\ \{n_1\alpha\} \in \iota_{\{n_1\alpha\}}(I_2)}}^{n} 1 = \sum_{\substack{n_1 = 1, \\ \{n_1\alpha\} \in I_1 \cap I^2(\{n_1\alpha\})}}^{n} 1 = N(\alpha, n, I_1 \cap I^2(\{n_1\alpha\})),$$

где

$$N(\alpha, n, X) = \sharp\{k : 1 \le k \le n, \{k\alpha\} \in X\}.$$

Согласно теореме Вейля о равномерном распределении [7], справедлива асимптотическая формула

$$N(\alpha, n, X) \sim n|X| + o(n), \tag{4}$$

используя которую немедленно получаем требуемый результат. ■

Рассмотрим теперь вопрос об остаточном члене формулы (3). Ясно, что он выражается через остаточный член формулы (4). Однако, хорошо известно, что без дополнительных предположений об α и X остаточный член формулы (4) неулучшаем. Тем не менее, улучшение возможно при некоторых дополнительных предположениях.

Пусть

$$\Delta(\alpha, n) = \sup_{I=(a;b)} |N(\alpha, n, I) - (b-a)n|.$$

В частности, известна оценка

$$\Delta(\alpha, n) = O(\ln n)$$

в случае, если α – квадратичная иррациональность, а также оценка

$$\Delta(\alpha, n) = O(n^{\varepsilon})$$

в случае алгебраических α. Более подробную информацию о современных оценках $\Delta(\alpha, n)$ можно найти например в работе [6]. Используя введенное определение, можно переписать теорему 2 в следующем виде.

Теорема 3. *Пусть множества I_1, I_2 являются интервалами. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$r_2(\alpha, I_1, I_2, n) \sim |I_1 \cap I^2(\{n_1\alpha\})|n + O(\Delta(\alpha, n)). \tag{5}$$

Замечание 1. Формула (5) справедлива также в случае, когда множества I_1, I_2 являются объединением не более, чем l интервалов. При этом константа в $O(\Delta(\alpha, n))$ умножается на l.

3. Случай произвольного числа слагаемых

Теорема 4. *Пусть все множества $I_1, \dots, I_k$ являются интервалами. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$r_k(\alpha, I_1, \dots, I_k, n) \sim c_k(I_1, \dots, I_k, \{n\alpha\})n^{k-1} + O(n^{k-2}\Delta(\alpha, n)), \tag{6}$$

где $c_k(I_1, \dots, I_k, \varepsilon)$ – периодическая с периодом 1 функция, вычисляемая по формуле

$$c_k(I_1, \dots, I_k, \varepsilon) = \frac{1}{k-1}\int_{I^k(\varepsilon)} c_{k-1}(I_1, \dots, I_{k-1}, x)dx. \tag{7}$$

Здесь

$$I^k(\varepsilon) = \iota_\varepsilon(I_k)$$

и функция $c_1(I_1, \varepsilon)$ *задается на периоде* $[0;1)$ *условием:*

$$c_1(I_1, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon \in I_1; \\ 0, & \varepsilon \notin I_1; \end{cases} .$$

□ Доказательство формулы (6) будем проводить индукцией по k. Для $k = 2$ формула (6) эквивалентна (5), что проверяется непосредственным вычислением интеграла (7). Рассмотрим переход $k \to k+1$.

Заметим, что

$$r_{k+1}(\alpha, I_1, \dots, I_{k+1}, n) = \sum_{n_1 + n_2' = n} r_k(\alpha, I_1, \dots, I_k, n_1) \ .$$

Обозначим через $\chi_i(x)$ характеристические функции интервалов I_i, продолженные по периодичности с периодом 1 на всю числовую прямую. Тогда имеем

$$r_{k+1}(\alpha, I_1, \dots, I_{k+1}, n) = \sum_{n_1=1}^{n-1} r_k(\alpha, I_1, \dots, I_k, n_1)\chi_{k+1}(\{(n-n_1)\alpha\}) \ .$$

Используя предположение индукции, получаем

$$r_{k+1}(\alpha, I_1, \dots, I_k, n) = \sum_{n_1=1}^{n} c_k(I_1, \dots, I_k, \{n_1\alpha\})n_1^{k-1}\chi_{k+1}(\{(n-n_1)\alpha\}) + O(n^{k-1}\Delta(\alpha, n)) \ .$$

Воспользовавшись формулой суммирования Абеля, находим

$$r_{k+1}(\alpha, I_1, \dots, I_k, n) = n^{k-1}B_n - \sum_{i=1}^{n-1} B_i((i+1)^{k-1} - i^{k-1}) + O(n^{k-1}\Delta(\alpha, n)) \ , \qquad (8)$$

где

$$B_i = \sum_{j=1}^{i} c_k(I_1, \dots, I_k, \{j\alpha\})\chi_{k+1}(\{(n-j)\alpha\}) \ .$$

Далее воспользуемся следующей теоремой Коксмы-Главки [5].

Теорема 5. *Пусть* f *– функция с ограниченной вариацией и* α *– иррационально. Тогда*

$$|\sum_{i=1}^{n} f(\{i\alpha\}) - \int_0^1 f(x)dx| \le V(f)\Delta(\alpha, n) \ , \qquad (9)$$

где $V(f)$ *– вариация функции* f *на* $(0;1)$.

Оценка (9) дает асимптотическую формулу

$$B_i = i\int_0^1 c_k(I_1, \dots, I_k, x)\chi_{k+1}(\{n\alpha\} - x)dx + O(\Delta(\alpha, i)).$$

С учетом (7), асимптотика для B_i запишется в виде

$$B_i = ikc_{k+1}(I_1, \ldots, I_k, \{n\alpha\}) + O(\Delta(\alpha, i)) \ .$$

Подставив в (8), имеем

$$r_{k+1}(\alpha, I_1, \ldots, I_k, n) = n^k kc_{k+1}(I_1, \ldots, I_k, \{n\alpha\}) -$$

$$-kc_{k+1}(I_1, \ldots, I_k, \{n\alpha\}) \sum_{i=1}^{n-1} i((i+1)^{k-1} - i^{k-1}) + O(n^{k-1}\Delta(\alpha, i)).$$

Далее,

$$\sum_{i=1}^{n-1} i((i+1)^{k-1} - i^{k-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} i((k-1)i^{k-2} + O(i^{k-3})) =$$

$$= (k-1)\sum_{i=1}^{n-1}(i^{k-1} + O(i^{k-2})) = \frac{k-1}{k} n^k + O(n^{k-1}) \ ,$$

откуда и следует требуемый результат. ■

Замечание 2. Аналогично можно доказать аналог теоремы 4 для произвольных множеств $I_1, \ldots, I_k$, характеристические функции которых интегрируемы по Риману. В этом случае остаточный член в асимптотической формуле будет иметь вид $o(n^{k-1})$.

Следствие 1. *Для функции $c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon)$ также справедлива формула*

$$c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \chi_1(x_1)\chi_2(x_2 - x_1) \ldots \chi_{k-1}(x_{k-1} - x_{k-2})\chi_k(\varepsilon - x_{k-1}) dx_1 \ldots dx_{k-1} \ .$$

□ Доказательство получается многократным применением формулы (7). ■

Теорема 4 может быть также обобщена на более общий случай. Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_k$ – интегрируемые по Риману функции. Рассмотрим задачу об асимптотической формуле для суммы

$$N(\alpha, \psi_1, \ldots, \psi_k, n) = \sum_{n_1 + \ldots + n_k = n} \prod_{i=1}^{k} \psi_i(\{n_i \alpha\}) \ .$$

В случае, когда $\psi_i = \chi_i$ – характеристические функции множеств $I_1 \ldots, I_k$, данная задача превращается в задачу (1) с дополнительными условиями (2).

Аналогично теореме 4 и следствию 1 доказывается следующий результат.

Теорема 6. *Справедлива асимптотическая формула*

$$N(\alpha, \psi_1, \ldots, \psi_k, n) \sim \frac{1}{(k-1)!} c^*(\{n\alpha\}) n^{k-1},$$

где

$$c^*(\varepsilon) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \psi_1(x_1)\psi_2(x_2 - x_1) \ldots \psi_{k-1}(x_{k-1} - x_{k-2})\psi_k(\varepsilon - x_{k-1}) dx_1 \ldots dx_{k-1} \ . \quad (10)$$

Замечание 3. В предположении, что все функции $\psi_1, \ldots, \psi_k$ имеют ограниченную вариацию, можно получить аналог теоремы 6 с остаточным членом порядка $O(n^{k-2}\Delta(\alpha, n))$.

4. Свойства функции $c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon)$

Теорема 7. *Пусть $c(\varepsilon) = c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon)$. Тогда*

1) $c(\varepsilon)$ непрерывна при $k \geq 2$;

2) $c(\varepsilon)$ является кусочным многочленом степени $k-1$;

3) существует $R = R_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon)$ такое, что $c(R - \varepsilon) = c(\varepsilon)$.

□ Доказательство теоремы получается простым вычислением, основанном на индукции по k. ■

Теорема 8. *Пусть $I_1, \ldots, I_k$ – интервалы и*

$$\rho_k(I_1, \ldots, I_k) = |\{\varepsilon \in [0; 1) : c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon) > 0\}| \ .$$

Тогда

$$\rho_k(I_1, \ldots, I_k) = \min\{1; |I_1| + \ldots + |I_k|\} \ .$$

□ Доказательство проведем индукцией по k. Для $k = 1$ утверждение очевидно. Рассмотрим переход $k \to k+1$. Пусть

$$J_k = \{\varepsilon \in [0; 1) : c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon) > 0\} \ .$$

Тогда $|J_k| = \rho_k(I_1, \ldots, I_k)$. Кроме того, из (7) вытекает, что $J_{k+1} = \{\varepsilon : J_k \cap I^{k+1}(\varepsilon) \neq \varnothing\}$. Далее нужно рассмотреть два случая:

1) $|J_k| + |I_{k+1}| > 1$. Тогда $|J_k \cap I^{k+1}(\varepsilon)| = |J_k| + |I^{k+1}(\varepsilon)| - |J_k \cup I^{k+1}(\varepsilon)|$. Поскольку $|I^{k+1}(\varepsilon)| = |I_{k+1}|$ и $J_k \cup I^{k+1}(\varepsilon) \subseteq [0; 1)$, имеем $|J_k \cap I^{k+1}(\varepsilon)| > |J_k| + |I_{k+1}| - 1 > 0$, то есть J_k и $I^{k+1}(\varepsilon)$ пересекаются для всех ε и $J_{k+1} = [0; 1)$.

2) $|J_k| + |I_{k+1}| \leq 1$. Выберем ε_0 так, чтобы правый конец интервала $I^{k+1}(\varepsilon)$ совпал с левым концом интервала J_k. Тогда легко видеть, что $J_{k+1} = (\varepsilon_0; \varepsilon_0 + |J_k| + |I_{k+1}|)$ (множество J_k и операция сложения здесь рассматриваются по модулю 1). ■

Теорема 8 позволяет дать необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (1) с дополнительным условием (2).

Теорема 9. *Пусть $|I_1| + \ldots + |I_k| \geq 1$. Тогда уравнение (1) с дополнительным условием (2) разрешимо для всех достаточно больших n. Если же $|I_1| + \ldots + |I_k| < 1$, то плотность множества натуральных n, для которых уравнение (1) с дополнительным условием (2) разрешимо, равна $\rho_k(I_1, \ldots, I_k)$.*

□ Согласно теореме 4, число решений уравнения (1) с дополнительным условием (2) больше нуля для всех достаточно больших n, удовлетворяющих условию $c_k(I_1, \ldots, I_k, \{n\alpha\}) > 0$. С учетом теоремы 8 нам остается доказать, что при условии $|I_1| + \ldots + |I_k| < 1$ множество n для которых уравнение (1) с дополнительным условием (2) неразрешимо имеет плотность не менее $1 - (|I_1| + \ldots + |I_k|)$. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что уравнение (1) с дополнительным условием (2) неразрешимо при $\{n\alpha\} \notin I_1 + \ldots + I_k$, где $I_1 + \ldots + I_k$ – сумма по Минковскому множеств $I_1, \ldots, I_k$. ■

Далее мы будем предполагать, что $I_1 = \ldots = I_k = I = (a, b)$. Соответствующую функцию $c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon)$ обозначим через $c_k(I, \varepsilon)$. Рассмотрим оценки сверху и снизу для $c_k(I, \varepsilon)$.

Индукцией по k легко получить следующий результат.

Теорема 10. *Справедливо неравенство*

$$|c_k(I,\varepsilon)| \le \frac{|I|^{k-1}}{(k-1)!}\ .$$

□ Действительно, для $k = 1$ утверждение очевидно, а переход $k \to k+1$ следует из неравенств

$$|c_{k+1}(I,\varepsilon)| \le \frac{1}{k}\Big|\int_{I(\varepsilon)} c_k(I,x)dx\Big| \le \frac{1}{k}\int_{I(\varepsilon)} |c_k(I,x)dx| \le$$

$$\le \frac{1}{k}\frac{|I|^{k-1}}{(k-1)!}\int_{I(\varepsilon)} 1dx \le \frac{|I|^{k-1}}{k!}|I(\varepsilon)| \le \frac{|I|^k}{k!}\ .$$

Здесь $I(\varepsilon) = \iota_\varepsilon(I)$. ■

Следствие 2. *При фиксированных I, ε $c_k(I,\varepsilon) \to 0$ при $k \to \infty$.*

Вопрос об оценке $c_k(I,\varepsilon)$ снизу является более сложным, так как для любого k можно подобрать I, ε так, чтобы $c_k(I,\varepsilon) = 0$. Например, можно выбрать $I = (0; \frac{1}{k+1})$ и $\varepsilon > \frac{k}{k+1}$. Тем не менее, можно получить следующий результат.

Теорема 11. *Пусть $l = [\frac{1}{|I|}] + 1$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Тогда существует постоянная $\widetilde{c}(I)$ такая, что для всех $k \ge l$ справедливо неравенство*

$$|c_k(I,\varepsilon)| \ge \widetilde{c}(I)\frac{|I|^{k-1}}{(k-1)!}\ . \tag{11}$$

□ Заметим, что в силу теоремы 8 $c_l(I,\varepsilon) > 0$ для всех ε, поскольку $l|I| > 1$. Поэтому можно выбрать постоянную $\widetilde{c}(I)$ так, чтобы неравенство (11) выполнялось для $k = l$. Далее остается воспользоваться методом математической индукции аналогично доказательству теоремы 10. ■

5. Среднее число решений

Рассмотрим теперь среднее число решений уравнения (1), удовлетворяющих условию (2)

$$\widehat{r}_k(\alpha, I_1, \ldots, I_k, n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_k(\alpha, I_1, \ldots, I_k, i)\ .$$

Теорема 12. *Пусть $I_1, \dots, I_k$ – интервалы. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\widehat{r}_k(\alpha, I_1, \dots, I_k, n) = \frac{\prod_{i=1}^{k} |I_i|}{k!} n^{k-1} + O(n^{k-2}\Delta(\alpha, n)) \ . \tag{12}$$

С учетом теоремы 4,

$$\widehat{r}_k(\alpha, I_1, \dots, I_k, n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_k(I_1, \dots, I_k, \{n\alpha\}) n^{k-1} + O(n^{k-2}\Delta(\alpha, n)) \ .$$

Используя преобразование Абеля, получим

$$\widehat{r}_k(\alpha, I_1, \dots, I_k, n) = n^{k-2} B_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} B_i((i+1)^{k-1} - i^k),$$

где

$$B_i = \sum_{j=1}^{i} c_k(I_1, \dots, I_k, \{n\alpha\}) \ .$$

Пусть

$$C_k = \int_0^1 c_k(I_1, \dots, I_k, x)dx \ .$$

Поскольку функция $c_k(I_1, \dots, I_k, \varepsilon)$ представляет собой кусочный многочлен, она имеет ограниченную вариацию. Следовательно, по неравенству Коксмы-Главки,

$$B_i = C_k i + O(\Delta(\alpha, i)).$$

Подставляя асимптотику для B_i и действуя аналогично доказательству теоремы 4, находим

$$\widehat{r}_k(\alpha, I_1, \dots, I_k, n) = \frac{C_k}{k} n^{k-1} + O(n^{k-2}\Delta(\alpha, n)) \ .$$

Для доказательства теоремы 12 нам остается доказать, что

$$C_k = \int_0^1 c_k(I_1, \dots, I_k, x)dx = \frac{\prod_{i=1}^{k} |I_i|}{(k-1)!} \ . \tag{13}$$

Формулу (13) будем доказывать индукцией по k. Для $k = 1$ формула очевидно верна. Заметим, что для перехода $k \to k+1$ достаточно доказать, что

$$C_{k+1} = \frac{C_k}{k} |I_k| \ . \tag{14}$$

Имеем,

$$C_{k+1} = \int_0^1 c_{k+1}(I_1, \dots, I_k, x)dx = \int_0^1 \Big(\frac{1}{k}\int_{I^{k+1}(x)} c_k(I_1, \dots, I_k, y)dy\Big)dx \ .$$

Пусть $I^{k+1}(0) = (a; b)$. Тогда

$$C_{k+1} = \frac{1}{k}\int_0^1 \int_{a+x}^{b+x} c_k(I_1, \ldots, I_k, y)dydx\ .$$

Сделаем замену переменной $x' = x$, $y' = y - x$. Якобиан соответствующего преобразования равен 1, поэтому

$$C_{k+1} = \frac{1}{k}\int_0^1 \int_{a}^{b} c_k(I_1, \ldots, I_k, y' - x')dy'dx'\ .$$

Поменяем пределы интегрирования местами:

$$C_{k+1} = \frac{1}{k}\int_a^b \int_{0}^{1} c_k(I_1, \ldots, I_k, y' - x')dx'dy'\ .$$

Заметим, что в силу периодичности функции $c_k(I_1, \ldots, I_k, x)$

$$\int_0^1 c_k(I_1, \ldots, I_k, x)dx = \int_0^1 c_k(I_1, \ldots, I_k, x + z)dx$$

для всех z. Кроме того, в силу теоремы 7, $c_k(I_1, \ldots, I_k, y' - x') = c_k(I_1, \ldots, I_k, y' + x' + R_k)$ для некоторого R_k. Отсюда

$$C_{k+1} = \frac{1}{k}\int_a^b \int_0^1 c_k(I_1, \ldots, I_k, y' + x' + R_k)dx'dy' = \frac{1}{k}\int_a^b \int_0^1 c_k(I_1, \ldots, I_k, x')dx'dy' =$$

$$= \frac{1}{k}\int_a^b C_k dy' = \frac{C_k}{k}(b - a)\ ,$$

откуда и следует формула (14). ■

Замечание 3. Можно было бы получить также аналог формулы (12) для среднего числа решений на промежутке $(n; n + h(n))$, где $h(n) \to +\infty$ – произвольная функция, монотонно стремящаяся к бесконечности.

Замечание 4. Используя формулу (10) и действуя аналогично доказательству теоремы 12, можно получить следующую асимптотическую формулу для среднего значения функции $N(\alpha, \psi_1, \ldots, \psi_k, n)$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N(\alpha, \psi_1, \ldots, \psi_k, i) \sim \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k}\int_0^1 \psi_j(x)dx \cdot n^{k-1}.$$

В случае, когда все функции $\psi_1, \ldots, \psi_k$ имеют ограниченную вариацию, можно также получить аналог данной формулы с остаточным членом.

Литература

1. Гриценко С.А., Мотькина Н.Н. Об одном варианте тернарной проблемы Гольдбаха // ДАН республики Таджикистан. – -2009. – 52,Вып.6. –С.413-417.
2. Гриценко С.А., Мотькина Н.Н. Задача Хуа Ло-кена с простыми числами специального вида // ДАН республики Таджикистан. – 2009. – 52,Вып.7. – С.497-500.
3. Журавлев В.Г. Четно-фибоначчевы числа: бинарная аддитивная задача, распрделение по прогрессиям и спектр // Алгебра и анализ. – 2008. – 20,Вып.3. – С.18-46.
4. Швагирева И.К. Бинарные аддитивные задачи над ∘-прогессиями Фибоначчи // Материалы VII международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященной памяти А.А. Карацубы, Тула, 11-16 мая 2010 года / Тула: ТГПУ, 2010. – С.198-200.
5. Koksma J.F. Een algemeene stelling uit de theorie der gelijkmatige verdeeling modulo 1 // Mathematica B (Zutphen). – 1942/43. – 11. – P.7-11.
6. Pinner C.G. On Sums of Fractional Parts $\{n\alpha + \gamma\}$ // J.Number Theory. – 1997. – 65. – P.48-73.
7. Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. – 1910. – 30. – P.377-407.

ON ONE ADDITIVE PROBLEM WITH THE FRACTIONAL PART FUNCTION

A.V.Shutov

Vladimir State University,
Stroiteley Av., 11, Vladimir, 600024, Russia, e-mail: a1981@mail.ru

Abstract. The asymptotic formula of the soltion number of the equation $n_1 + \ldots + n_k = n$ with the special conditions on summands $\{n_i\alpha\} \in I_i$ is obtained.

Key words: additive problems, fractional part function, Weyl theorem.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MSC 81V45

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОНА ШЕМА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ АТОМОВ МЕТОДОМ ОПОРНОЙ ФУНКЦИИ

А.В. Береговой, А.Г. Шкловский

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Shklovsky@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается решение уравнения Кона-Шема для цилиндрических атомов методом опорной функции на примере атомов углерода и кислорода.

Ключевые слова: уравнение Кона-Шема, цилиндрический атом, метод опорной функции, локальный обменно-корреляционный потенциал.

1. Введение. В настоящей работе рассматривается решение уравнения Кона-Шема для цилиндрических атомов методом опорной функции на примере атомов углерода и кислорода. Обычно для атомов используется предложенное Слэтером [1] приближение сферического атома. Это приближение предполагает, что вместо реальной электронной плотности следующей из формулы Кона-Шема [2], следует брать электронную плотность усреднённую по углам. Конечно для многих атомов, на пример атомов щелочных металлов или благородных газов это приближение является точным. Более того, если учесть, что в методе Кона-Шема не требуется чтобы числа заполнения являлись целыми, то всегда можно подобрать числа заполнения так, что бы получившаяся электронная плотность была сферически симметричной. Например для углерода можно взять число заполнения z орбитали равное $2/3$ и такие же числа заполнения взять для x и y орбиталей. При этом электронная плотность окажется сферически симметричной и полное число заполнения $2p$ орбитали будет равно 2.

В случае использования для заполнения только целых чисел оба электрона в углероде должны занять тот уровень, энергия которого окажется ниже. В этом случае атом углерода будет иметь уже не сферическую электронную плотность, а цилиндрическую, так как соответствующую орбиталь всегда можно назвать z орбиталью.

Конечно, решение цилиндрической задачи требует гораздо больших вычислительных усилий и может быть оправдано только в том случае, если для обменно-корреляционного потенциала Кона-Шема есть достаточно точное приближение. В работе [3] предложено новое приближение для локального обменно-корреляционного потенциала релятивистских атомов. Естественно при этом использовалось сферическое приближение для электронной плотности. Для атомов углерода и кислорода релятивистские поправки малы, поэтому будем решать уравнение Кона-Шема в нерелятивистском приближении и подбирать константы в аппроксимирующем потенциале так, чтобы энергии ионизации и энергии внутренних оболочек, рассчитанные с использованием приближённого потенциала, были по возможности близки к экспериментальным энергиям.

Далее будет использоваться атомная система единиц $\hbar = e^2 = m_e = 1$.

Расположим ядро атома углерода или кислорода в начале координат. Будем предполагать, что атомный потенциал $V(\vec{r})$ не зависит от угла φ:

$$V(\vec{r}) = V(r, z)\,. \tag{1}$$

Это позволяет свести трёхмерное уравнение Кона-Шема:

$$\left(-\frac{\Delta}{2} + V(\vec{r})\right)\Psi_n(\vec{r}) = E_n\Psi_n(\vec{r}) \tag{2}$$

к численному решению двумерного уравнения.

В цилиндрической системе координат уравнение (2), с учётом условия (1), можно переписать в виде:

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(r, z)\right)\Psi_n(\vec{r}] = E_n\Psi_n(\vec{r})\,. \tag{3}$$

Будем искать решение уравнения (3) для функции $\Psi_n(\vec{r})$ методом разделения переменных:

$$\Psi_n(\vec{r}) = \chi_{n,m}(r, z)A_m(\varphi). \tag{4}$$

Для $A_m(\varphi)$ легко получается уравнение:

$$\frac{\partial^2 A_m(\varphi)}{\partial\varphi^2} = -m^2 A_m(\varphi). \tag{5}$$

Здесь $A_m(\varphi)$ удовлетворяет очевидному граничному условию:

$$A_m(\varphi + 2\pi) = A_m(\varphi). \tag{6}$$

Решение уравнения (5) с граничными условиями (6) очевидно и приводит к системе ортогональных функций:

$$A_m(\varphi) = \cos(m\cdot\varphi), \qquad A_m(\varphi) = \sin(m\cdot\varphi). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получаем, что для выполнения этих граничных условий m должно быть целым числом.

Подставим в уравнение (3) выражение (4) с учётом (7). После сокращения sin или cos уравнение для функции $\chi_{n,m}(r, z)$ принимает вид:

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(r, z)\right]\chi_{n,m}(r, z) = E_{n,m}\chi_{n,m}(r, z)\,. \tag{8}$$

Оставшееся уравнение содержит только две переменные r и z. Для того чтобы избавиться в (8) от первых производных по r запишем:

$$\chi_{n,m}(r,z) = \frac{u_{n,m}(r,z)}{\sqrt{r}}\,. \tag{9}$$

Из соотношения (9) видно, что при $r = 0$, $u_{n,m}(0,z) = 0$ при любом z. Подставляя (9) в (8), для функции $u_{n,m}(r,z)$ получаем уравнение:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m^2 - 0,25}{r^2} + 2V(r,z)\right) u_{n,m}(r,z) = 2E_{n,m}u_{n,m}(r,z)\,. \tag{10}$$

Очевидно, что на машине мы не можем реализовать бесконечные отрезки. Поэтому вводятся числа r_c и z_c за пределами которых можно считать решения уравнения (10) равными нулю. Следовательно, будем решать уравнение (10) с нулевыми граничными условиями:

$$u_{n,m}(r,z_c) = 0, \quad u_{n,m}(r_c,z) = 0, \quad u_{n,m}(r,-z_c) = 0, \quad u_{n,m}(0,z) = 0. \tag{11}$$

Если сразу решать уравнение (10) численно, то возникают две трудности. Во-первых, уравнение (10) является уравнением на собственные функции и собственные значения. Качественных двумерных численных алгоритмов для решения таких задач до последнего времени не было. Во-вторых, замена второй производной на её дискретный аналог может быть произведена с не очень высокой точностью. Это связано с резким увеличением количества узлов сетки при уменьшении шага, или с уменьшением порядка аппроксимации при использовании неравномерной сетки. Обе эти трудности и приводили ранее к тому, что вместо прямых численных алгоритмов использовались проекционные методы. Эти трудности позволяет преодолеть метод опорной функции. Поэтому далее именно этот метод будет использован для численного решения уравнения (10) .

2. Метод опорной функции. Рассмотрим вариант метода опорной функции, применяемый для решения уравнения Кона-Шема в цилиндрических атомах. Для этого представим функцию $u_{n,m}(r,z)$ в виде:

$$u_{n,m}(r,z) = Y_n(r,z) + y_n(r,z). \tag{12}$$

Здесь функция $y_n(r,z)$ описывает отличие более точной волновой функции $u_{n,m}(r,z)$ от опорной функции $Y_n(r,z)$. Явный вид опорных функций $Y_n(r,z)$ выбирается из следующих соображений. Во-первых, эта функция должна быть или аналитической, или задаваться эффективным численным алгоритмом, гарантирующим очень точное задание этой функции в нужных нам узлах решётки. Во-вторых, эта функция должна достаточно хорошо аппроксимировать функцию $u_n(r,z)$ чтобы можно было считать функцию $y_n(r,z)$ малой добавкой.

С учётом условия (7) для того случая, когда полная функция не зависит от угла φ, для уравнения (10) в качестве опорной функции будем брать линейную комбинацию:

$$\Phi_{n,0}(r,z) = \sum_{1\le k\le 3} a_k^n \cdot Y_k(r,z)\,, \tag{13}$$

где для $k = 1, 2$

$$Y_k(r,z) = \frac{R_k(x)\sqrt{r}}{x}\,. \tag{14}$$

Для $k = 3$ имеем

$$Y_3(r,z) = \frac{R_3(x) z\sqrt{r}}{x^2}\,. \tag{15}$$

Здесь введено обозначение x для расстояния от ядра до электрона:

$$x = \sqrt{r^2 + z^2}\,. \tag{16}$$

При этом a_k^n – нормировочный коэффициент, а $R_k(r)$ – решение радиального уравнения Кона-Шема для сжатого атома углерода или кислорода:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + 2\cdot\left(V_{sph}(x) + \frac{l(l+1)}{2\cdot x^2}\right)\right]\cdot R_k(x) = 2\cdot\varepsilon_k R_k(x)\,. \tag{17}$$

Здесь $k = 1$ соответствует $1s$-состоянию, $k = 2$ – $2s$-состоянию, а $k = 3$ – $2p$-состоянию сжатого атома углерода или кислорода. Потенциал сферически симметричного атома $V_{sph}(x)$ был описан в работе [3].

Для случая, когда полная функция пропорциональна $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$ имеем более простую линейную комбинацию сжатых $2p$ атомных функций углерода или кислорода:

$$\Phi_4(r,z) = \frac{R_3(x)\cdot r\cdot\sqrt{r}}{x^2}\,. \tag{18}$$

Видно, что решение для опорной функции (18) дважды вырождено, так как одна и та же опорная функция, а, следовательно, и одно и то же решение уравнения (10) получаются для различных полных функций. Первая полная функция будет отличаться на $\cos\varphi$, а вторая на $\sin\varphi$.

Перепишем уравнение Кона-Шема (10) для функции $y_{n,m}(r,z)$ в случае $m = 0$:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{0,25}{r^2} + 2\cdot(V(r,z) - E_{n,0})\right)\cdot y_{n,0}(r,z) = F_{n0}(r,z)\,. \tag{19}$$

Здесь введены обозначения:

$$F_{n0}(r,z) = 2\sum_{1\le k\le 3} a_k^n\cdot(E_{n,0} - \varepsilon_k - Q(r,z))\cdot Y_k(r,z)\,. \tag{20}$$

$$Q(r,z) = V(r,z) - V_{sph}(x)\,. \tag{21}$$

Аналогично получим уравнение Кона-Шема для функции $y_{n,1}(r,z)$:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{0,75}{r^2} + 2\cdot(V(r,z) - E_{n,1})\right)\cdot y_{n,1}(r,z) = F_{n1}(r,z)\,. \tag{22}$$

Здесь введено обозначение:

$$F_{n1}(r,z) = 2\left(E_{n,1} - \varepsilon_3 - Q(r,z)\right) \cdot \Phi_4(r,z)\,. \tag{23}$$

В нулевом приближении можно положить $y_n(\rho,z)$ равным нулю, тогда описанные выше опорные функции соответствуют известному методу сильной связи. Интегралы перекрытия b_{mn} и d_{mn} вычисляются в нулевом приближении обычным способом. Это позволяет найти коэффициенты a_k^n в этом приближении.

Прежде чем обсуждать алгоритм решения уравнений (19) или (22) необходимо разобраться с рядом математических вопросов. Отметим, что само уравнение (19), получено из дифференциального уравнения (10) с помощью простых алгебраических преобразований. Поэтому, вопрос о существовании решения уравнения (19) (или (22)) не стоит, однако не очевидно, что любое решение уравнения (19) будет также решением уравнения (10). Может также оказаться, что одному решению уравнения (10) будет соответствовать несколько решений уравнения (19) или (22).

Пусть у нас существуют две функции g_1 и g_2, которые являются различными решениями уравнения (19), относящимися к одной и той же энергии $E_{n,m}$. Для простоты рассмотрим случай, когда в исходном уравнении (10) эта энергия является не вырожденной. Вычитая из уравнения (19) для функции g_1 то же самое уравнение для функции g_2 и приводя подобные члены, получим линейное уравнение:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m^2 - 0,25}{r^2} + 2V(r,z)\right) g_{n,m}(r,z) = 2E_{n,m} g_{n,m}(r,z)\,. \tag{24}$$

Здесь $g_{n,m}(r,z) = g_{1,n,m}(r,z) - g_{2,n,m}(r,z)$. Так как для уравнения (24) $E_{n,m}$ является не вырожденным собственным значением, то $g_{n,m}(r,z)$ либо равна нулю, либо пропорциональна $u_{n,m}(r,z)$:

$$g_{n,m}(r,z) = \lambda \cdot u_{n,m}(r,z)\,,$$
$$g_{1,n,m}(r,z) = \lambda \cdot u_{n,m}(r,z) + g_{2,n,m}(r,z)\,. \tag{25}$$

Так как нас интересует нормированное решение уравнения (10), то подставим (25) в (12):

$$|u_{n,m}(r,z)| = |Y_n(r,z) + \lambda \cdot u_{n,m}(r,z) + g_{2,n,m}(r,z)\,| = |(1+\lambda) \cdot u_{n,m}(r,z)\,|\,. \tag{26}$$

Отсюда, используя условие нормировки для функции $u_{n,m}(r,z)$, получим уравнение:

$$(1+\lambda)^2 = 1,\ \ \lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = -2\,. \tag{27}$$

Таким образом, мы видим, что в отличие от уравнения (10), уравнение (19) имеет два различных решения. Первое решение g_1 действительно является малой добавкой к опорной функции. Второе решение g_2, соответствующее $\lambda_2 = -2$, приводит согласно (26) к функции $-u_n(r,z)$. Эта функция в уравнении (10) не давала нового решения, так как решение линейного однородного уравнения находится с точностью до произвольного коэффициента. Уравнение (19) не однородно и, очевидно, что функции g_1 и g_2 – это разные решения. Поэтому при построении алгоритма следует позаботиться о том, чтобы решения $y_{n,m}(r,z)$ по сравнению с опорными функциями были малы. В этом случае второе решение окажется исключенным.

Перейдем к построению итерационной процедуры решения уравнений (19) и (22). Эти уравнения для различных m и n одного типа. Метод решения для них один и тот же. Все они удовлетворяют нулевым граничным условиям:

$$y_{n,m}(r,z_c) = y_{n,m}(r,-z_c) = y_{n,m}(r_c,z) = y_{n,m}(0,z) = 0\,. \tag{28}$$

Будем решать методом последовательных приближений. Перейдем от дифференциальных уравнений (19) к разностным. Введем неравномерные сетки по осям r и z:

$$n_1 = 1,2,...,N_1, \quad n_2 = 1,2,...,N_2, \quad xr(n_1) = r_{n_1}, \quad zc(n_2) = z_{n_2},$$
$$xr(n_1+1) = xr(n_1) + hr(n_1), \quad zc(n_2+1) = zc(n_2) + hz(n_2). \tag{29}$$

Здесь массивы узлов r_{n_1} с различными номерами связаны друг с другом соотношением (29). При этом $xr(1) = 0$ и $xr(N_1) = r_c$ Аналогично для массивов z_{n_2} имеем $zc(1) = -z_c, zc(N_2) = z_c$. Так как мы собираемся находить функцию $y_{n,m}(r,z)$ приближенно с помощью итерационной процедуры и следить за тем чтобы она была мала по сравнению с $u_n(r,z)$, то в качестве нулевого приближения следует положить $y_{n,m}(r,z) = 0$. Введем два массива $am(n_1,n_2)$ и $bm(n_1,n_2)$. Первый массив будет задавать сеточную функцию приближенно описывающую функцию $y_{n,m}(r,z)$ на нечетных итерациях, а второй - на четных. Тогда вместо уравнения (19) получим разностное уравнение:

$$bm(n_1,n_2) = \Big(Ar(n_1,n_2)\cdot am(n_1+1,n_2) + Br(n_1,n_2)\cdot am(n_1-1,n_2)+$$
$$Az(n_1,n_2)\cdot am(n_1,n_2+1) + Bz(n_1,n_2)\cdot am(n_1,n_2-1) + Fm(n_1,n_2)\Big)\cdot Dm(n_1,n_2) \tag{30}$$

Здесь введены обозначения:

$$Ar(n_1,n_2) = \frac{2\cdot hz(n_2)}{(hr(n_1)+hr(n_1-1))}\,,$$
$$Br(n_1,n_2) = \frac{hrz(n_1,n_2)}{(hr(n_1)+hr(n_1-1))\cdot hr(n_1-1)}\,,$$
$$hrz(n_1,n_2) = 2\cdot hz(n_2)\cdot hr(n_1)\,. \tag{31}$$

$$Az(n_1,n_2) = \frac{2\cdot hr(n_1)}{(hz(n_2)+hz(n_2-1))}\,,$$
$$Bz(n_1,n_2) = \frac{hrz(n_1,n_2)}{(hz(n_2)+hz(n_2-1))\cdot hz(n_2-1)}\,. \tag{32}$$

$$Dm(n_1,n_2) = \Big[Dr(n_1,n_2) + Dz(n_1,n_2) + (V(n_1,n_2) - E_{n,0} - \frac{0.125}{xr(n_1+1)})\cdot hrz(n_1,n_2)\Big]^{-1}\,,$$
$$Fm(n_1,n_2) = F_{n,0}(r_{n_1},z_{n_2})\cdot hrz(n_1,n_2)\,. \tag{33}$$

В (33) введены обозначения:

$$Dr(n_1,n_2)=\frac{2\cdot hz(n_2)}{hr(n_1-1)}\,,\qquad Dz(n_1,n_2)=\frac{2\cdot hr(n_1)}{hz(n_2-1)}\,. \tag{34}$$

Система переменных узлов может быть выбрана так, чтобы обеспечить для рекуррентной формулы (30) относительную погрешность $\delta \le 10^{-3}$. Так как мы строим алгоритм, для которого сама величина $y^{\alpha}_{n_1,n_2}$ мала по сравнению с $u^{\alpha}(r,z)$, то такая точность приемлема.

Уравнение (22) может быть записано в виде разностного аналогично тому, как разностное уравнение (30) описывало уравнение (19):

$$\begin{gathered} bmr(n_1,n_2)=(Ar(n_1,n_2)\cdot amr(n_1+1,n_2)+Br(n_1,n_2)\cdot amr(n_1-1,n_2)+\\ +Az(n_1,n_2)\cdot amr(n_1,n_2+1)+Bz(n_1,n_2)\cdot amr(n_1,n_2-1)+Fmr(n_1,n_2))\cdot Dmr(n_1,n_2)\,. \end{gathered} \tag{35}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{gathered} Dmr(n_1,n_2)=\Big[Dr(n_1,n_2)+Dz(n_1,n_2)+(V(n_1,n_2)-E_{n,1}+\frac{0.375}{xr(n_1+1)^2})\cdot hrz(n_1,n_2)\Big]^{-1}\,,\\ Fmr(n_1,n_2)=F_{n_1}(r_{n_1},z_{n_2})\cdot hrz(n_1,n_2)\,. \end{gathered} \tag{36}$$

Очевидно, что представление разностных уравнений в виде (30) и (35) удобно для применения итерационного метода решения. В (33) и (36) входит неизвестная энергия атома $E_{n,m}=E_{\alpha}$. Для нахождения энергии $E_{n,m}$ воспользуемся уравнением (19). Для этого умножим его слева на $u_{n,m}(r,z)$ и проинтегрируем по r и z . Учитывая, что уравнение (10) является самосопряжённым, и сокращая подобные члены, получим:

$$\sum_j a^{\alpha}_j[(E_{\alpha}-\varepsilon_j)\cdot b^{\alpha}_j-Q^{\alpha}_j]=0\,. \tag{37}$$

Здесь введены обозначения:

$$b^{\alpha}_j=\int\limits_{-Z_m}^{Z_m}dz\int\limits_0^{r_m}u^{\alpha}(r,z)Y_j(r,z)dr\,, \tag{38}$$

$$Q^{\alpha}_j=\int\limits_{-Z_m}^{Z_m}dz\int\limits_0^{r_m}u^{\alpha}(r,z)\cdot Q_j(r,z)\cdot Y_j(r,z)dr\,. \tag{39}$$

Система уравнений (37) является однородной и имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю. Очевидно, что эту систему следует решать самосогласованным способом. В нулевом приближении $u^{\alpha}(r,z)$ совпадает с $Y_k(r,z)$, таким, что энергия E_{α} наиболее близка к ε_k . При этом формула (38) дает интеграл перекрытия из приближения сильной связи. Если в формулу (39) подставить $Q_j(r,z)$ нулевого приближения, то получится система уравнений сильной связи в первом приближении. Приравнивая определитель системы (37) с коэффициентами b_j^α и Q_j^α нулевого приближения к нулю, можно получить энергии первого приближения E_α и коэффициенты a_j^α нулевого приближения. Используя эти коэффициенты в формуле (13) можно начать процесс итерации, полагая в нулевом приближении $y_{n_1,n_2}^\alpha = 0$ Формула (37) позволяет начать итерационный процесс. Какое-то количество итераций по этой формуле можно сделать не вычисляя заново коэффициенты a_j^α . На следующем этапе необходимо уточнить этот набор коэффициентов. Для того, чтобы это сделать следует заново вычислить коэффициенты (38) и (39), используя для $u^\alpha(r,z)$ формулы (12), (13)-(15) и (18).

Интегралы численно вычисляются гораздо точнее, чем производные. В оба интеграла входят функции $u_{n,m}(r,z)$, которые с каждой итерацией находятся все точнее. Поэтому и вычисление интегралов в (38) и (39) тоже можно осуществить все более точно. Следовательно, осуществляя через какое-то количество итераций вычисление интегралов в (38) и (39), можно методом последовательных приближений с высокой точностью получить энергетический спектр цилиндрического атома.

3. Вычисление атомного потенциала. Вычисление атомного потенциала. В работе [4] был введен локальный модифицированный потенциал Слетера (МЛПС), с помощью которого удалось очень точно вычислить как полную энергию, так и энергию ионизации нерелятивистских атомов. В рамках теории функционала электронной плотности [5] в работе [4] было рассмотрено выражение для вычисления полной нерелятивистской энергии атома:

$$E = T_e[n] + E_{har}[n] + E_{xc}[n] + \int V_e(\vec{r}) \cdot n(\vec{r}) d\vec{r}. \tag{40}$$

Для атомов углерода и кислорода, как и в работе [4], считаем, что уравнение Кона-Шема (2) описывает систему невзаимодействующих квазичастиц с энергией E_n, находящихся во внешнем потенциале $V(r)$. Электронная плотность квазичастиц $n(\vec{r})$ та же, что и у нерелятивистских электронов в атомах углерода или кислорода, поэтому для функционала $T_e[n]$ из (40) имеем выражение:

$$T_e[n] = \sum_{n=1}^{N_e} E_n - \int V(r) n(\vec{r}) d\vec{r}. \tag{41}$$

Для удобства используем формулу (41) и перепишем выражение (40) для полной энергии E в виде:

$$E = \sum_{n=1}^{N_e} E_n - \int V(r) n(\vec{r}) d\vec{r} + E_{har}[n] + E_{xc}[n] + \int V_e(\vec{r}) n(\vec{r}) d\vec{r}. \tag{42}$$

Здесь энергия Хартри $E_{har}[n_c]$ дается обычным выражением:

$$E_{har}[n] = \frac{1}{2} \int \frac{n(\vec{r_1}) n(\vec{r_2})}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|} d\vec{r_1} d\vec{r_2}. \tag{43}$$

В приближении МЛПС [4] функционал обменно-корреляционной энергии $E_{xc}[n_c]$ имеет вид:

$$E_{xc}[n] = -\frac{1}{2N_e}\left[\frac{3\cdot\beta\cdot(N_e-1)}{2}\cdot\int n^{\frac{4}{3}}(\vec{r_1})d\vec{r_1}\cdot+\int\frac{n(\vec{r_1})n(\vec{r_2})}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|}d\vec{r_1}d\vec{r_2}+\right.$$
$$\left.+k\cdot\int\frac{F(\vec{r_1})n(\vec{r_1})F(\vec{r_2})n(\vec{r_2})}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|}d\vec{r_1}d\vec{r_2}\right], \quad (44)$$

где $k=(3+N_e^{\frac{1}{3}})(N_e-1)$, $F(x)$ – аппроксимирующая функция, введённая в работе [3]:

$$F(x) = x\cdot Pa(x)[a_3+a_4Pa(x)+(1-a_3)Pa^2(x)]\cdot\exp(-a_2x)\,, \quad (45)$$

где

$$Pa(x) = \frac{x\cdot a_1-1}{x+0.5}\,. \quad (46)$$

Здесь коэффициент a_2 определяет скорость убывания функции $F(x)$ вдали от ядра углерода или кислорода, и вычисляется, исходя из условия

$$\int\limits_{-Z_m}^{Z_m}dz\int\limits_0^{r_m}F(r,z)n(r,z)rdr=0, \quad (47)$$

которое обеспечивает выполнение закона сохранения перераспределённого заряда усреднённой обменно-корреляционной дырки.

Параметр a_1 определяет значение x для которого $Pa(x)=0$, а константы a_3 и a_4 определяют количество дополнительных нулей в полиноме $Pa(x)$ и подбираются так, чтобы численные значения полной энергии и энергии ионизации атомов углерода или кислорода совпали с экспериментальными данными. При этом остальные вычисленные энергии внутренних оболочек, должны быть как можно ближе к экспериментальным.

Теперь можно вернуться к вопросу о нахождении потенциала $V(\rho,z)$ для цилиндрических атомов углерода и кислорода. Электронная плотность цилиндрического атома может быть представлена в виде:

$$n(r,z) = 2\sum_n|\psi_n(\vec{r})|^2 = n_c(|\vec{r}|)+\eta_d(\vec{r})\,. \quad (48)$$

Здесь $\Psi_n(\vec{r})$ является решением уравнения (2), а $\eta_d(\vec{r})$ показывает отличие реальной электронной плотности цилиндрического атома от электронной плотности сферически симметричного атома $n_c(|\vec{r}|)$ и находится самосогласованным образом. При этом приближение для обменно-корреляционной энергии $E_{xc}[n]$ не изменяется по сравнению с (44). Дело в том, что в эту формулу входит самосогласованная плотность $n(\vec{r})$ обладающая уже не сферической, а цилиндрической симметрией.

Согласно теореме Хоэнберга и Кона [6] функционал полной энергии (42) для точной электронной плотности (48) имеет минимум. Так как минимум функционала (42) определяется из равенства нулю его первой вариации, то при очень малом изменении электронной плотности $n(r)$, например, за счёт малого изменения потенциала $V(\vec{r})$, поправки к полной энергии E будут второго порядка малости. Поэтому вблизи от правильной электронной плотности модифицированный функционал можно считать точным вплоть до второго порядка малости. Следовательно, можно брать его вариацию по электронной плотности, считая параметры аппроксимации постоянными. Вычисляя вариацию функционала (46) по электронной плотности $n(r)$ и приравнивая её к нулю, получим выражение для неизвестного потенциала цилиндрического атома $V(\vec{r})$:

$$V(\vec{r}) = V_e(\vec{r}) + V_{har}(\vec{r}) + V_{xc}(\vec{r})\,. \tag{49}$$

Здесь $V_e(\vec{r})$ – потенциал притяжения электронов к ядру, выражение для потенциала $V_{har}(\vec{r})$ с учетом (48) имеет обычный вид:

$$V_{har}(\vec{r}) = \int \frac{n(\vec{r_2})}{|\vec{r}-\vec{r_2}|} d\vec{r_2} = \nu_{har}(|\vec{r}|) + V_{hd}(\vec{r})\,. \tag{50}$$

Сферическая часть потенциала Хартри $\nu_{har}(r)$ даётся формулой:

$$\nu_{har}(r) = 4\pi\Big(\frac{1}{r}\int\limits_0^r n_c(r_2)r_2^2dr_2 + \int\limits_r^{R_c} \frac{n_c(r_2)r_2^2dr_2}{r_2}\Big) = \frac{N_e\cdot(1-q_{har}(r))}{r}\,, \tag{51}$$

$$q_{har}(r) = \frac{4\pi\cdot\Theta(R_c-r)}{N_e}\int\limits_r^{R_c} x^2 n_c(x)\Big(1-\frac{r}{x}\Big)dx\,. \tag{52}$$

Очевидно, что добавочный потенциал Хартри имеет вид:

$$V_{hd}(\vec{r}) = \int \frac{\eta_d(\vec{r_2})}{|\vec{r}-\vec{r_2}|} d\vec{r_2}\,. \tag{53}$$

Обменно-корреляционный потенциал псевдоатома $V_{xc}(\vec{r})$ состоит из трёх частей:

$$V_{xc}(\vec{r}) = \frac{\delta E_{xc}[n]}{\delta n(\vec{r})} = -\frac{1}{N_e}\cdot[(N_e-1)\cdot\beta n^{\frac{1}{3}}(\vec{r}) + \\ + \int \frac{n(\vec{r_1})}{|\vec{r}-\vec{r_1}|}d\vec{r_1} + k\cdot F(|\vec{r}|)\cdot\int \frac{n(\vec{r_1})F(|\vec{r_1}|)}{|\vec{r}-\vec{r_1}|}]d\vec{r_1}\,. \tag{54}$$

Первый член в квадратных скобках – это потенциал Слетера, второй член компенсирует усредненное самодействие в потенциале Хартри, а третий член аппроксимирует остаточную часть обменно-корреляционной дырки.

В разделе 2 описано, как решение уравнения Кона-Шема методом опорной функции осуществляется с использованием итерационной процедуры. В начале итерационной процедуры нам не известна точная электронная плотность цилиндрического атома (48). Поэтому вместо потенциала $V(\vec{r})$, вычисляемого по формуле (49), берется потенциал нулевого приближения $V_0(\vec{r})$, который находится следующим образом. В формулах (51)-(54) вместо электронной плотности $n(\vec{r})$ используется электронная плотность нулевого приближения $n_0(\vec{r})$, выраженная только через опорные функции:

$$n_0(r,z) = 2\sum_n |Y_n(r,z)|^2 \,. \tag{55}$$

Вычисление потенциала нулевого приближения $V_0(\vec{r})$ позволяет начать итерационный процесс, описанный в разделе 2. При нахождении всех $\psi_n(\vec{r})$ в первом приближении и вычислении в этом приближении поправки $\eta_d(\vec{r})$ можно одновременно найти поправку $V_{hd}(\vec{r})$ к потенциалу Хартри (53). Заметим, что этот интеграл есть решение уравнения Пуассона:

$$\triangle V_{hd}(\vec{r}) = -4\pi\eta_d(\vec{r}) \,. \tag{56}$$

Так как $\eta_d(\vec{r})$ не зависит от угла φ то будем численно решать уравнение Пуассона в цилиндрической системе координат. Перепишем уравнение (56) в виде:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_{hd}(r,z)}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V_{hd}(r,z) = -4\pi\eta_d(r,z) \,. \tag{57}$$

Введем новую функцию:

$$U(r,z) = V_{hd}(r,z)\cdot\sqrt{r} \,. \tag{58}$$

Для неё получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{U}{4r^2} = -4\pi\eta_d(r,z) \,. \tag{59}$$

Для нахождения граничных условий в точках r_c и z_c вычислим V_{hd} в произвольной точке $\vec{r}$ за пределами атома углерода. В этой области $\eta_d(\vec{r}) = 0$. В формуле (53) разложим $|\vec{r} - \vec{r_2}|^{-1}$ в ряд по полиномам Лежандра для $|\vec{r_2}| < |\vec{r}|$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r_2}|} = \frac{1}{|\vec{r}|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|r_2|}{|\vec{r}|}\right)^n P_n(\cos\gamma) \,. \tag{60}$$

Здесь γ – угол между $\vec{r_2}$ и $\vec{r}$. Так как для основной части плотности $\eta_d(\vec{r_2})$ имеем $|\vec{r_2}| \ll |\vec{r}|$ ограничимся в этом разложении тремя первыми членами. Учтем также, что:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{r}\vec{r_2}}{|\vec{r}||\vec{r_2}|} = \frac{xx_2 + yy_2 + zz_2}{|\vec{r}||\vec{r_2}|} \,. \tag{61}$$

Отсюда следует, что с точностью до членов $|\vec{r_2}|^2/\,|\vec{r}|^3$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r_2}|} = \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{|\vec{r_2}|}{|\vec{r}|^2}\cos\gamma + \frac{|\vec{r_2}|^2}{|\vec{r}|^3}\cdot\frac{3\cos^2\gamma - 1}{2} \,. \tag{62}$$

Подставим (60) в (53):

$$V_{hd}(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|}\int \eta_d(\vec{r_2})d\vec{r_2} + \frac{1}{|\vec{r}|^3}\int \eta_d(\vec{r_2})(xx_2+yy_2+zz_2)d\vec{r_2}+ \\ + \frac{1}{2|\vec{r}|^3}\int |\vec{r_2}|^2(3\cos^2\gamma - 1)d\vec{r_2}\,. \quad (63)$$

Первый интеграл в (63) равен нулю, так как он численно равен заряду, создаваемому плотностью $\eta_d(\vec{r})$. Рассмотрим второй интеграл:

$$\int \eta_d(\vec{r_2})(xx_2+yy_2+zz_2)d\vec{r_2} = x\int \eta_d(\vec{r_2})x_2d\vec{r_2}+ \\ + y\int \eta_d(\vec{r_2})y_2d\vec{r_2} + z\int \eta_d(\vec{r_2})z_2d\vec{r_2} = 2\pi z\int\limits_0^{r_c} r_2dr_2\int\limits_{-z_c}^{z_c}\eta_d(r_2,z_2)\cdot z_2dz_2 \equiv 0\,. \quad (64)$$

Этот интеграл равен нулю в силу симметрии $\eta_d(r_2,z_2) = \eta_d(r_2,-z_2)$. Таким образом получим:

$$V_{hd}(\vec{r}) = \frac{1}{2|\vec{r}|^3}(3\cos^2\gamma - 1)\cdot\eta_d(\vec{r_2})d\vec{r_2}\,. \quad (65)$$

Подстановка (61) в (65) и переход в интеграле к цилиндрической системе координат, позволяет переписать (65) в виде:

$$V_{hd}(r,z) = \frac{\pi(r^2-2z^2)}{2(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\cdot I_{hd}\,, \quad (66)$$

где

$$I_{hd} = \int\limits_{-z_c}^{z_c}\int\limits_0^{r_c}\frac{\eta_d(r_2,z_2)(r_2^2-2z_2^2)r_2dr_2dz_2}{(r_2^2+z_2^2)}\,. \quad (67)$$

По формуле (67) мы можем найти потенциал вне атома углерода, а с ним и величину $U(r_c,z)$:

$$U(r_c,z) = \frac{\pi(r_c^2-2z^2)\sqrt{r_c}}{2(r_c^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\cdot I_{hd}\,. \quad (68)$$

Аналогично вычисляется и величина $U(r,z_c)$. На линии $r=0$ имеем условие $U(0,z)=0$. На линии $z=0$ в силу симметрии имеем $\dfrac{\partial U(r,z)}{\partial z}|_{z=0}=0$. Таким образом решение уравнения (59) с указанными граничными условиями дает нам возможность вычислить величину $U(r,z)$, а следовательно, и $V_{hd}(\rho,z)$ во всех внутренних точках молекулы. Алгоритм решения уравнения (59) аналогичен тому, который был использован при решении уравнения (19).

4. Вычисление полной энергии и энергий внутренних оболочек цилиндрического атома. С учётом (49)-(54) полная энергия цилиндрического атома может быть записана в виде:

$$E_c c = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N_e} E_n - E_{har}[n] + E_{xc}[n] - \int V_{xc}(\vec{r}) n(\vec{r}) d\vec{r}. \tag{69}$$

Подставим электронную плотность в виде (48) в выражение для энергии Хартри E_{har} :

$$y_{n,m}(r, z_c) = y_{n,m}(r, -z_c) = y_{n,m}(r_c, z) = y_{n,m}(0, z) = 0 \tag{70}$$

В (70) введено обозначение E_{hsph} для энергии Хартри сферического атома, приходящейся на один электрон и вычисляемой по формуле:

$$y_{n,m}(r, z_c) = y_{n,m}(r, -z_c) = y_{n,m}(r_c, z) = y_{n,m}(0, z) = 0 \tag{71}$$

С другой стороны, используя (51) и (53), можно записать энергию Хартри в виде:

$$y_{n,m}(r, z_c) = y_{n,m}(r, -z_c) = y_{n,m}(r_c, z) = y_{n,m}(0, z) = 0 \tag{72}$$

Подставим (72) в (69) и воспользуемся (44):

$$y_{n,m}(r, z_c) = y_{n,m}(r, -z_c) = y_{n,m}(r_c, z) = y_{n,m}(0, z) = 0\,. \tag{73}$$

Здесь введено обозначение:

$$y_{n,m}(r, z_c) = y_{n,m}(r, -z_c) = y_{n,m}(r_c, z) = y_{n,m}(0, z) = 0\,. \tag{74}$$

При решении уравнения Кона-Шема потенциалы $V_{apr}(\vec{r_1})$ и $V_{hd}(\vec{r_1})$ вычисляются по формулам (74) и (53). К моменту окончания итерационной процедуры соответствующие двумерные массивы уже существуют в рабочей области программы и могут быть использованы для вычисления соответствующих двумерных интегралов в формуле (73).

5. Вычислительный эксперимент. Результаты апробации выведенных нами формул мы дадим на примере расчётов полных нерелятивистских энергий цилиндрических атомов углерода и кислорода. Дело в том, что для цилиндрического атома углерода мы должны разместить два p электрона либо на орбитали p_z (с противоположными спинами), либо на p_x и p_y орбиталях. Если оба электрона расположены на p_z орбитали, то p_x и p_y орбитали полностью свободны. Проведённый расчёт показал, что при этом энергия свободных орбиталей оказывается меньше чем энергия занятой орбитали. Если теперь переместить один электрон на p_x а другой на p_y орбиталь, то при таком заполнении электронной плотности после самосогласования энергия p_z орбитали окажется лежащей ниже. Так как заполняться по теореме Кона-Шема должны орбитали с самой низкой энергией, то мы приходим к противоречию. Единственным способом разрешить это противоречие является отказ от целых чисел заполнения орбитали. Если положить что по две трети электрона заполняют p_x, p_y, и p_z орбитали, то цилиндрический атом с таким заполнением сводится к сферическому атому, в котором все энергии p орбиталей совпадают.

Совсем другая ситуация возникает для цилиндрического атома кислорода. В этом случае мы можем разместить на p_z орбитали только два электрона с противоположно направленными спинами. Ещё по одному электрону можно разместить на p_x и p_y орбиталях, у которых энергии одинаковы и лежат выше энергии p_z орбитали.

Литература

1. Шкловский А.Г., Шкловская М.А. Решение уравнения Кона-Шема для молекулы методом опорной функции // Научные ведомости БелГУ. Серия Физика. Математика. – 2008. – №9(49);14. – С.123-136.
2. Старовойтов А.С., Шкловский А.Г. Модифицированный локальный потенциал для вычисления энергии ионизации атомов // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика.Физика. – 2010. – №11(82);19. – С.126-134.
3. Теория неоднородного электронного газа / Под ред. С. Лундквиста, Н. Марча, - М.: Мир, 1987. - 400 с
4. Шкловский А.Г. Аппроксимация обменно-корреляционного потенциала в методе функционала электронной плотности // Научные ведомости БелГУ. Серия Физико-математические науки. – 2007. – №6(37);13. – С.150-155.
5. Бабичев А.П., Бабушкина И.А., Братковский А.М. и др. Физические величины / Справочник / М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
6. Rajagopal A.K. in Advances in Chemical Physics / ed. I. Prigogine, S.A. Rice, V.41 / New York: Wiley, 1980. – P.59.
7. Шкловский А.Г. Алгоритм численного решения уравнения Дирака в центрально симметричном поле // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2004. – 9;12. – С.4-9.
8. Hohenberg P., Kohn W. Inhomogeneous Electron Gas // Phys. Rev. B. – 1964. – 136. – P.864-871.
9. Langreth D.C., Perdew J.P. // Phys. Rev. – 1977. – B15. – P.2884.

THE SOLUTION OF THE KOHN-SHEM EQUATION FOR CYLINDRICAL ATOMS BASED ON THE METHOD OF SUPPORT FUNCTION

A.V. Beregovoy, A.G. Shklovsky

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Shklovsky@bsu.edu.ru

Abstract. It is proposed the method of numerical solution of the Kohn-Shem equation for cylindrical atoms. It is based on the method of support function and applied for the carbon and oxygen atoms.

Key words: Kohn-Shem's equation, cylindrical atom, method of support function, local exchange-correlation potential.

MSC 37J05

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ГЕНЕРАТОРОВ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается класс $2n \times 2n$-матриц четного порядка. Устанавливается достаточное условие, накладываемое на спектральное разложение матриц этого класса, которое гарантирует, что они представляют матрицы $\mathcal{G}$ инфинитезимального сдвига по времени подходящей гамильтоновой системы с n степенями свободы, $n \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, жорданово представление, инфинитезимальный сдвиг, собственное число, число степеней свободы.

Объектом изучения в настоящем сообщении являются генераторы сдвига по времени линейных автономных гамильтоновых систем. В дальнейшем мы, для краткости, будем называть такие матрицы гамильтоновыми генераторами. В предыдущем сообщении [1] нами был доказано, что любая жорданова клетка четной размерности с нулевым собственным числом является генератором сдвига по времени линейной гамильтоновой системы. Здесь мы дадим доказательство общего утверждения относительно такого вида спектрального разложения матриц четной размерности, которое гарантирует, что они могут представлять собой гамильтоновы генераторы. Гипотеза о верности доказываемого нами утверждения естественным образом возникает из свойства симметричности спектра линейных гамильтоновых систем, установленного в [2, 3]. Сформулируем результат нашей работы.

Теорема. *Пусть $2n \times 2n$-матрица $\mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$ представима в виде разложения*

$$\mathcal{D} = \left[\bigoplus_{i=1}^{l} (\mathcal{D}_+^{(i)} \oplus \mathcal{D}_-^{(i)})\right] \oplus \left[\bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{D}_0^{(j)}\right], \tag{1}$$

где $l, m \in \mathbb{N}$ таковы, что

$$2\sum_{i=1}^{l} \dim\, \mathcal{D}_+^{(i)} + \sum_{j=1}^{m} \dim\, \mathcal{D}_0^{(j)} = 2n$$

и при этом $\dim\, \mathcal{D}_+^{(i)} = \dim\, \mathcal{D}_-^{(i)}$, $i = 1 \div l$, а числа $\dim\, \mathcal{D}_0^{(j)}$, $j = 1 \div m$ являются четными. В этом разложении все матрицы $\mathcal{D}_\pm^{(i)}$, $i = 1 \div l$, $\mathcal{D}_0^{(j)}$, $j = 1 \div m$ являются жордановыми клетками $(\mathcal{D}_\pm^{(i)})_{kl} = \pm\lambda_i \delta_{kl} + \delta_{k,l-1}$, $k, l = 1 \div \dim\, \mathcal{D}_\pm^{(i)}$, $i = 1 \div l$, $\mathcal{D}_0^{(j)} = \delta_{k,l-1}$, $k, l = 1 \div \dim\, \mathcal{D}_0^{(j)}$, $j = 1 \div m$. Тогда матрица $\mathcal{D}$ эквивалентна матрице $\mathcal{G}$ инфинитезимального *сдвига по времени линейной автономной гамильтоновой системы с n степенями свободы, которая имеет вид*

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^T & -\mathcal{C} \\ \mathcal{A} & \mathcal{D} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^T = \mathcal{A}\,,\ \mathcal{C}^T = \mathcal{C}\,.$$

Заметим, что в приведенной формулировке не исключен случай, когда некоторые из чисел $\pm\lambda_i$, $i = 1 \div l$ могут равняться нулю. В этом случае, в формулировке теоремы заложено, в частности, предположение о том, что множество таких жордановых клеток с нечетной размерностью и с нулевыми собственными числами может быть разбито на пары клеток с совпадающей размерностью.

Доказательству сформулированного утверждения мы предпошлем несколько вспомогательных лемм из матричной алгебры.

Лемма 1. *Матрица $\mathcal{U}$ размерности n с матричными элементами $\mathcal{U}_{ij} = \delta_{i,n-j+1}$, $i,j = 1 \div n$ является невырожденной. Она переводит верхнетреугольную $n \times n$-матрицу $\mathcal{X}_{ij} = \lambda\delta_{ij} + \mu\delta_{i,j-1}$ в нижнетреугольную $\mathcal{X}^T_{ij} = \lambda\delta_{ij} + \mu\delta_{i-1,j}$, $i,j = 1 \div n$.*

□ Вычислим, используя здесь и далее по тексту работы соглашение о суммировании по повторяющимся индексам,

$$\mathcal{U}^2_{ij} = \mathcal{U}_{ik}\mathcal{U}_{kj} = \delta_{i,n-k+1}\delta_{k,n-j+1} = \delta_{i,n-(n-j+1)+1} = \delta_{ij}\,,$$

то есть $\mathcal{U}^2 = \mathbf{1}$. Отсюда, в частности, следует, что матрица $\mathcal{U}$ не вырождена $\det \mathcal{U}^2 = (\det \mathcal{U})^2 = 1$.

Ввиду указанного свойства матрицы, имеем $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1}$, и поэтому

$$(\mathcal{U}\mathcal{X}\mathcal{U}^{-1})_{ij} = \mathcal{U}_{ik}\mathcal{X}_{kl}\mathcal{U}_{lj} = \delta_{i,n-k+1}\mathcal{X}_{kl}\delta_{l,n-j+1} = \mathcal{X}_{n-i+1,n-j+1} =$$

$$= \lambda\delta_{n-i+1,n-j+1} + \mu\delta_{n-i+1,n-j} = \lambda\delta_{ij} + \mu\delta_{i-1,j}\,. \qquad \blacksquare$$

Лемма 2. *Матрица $\mathcal{U} = \operatorname{diag}\left\{\prod_{j=0}^{k-1}\mu_j; k = 1 \div n\right\}$ размерности n, определяемая числами $\mu_k \neq 0$, $k = 1 \div n$, переводит $n \times n$-матрицу $\mathcal{Y}$ с матричными элементами $\mathcal{Y}_{ij} = \lambda\delta_{ij} + \mu_i\delta_{i,j-1}$, $i,j = 1 \div n$ в клетку Жордана $\mathcal{X}_{ij} = \lambda\delta_{ij} + \delta_{i,j-1}$ размерности n с собственным числом λ.*

□ Из определения матрицы $\mathcal{U}$ следует, что

$$(\mathcal{U}^{-1})_{ij} = \operatorname{diag}\left\{\prod_{j=0}^{k-1}\mu_j^{-1}; k = 1 \div n\right\}.$$

Тогда

$$\left(\mathcal{U}\mathcal{Y}\mathcal{U}^{-1}\right)_{ij} = \mathcal{U}_{ik}\mathcal{Y}_{kl}(\mathcal{U}^{-1})_{lj} = \left(\delta_{ik}\prod_{s=0}^{k-1}\mu_s\right)(\lambda\delta_{kl} + \mu_k\delta_{k,l-1})\left(\delta_{lj}\prod_{t=0}^{j-1}\mu_t^{-1}\right) =$$

$$= \delta_{ij}\lambda \left(\prod_{s=0}^{i-1}\mu_s\right)\left(\prod_{t=0}^{j-1}\mu_t^{-1}\right) + \delta_{i,j-1}\mu_i \left(\prod_{s=0}^{i-1}\mu_s\right)\left(\prod_{t=0}^{j-1}\mu_t^{-1}\right) =$$

$$= \lambda\delta_{ij} + \mu_i\delta_{i,j-1}\left(\prod_{s=0}^{i-1}\mu_s\right)\left(\prod_{t=0}^{i}\mu_t^{-1}\right) = \lambda\delta_{ij} + \delta_{i,j-1}\,. \qquad \blacksquare$$

Лемма 3. *Пусть $k\times k$-матрица $\mathcal{D}$, $k\in\mathbb{N}$ представима в виде $\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ \oplus \mathcal{D}_-$, где матрицы $\mathcal{D}_\pm$ являются жордановыми клетками равной размерности с собственными числами, соответственно, $\pm\lambda$, то есть $(\mathcal{D}_\pm)_{ij} = \pm\lambda\delta_{ij} + \delta_{i,j-1}$, $i,j = 1\div k$. Тогда матрица $\mathcal{D}$ эквивалентна гамильтоновому генератору линейной автономной гамильтоновой системы с k степенями свободы*

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^T & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{B}_{ij} = (\mathcal{D}_+)_{ij}$, $i,j = 1\div k$.

□ Заменив в утверждении Леммы 2 размерность n на k и положив $\mu_i = -1$, $i = 1\div k$, $\mathcal{Y} = \mathcal{D}_+$ можно, на основании этой леммы, утверждать, что существует неособенная $k\times k$-матрица $\mathcal{U}_2$ такая, что $\mathcal{U}_2^{-1}$ переводит матрицу $\mathcal{D}_-$ в матрицу $-\mathcal{D}_+$, то есть $\mathcal{U}_2^{-1}\mathcal{D}_-\mathcal{U}_2 = -\mathcal{D}_+ \equiv -\mathcal{B}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_2^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{D}_- & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{U}_2^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}.$$

Далее, на основании Леммы 1, существует $k\times k$-матрица $\mathcal{U}_1$, которая переводит матрицу $\mathcal{B}$ в матрицу $\mathcal{B}^T$, то есть $\mathcal{U}_1\mathcal{B}\mathcal{U}_1^{-1} = \mathcal{B}^T$. Тогда имеет место

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{D}_- & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^T & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare \qquad (2)$$

Замечание. Из этой леммы следует, что для любой пары жордановых клеток $\mathcal{D}_+$ и $\mathcal{D}_-$ гамильтонов генератор $\mathcal{G}$, которому соответствует матрица $\mathcal{D}_+\oplus\mathcal{D}_-$ имеет специальный вид (2). Это отражает тот факт, что спектральное разложение генератора не определяет полностью гамильтонову систему.

Непосредственным вычислением проверяется правильность следующей леммы.

Лемма 4. *Пусть имеются матрицы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ соответственно размерности $2k_1$ и $2k_2$ так, что*

$$\mathcal{F}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_i & \mathcal{L}_i \\ \mathcal{M}_i & \mathcal{N}_i \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{K}_i$, $\mathcal{L}_i$, $\mathcal{M}_i$, $\mathcal{N}_i$ – произвольные матрицы размерности k_i, $i = 1,2$. Тогда блочная матрица $\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_2$ размерности $2(k_1+k_2)$ эквивалентна матрице

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1\oplus\mathcal{K}_2 & \mathcal{L}_1\oplus\mathcal{L}_2 \\ \mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2 & \mathcal{N}_1\oplus\mathcal{N}_2 \end{pmatrix}.$$

□ Определим матрицу

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} & \mathbf{0}_{k_2} \\ \mathbf{0}_{k_1} & \mathbf{1}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2} & \mathbf{1}_{k_2} \end{pmatrix},$$

размерности $2(k_1+k_2)$, где $\mathbf{1}_{k_i}$, $\mathbf{0}_{k_1}$ – квадратные, соответственно, единичная и нулевая матрицы размерности k_i, $i = 1, 2$, а $\mathbf{0}_{k_1,k_2}$ и $\mathbf{0}_{k_2,k_1}$ – прямоугольные нулевые, соответственно, $k_1 \times k_2$- и $k_2 \times k_1$-матрицы.

Согласно правилу умножения блочных матриц [4], $\mathcal{V}_{ij}$ и $\mathcal{W}_{ij}$, состоящих из прямоугольных блоков, их перемножение осуществляется по обычному правилу умножения числовых матриц, то есть результатом умножения является блочная матрица, состоящая из блоков $\sum_k \mathcal{V}_{ik}\mathcal{W}_{kj}$. Такое правило перемножения применимо в том случае, если число блочных столбцов в первом сомножителе совпадает с числом блочных строк во втором сомножителе. Кроме того, число столбцов каждого блока матрицы, которая является первым сомножителем, должно совпадать с числом строк каждого блока матрицы – второго сомножителя. В результате, образуется прямоугольная матрица с блоками, каждый из которых имеет число строк, равное числу строк левого сомножителя и число столбцов, равное числу столбцов из правого сомножителя. Используя это правило, находим, что матрица $\mathcal{U}$ ортогональна,

$$\mathcal{U}\mathcal{U}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} & \mathbf{0}_{k_2} \\ \mathbf{0}_{k_1} & \mathbf{1}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2} & \mathbf{1}_{k_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{0}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{1}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{0}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2} \\ \mathbf{0}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{1}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} \end{pmatrix} = \mathbf{1}\,.$$

Следовательно, $\det\mathcal{U} \neq 0$.

Проверим теперь, что имеет место равенство

$$\mathcal{U}(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)\mathcal{U}^T = \mathcal{F}$$

Пользуясь тем же правилом перемножения блочных матриц, имеем

$$\mathcal{U}(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} & \mathbf{0}_{k_2} \\ \mathbf{0}_{k_1} & \mathbf{1}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2} & \mathbf{1}_{k_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 & \mathcal{L}_1 & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathcal{K}_2 & \mathcal{L}_{k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathcal{M}_{k_2} & \mathcal{N}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 & \mathcal{L}_1 & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathcal{K}_2 & \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathcal{M}_2 & \mathcal{N}_2 \end{pmatrix},$$

и, точно также, –

$$\mathcal{U}(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)\mathcal{U}^T = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 & \mathcal{L}_1 & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathcal{K}_2 & \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathcal{M}_2 & \mathcal{N}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{0}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathbf{1}_{k_1} & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{0}_{k_2} & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathbf{1}_{k_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathcal{L}_1 & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathcal{K}_2 & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{M}_1 & \mathbf{0}_{k_1,k_2} & \mathcal{N}_1 & \mathbf{0}_{k_1,k_2} \\ \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathcal{M}_2 & \mathbf{0}_{k_2,k_1} & \mathcal{N}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 & \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 & \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Доказательство теоремы. Пусть матрица $\mathcal{D}$ задана в виде разложения (1), в которой матрицы $\mathcal{D}_{\pm}^{(i)}$, $i = 1 \div l$ и $\mathcal{D}_0^{(j)}$, $j = 1 \div m$ обладают свойствами, указанными в условии теоремы. Каждая матрица $\mathcal{D}_+^{(i)} \oplus \mathcal{D}_-^{(i)}$, согласно утверждению Леммы 3, посредством определенной матрицы $\mathcal{U}_+^{(i)}$, приводится к $2k_i \times 2k_i$-матрице (независимо от того, равно собственное число нулю или нет)

$$\mathcal{G}_+^{(i)} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}_+^{(i)\,T} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_+^{(i)} \end{pmatrix} = \mathcal{U}_+^{(i)}(\mathcal{D}_+^{(i)} \oplus \mathcal{D}_-^{(i)})\mathcal{U}_+^{(i)-1}, \qquad k_i = \dim \mathcal{D}_+^{(i)}, \qquad i = 1 \div l.$$

Согласно результату работы [1], каждая матрица $\mathcal{D}_0^{(j)}$ четной размерности, посредством определенной обратимой матрицы $\mathcal{U}_0^{(j)}$ приводится к $k_j \times k_j$-матрице (k_j – четное число)

$$\mathcal{G}_0^{(j)} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}_0^{(j)\,T} & 0 \\ \mathbf{1}_j & \mathcal{B}_0^{(j)} \end{pmatrix} = \mathcal{U}_0^{(j)}\mathcal{D}_0^{(j)}\mathcal{U}_0^{(j)-1}, \qquad k_j = \dim \mathcal{D}_0^{(j)}, \qquad j = 1 \div m.$$

Определим теперь матрицы

$$\mathcal{V}_+^{(i)} = \left[\bigoplus_{j=1}^{i-1} \mathbf{1}_{k_j}\right] \oplus \mathcal{U}_+^{(i)} \oplus \left[\bigoplus_{j=i+1}^{l} \mathbf{1}_{k_j}\right], \qquad i = 1 \div l,$$

причем полагается, что прямые суммы в квадратных скобках равны нулю, соответственно, первая при $i = 1$, а вторая – при $i = l$.

Кроме того, введем матрицы

$$\mathcal{V}_0^{(j)} = \left[\bigoplus_{i=1}^{j-1} \mathbf{1}_{k_i}\right] \oplus \mathcal{U}_0^{(j)} \oplus \left[\bigoplus_{i=j+1}^{m} \mathbf{1}_{k_i}\right], \qquad j = 1 \div m$$

с аналогичным соглашением относительно интерпретации этой формулы при $j=1$ и $j=m$. Все матрицы из совокупности $\{\mathcal{V}_+^{(i)}; i=1\div l\}\cup\{\mathcal{V}_0^{(j)}; j=1\div m\}$, очевидным образом, коммутируют друг с другом. Тогда матрица

$$\mathcal{V}=\left(\prod_{i=1}^{l}\mathcal{V}_+^{(i)}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}\mathcal{V}_0^{(j)}\right)$$

переводит матрицу $\mathcal{D}$ в

$$\mathcal{V}\mathcal{D}\mathcal{V}^{-1}=\left[\bigoplus_{i=1}^{l}\mathcal{G}_+^{(i)}\right]\oplus\left[\bigoplus_{j=1}^{m}\mathcal{G}_0^{(j)}\right].$$

Вводя единую нумерацию для совокупности матриц $\{\mathcal{G}_+^{(i)}; i=1\div l\}\cup\{\mathcal{G}_0^{(j)}; j=1\div m\}\equiv\{\mathcal{G}^{(i)}; i=1\div l+m\}$, последнее равенство запишем в виде

$$\mathcal{V}\mathcal{D}\mathcal{V}^{-1}=\bigoplus_{i=1}^{l+m}\mathcal{G}^{(i)}\,,\tag{4}$$

где все матрицы $\mathcal{G}^{(i)}$, $i=1\div(l+m)$ имеют четную размерность. После этого применим рассуждение по индукции, приводящее матрицу в правой части последнего равенства, посредством преобразования на основе матрицы $\mathcal{W}$, к матрице

$$\begin{pmatrix}-\mathcal{B}^T & -\mathcal{C}\\ \mathcal{A} & \mathcal{B}\end{pmatrix}=\mathcal{W}\left(\bigoplus_{i=1}^{l+m}\mathcal{G}^{(i)}\right)\mathcal{W}^{-1}\,,\tag{5}$$

где

$$\mathcal{B}=\bigoplus_{i=1}^{l+m}\mathcal{B}^{(i)}\,,\quad \mathcal{A}=\bigoplus_{i=1}^{l+m}\mathcal{A}^{(i)}=\bigoplus_{i=1}^{m}\mathbf{1}_{k_i}\,,\qquad \mathcal{C}=\bigoplus_{i=1}^{l+m}\mathcal{C}^{(i)}=0\,.$$

При $l+m=1$ сформулированное утверждение является тавтологией. Пусть оно справедливо при каком-то значении $(l+m)$, то есть в этом случае имеет место равенство (5) с размерностью матрицы $2n$. Тогда индукционный шаг к значению числа составляющих в $l+m+1$ в разложении (4) осуществляется применением Леммы 4 к $2(n+1)\times 2(n+1)$-матрице

$$\bigoplus_{i=1}^{l+m+1}\mathcal{G}^{(i)}=\begin{pmatrix}-\mathcal{B}^T & -\mathcal{C}\\ \mathcal{A} & \mathcal{B}\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}-\mathcal{B}^{(l+m+1)\,T} & -\mathcal{C}^{(l+m+1)}\\ \mathcal{A}^{(l+m+1)} & \mathcal{B}^{l+m+1}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}(-\mathcal{B}^T)\oplus(-\mathcal{B}^{(l+m+1)\,T}) & (-\mathcal{C})\oplus(-\mathcal{C}^{(l+m+1)})\\ \mathcal{A}\oplus\mathcal{A}^{(l+m+1)} & \mathcal{B}\oplus\mathcal{B}^{(l+m+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(\mathcal{B}\oplus\mathcal{B}^{(l+m+1)})^T & -(\mathcal{C}\oplus\mathcal{C}^{(l+m+1)})\\ \mathcal{A}\oplus\mathcal{A}^{(l+m+1)} & \mathcal{B}\oplus\mathcal{B}^{(l+m+1)}\end{pmatrix}.$$

■

Заметим, что перестановка блочных строк и столбцов матрицы $\bigoplus_{i=1}^{l+m}\mathcal{G}^{(i)}$ посредством преобразования $\mathcal{W}(\cdot)\mathcal{W}^{-1}$ соответствует тривиальному переупорядочению фазовых переменных гамильтоновой системы, первоначально записанных в порядке $\langle p_1, q_1, p_2, q_2, ..., p_n, q_n \rangle$, к следующему порядку $\langle p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_n \rangle$.

Литература

1. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Полностью вырожденные линейные гамильтоновы системы // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2012. – №23 (142);29. – С.215-218.
2. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Симметричность спектра линейных гамильтоновых систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2011. – 17(112);24. – С.179-180.
3. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Свойство локальной обратимости гамильтоновых динамических систем // Материалы Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел» Белгород, 17-21 октября 2011 / С.37-38.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / М.: Наука, 1966. – 576 с.

ABOUT SPECTRAL DECOMPOSITION OF GENERATORS OF LINEAR HAMILTONIAN SYSTEMS

Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. The class of even order $2n \times 2n$-matrices is under consideration. It is proposed the sufficient condition concerned their canonical Jordan's representations such that they are represented matrices $\mathcal{G}$ of some infinitesimal temporal shifts of appropriate Hamiltonian systems with n freedom degrees, $n \in \mathbb{N}$.

Key words: hamiltonian systems, Jordan's representation, infinitesimal shift, eigenvalue, number of freedom degrees.

MSC 35Q35

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗ ВОДОЕМА В ГРУНТ: СЛУЧАЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Св.А. Гриценко, Н.С. Ерыгина

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru, eryginan@bsu.edu.ru

Аннотация. На микроскопическом уровне исследуется задача о фильтрации жидкости из водоема в твердый пористый грунт. Динамика жидкости описывается системой нестационарных уравнений Стокса для несжимаемой жидкости, а совместное движение твердого упругого грунта и жидкости те – уравнениями Ламе. Доказывается существование и единственность обобщенного решения задачи. Выполняется усреднение системы уравнений, позволяющее избавиться от быстро осциллирующих коэффициентов.

Ключевые слова: фильтрация жидкостей, уравнения Ламе и Стокса, усреднение периодических структур.

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим задачу о фильтрации жидкости из водоема в твердый пористый скелет. Обозначим через Q всю рассматриваемую область из пространства $\mathbb{R}^3$, которая включает в себя верхнюю часть, Ω^0 – водоем, нижнюю часть Ω – пористый скелет и их общую границу S_0: $Q = \Omega^0 \cup S^0 \cup \Omega$.

Предположим, что система координат выбрана так, что часть S^1 внешней границы S области $Q = \Omega^0 \cup S^0 \cup \Omega$ принадлежит плоскости $\{x_3 : x_3 = 0\}$, $\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{e}_3$, область Q принадлежит полупространству $\{x_3 : x_3 < 0\}$. Пусть $S^2 = S\backslash\overline{S^1}$ является поверхностью класса C^2.

Кроме того, используем необходимое в дальнейшем для усреднения упрощающее геометрическое предположение о периодичности порового пространства. Пусть область Ω есть периодическое повторение элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$, подобласть $Y_s \subset Y$ моделирует твердый скелет Ω_s^ε, подобласть $Y_f \subset Y$ моделирует поровое пространство Ω_f^ε, а поверхность $\gamma = \partial Y_f \bigcap \partial Y_s$ моделирует границу Γ^ε «твердый скелет – поровое пространство», так что твердый скелет есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_s, поровое пространство есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_f, а граница Γ^ε – периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

Движение жидкости в Ω^0 при $t > 0$ описывается нестационарной системой уравнений Стокса

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{1.1}$$

$$\tau_0 \varrho_f \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}_f + \varrho_f \boldsymbol{e}, \qquad \mathbb{P}_f = \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}) - p\,\mathbb{I}, \tag{1.2}$$

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0357

а совместное движение упругого скелета и жидкости в Ω при $t>0$ описывается уравнением неразрывности (1.1), уравнением сохранения моментов

$$\tau_0\varrho^\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{w}}{\partial t^2}=\nabla\cdot\mathbb{P}+\varrho^\varepsilon\boldsymbol{e}\ , \tag{1.3}$$

и уравнением состояния

$$\mathbb{P}=\chi^\varepsilon\alpha_\mu\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)+(1-\chi^\varepsilon)\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})-p\,\mathbb{I}\ , \tag{1.4}$$

где $\varrho^\varepsilon=\varrho_f\chi^\varepsilon+\varrho_s(1-\chi^\varepsilon)$.

На общей границе $S^0=\partial\Omega\cap\partial\Omega^0$ при $t>0$ выполняются условия непрерывности

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^0}}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t), \tag{1.5}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^0}}\mathbb{P}_f(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}}\mathbb{P}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)\ , \tag{1.6}$$

для перемещений и нормальных напряжений. Здесь $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})$ – симметрическая часть производной $\nabla\boldsymbol{w}$, $\mathbb{I}$ – единичный тензор, $n(\boldsymbol{x}^0)$ – вектор внешней нормали к границе S^0 в точке $\boldsymbol{x}^0\in S^0$, $\mathbf{e}$ — единичный вектор в направлении силы тяжести.

На S^1 при $t>0$ задается условие Неймана

$$\mathbb{P}_f(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}=-p^{\,0}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n}\ , \tag{1.7}$$

а на части S^2 внешней границы S при $t>0$ — условие Дирихле

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{1.8}$$

Задача замыкается начальными условиями

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0)=\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)=0\ ,\qquad \boldsymbol{x}\in Q\ . \tag{1.9}$$

В (1.1)-(1.9) характеристическая функция $\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})$ области Ω^ε_f определяется выражением

$$\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})=(1-\zeta)\chi\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)\ ,$$

где $\zeta=\zeta(\boldsymbol{x})$ — характеристическая функция области Ω^0 в Q, $\chi(\boldsymbol{y})$ – характеристическая функция Y_f (жидкой части элементарной ячейки).

Пусть

$$\lim_{\varepsilon\to0}\alpha_\mu(\varepsilon)=\mu_0\ ,\quad \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2}=\mu_1\ .$$

В данной работе для случая $0<\mu_0<\infty$ рассматривается предел при $\tau_0\to0$ модели (1.1)-(1.9), состоящий из уравнений (1.1), (1.4)-(1.8), дополненных уравнением сохранения моментов

$$\nabla\cdot\mathbb{P}_f+\varrho_f\boldsymbol{e}=0 \tag{1.10}$$

в области Ω^0 при $t > 0$, уравнением сохранения моментов

$$\nabla \cdot \mathbb{P} + \varrho^\varepsilon \boldsymbol{e} = 0 \tag{1.11}$$

в области Ω при $t > 0$ и начальным условием

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, 0) = 0 \ , \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \bigcup \Omega_f^\varepsilon \ . \tag{1.12}$$

Заданная функция p^0 предполагается гладкой:

$$\int_0^T \int_Q |\nabla p^0(\boldsymbol{x}, t)|^2 dx dt = \mathfrak{P}^2 < \infty \ . \tag{1.13}$$

Сформулированная задача с большой степенью точности описывает физический процесс на микроскопическом уровне. Но математическая модель физического объекта в несколько десятков (сотен) метров, в которой коэффициенты уравнений осциллируют на масштабе в несколько микрон (характерный размер пор в грунте) неудобна для практических применений. Существующей альтернативой данной модели являются модели на основе широко применяемой в теории фильтрации системы уравнений фильтрации Дарси. В ней макроскопические скорость $\boldsymbol{v}$ и давление p жидкости есть решения системы уравнений

$$\boldsymbol{v} = \frac{k}{\mu_0}(-\nabla p + \boldsymbol{F}) \ , \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \ , \tag{1.14}$$

в которой заданная постоянная k характеризует проницаемость грунта, μ_0 – вязкость жидкости и $\boldsymbol{F}$ – заданный вектор плотности массовых сил. Если рассматривать совместное движение жидкости в грунте и в водоеме, то единственно возможным режимом движения в водоеме для уравнений фильтрации Дарси является гидростатика (см. [1]). В самом деле, если динамика жидкости в водоеме описывается уравнениями Стокса, то непонятно, какие условия сопряжения (краевые условия) необходимы на общей границе «грунт – водоем». Для уравнений Стокса формально требуются три скалярных краевых условия, а для системы уравнений фильтрации (1.14) необходимо только одно скалярное краевое условие. Поэтому естественные условия равенства перемещений и нормальных напряжений здесь неприменимы.

Кроме того, гидростатика не учитывает конвекцию в водоеме при описании миграции примесей из водоема в грунт. Например, засоление почвы морской водой.

В научной литературе исследовались отдельные случаи этой задачи. В частности, результаты для $\mathbb{R}^2$ и особой геометрии порового пространства (несвязный твердый скелет) получены в работах В. Ягера и А. Микелича [2]- [4].

В данной статье на основе работ А.М. Мейрманова [15]- [18] задача решается в области из $\mathbb{R}^3$ в предположении связности жидкой части и связности твердого скелета. Вместо закона Дарси предлагается вторая альтернатива системе уравнений (1.1)-(1.12) — усреднение этой же системы. Полученная усредненная модель избавлена от быстро осциллирующих коэффициентов и пригодна для практических применений.

2. Основные результаты.

Определение 1. *Будем говорить, что функции* $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon,\, p^{\,\varepsilon}\}$, *такие что*

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon,\quad p^{\,\varepsilon},\quad \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}),\qquad \big(\zeta+(1-\zeta)\chi^\varepsilon\big)\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)\in L_2\big((0,T);L_2(Q)\big)\ ,$$

являются обобщенным решением задачи (1.1), (1.4)-(1.8), (1.10)-(1.12), если они удовлетворяют уравнению неразрывности (1.1) почти всюду в $Q\times(0,T)$, *граничному условию (1.8), начальному условию (1.12) и интегральному тождеству*

$$\int_0^T\int_Q\Big(\big(\zeta\mathbb{P}_f+(1-\zeta)\mathbb{P}\big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})+\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\,p^0)-\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}\Big)dxdt=0 \tag{2.1}$$

для любой гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}$, *обращающейся в нуль на границе* S^2_T.

Здесь $\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}=\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^\varepsilon\big)\varrho_f+(1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)\varrho_s$.

Тождество (2.1) содержит в себе граничные условия (1.5)-(1.7).

Теорема 1. *При условии (1.13) для всех* $\varepsilon>0$ *на произвольном интервале времени* $[0,T]$ *существует единственное обобщенное решение задачи (1.1), (1.4)-(1.8), (1.10)-(1.12) и для него справедлива оценка*

$$\int_0^T\int_Q\Big(|p^\varepsilon|^2+\alpha_\mu\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^\varepsilon\big)|\mathbb{D}(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2\Big)\,dx\,dt+$$
$$+\lambda_0\max_{0\le t\le T}\int_\Omega(1-\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon)|^2dx\leqslant C_0(\mathfrak{P}^2+1)\ . \tag{2.2}$$

Теорема 2. *Пусть*

$$\alpha_\mu=\mu_0,\ 0<\mu_0,\ \lambda_0<\infty$$

и функции $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon,\, p^{\,\varepsilon}\}$ *есть обобщенное решение задачи (1.1), (1.4)-(1.8), (1.10)-(1.12).*

Тогда при $\varepsilon\to0$ *последовательность* $\{p^\varepsilon\}$ *сходится слабо в* $L_2\big((0,T);L_2(Q)\big)$ *к функции* p, *а последовательность* $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ *сходится слабо в* $L_2\big((0,T);W^1_2(Q)\big)$ *к функции* $\boldsymbol{w}$. *Указанные предельные функции являются решением усредненной системы, состоящей из уравнений Стокса*

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w}=0\ , \tag{2.3}$$

$$\nabla\cdot\Big(\mu_0\mathbb{D}(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t})-p\,\mathbb{I}\Big)+\varrho_f\,\boldsymbol{e}=0 \tag{2.4}$$

в области Ω^0 *при* $t>0$, *уравнения неразрывности (1.1), усредненного уравнения сохранения моментов*

$$\nabla\cdot\widehat{\mathbb{P}}+\hat{\varrho}\,\boldsymbol{e}=0\ , \tag{2.5}$$

и уравнения состояния

$$\widehat{\mathbb{P}}\ =\ -p\,\mathbb{I}+\mathfrak{N}_1\ :\ \mathbb{D}(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t})+\mathfrak{N}_2\ :\ \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})+\int_0^t\mathfrak{N}_3(t-\tau)\ :\ \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau))d\tau \tag{2.6}$$

в области Ω *при* $t > 0$.

Система дополняется условием непрерывности нормальных напряжений

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega^0}} \Big(\mu_0 \mathbb{D}\big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\big) - p(\boldsymbol{x},t)\,\mathbb{I}\Big) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) \quad (2.7)$$

на общей границе S^0, *условием Неймана*

$$\Big(\mu_0 \mathbb{D}\big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\big) - p(\boldsymbol{x},t)\,\mathbb{I}\Big) \cdot \boldsymbol{n} = -p^{\,0}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n}, \quad (2.8)$$

на части S^1 *внешней границы* S, *условием Дирихле*

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = 0 \quad (2.9)$$

на части S^2 *внешней границы* S, *и начальным условием*

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = 0, \ \boldsymbol{x} \in \Omega. \quad (2.10)$$

Тензоры 4 ранга $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3(t)$ *вычисляются по формулам (4.12); симметричный тензор* $\mathfrak{N}_1$ *является положительно определенным.*

В выражениях типа $\mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w})$ двоеточием обозначается свертка тензоров 4 и 2 ранга.

3. Доказательство Теоремы 1.

Доказательство теоремы основывается на энергетическом тождестве

$$\frac{1}{2}\int_Q \Big(\lambda_0(1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)\big|\mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\big)\big|^2\Big)dx +$$
$$+ \alpha_\mu \int_0^t \int_Q \big(\zeta + (1-\zeta)\chi^\varepsilon\big)\Big|\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial \tau}(\boldsymbol{x},\tau)\Big)\Big|^2 dx d\tau =$$
$$= \int_0^t \int_Q (\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}\boldsymbol{e} - \nabla p^0) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau) dx d\tau. \quad (3.1)$$

Интегрирование по частям по области Q с использованием уравнения неразрывности (1.1) и граничных условий приводит правую часть тождества к следующему виду:

$$\int_Q \tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}\boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau)dx + \int_Q p^0 \nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau)dx - \int_{\partial Q} p^0 \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau)\cdot\mathbf{n}ds = \int_Q \tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}\boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau)dx$$

Для оценки правой части (3.1) используется представление

$$\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon} = \varrho_f + (1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)(\varrho_s - \varrho_f), \quad \boldsymbol{e} = -\nabla\, x_3\ ,$$

формула интегрирования по частям и уравнение неразрывности (1.1)

$$\varrho_f \int_Q \boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}dx = -\varrho_f \int_Q (\nabla\, x_3)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}dx = 0\ .$$

$$I = \int_Q \tilde{\varrho}^{\varepsilon} \boldsymbol{e} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t} dx d\tau = -\varrho_f \int_Q (\nabla x_3) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t} dx + (\varrho_s - \varrho_f) \int_\Omega (1-\chi^{\varepsilon}) \boldsymbol{e} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t} dx =$$
$$= (\varrho_s - \varrho_f) \int_\Omega (1-\chi^{\varepsilon}) \boldsymbol{e} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t} dx \; .$$

Неравенство Коши дает оценку

$$I \leqslant (\varrho_s - \varrho_f) \Big(\int_\Omega dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega (1-\chi^{\varepsilon}) \left| \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t} \right|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(\varrho_s - \varrho_f)^2}{2\delta} |\Omega| + \frac{\delta}{2} \int_\Omega (1-\chi^{\varepsilon}) \left| \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t} \right|^2 dx \; .$$

Пусть $\boldsymbol{w}_s^{\varepsilon} = \mathbb{E}_{\Omega_s^{\varepsilon}}\big(\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\big)$ — продолжение функции $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}$ из области Ω_s^{ε} в область Ω. (Здесь используются результаты о продолжении C. Conca [19]). Тогда из неравенства Фридрихса-Пуанкаре

$$\int_\Omega (1-\chi^{\varepsilon}) \left| \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t} \right|^2 dx = \int_\Omega (1-\chi^{\varepsilon}) \left| \frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{\varepsilon}}{\partial t} \right|^2 dx \leqslant C \int_\Omega (1-\chi^{\varepsilon}) \left| \nabla \frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{\varepsilon}}{\partial t} \right|^2 dx$$

и неравенства Корна

$$\int_\Omega (1-\chi^{\varepsilon}) \left| \nabla \frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{\varepsilon}}{\partial t} \right|^2 dx \leqslant C \int_\Omega (1-\chi^{\varepsilon}) \left| \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{\varepsilon}}{\partial t}\Big) \right|^2 dx = C \int_Q (1-\chi^{\varepsilon})(1-\zeta) \left| \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big) \right|^2 dx$$

получается соотношение

$$I \leqslant \frac{(\varrho_s - \varrho_f)^2}{2\delta} |\Omega| + C \frac{\delta}{2} \int_Q (1-\chi^{\varepsilon})(1-\zeta) |\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)|^2 dx \; .$$

Выбор $\delta = \alpha_\mu / C$ дает следующую оценку:

$$\int_0^T \int_Q \Big(\alpha_\mu \big(\zeta + (1-\zeta)\chi^{\varepsilon}\big) \left| \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big) \right|^2 \Big) dx\, dt +$$
$$+ \lambda_0 \max_{0 \le t \le T} \int_\Omega (1-\chi^{\varepsilon}) \left| \mathbb{D}\Big(x, \boldsymbol{w}^{\varepsilon}\Big) \right|^2 dx \leqslant C_0. \quad (3.2)$$

Для получения оценки давления p^{ε} интегральное тождество (2.1) записывается в виде:

$$\int_{Q_T} p^{\varepsilon} \nabla \cdot \varphi \, dx\, dt = \int_{Q_T} \bigg(\big(\zeta + (1-\zeta)\chi^{\varepsilon}\big) \alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big) +$$
$$+ (1-\zeta)(1-\chi^{\varepsilon}) \lambda_0 \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^{\varepsilon}) \bigg) : \mathbb{D}(x, \varphi) dx\, dt - \int_{Q_T} \widetilde{\rho}^{\varepsilon} \mathbf{e} \cdot \varphi \, dx\, dt - \int_{Q_T} p^0 \nabla \varphi \, dx\, dt.$$

Такое представление и оценка (3.2) позволяют записать неравенство

$$\left|\int_{Q_T} p^\varepsilon \nabla\cdot\varphi\, dx\, dt\right| \leqslant C\Big(\int_{Q_T} |\nabla\varphi|^2\, dx\, dt\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Далее выбирается пробная фу0нкция φ, удовлетворяющая условиям:

$$\nabla\cdot\varphi = p^\varepsilon \quad \text{и} \quad \int_{Q_T} |\nabla\varphi|^2 dx\, dt \leqslant \int_{Q_T} |p^\varepsilon|^2 dx\, dt.$$

Для этого она представляется в виде суммы $\varphi = \varphi_0 + \nabla\psi$, где

$$\Delta\psi = p^\varepsilon,\ x\in Q; \quad \psi|_{S_2} = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\Big|_{S_1} = 0; \tag{3.4}$$

$$\nabla\cdot\varphi_0 = 0,\ x\in Q; \quad \varphi_0 + \nabla\psi = 0,\ x\in S_2. \tag{3.5}$$

Согласно результатам, изложенным в работах О. А. Ладыженской [20] и [28], каждая из задач (3.4), (3.5) имеет единственное решение, причем

$$\psi \in L_2\big((0,T); W_2^2(Q)\big), \quad \int_0^T \big(\|\psi\|_2^{(2)}\big)^2 dt \leqslant C\int_{Q_T} (p^\varepsilon)^2 dx\, dt,$$

$$\varphi_0 \in L_2\big((0,T); W_2^1(Q)\big), \quad \int_0^T \big(\|\varphi_0\|_2^{(1)}\big)^2 dt \leqslant C\int_{Q_T} \big(\|\psi\|_2^{(2)}\big)^2 dt.$$

Тогда неравенство (3.3) примет вид

$$\left|\int_{Q_T} (p^\varepsilon)^2\, dx\, dt\right| \leqslant C\Big(\int_{Q_T} (p^\varepsilon)^2\, dx\, dt\Big)^{\frac{1}{2}},$$

и, окончательно,

$$\Big(\int_{Q_T} (p^\varepsilon)^2\, dx\, dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C.$$

Полученные результаты дают требуемую в теореме 1 оценку (2.2). С помощью этой оценки существование и единственность обобщенного решения задачи (1.1), (1.4)-(1.8), (1.10)-(1.12) доказывается методом Галеркина.

4. Доказательство Теоремы 2. Пусть

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)$$

есть продолжение функции $\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t$ из Ω_f^ε в Ω.

Оценка (2.2) обеспечивает существование сходящихся подпоследовательностей (обозначенных так же), таких что

$$p^\varepsilon \rightharpoonup p(\boldsymbol{x}, t) \ \text{слабо в}\ L_2(Q_T),$$

$$p^{\varepsilon} \to P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \text{ двухмасштабно в } L_2(Q_T),$$

$$\boldsymbol{w}^{\varepsilon} \to \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) \text{ двухмасштабно в } L_2(Q_T),$$

$$\boldsymbol{v}^{\varepsilon} \to \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) \text{ двухмасштабно в } L_2(Q_T),$$

$$\mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}^{\varepsilon}\big) \to \mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}\big) + \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)\big) \text{ двухмасштабно в } L_2(\Omega_T),$$

$$\mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{v}^{\varepsilon}\big) \to \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + \mathbb{D}\Big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big) \text{ двухмасштабно в } L_2(Q_T).$$

Двухмасштабный предел в (2.1) с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$ дает интегральное тождество

$$\int_{Q_T} \Big[\Big\{\mu_0 \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) - p\,\mathbb{I} + (1-\zeta)\Big(\mu_0 \Big\langle \mathbb{D}\Big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)\Big\rangle_{Y_f} + \lambda_0 \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) +$$
$$\lambda_0 \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W})\rangle_{Y_s}\Big)\Big\} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) +$$
$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p^0) - \big(\zeta \varrho_f + (1-\zeta)\hat{\varrho}\big)\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}\Big] dxdt = 0\,. \quad (4.1)$$

Здесь используются обозначения:

$$\hat{\varrho} = m\,\varrho_f + (1-m)\,\varrho_s, \quad m = \int_Y \chi(\boldsymbol{y}) dy, \quad \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W})\rangle_{Y_s} = \int_{Y_s} \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W})\, dy.$$

Тождество (4.1) преобразуется в

$$\int_{Q_T} \Big[\Big\{\zeta \mu_0 \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) - p\,\mathbb{I} + (1-\zeta)\widehat{\mathbb{P}}\Big\} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) +$$
$$+ \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p^0) - \big(\zeta \varrho_f + (1-\zeta)\hat{\varrho}\big)\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}\Big] dxdt = 0, \quad (4.2)$$

$$\widehat{\mathbb{P}} = (1-\zeta)\Big[\mu_0 \Big\{\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + \Big\langle \mathbb{D}\Big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)\Big\rangle_{Y_f}\Big\} + \lambda_0 (\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W})\rangle_{Y_s})\Big]. \quad (4.3)$$

Уравнение неразрывности (1.1) после предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ не меняет своего вида:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0. \quad (4.4)$$

Можно показать, что интегральное тождество эквивалентно уравнениям(2.4) и (2.5), и граничным условиям (2.7) и (2.8). Граничное условие (2.9) следует из интегрального тождества

$$\int_{\Omega_T} \big(\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) + \nabla \boldsymbol{w}^{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varphi}\big) dxdt = 0$$

для любой гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}$, обращающейся в 0 на S^0, после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Начальное условие (2.10) следует из интегрального тождества

$$\int_{\Omega_T} m\Big(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{w}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\Big)dxdt=0,$$

справеливого для любой гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ равной нулю при $t=T$. Последнее является результатом перехода к двухмасштабному пределу при $\varepsilon\to 0$ в тождестве

$$\int_{\Omega_T} \chi^{\varepsilon}\Big(\boldsymbol{v}^{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\Big)dxdt=0.$$

В результате предельного перехода при $\varepsilon\to 0$ в интегральном тождестве (2.1) с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi}=\varepsilon h(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ получается макроскопическое уравнение сохранения моментов

$$\nabla\cdot\widehat{\mathbb{P}}+\hat{\varrho}\boldsymbol{e}=0, \tag{4.5}$$

и микроскопическое уравнение сохранения моментов

$$\nabla_y\cdot\Big(\mu_0\,\chi\,\Big(\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)+\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)\Big)+$$
$$+\lambda_0\,(1-\chi)\big(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})+\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W})\big)-P\,\mathbb{I}\Big)=0\ .$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\nabla_y\cdot\Big(\chi\,\big(\mu_0\,\mathbb{D}(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t})+\mathbb{Z}\big)+\lambda_0\,(1-\chi)\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W})-P\,\mathbb{I}\Big)=0, \tag{4.6}$$

где

$$\mathbb{Z}(\boldsymbol{x},t)=\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)-\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})=\sum_{i,j=1}^{3}Z_{ij}(\boldsymbol{x},t)\mathbb{J}^{(ij)}.$$

Найдем выражение для тензоров $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, и $\mathfrak{N}_3$. Будем использовать следующие обозначения. Для двух векторов a и b: $a\otimes b$ есть матрица отображения: $(a\otimes b)(c)=a(b\cdot c)$ для любого вектора c. Для тензоров 2 ранга A,B,C: $(A\otimes B):C=A(B:C)$, $B:C=tr(BC^T)$. Символом $\mathbb{J}^{(ij)}$ обозначен тензор 2 ранга:

$$\mathbb{J}^{(ij)}=\frac{1}{2}(e_i\otimes e_j+e_j\otimes e_i)\ .$$

Пусть $\{\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t),\ P^{(ij)}(\boldsymbol{y},t)\}$ и $\{\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}),\ P_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\}$ $i,j=1,2,3$ есть решения периодических задач

$$\left.\begin{aligned}\nabla_y\cdot\Big(\chi\,\mu_0\,\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}\Big)+\\ \lambda_0\,(1-\chi)\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}^{(ij)})-P^{(ij)}\,\mathbb{I}\Big)=0,\\ \nabla_y\cdot\boldsymbol{W}^{(ij)}=0,\\ \chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},0)=\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}),\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla_y \cdot \Big(\chi\left(\mu_0\,\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}_0^{(ij)}) + \mathbb{J}^{(ij)} - P_0^{(ij)}\,\mathbb{I}\right)\Big) = 0, \\ \nabla_y \cdot \boldsymbol{W}_0^{(ij)} = 0,\ \int_Y \chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})dy = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

в области Y.

Тогда

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = \sum_{i,j=1}^{3}\int_0^t \boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau,$$

и

$$P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = \chi(\boldsymbol{y})\sum_{i,j=1}^{3} P_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})Z_{ij}(\boldsymbol{x},t) + \sum_{i,j=1}^{3}\int_0^t P^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}) = \sum_{i,j=1}^{3}\int_0^t \mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau))Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau = \\ \sum_{i,j=1}^{3}\int_0^t \left(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau))\otimes\mathbb{J}^{(ij)}\right) : \mathbb{Z}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau = \\ \Big(\mu_0\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}_0^{(ij)})\otimes\mathbb{J}^{(ij)}\Big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) - \sum_{i,j=1}^{3}\int_0^t \Big(\Big[\lambda_0\,\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau)) + \\ \mu_0\,\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial \boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial\tau}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)\Big]\otimes\mathbb{J}^{(ij)}\Big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau))d\tau. \end{aligned}$$

Используя очевидное равенство

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial\tau}(\boldsymbol{y},t-\tau) = -\frac{\partial \boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-\tau),$$

получаем

$$\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}) = \mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y}) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},t-\tau) : \mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau)\big)d\tau, \tag{4.9}$$

где

$$\mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y}) = \mu_0\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\big)\otimes\mathbb{J}^{(ij)} \tag{4.10}$$

и

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},t) = \\ \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\mu_0\,\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial \boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\Big) - \lambda_0\,\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t)\big)\Big)\otimes\mathbb{J}^{(ij)}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Уравнения (4.9)-(4.10) приобретают вид

$$\mathbb{D}\Big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big) = \mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y}) : \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t)\Big) + \mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y}, 0) : \mathbb{D}\Big(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t)\Big) + \int_0^t \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial t}(\boldsymbol{y}, t-\tau) : \mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau)\big) d\tau.$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= \mu_0\, m \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{(ij)} \otimes \mathbb{J}^{(ij)} + \mu_0\, \langle \mathfrak{A}_0 \rangle_{Y_f}, \\ \mathfrak{N}_2 &= \lambda_0\, (1-m) \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{(ij)} \otimes \mathbb{J}^{(ij)} + \lambda_0\, \langle \mathfrak{A}_0 \rangle_{Y_s} + \mu_0\, \langle \mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y}, 0) \rangle_{Y_f}, \\ \mathfrak{N}_3(t) &= \mu_0\, \langle \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial t}(\boldsymbol{y}, t) \rangle_{Y_f} + \lambda_0\, \langle \mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y}, t) \rangle_{Y_s}. \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

Литература

1. Полубаринова–Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / М.: ГИТТЛ, 1952. –342 с.
2. Jäger W., Mikelić A. On the flow conditions at the boundary between a porous medium and an impervious solid / in "Progress in PDE: the Metz surveys 3 eds. Chipot M., Paulin J.S.J. et Shafrir I. / Pitman reseach Notes in Mathematics, №314. – London: Longman Scientific and Technical, 1994. – P145-161.
3. Jäger W., Mikelić A. On the boundary conditions at the contact interface between a porous medium and a free fluid, Ann. Sc. norm. Super. Pisa, Cl, Sci.-Ser. IV, Vol. XXIII (1996), Fasc. 3 pp. 403– 465.
4. Jäger W., Mikelić A. On the boundary conditions at the contact interface between two porous media, in "PDE, Theory and numerical solution eds. W. Jäger, J. Nečas, O. John, K. Najzar and J. Stará, Chapman and Hall/CRC Research notes in math., N 406, pp. 175– 186. CRC Press, London (1999).
5. Jikov V. V., Kozlov S. M., and Oleinik O. A. Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals, Springer-Verlag, New York, 1994.
6. Kazemi H. Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution, Soc. Petroleum Engrs. J., V. 9 (1969) pp. 451– 462.
7. Kirk W. A., Sims B. Handbook of Metric Fixed Point Theory, Kluwer Academic, London, 2001.
8. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Dover Publications, 1999.
9. Kovalyshen Y., Detournay E. A Reexamination of the Classical PKNModel of Hydraulic Fracture, Transp. Porous Med., V. 81 (2010) pp. 317– 339.
10. Lions J.L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
11. Ladyzhenskaya O.A. The mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach, New York, 1969.
12. Ladyzhenskaya O.A. The Boundary-Value Problems of Mathematical Physics, Springer, New York, 1985.
13. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., and Uraltseva N. N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Providence, Rhode Island, 1968.

14. Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик, Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа, Недра, Москва, 1972.
15. Meirmanov A. Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media // Siberian Mathematical Journal. – 2007. – 48. – P.519–538.
16. Meirmanov A. Acoustic and filtration properties of a thermoelastic porous medium: Biot's equations of thermo–poroelasticity // Sbornik Mathematics. – 2008. – 199, №. 3. – P.1–24.
17. Meirmanov A. Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermoelastic porous media // Euro. Jnl. of Applied Mathematics. – 2008. – 19. – P.259–284.
18. Meirmanov A.M. Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – 163, №.2. – P111-172.
19. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // Math. Pures et Appl. – 1985. – 64. – P.31–75.
20. Ladyzhenskaya O.A. The mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow / New York: Gordon and Breach, 1969.
21. Biot M. A. 1941 General theory of three dimensional consolidation. Journal of Applied Physics 12 155 – 164.
22. Burridge R., Keller J. B. 1981 Poroelasticity equations derived from microstructure. Journal of Acoustic Society of America 70, No. 4, 1140–1146.
23. Chen Z. 2007 Homogenization and simulation for compositional flow in naturally fractured reservoirs. Math. Anal. App. 326 31 – 75.
24. Nguetseng G. 1989 A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. SIAM Journal on Mathematical Analysis 20, 608–623.
25. Sanchez-Palencia E., 1980 Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. Berlin, Lecture Notes in Physics, Vol.129, Springer.
26. de Swaan A., 1976 Analytic solutions for determing naturally fractured reservoir properties by well testing. Soc. Petroleum Engrs. J. 16 117 – 122.
27. Warren J.E., Root P. J. 1963 The behaviour of naturally fractured reservoirs. Soc. Petroleum Engrs. J. (1963)3 235 – 255.
28. Ladyzhenskaya O.A. The Boundary-Value Problems of Mathematical Physics, Springer, New York, 1985.
29. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., and Uraltseva N. N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Providence, Rhode Island, 1968.

CORRECTNESS OF THE PROBLEM FILTRATION FROM RESERVOIR TO SOIL: THE CASE OF VISCOUSE-ELASTIC FILTRATION

S.A. Gritsenko, N.S. Erygina

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru

Abstract. The problem of the liquid filtration from reservoir into the solid porous skeleton is investigated on microscopic level. The liquid dynamics is described by the system of not stationary hydrodynamic equations for incompressible liquid and common moving of elastic skeleton and liquid in the soil is described by the Lame's equations. It is proved the existence and the uniqueness of generalized solution of the problem. The averaging of total equation system is done that permits to avoid of fast oscillating coefficients.

Key words: liquid filtration, Lame's and not stationary hydrodynamic equations, averaging of periodic structures.

MSC 78A60

ANALYSIS OF THE ELECTRIC FIELD IN A LASER BY THE MULTIPOLE METHOD

A.B. Paltsev

Dorodnitsyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences,
Vavilov St., 40, Moscow, 119991, Russia, e-mail: vlasov@ccas.ru

Abstract. The multipole method is modified such that it may be applicable to analysis of electric field in the laser of special design. An optimal form of electrodes in the device under consideration is found. Main characteristics of the field are obtained in terms of closed formulae. Data of numerical study which confirm high effectiveness and accuracy of this method are given.

Key words: boundary value problem, multipole method, calculation of electric field in the laser.

Introduction

The multipole method suggested in [1], [2] and developed in [3]- [15] is based on the use of functions Ω_p, $p = 1, 2, \ldots$, which satisfy identically a given equation in initial domain g (e.g., the Laplace equation), satisfy homogeneous boundary condition at curve $\gamma \subset \partial g$, and constitute a complete and minimum system at the complementary arc $\Gamma = \partial g \backslash \gamma$. A solution of a boundary value problem is presented as a sequence of linear combinations of functions Ω_p. Those functions are boundary multipoles for an extension G of initial domain g over arc Γ; the concept of the boundary multipoles is meant in the sense of [3]. It is important that these functions can be expressed by the simple formula in the case of boundary value problems for the Laplace equation. Thus, if a Dirichlet problem in g with zero condition at γ is considered, then functions Ω_p will be given as follows: $\Omega_p = \operatorname{Im} F^p$, where F is a conformal mapping of the above extension G onto the upper half-plane.

The multipole method was substantiated and investigated in [3]. The obtained theoretical estimates show the method enables to calculate effectively the problem solution and all its derivatives both in domain g and at arc γ even if it has complex shape, contains geometrical singularities or infinities. It should be emphasized , that this method, according to the above estimates, gives the convergence in C^n-norm with arbitrary n in domain, including a part of its boundary, while traditional methods (e.g., finite element method) yield approximation only in W_1^2-norm (energy norm), and the error of gradient increases when approaching the boundary. The performed numerical experiments confirmed high efficiency of the multipole method; e.g., when the Dirichlet problem was being solved for the Poisson equation in L-type domain with rounded re-entrant corner [5], [7], [9], the use of only 40 degrees of freedom (i.e. functions Ω_p) ensured the accuracy 10^{-8} in C-norm for gradient near the rounded corner.

The present work is devoted to modification of this method and to its application to a difficult engineering problem which arises when designing a gas laser of special structure.

The work was financially supported by Russian Foundation for Basic Research (project №13-01-00923).

According to the general principle of laser operation, an active medium which would amplify electromagnetic waves passing through, must be created in the laser [16].

The most effective process of an active medium creation in a gas laser is implemented by a glow electric discharge of sufficient intensity maintained in the gas mixture. Discharge conditions, the speed of this process, and, therefore, effectiveness of laser generation are characterized by some parameters among which electric field intensity E plays a vital role [16]. The laser operation is highly sensitive to the change of E, so very accurate analysis of the field is essentially important.

The laser under consideration is of a complex design what makes this analysis rather difficult. The main feature of this device is in the special electrode structure suggested by researchers from P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences (Prof. A.N. Lobanov and his colleagues). Namely, both the anode and cathode inserted into the gas medium are composed of isolated sections provided with a system which enables to vary a potential on each of them independently. Thus, a variable distribution of potential can be fed at the bottoms of the electrodes; there is a constant potential at their side facings. The lasers of such a structure have a supplementary possibility which is that the electric field can be tuned for the most efficient laser operation, owing to redistribution of the potential and variation of the bottoms form.

The experience of above mentioned researches from P.N.Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences showed that application of various numerical methods to the evaluation of field in this laser encountered considerable obstacles and did not yield satisfying results. And all of their efforts to obtain field intensity E, which is a differential characteristic, failed. In the present work we apply the multipole method that enables to get all the characteristics required with high accuracy and efficiency.

A boundary value problem which describes the electric potential in the gas mixture under consideration is stated in Sect. 1. The solution of the boundary value problem is constructed with the help of the multipole method in Sect. 2. Sect. 3 is dedicated to finding such a distance between the electrodes and a form of their bottoms that the given maximum constant field would be kept at the bottoms for a constant potential preassigned at them. Sect. 4 contains general representation of the main field characteristics and data of specific implementation.

The author expresses his gratitude to Prof. A.N. Lobanov from P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences for the statement of the problem.

1. Statement of the problem

1.1. Domains and Boundary Value Problem. The analysis of discharge conditions which take place in the laser gas mixture can be reduced to solving a Dirichlet problem for the Laplace equation in two-dimensional unbounded domain g. This domain is the upper half-plane from that a half-strip with a curved bottom removed.

To describe domain g accurately, we introduce an auxiliary domain G. Let G in complex plane $w = u + iv$ be half-plane $\mathcal{H} = \{w : v > 0\}$ without two parallel rays:

$$G = \mathcal{H} \backslash \{w : u = \pm a; \quad v \geq b\},$$

where a and b are positive numbers. The initial points of rays will be denoted by $B = a + ib$ and $B' = -a + ib$. The domain G boundary contains three infinities A, M and A' reached as $|w| \to \infty$ with $u > a$ for $A, -a < u < a$ for M and $u < -a$ for A', see Fig. 1.

Now we join points B and B' by a Jordan smooth curve Γ which lies in G except for the endpoints. This curve divides domain G into two subdomains, one of them with boundary $(ABB'A'A)$ will be considered as domain g, see Fig. 2.

Domain g corresponds physically to the half section of a volume with gas mixture while the half-strip represents the electrode section. Let a certain potential $\phi(w)$ be distributed at electrode bottom Γ and certain constant potential values ϕ_1 and ϕ_2 be preset at the electrode side facings $(B'A')$ and (AB), respectively. Besides, zero potential is presumed at u-axis $(A'A)$ what follows from antisymmetry of the field with respect to this axis. Then sought potential Φ excited in the gas mixture in view of a small density of a volume charge throughout the system is described by the following boundary value problem:

$$\Delta\Phi(w) = 0, \qquad w \in g, \tag{1.1}$$

$$\Phi(w) = 0, \qquad w \in (A'A), \tag{1.2}$$

$$\Phi(w) = \phi_1, \qquad w \in (B'A'), \tag{1.3}$$

$$\Phi(w) = \phi_2, \qquad w \in (AB), \tag{1.4}$$

$$\Phi(w) = \phi(w), \qquad w \in \Gamma. \tag{1.5}$$

Here, boundary function ϕ is continuous at Γ and joins continuously with boundary values at sides $(B'A')$ and (AB), i.e. $\phi(B') = \phi_1$, $\phi(B) = \phi_2$. Function $\Phi(w)$ is a bounded solution of problem (1.1)-(1.5) that belongs to $C^2(g) \cap C\,(\bar{g}\backslash(A \cup A'))$.

Note bottom Γ in practice is chosen smoothly joined with the electrode side facings $(B'A')$ and (AB). Otherwise, a field concentration will occur near the junction of the electrode bottom with the side facings what can cause the unstable discharge and electron breakdown [16].

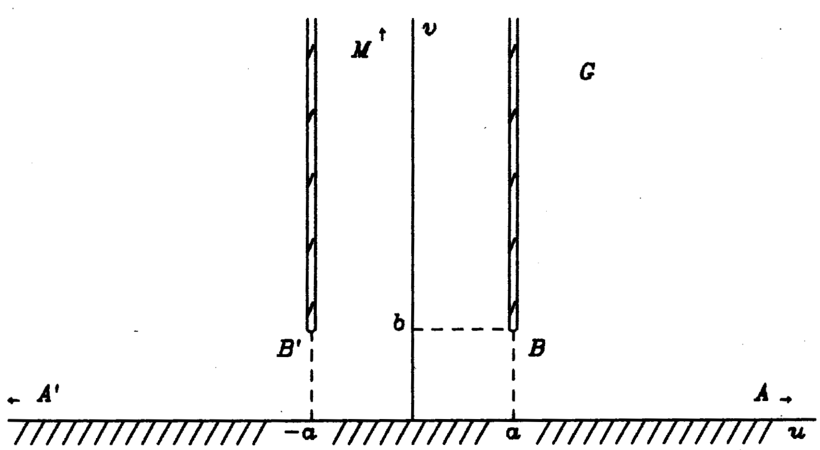

Fig. 1. Domain G.

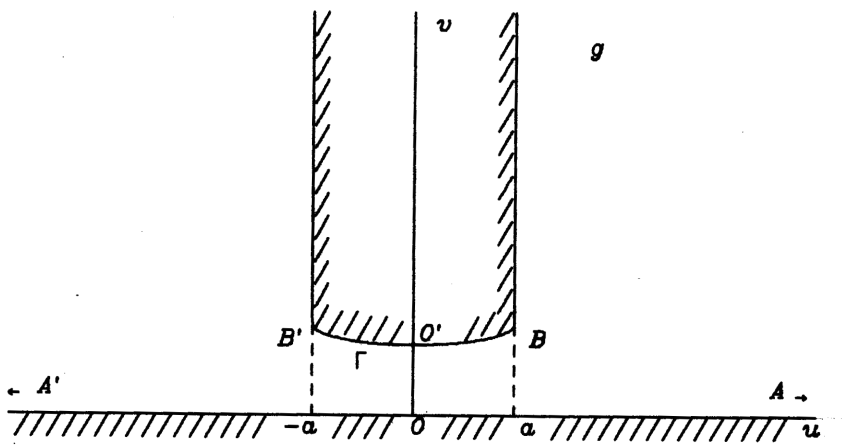

Fig. 2. Domain g.

1.2. Conformal Mapping of Auxiliary Domain G**.** When the boundary value problem (1.1)-(1.5) being solved by the multipole method, conformal mapping $z = F(w)$ of domain G onto the half-plane $\mathcal{H}$ plays a vital part. However, it is difficult to find an effective global analytical representation for this mapping what makes us turn to an inverse mapping (of $\mathcal{H}$ onto G) denoted by $f(z)$ that can be found in this case with reasonable facility. We define the following correspondence between three boundary points of one domain and those of the other: points A, M, and A' of ∂G correspond to points 1, ∞, and -1 of $\partial\mathcal{H}$, i.e. in terms of mapping f

$$f(1) = A, \qquad f(\infty) = M, \qquad f(-1) = A'.$$

We remark that mapping f satisfies relation $f(-\bar{z}) = -\bar{f}(z)$, $z \in \mathcal{H}$, following from the Schwarz reflection principle [17], [18]. Then points $B = a + ib$ and $B' = -a + ib$ will correspond respectively to real points $z = k^{-1}$ and $z = -k^{-1}$ for a certain $k \in]0, 1[$ which will be determined below.

Function $f(z)$ may be expressed by Schwarz-Christoffel integral [17], [18]

$$w = f(z) = C \int_0^z (1 - \zeta^2)^{-3/2} (k^{-2} - \zeta^2) d\zeta. \tag{1.6}$$

To find the unknown real k and C, we shall use conditions resulting from the above definition of conformed mapping $f(z)$:

$$\operatorname{Re} f(x) = a, \qquad x > 1; \qquad f(k^{-1}) = a + ib. \tag{1.7}$$

Let x be a real number from interval $] - 1, 1[$. Taking integral (1.6) along real segment $[0, x]$, getting, thus,

$$f(x) = C \left(\frac{k^{-2} - 1}{\sqrt{1 - x^2}} x + \arcsin x \right),$$

and analytically continuing this function from real interval $]-1,1[$ to upper half-plane $\mathcal{H}$, we obtain the explicit formula for the required mapping

$$f(z) = C\, i \left(\frac{k^{-2}-1}{\sqrt{z^2-1}}\, z + \ln(z + \sqrt{z^2-1}) \right) + \frac{\pi C}{2};$$

we consider the main branch of logarithm: $\operatorname{Im} \ln z \in]-\pi, \pi[$, $z \in \mathcal{H}$. This expression in accordance with conditions (1.7) follows $C = 2a/\pi$ and parameter $k = k(a/b)$ is a root of transcendental equation

$$\frac{\sqrt{1-k^2}}{k^2} + \ln \frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k} = \frac{\pi\, b}{2\, a}.$$

A graph of k as a function of dimensionless parameter a/b is drawn in Fig. 3.

Now we can write out final expression for mapping $f(z)$:

$$w = f(z) = \frac{2ai}{\pi} \left(\frac{k^{-2}-1}{\sqrt{z^2-1}}\, z + \ln(z + \sqrt{z^2-1}) \right) + a;$$

Thus, inverse mapping $f(z)$ is completely defined, and the required mapping $F(w)$ can be obtained by inversion of it. A very convenient local inversing procedure will be presented in Subsect. 2.4.

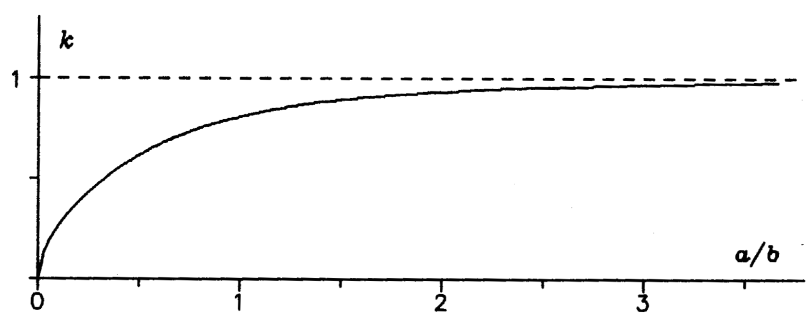

Fig. 3. Parameter k versus ratio a/b.

2. Solution of boundary value problem

2.1. Reduction of Problem. We introduce function $U_0(w)$ via conformal mapping $F(w)$ defined at the end of the previous section

$$U_0(w) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\phi_1 \ln [1 + F(w)] - \phi_2 \ln [1 - F(w)] \right). \qquad (2.1)$$

Function $U_0(w)$ is obviously a bounded harmonic in G and continuous in $\bar{G}\backslash(A \cup M \cup A')$ one, and satisfies the following boundary conditions at ∂G:

$$\begin{array}{rclcrcl} U_0(w) & = & 0, & w & \in & (A'\,A), \\ U_0(w) & = & \phi_1, & w & \in & (M\,B'\,A'), \\ U_0(w) & = & \phi_2, & w & \in & (A\,B\,M). \end{array}$$

Let us present solution $\Phi(w)$ of original problem (1.1) – (1.5) in the form

$$\Phi(w) = U_0(w) + U(w). \tag{2.2}$$

Taking into account the above properties of function U_0 and the inclusion $\Phi \in C\,(\bar{g}\backslash(A \cup A'))$, we find $U(w)$ is a classical solution of the Dirichlet problem

$$\Delta U(w) = 0, \qquad w \in g, \tag{2.3}$$

$$U(w) = 0, \qquad w \in \gamma = \partial g \backslash \Gamma, \tag{2.4}$$

$$U(w) = \phi(w) - U_0(w), \qquad w \in \Gamma. \tag{2.5}$$

Function $U(w)$ will be constructed with the help of the multipole method.

2.2. Multipole Method for Solving Problem. The multipole method which is an analytical-numerical one for solving elliptic boundary value problems in complex-shaped domains was theoretically studied, advanced and generalized in [3]- [15] and some other works, and was successfully used for solving a number of theoretical and applied problems.

The basis of the method is an application of functions $\Omega_p(w)$ expressed by the formula

$$\Omega_p(w) = \mathrm{Im}\,[F(w)]^p, \qquad p \in N.$$

One can interprete function $\Omega_p(w)$ for every natural p in the electrostatic sense [3]: it represents electric potential excited in domain G by pth order boundary multipole which is located in point M. These are harmonic in g functions, which satisfy zero boundary condition at arc $\gamma = (B'\,A'\,A\,B)$ and constitute complete and minimum system in $L_2(\Gamma)$. The required solution of problem (2.3) – (2.5) can be obtained as the limit

$$U(w) = \lim_{K \to \infty} U^K(w) \tag{2.6}$$

of sequence of functions $U^K(w)$ which are $\Omega_p(w)$ linear combinations

$$U^K(w) = \sum_{p=1}^{K} a_p^K\,\Omega_p(w),$$

where coefficients a_n^K are defined by the condition that $L_2(\Gamma)$-norm of difference of $U^K(w)$ and boundary function $\phi(w) - U_0(w)$ should be minimum

$$\|U^K - \phi + U_0\|_{L_2(\Gamma)} \longmapsto \min\,. \tag{2.7}$$

Sequence $U^K(w)$ converges uniformly to solution $U(w)$ of problem (2.3) – (2.5) everywhere in every compact lying into set $g\cup\gamma$ and, moreover, admits differentiation of any order in set $g\cup\gamma\setminus(A\cup A')$; the differentiated sequence converges uniformly in every compact lying into the latter set [3].

Besides, an expansion in the multipole system

$$U(w)=\sum_{n=1}^{\infty} a_p\,\Omega_p(w), \qquad a_p=\lim_{K\to\infty} a_p^K$$

is an analog of Taylor series in the sense that it can be differentiated any times and it converges with exponential speed everywhere in its convergence set

$$\{w=f(z);\, |z|<R,\, \mathrm{Im}\, z\ge 0\}, \qquad R=\min_{w\in\Gamma}|F(w)|.$$

We remark that the set represents the union of a certain subdomain of g and a part of arc $(B'\,A'\,A\,B)$ adjacent to it.

Condition (2.7) results in linear algebraic system

$$\sum_{p=1}^{K} C_{pq}a_p^K=H_q, \qquad q=1,2,\dots,K, \tag{2.8}$$

where C_{pq} are elements of Gram's matrix for system $\{\Omega_p(w)\}_{p=1}^{\infty}$, and H_p is a projection of boundary function $\phi-U_0$ onto Ω_p:

$$C_{pq}=\int_\Gamma \Omega_p(w)\Omega_q(w)|dw|, \qquad H_p=\int_\Gamma \Omega_p(w)[\phi(w)-U_0(w)]|dw|.$$

By virtue of the fact that function system $\{\Omega_p(w)\}_{p=1}^{\infty}$ is complete and minimum in $L_2(\Gamma)$ as it has been said, algebraic system (2.8) is uniquely solvable.

Thus, summing up the preceding, we can write out the expression for the approximate solution of problem (1.1) – (1.5)

$$\Phi^K(w)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\left(\phi_1\ln\left[1+F(w)\right]-\phi_2\ln\left[1-F(w)\right]\right)+\sum_{p=1}^{K}a_p^K\Omega_p(w)$$

converging to $\Phi(w)$ in the closed domain $\bar g$ as $K\to\infty$.

2.3. Expansion of Solution in Orthonormal System. It may be convenient to use a representation for $\Phi(w)$ in the form of series in an orthonormal system. Following [3], we introduce orthonormal function system $\{\omega_p(w)\}$ which can be obtained from system $\Omega_p(w)$ by the Schmidt orthogonalization process, see e.g. [19]

$$\omega_p(w)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}_p\mathrm{Det}_{p-1}}}\sum_{n=1}^{p}A_{np}\Omega_n(w),$$

where Det_p is determinant of matrix $\{C_{mn}\}_{m,n=1}^{p}$ while A_{np} is the algebraic complement of element C_{np} in this matrix. Then exact solution $\Phi(w)$ is presented as follows

$$\Phi(w) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\phi_1 \ln\left[1 + F(w)\right] - \phi_2 \ln\left[1 - F(w)\right]\right) + \sum_{p=1}^{\infty} h_p \omega_p(w), \tag{2.9}$$

where

$$h_p = \int_{\Gamma} \omega_p(w)[\phi(w) - U_0(w)]|dw|.$$

According to [3], series (2.9) converges everywhere in $\bar{g}$ and admits any order differentiation in $g \cup \gamma \backslash (A \cup A')$.

2.4. Constructing of Mapping $z = F(w)$. As we have already said, conformal mapping $z = F(w)$ of the extended domain G onto half-plane $\mathcal{H}$ is an important, apparatus for the multipole method. However, the problem of constructive representation for this mapping in the general case is difficult. Therefore, when the multipole method being implemented, one has to use the inverse of $F(w)$ denoted by $f(z)$ which can usually be found easier. If $f(z)$ is determined, then the required mapping could be constructed by inversing $f(z)$. It can be done with the help of the method of successive approximations which is based on the Newton's method and gives local inversing procedure [20]. Here we formulate this method for a conformal mapping in the general case.

Let function $w = \psi(z)$ accomplish a conformal mapping of domain G_1 onto domain G_2, and the inverse image $z_0 \in G_1$ for a certain $w_0 \in G_2$ is known,

$$f(z_0) = w_0.$$

Now we introduce some objects required for the formulation and proof of the method. The distance of point z_0 to the domain G_1 boundary will be denoted by R_{z0}; the disk

$$\mathcal{D}_{z0}(r) = \{z : |z - z_0| < r\}$$

for every $r \in]0, R_{z0}]$ lies obviously into domain G_1. Let us define the function

$$W(z_1, z_2) = \frac{\psi(z_1) - \psi(z_2)}{\psi'(z_0)(z_1 - z_2)} - 1$$

which is holomorphic in G_1 with respect to the both variables by virtue of the fact that $\psi(z)$ is holomorphic in G_1 and $\psi'(z_0) \neq 0$. A maximum absolute value of W with respect to z_1 and z_2 from the closed disk $\bar{\mathcal{D}}_{z0}(r)$, $r \in]0, R_{z0}]$ will be denoted by $Q(r)$,

$$Q(r) = \max |W(z_1, z_2)|, \qquad z_1, z_2 \in \bar{\mathcal{D}}_{z0}(r);$$

and maximum absolute value of $|W|$ of z_1 from the same disk, when $z_2 = z_0$, will be denoted by $q(r)$

$$q(r) = \max |W(z_1, z_0)|, \qquad z_1 \in \bar{\mathcal{D}}_{z0}(r).$$

It is clear that $Q(0) = q(0) = 0$. Now we will state some other properties of the intoduced functions.

Lemma 2.1. *If function $\psi(z)$ is not linear, then for every $r \in]0, R_{z0}]$*

1. *The following inequality takes place*

$$0 < q(r) < Q(r); \tag{2.10}$$

2. *Functions $Q(r)$ and $q(r)$ increase strictly;*

3. *Functions $Q(r)$ and $q(r)$ are majorized by convergent series*

$$Q(r) \;\le\; \frac{1}{|\psi'(z_0)|}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi^{(n+1)}(z_0)|}{n!}\,r^n \;<\; \infty; \tag{2.11}$$

$$q(r) \;\le\; \frac{1}{|\psi'(z_0)|}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi^{(n+1)}(z_0)|}{(n+1)!}\,r^n \;<\; \infty. \tag{2.12}$$

□ Using the principle of maximum for holomorphic function [17], [18], it is not difficult to verify that function $|W(z_1, z_0)|$ over the disk $\mathcal{D}_{z0}(r)$ reaches its maximum value at the disk boundary, while the maximum of $|W(z_1,\, z_2)|$ is reached when both points z_1, z_2 belongs to the disk boundary. In other words, the relations take place

$$Q(r) = |W(z_0 + re^{i\alpha_1}, z0 + re^{i\alpha_2})|, \qquad q(r) = |W(z_0 + re^{i\alpha_3}, z0)|$$

for certain $\alpha_j = \alpha_j(r) \in [0,\, 2\pi[,\; j = 1, 2, 3$. This follows the validity of inequality (2.10) and the strict monotony of the functions $Q(r)$ and $q(r)$. Further, expanding function $W(z_1, z_2)$

$$W(z_1, z_2) = \frac{1}{\psi'(z_0)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!}\,\frac{(z_1 - z_0)^n - (z_2 - z_0)^n}{(z_1 - z_0) - (z_2 - z_0)},$$

placing $z_j = z_0 + re^{i\alpha_j}$ into this expression and estimating its modulus, we obtain the inequality

$$Q(r) \le \frac{1}{|\psi'(z_0)|}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\psi^{(n)}(z_0)|}{n!}\left|\frac{e^{i\alpha_1 n} - e^{i\alpha_2 n}}{e^{i\alpha_1} - e^{i\alpha_2}}\right| r^{n-1}.$$

Taking into account

$$\left|\frac{e^{i\alpha_1 n} - e^{i\alpha_2 n}}{e^{i\alpha_1} - e^{i\alpha_2}}\right| \le \sum_{m=0}^{n-1}\left|e^{i\alpha_1 m}\, e^{i\alpha_2 (n-m-1)}\right| = n,$$

we obtain the required estimate (2.11). To get (2.12), one can operate analogously. The lemma is proved. ■

Note if function $\psi(z)$ is linear, then $Q(r) = q(r) = 0$ for every r.

Let us define numbers R^1_{z0} and r_{z0} as follows. If $Q(r) < 1$ for all r from $[0, R_{z0}]$, then $R^1_{z0} = R_{z0}$, otherwise, by R^1_{z0} will be denoted the point at which function Q takes value 1. Then $r_{z0} \in [0,\, R^1_{z0}]$ is a point at which function $r[1 - q(r)]$ reaches its maximum,

$$r_{z0}[1 - q(r_{z0})] = \max\left(r[1 - q(r)]\right), \qquad r \in [0,\, R^1_{z0}].$$

Proposition 2.1. *The function sequence*

$$\Psi_0(w) \equiv z_0, \qquad \Psi_{n+1}(w) \equiv \Psi_n(w) - \frac{\psi(\Psi_n(w)) - w}{\psi'(z_0)}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.13}$$

converges to function $z = \Psi(w)$, the inverse of $\psi(z)$, uniformly inside disk $\mathcal{D}_{w0}(r_{w0})$, where

$$r_{w0} = r_{z0}[1 - q(r_{z0})]\,|\psi'(z_0)|.$$

If $|w - w_0| = d < r_{w0}$, then the convergence rate of successive approximations (2.13) is estimated as follows

$$|\Psi(w) - \Psi_n(w)| \le \frac{Q_0^n}{1 - Q_0}\,\frac{d}{|\psi'(z_0)|}, \tag{2.14}$$

for

$$Q_0 = Q(d^*) < 1, \qquad d^* = \frac{d}{[1 - q(r_{z0})]|\psi'(z_0)|}. \tag{2.15}$$

□ Let d be an arbitrary number from the interval $]0, r_{w0}[$. We define quantity d^* by relation (2.15); it is clear that $0 < d^* < r_{z0}$. Now we will prove that for w such that $|w - w_0| = d$, all the approximations $\Psi_n(w)$ belong to disk $\mathcal{D}_{z0}(d^*)$. As to $\Psi_0(w) \equiv z_0$, it belongs obviously to this disk; let $\Psi_n(w)$ be known for a certain n to lie into this disk, we show that $\Psi_{n+1}(w)$ is from $\mathcal{D}_{z0}(d^*)$ too. Indeed, denoting $z = \Psi_n(w)$, we write

$$|\Psi_{n+1}(w) - z_0| \;=\; \left|z - \frac{\psi(z) - w}{\psi'(z_0)} - z_0\right| \le \left|z - z_0 - \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{\psi'(z_0)}\right| + \left|\frac{w_0 - w}{\Psi'(z_0)}\right|;$$

the former summand is, by definition of q, not greater than $q(d^*)|z^- z_0|$ and, thus, it is less than $q(d^*)d^*$, the latter summand equals to $d/|\psi'(z_0)| = [1 - q(r_{z0})]d^*$, that follows

$$|\Psi_{n+1}(w) - z_0| < q(d^*)d^* + [1 - q(r_{z0})]d^* < d^*.$$

By virtue of the principle of mathematical induction, we obtain that $\Psi_n(w) \in \mathcal{D}_{z0}(d^*)$, $n = 0, 1, 2 \dots$

Further, according to the definition of function $Q(r)$, the following inequality takes place

$$\left|z_1 - z_2 - \frac{\psi(z_1) - \psi(z_2)}{\psi'(z_0)}\right| < Q(d^*)|z_1 - z_2|, \qquad Q(d^*) < 1,$$

for every z_1, z_2 from $\bar{\mathcal{D}}_{z0}(d^*)$. We can place $z_1 = \Psi_n(w)$, $z_2 = \Psi_{n-1}(w)$ in this formula, what, taking into account (2.13), follows

$$|\Psi_{n+1}(w) - \Psi_n(w)| \le Q(d^*)|\Psi_n(w) - \Psi_{n-1}(w)|,$$

and for every $N \ge n$

$$\sum_{m=n}^{N} |\Psi_{m+1}(w) - \Psi_m(w)| < \frac{[Q(d^*)]^n}{1 - Q(d^*)}\left|\frac{\psi(z_0) - w}{\psi'(z_0)}\right|.$$

This means sequence $\Psi_n(w)$ converges uniformly in every closed disk $\bar{\mathcal{D}}_{w0}(d)$, $d < r_{w0}$ to function $\Psi(w)$, with $\psi \circ \Psi(w) = w$. Tending the upper limit N in the last inequality to the infinity, we obtain estimate (2.14). According to Weierstrass' theorem [18], $\Psi(w)$ constructed in this manner is a holomorphic function in the open disk $\mathcal{D}_{w0}(r_{w0})$. The proposition is proved. ■

3. Optimum Electrode Shape

3.1. Formulation of Problem. We remind domain g from the class under consideration is uniquely defined by arc Γ (the electrode bottom shape) and parameters a (the electrode half-width) and b (the altitude of electrode sides over $(A'A)$-axis).

We will consider the following statement: let a certain constant potential $\phi_0 > 0$ be preset at the whole electrode surface $(A\,B\,B'\,A')$ with the electrode width $2a$ being given. It is required to find bottom Γ and parameter b that provide a constant magnitude of electric intensity along the whole bottom, equal to the preset value E_0.

The arc Γ shape satisfying this statement is an optimum one in the sense that any other arc with the same endpoints contains a some place where the magnitude of electric intensity exceeds E_0.

To be specific, we shall solve the following boundary value problem in domain g with free boundary arc Γ

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi(w) &= 0, && w \in g, && (3.1)\\
\Phi(w) &= 0, && w \in (A'\,A), && (3.2)\\
\Phi(w) &= \phi_0, && w \in (A\,B\,B'\,A'), && (3.3)\\
|\operatorname{grad}\Phi(w)| &= E_0, && w \in \Gamma = (B\,B'), && (3.4)
\end{aligned}$$

quantities a, ϕ_0 and E_0 are assumed to be preset.

An explicit analytical expression for Γ as a complex-valued parametrical function $\Gamma(t) = \Gamma_1(t) + i\Gamma_2(t)$ will be found below in Subsect. 3.3. The corresponding potential $\Phi(w)$ can be obtained by means of the method presented in Sect. 2.

3.2. Preliminary Notes. The problem (3.1)-(3.4) of constructing an optimal rounding curve Γ is solved below by the hodograph method [21]- [24].

Problem (3.1)-(3.4) is reduced to the question of the existence of such a conformal mapping $\zeta = \Psi(w)$ of domain g onto strip

$$\{\zeta : 0 < \operatorname{Im}\zeta < \phi_0\}$$

that points A and A' would be mapped into the right and left infinities of the strip, respectively, and

$$|\Psi'(w)| = E_0$$

for every point w of the unknown arc Γ. Then function $\Phi(w)$ which corresponds to statement (3.1)-(3.4) will be expressed as follows

$$\Phi(w) = \operatorname{Im}\Psi(w).$$

Function $\Psi(w)$ is called complex potential; its derivative is well known to be related to field intensity $E(w)$ by the formula

$$\bar{E}(w) = i\,\Psi'(w),$$

where $E(w)$ is the complex conjugate of $E(w)$. A general representation of function $\Psi(w)$ for problem (1.1)-(1.5) will be given in Subsect. 4.1.

Existence and uniqueness of arc Γ which would bring into being the mapping, can be proved with the help of the general variation principle [21], [25]. Note arc Γ and, therefore, the whole domain g are, in our case, symmetrical with respect to v-axis. The segment of this axis joining the middle point O' of Γ and the origin of coordinates O divides g into two symmetrical subdomains $g^+ = \{w \in g : u > 0\}$ and $g^- = \{w \in g : u < 0\}$, see Fig. 2.

Note conformal mapping $\zeta = \Psi(w)$ has one degree of freedom that we will fix with condition $\Psi(O) = 0$. It is not difficult to demonstrate, using the reflection principle already mentioned, that this unique mapping transforms domain g^+ into half-strip

$$\{\zeta : 0 < \operatorname{Re}\zeta; \quad 0 < \operatorname{Im}\zeta < \phi_0\} \tag{3.5}$$

with the correspondence of boundary points

$$\Psi(O) = 0, \qquad \Psi(A) = \infty, \qquad \Psi(O') = i\,\phi_0. \tag{3.6}$$

It is obvious that $(A\,B\,B'\,A')$ is mapped into line $\operatorname{Im}\zeta = \phi_0$, and real axis $(A'\,A)$ is mapped into real axis $\operatorname{Im}\zeta = 0$. The image of point B is a certain point $\beta + i\phi_0$; positive quantity β which depends on the problem parameters will be determined below. Along with normalization (3.6) for Ψ we shall use another correspondence which follows from (3.6):

$$\Psi(A) = \infty, \qquad \Psi(B) = \beta + i\phi_0, \qquad \Psi(O') = i\phi_0 \tag{3.7}$$

with unknown β.

Let us consider now a conformal mapping conditioned by the derivative of function $\Psi(w)$. The domain g^+ image under the mapping $W = \Psi'(w)$ is readily verified to be a sector

$$\{W : |W| < E_0; \quad -\pi/2 < \arg W < 0\} \tag{3.8}$$

in the complex plane W (so-called hodograph plane); boundary points are transformed as follows:

$$\Psi'(A) = 0, \qquad \Psi'(B) = -iE_0, \qquad \Psi'(O') = E_0, \tag{3.9}$$

and $\Psi'(0)$ is a real number from interval $]0, E_0[$.

We introduce now function $W = \Omega(\zeta)$ which accomplishes a conformal mapping of half-strip (3.5) from complex potential plane ζ onto sector (3.8) in the hodograph plane with the following normalization

$$\Omega(\infty) = 0, \qquad \Omega(\beta + i\phi_0) = -iE_0, \qquad \Omega(i\phi_0) = E_0. \tag{3.10}$$

Then, from definition of $\Psi(w)$ and $\Omega(\zeta)$, and in view of correspondences (3.7), (3.9), (3.10), we get $\Psi'(w) = \Omega \circ \Psi(w)$, whence it follows, owing to $\zeta = \Psi(w)$, the equality

$$dw = \frac{d\zeta}{\Omega(\zeta)}. \tag{3.11}$$

Integrating right-hand side of (3.11) along straight segment $[t+i\phi_0,\ \beta+i\phi_0]$, when $0 \le t \le \beta$, in the complex potential plane and the left-hand side along the corresponding part of arc Γ in initial plane w, we obtain the expression for the required arc in terms of parametrical function

$$\Gamma(t) = a + ib - \int_t^\beta \frac{dx}{\Omega(x+i\phi_0)}, \qquad t \in [0,\ \beta], \tag{3.12}$$

where the parameter values $t = 0$ and $t = \beta$ correspond to points O' and B of arc Γ.

Therefore, the mapping which satisfies relations (3.10) remains to be found, then everyone can determine the arc sought, applying formula (3.12). Unknown parameters b and β will be found in Subsect. 3.3.

3.3. Representation of Optimum Bottom. Mapping $\Omega(\zeta)$ is obtained effortlessly

$$\Omega(\zeta) = E_0 \left(\sqrt{1 + \frac{\cosh^2 \dfrac{\pi\zeta}{2\phi_0}}{\sinh^2 \dfrac{\pi\beta}{2\phi_0}}} - \frac{\cosh \dfrac{\pi\zeta}{2\phi_0}}{\sinh \dfrac{\pi\beta}{2\phi_0}} \right). \tag{3.13}$$

Replacing ζ by $x + i\phi_0$ in this relation and substituting the result into (3.12), we find the following formula

$$\Gamma(t) = a + ib - \frac{1}{E_0} \int_t^\beta \left(\sqrt{1 - \frac{\sinh^2 \dfrac{\pi x}{2\phi_0}}{\sinh^2 \dfrac{\pi\beta}{2\phi_0}}} + i \frac{\sinh \dfrac{\pi x}{2\phi_0}}{\sinh \dfrac{\pi\beta}{2\phi_0}} \right) dx. \tag{3.14}$$

The imaginary part of (3.14) can be written via elemental functions while the real part, by means of substitution of integration variable $x = (2\phi_0/\pi)\,\mathrm{arsinh}\, x'$, can be reduced to expression in terms of the incomplete elliptic integrals [26]:

$$\Gamma(t) = a + ib - \frac{2\phi_0}{\pi E_0 \tau} \left[E_1(\theta, \tau) - E_2(\theta, \tau) + i \left(\sqrt{1-\tau^2} \cosh \frac{\pi t}{2\phi_0} - 1 \right) \right]. \tag{3.15}$$

The following designations are accepted in the last formula:

$$E_1(\theta, \tau) = \int_0^\theta \frac{dx}{\sqrt{1 - \tau^2 \sin^2 x}}, \qquad E_2(\theta, \tau) = \int_0^\theta \sqrt{1 - \tau^2 \sin^2 x dx}$$

are the first and second type incomplete elliptic integrals (since letters F and E which are their commonly accepted designations are already engaged in our paper, we have to use unconventional designations), and

$$\theta = \theta(t) = \arccos \frac{\sinh \dfrac{\pi t}{2\phi_0}}{\sinh \dfrac{\pi\beta}{2\phi_0}}, \quad \tau = \tanh \frac{\pi\beta}{2\phi_0}. \tag{3.16}$$

Note $0 \le \theta \le \pi/2, \quad 0 \le \tau < 1$, and expression $E_1(\theta,\tau) - E_2(\theta,\tau)$ can be represented in the form of series

$$E_1(\theta,\tau) - E_2(\theta,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)_{n-1}}{(n-1)!}\, I_n(\theta)\tau^{2n}, \tag{3.17}$$

here and below $(\alpha)_m$ denotes the Pochhammer's symbol [27]; for values

$$I_n(\theta) \equiv \int_t^{\theta} \sin^{2n} x\, dx$$

a recurrence formula is valid

$$I_0(\theta) = \theta, \quad I_n(\theta) = -\frac{\sin^{2n-1}\theta\cos\theta}{2n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_{n-1}(\theta). \tag{3.18}$$

Series (3.17) converges for every θ, owing to the fact that τ is always less than 1 and quantities $I_n(\theta)$ can be estimated as follows

$$I_n(\theta) \le I_n(\pi/2) = \frac{\pi}{2}\,\frac{(1/2)_n}{n!} = O\left(n^{-1/2}\right), \qquad n \to \infty.$$

Thus, we have found function (3.15) which describes sought arc Γ, and it remains only to determine quantities β and b in this expression. For this purpose we consider two representations for the middle point O' of arc Γ. On the one hand, as it has been remarked, $O' = \Gamma(0)$, hence, placing $t = 0$ in (3.12), we find

$$O' = a + ib - \int_0^{\beta} \frac{dx}{\Omega(x + i\phi_0)},$$

On the other hand, O' can be got by integrating the left-hand side of (3.11) along the straight segment $[O,\, O']$ of v-axis (while the right-hand side is integrated along the corresponding straight segment $[0,\, i\phi_0]$),

$$O' = \frac{i}{E_0} \int_0^{\phi_0} \frac{dx}{\Omega(ix)}.$$

Inserting already known function Ω defined by formula (3.13) into the two last relations, separating real and imaginary parts and equating them, we obtain two equations which define the required quantities completely:

$$a - \frac{1}{E_0} \int_0^{\beta} \sqrt{1 - \frac{\sinh^2 \dfrac{\pi x}{2\phi_0}}{\sinh^2 \dfrac{\pi\beta}{2\phi_0}}}\, dx = 0, \tag{3.19}$$

and

$$\frac{1}{E_0}\int_0^{\phi_0}\left(\sqrt{1-\frac{\cos^2\dfrac{\pi x}{2\phi_0}}{\sinh^2\dfrac{\pi\beta}{2\phi_0}}}+\frac{\cos\dfrac{\pi x}{2\phi_0}}{\sinh\dfrac{\pi\beta}{2\phi_0}}\right)dx = b-\frac{2\phi_0}{\pi E_0}\tanh\frac{\pi\beta}{4\phi_0}. \tag{3.20}$$

Equation (3.19) is an implicit expression for β which is modified in terms of hypergeometrical function $F \equiv_2 F_1$, see e.g. [26], [27], as follows:

$$\frac{\tau}{2}F(1/2,3/2;2;\tau^2)=\frac{aE_0}{\phi_0}, \tag{3.21}$$

where τ has been defined in formula (3.16).

In view of equation (3.21) we can draw a conclusion that auxiliary parameter $\tau\in(0,1)$ depends only on dimensionless quantity $\lambda = aE_0/\phi_0$ that can be varied in the range $(0,\infty)$, and the required parameter β depends on λ and ϕ_0.

We remark that for great values of $\lambda = aE_0/\phi_0$ it would be convenient for finding parameter β to use the following equation, equivalent to (3.21),

$$\frac{\sqrt{1-\epsilon}}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n(3/2)_n}{(n!)^2}[\mu_n-\ln\,\epsilon]\epsilon^n=\frac{aE_0}{\phi_0}; \tag{3.22}$$

here small parameter ϵ is related to β as follows

$$\epsilon = 1-\tau^2=\cosh^{-2}\frac{\pi\beta}{2\phi_0}, \tag{3.23}$$

and the recurrence formula for coefficients μ_n is valid

$$\mu_0 = 2(\ln\,4-1), \qquad \mu_n=\mu_{n-1}-\frac{2}{n(2n-1)(2n+1)}.$$

Using expressions (3.21) and (3.22), we find asymptotic behavior of parameter β in the limiting cases $\lambda\to 0$ and $\lambda\to\infty$ for every fixed ϕ_0:

$$\beta=\frac{4\phi_0}{\pi}\lambda+O(\lambda^2), \qquad \lambda\to 0$$

and

$$\beta=\phi_0\lambda-\frac{2(\ln\,8-1)}{\pi}+O\left(\lambda e^{-\pi\lambda}\right), \qquad \lambda\to\infty.$$

Besides, it is not difficult to demonstrate that β as a function of λ (for a fixed ϕ_0) increases monotonically while its derivative $\frac{d\beta}{d\lambda}$ will decrease monotonically from $4\phi_0/\pi$ when $\lambda=0$, down to ϕ_0 when $\lambda\to\infty$. The graph of β as a function of aE_0/ϕ_0 for different values of potential ϕ_0 is presented in Fig. 4.

Finally, we are coming to a determination of parameter b. We return to equation (3.20) where all the quantities, except for b, have already been found. Inserting (3.13) with $\zeta = ix$ into (3.20), we obtain

$$\frac{1}{E_0}\int\limits_0^{\phi_0}\left(\sqrt{1-\frac{\cos^2\dfrac{\pi x}{2\phi_0}}{\sinh^2\dfrac{\pi\beta}{2\phi_0}}}+\frac{\cos\dfrac{\pi x}{2\phi_0}}{\sinh\dfrac{\pi\beta}{2\phi_0}}\right)dx = b-\frac{2\phi_0}{\pi E_0}\tanh\frac{\pi\beta}{4\phi_0}.$$

We rearrange the last formula and have finally a sought expression for b

$$b=\frac{\phi_0}{E_0\tau}\left(F(-1/2,1/2,1;1-\tau^2)+\pi/2\right).$$

Thus, all the sought parameters of domain g which satisfy the statement (3.1)-(3.4) are determined completely. The next subsection deals with a study of characteristics of the obtained optimum bottom. As to solution $\Phi(w)$ of problem (3.1)-(3.4), it can be constructed according to the method outlined above, in Sect. 2. A graphical representation of this solution will be given below for a certain set of the domain g parameters, see Subsect. 4.2, Example 3.

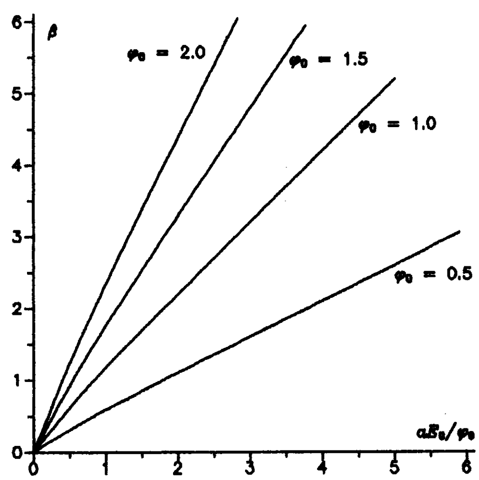

Fig. 4. Parameter β versus aE_0/ϕ_0 for different ϕ_0.

3.4. Electrode Curvature and Field Distribution. It is of interest to find such characteristics of the optimum electrode form as its bottom curvature and electric field distribution at side facings (the field magnitude is constant at the electrode bottom, according to condition (3.4)).

We will search for curvature K and field magnitude $|E| = |\text{grad}\,\Phi|$ as functions of coordinate $s \in (-\infty, \infty)$, which is the arc length measured from point O' along electrode contour with values $s = -\infty$, $s = 0$, $s = \infty$ corresponding to points A', O' and A. We will find first a relation between parameter t used in representation of arc Γ (see the previous subsection) and new coordinate s. To do this, we will use equality (3.11): integrating absolute value of its left- and right-hand sides along the corresponding straight segments $[0, s]$ and

$[i\phi_0, t+i\phi_0]$, we obtain just the arc length. Further, taking into account expression (3.12), we find

$$s(t) = \int_0^t \frac{dx}{|\Omega(x+i\phi_0)|}, \tag{3.24}$$

where

$$|\Omega(x+i\phi_0)| = \frac{1}{E_0}, \qquad \text{if } |x| \le \beta,$$

$$|\Omega(x+i\phi_0)| = \frac{1}{E_0}\left(\sqrt{\frac{\sinh^2 \dfrac{\pi x}{2\phi_0}}{\sinh^2 \dfrac{\pi\beta}{2\phi_0}} - 1} + \frac{\sinh \dfrac{\pi x}{2\phi_0}}{\sinh \dfrac{\pi\beta}{2\phi_0}}\right), \quad \text{if } |x| > \beta.$$

Taking integral (3.24), we come to the final expression for $s(t)$: if $|t| \le \beta$,

$$s(t) = \frac{t}{E_0}, \tag{3.25}$$

while if $|t| > \beta$,

$$s(t) = \frac{\beta}{E_0} + \frac{2\phi_0}{\pi}\sqrt{\frac{\epsilon}{1-\epsilon}}\left[\cosh\frac{\pi t}{2\phi_0}\left(1+\sqrt{1-\frac{\epsilon^{-1}-1}{\sinh^2\dfrac{\pi t}{2\phi_0}}}\right) - \frac{1+E_2(\theta(t),\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}}\right]. \tag{3.26}$$

Note values $|t| \le \beta$ and, therefore, $|s| < \beta/E_0$ correspond to points at the electrode bottom Γ; values $t < -\beta$ (i.e. $s < -\beta/E_0$) and $t > \beta$ (i.e. $s > \beta/E_0$) correspond to the left $(B'\,A')$ and right $(A\,B)$ electrode side facings. We remind that quantity $\epsilon < 1$, the solution of equation (3.22), is related to β by formula (3.23), parameter $\theta(t)$ has been introduced by equality (3.16). Besides, the second type elliptic integral $E_2(\theta,\sqrt{\epsilon})$, see Subsect. 3.3., can be expanded into a Taylor series in terms of powers of small parameter ϵ:

$$E_2(\theta,\sqrt{\epsilon}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/2)_n}{n!} I_n(\theta)\epsilon^n,$$

where factors $I_n(\theta)$ are subject to recurrence formula (3.18).

We remark also that expression (3.25) for arc coordinate s follows, in particular, the whole length of the electrode bottom Γ equals to $2\beta/E_0$.

Now we start finding curvature $K(s)$ and field magnitude $|E|$ at the electrode contour. The curvature of the electrode side facings is obviously equal to zero, i.e. $K(s) = 0$ for $|s| > \beta/E_0$. Curvature $\hat{K}(t)$ of an arc Γ set parametrically $\Gamma(t) = \Gamma_1(t) + i\Gamma_2(t)$ is expressed by the well-known formula

$$\hat{K}(t) = \frac{|\Gamma_1'(t)\Gamma_2''(t) - \Gamma_1''(t)\Gamma_2'(t)|}{|\Gamma'(t)|^3}.$$

Curvature of the same arc parametrized with the coordinate s will be found by the relation

$$K(s) = \hat{K} \circ t(s),$$

where, in our case, $t(s) = E_0 s$ for $|s| < \beta/E_0$. Using formula (3.14) for $\Gamma(t)$, we obtain

$$K(s) = \frac{\pi E_0}{2\phi_0} \cosh \frac{\pi E_0 s}{2\phi_0} \left(\sinh^2 \frac{\pi\beta}{2\phi_0} - \sinh^2 \frac{\pi E_0 s}{2\phi_0} \right)^{-1/2}, \quad |s| < \beta/E_0. \tag{3.27}$$

Here we observe the singular behavior of the bottom curvature at the points of the junction with side facings. Namely, it is not difficult to verify that when coordinate s approaches β/E_0 from the left (i.e. $w \to B$ as $w \in \Gamma$), the following asymptotic relation is valid

$$K(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi E_0}{\phi_0} \text{cotanh} \frac{\pi\beta}{2\phi_0} \right)^{1/2} \left(\frac{\beta}{E_0} - s \right)^{-1/2} + O\left(\frac{\beta}{E_0} - s \right)^{1/2}, \; s \to \beta/E_0 - 0;$$

and a similar relation takes place for $s \to -\beta/E_0 + 0$ (i.e. $w \to B'$ as $w \in \Gamma$).

To obtain an expression for field intensity magnitude $|\hat{E}(t)|$ along the electrode contour at a point corresponding to a certain value of parameter t, we observe first that this magnitude coincides with the modulus of mapping $\Omega(\zeta)$ when $\zeta = t + i\phi_0$, according to Subsect. 3.2. Using expression (3.13) for Ω, we find

$$|\hat{E}(t)| = E_0, \qquad \text{if } |t| \le \beta; \tag{3.28}$$

$$|\hat{E}(t)| = E_0 \left(\frac{\sinh \dfrac{\pi t}{2\phi_0}}{\sinh \dfrac{\pi\beta}{2\phi_0}} - \sqrt{\frac{\sinh^2 \dfrac{\pi t}{2\phi_0}}{\sinh^2 \dfrac{\pi\beta}{2\phi_0}} - 1} \right), \quad \text{if } |t| > \beta. \tag{3.29}$$

One can determine field magnitude at a point which lies in the electrode contour at distance s (measured along the contour) from point O'. For this purpose, parameter t in formula (3.29) should be substituted by arc coordinate s in accordance with relation (3.26).

Figures 5 and 6 give the graphs of the electrode curvature (3.27) and field magnitude (3.28), (3.29) at the electrode contour versus arc coordinate s.

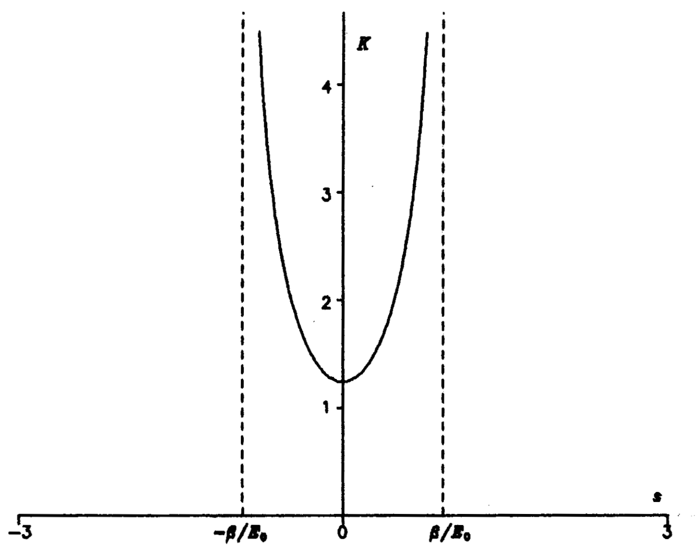

Fig. 5. Curvature K of optimum electrode contour versus arc coordinate s.

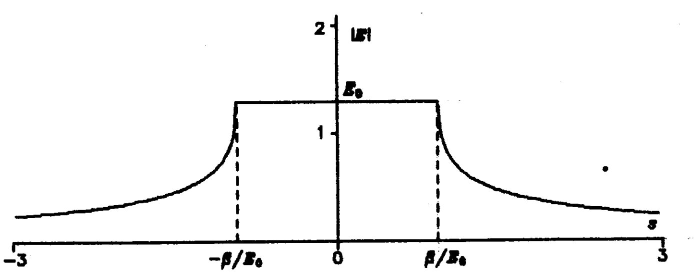

Fig. 6. Field magnitude $|E|$ at the contour versus arc coordinate s.

4. Main Field Characteristics

4.1. Analytical Representations. The multipole method enables also to obtain analytical representations for any derivative of the boundary value problem (1.1)-(1.5) solution $\Phi(w)$ as well as for the harmonic conjugate of this solution. Thus, function $\tilde{\Phi}(w)$, such that function $\Psi(w) = \tilde{\Phi}(w) + i\Phi(w)$ is holomorphic and $\tilde{\Phi}(0) = 0$ (this function is unique in view of simple connectivity of domain g [2, 3]), can be expressed similarly as (2.1):

$$\tilde{\Phi}(w) = \tilde{U_0}(w) + \tilde{U}(w),$$

here the formulae for $\tilde{U_0}$ and $\tilde{U}(w)$, analogous to (2.2) and (2.6), take place

$$\tilde{U_0}(w) = \frac{1}{\pi}\left(\phi_1 \ln|1 + F(w)| - \phi_2 \ln|1 - F(w)|\right),$$

and

$$\tilde{U}(w) = \lim_{K\to\infty} \sum_{p=1}^{K} a_p^K \tilde{\Omega}_p(w), \qquad \tilde{\Omega}_p(w) = \mathrm{Re}\,[F(w)]^p;$$

the last limit exists for every $w \in g$. Summing the functions $\tilde{\Phi}(w)$ and $i\Phi(w)$, we find expression for complex potential

$$\Psi(w) = \frac{1}{\pi}\left(\phi_1 \ln[1+F(w)] - \phi_2 \ln[1-F(w)]\right) + \lim_{K\to\infty} \sum_{p=1}^{K} a_p^K [F(w)]^p. \qquad (4.1)$$

Furthermore, the derivative of holomorphic function $\Psi(w)$ with respect to complex variable w can be readily obtained because the multipole method admits differentiation of any order. Differentiating (4.1), we get

$$\Psi'(w) = F'(w)\left(\frac{1}{\pi}\left[\frac{\phi_1}{1+F(w)} + \frac{\phi_2}{1-F(w)}\right] + \lim_{K\to\infty} \sum_{p=1}^{K} p\, a_p^K [F(w)]^{p-1}\right).$$

Modulus of the last function coincides with the field intensity magnitude $|E(w)| = |\Psi'(w)|$.

4.2. Specific Implementation. The specific implementation for the obtained solution was performed for various sets of domain g parameters (quantities a, b and forms of arc Γ) and various distributions $\phi(w)$ of boundary potential. For range of ratio a/b from 0.2 to 5, for sufficiently smooth arcs Γ and distributions $\phi(w)$ chosen in accordance with physical reasons, it was sufficient to use 20 multipoles Ω_p in order to reach global relative error for field intensity E less than 10^{-3} everywhere in closed domain $\bar{g}$.

Figures 7-9 demonstrate numerical results for Examples 1–3, respectively. For these three examples are presented:

a) equipotentials $\{w : \Phi(w) = \mathrm{const}\}$,

b) lines of force $\{w : \tilde{\Phi}(w) = \mathrm{const}\}$,

c) lines of equal intensity magnitude $\{w : |E(w)| = \mathrm{const}\}$.

Example 1. The solution of problem (1.1)-(1.5) with the following input parameters is considered: $a = 1$, $b = 0.9$; arc Γ is specified as a graph of dependence

$$v(u) = 0.9 - 0.2(1-u^2)^{1/2}.$$

Potential distribution at arc Γ was prescribed as function of u-coordinate

$$\phi(u) = 0.75(u+0.2)^2 + 0.62;$$

note the continuity condition for the potential along the electrode contour follows: $\phi_1 = 1.1$, $\phi_2 = 1.7$.

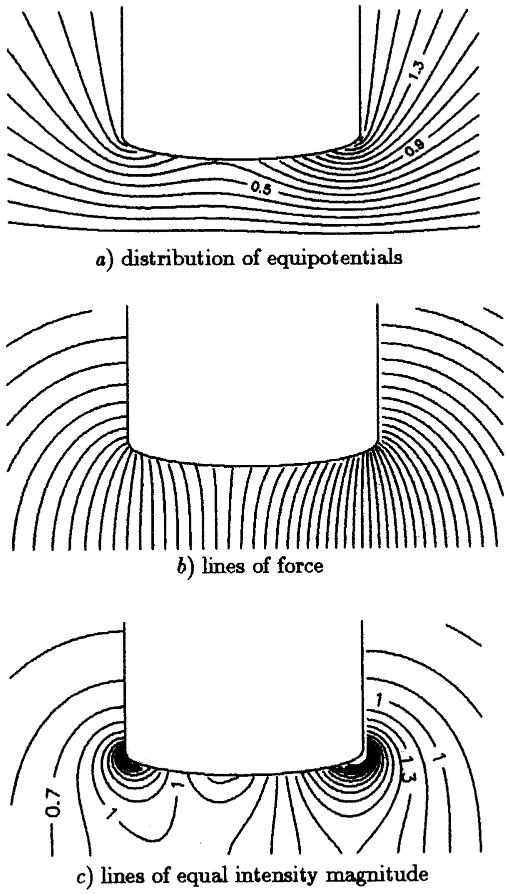

Fig. 7. Illustrations for Example 1.

Example 2. The solution of problem (1.1)-(1.5) with the following input parameters is under consideration: $a = 1$, $b = 1$; arc Γ is specified as a graph

$$v(u) = 1 - 0.4(1-u^2)^{1/4} + 0.15(1-u^2)\exp(-5u/6).$$

Potential distribution at arc Γ was prescribed as follows

$$\phi(u) = -0.175u^3 + 0.525u + 0.35 + 1.35\cos^4\frac{\pi}{2}u$$

and $\phi_1 = 0.8$, $\phi_2 = 1.5$.

Example 3. The solution of optimum problem (3.1)-(3.4) with parameters $a = 0.8$, $\phi_0 = 1$, $E_0 = 1.3$ is under consideration.

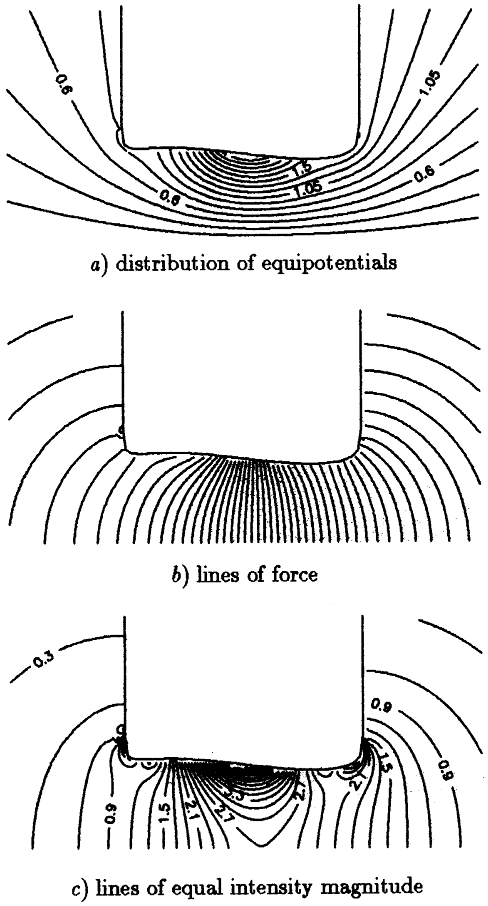

Fig. 8. Illustrations for Example 2.

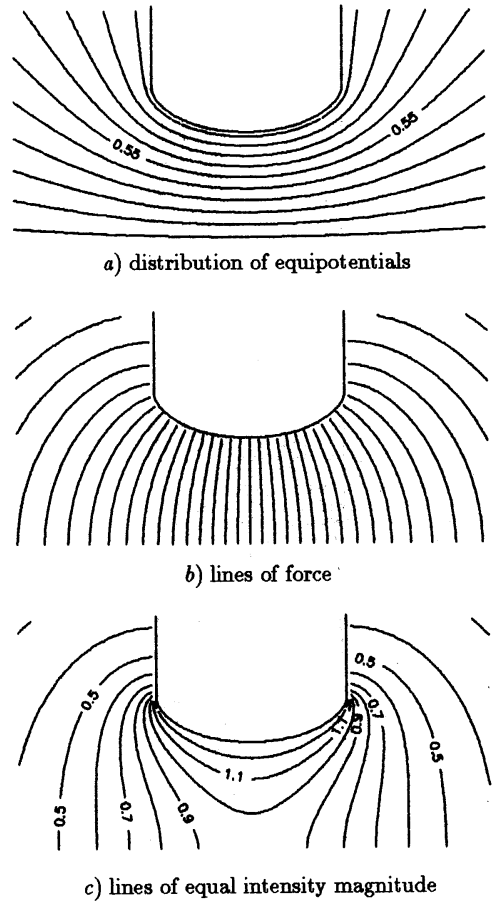

Fig. 9. Illustrations for Example 3.

References

1. Vlasov V.I. The Multipole Method // Technical report. / M.: Computing Centre of the Academy of Sciences of the USSR, 1976 (in Russian).
2. Vlasov V.I. On the method of solution of certain plane mixed problems for the Laplace equation // Dokl. Acad. Nauk SSSR. – 1978. – 237;5. – P.1012-1015.
3. Vlasov V.I. Boundary value problems in domains with curved boundary / M.: Computing Centre of the Academy of Sciences of the USSR, 1987 (in Russian).
4. Vlasov V.I., Volkov D.B. Solution of the Dirichlet problem for the Poisson equation in a domain bounded by a polygon with a rounded corner // Soviet Math. Dokl. – 1989. – 39;3. – P.606-609.
5. Vlasov V.I. Boundary value problems in domains with curvilinear boundary / Doctoral dissertation / M.: Computing Centre of the Academy of Sciences of the USSR, 1990 (in Russian).

6. Paltsev A.B., Vlasov V.I. A method of solving the Dirichlet problem for domains with a narrow slit // Russian Academy of Sciences. Doklady on Mathematics. – 1993. – 47;3 – P.404-409.
7. Vlasov V.I., Volkov D.B. The multipole method for Poisson's equation in regions with rounded corners // Comput. Maths. Math. Phys. – 1995. – 35;6. – P.687-707.
8. Vlasov V.I. Multipole method for solving some boundary value problems in complex-shaped domains // Zeitshr. Angew. Math. Mech. – 1996. –76. Suppl. 1. – P.279-282.
9. Vlasov V.I., Volkov D.B. Analytic-numerical method for solving the Poisson equation in domains with rounded corners // Zeitshr. Angew. Math. Mech. – 1996. – 76. Suppl. 1. – P.573-574.
10. Vlasov V.I., Volkov-Bogorodsky D.B. Block multipole method for boundary value problems in complex-shaped domains // Zeitshr. Angew. Math. Mech. – 1998. – 78. Suppl. 1. – P.1111-1112.
11. Vlasov V.I. and Skorokhodov S.L. Multipole method for the Dirichlet problem in doubly connected domains of complex geometry: a generaldescription of the method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2000. – 40;11. – P.1567-1581.
12. Vlasov V.I., Paltsev A.B. Asymptotics of the solution to the Dirichlet problem for Poisson's equation in domains with a narrow slit // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2003. – 43;12. – P.1718-1737.
13. Vlasov V.I., Paltsev A.B. An analytical-numerical method for conformal mappings of complex–shaped domains // Doklady Mathematics. – 2009. – 80;3. – P.790-792.
14. Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I. An inverse problem for the Grad-Shafranov equation with nonlocal condition // Belgorod State University Scientific bulletin. Mathematics and Physics. – 2011. – 23(118);25. – P.21-40 (in Russian).
15. Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I. On a certain problem of constructive theory of harmonic mappings // Contemporary Mathematics. Fundamental Issues. – 2012. – 46. – P.5-31 (in Russian.)
16. Svelto O. Principles of lasers / 3^{rd} ed. / New York: Plenum Press, 1989.
17. Berenstein C.A., Gay R. Complex variables. An introduction / New York: Springer–Verlag, 1991.
18. Henrici P. Applied and computational complex analysis. V.1 / New York: John Wiley & Sons, 1974.
19. Lusternik L.A., Sobolev S.L. Elements of function analysis / Moscow: Nauka, 1965 (in Russian).
20. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Numerical methods / Moscow: Nauka, 1987 (in Russian.)
21. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. Problems of hydrodynamics and their mathematical models / Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).
22. Birkhoff G., Sarantanello E. Jets, wakes and cavities / N.-Y.: Academic Press, 1957.
23. Gurevich M.I. The jet theory of ideal liquid / Moscow: Nauka, 1979.
24. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. Methods of the theory of functions of complex variable / Moscow: Nauka, 1973.
25. Lavrentiev M.A. Variational methods in boundary value problems for systems of elliptic type equations / Moscow: Academy of Sciences of USSR, 1962 (in Russian).
26. Janke E., Emde F. and Lösch F. Tafeln höhrer Funktionen. 6 Auflage / Stuttgart: B.G.Teubner, 1960.
27. Bateman H. and Erdèlyi A. Higher transcendental functions. V.1 / New York: MaGraw–Hill Book Co., 1953.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ЛАЗЕРЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МУЛЬТИПОЛЕЙ

А.Б. Пальцев

Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва, 119991, Россия, e-mail: vlasov@ccas.ru

Аннотация. Работа посвящена модификации метода мультиполей и его применению к исследованию электрического поля в лазере специальной конструкции. Найдена оптимальная форма электродов в этом приборе. Для основных характеристик поля найдены явные формулы. Полученные численные результаты подтверждают высокую эффективность и точность используемого метода.

Ключевые слова: краевые задачи, метод мультиполей, расчет электрического поля в лазере.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

MSC 35L55

О СПЕКТРЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ТИПА

О.В. Алексеева, В.В. Корниенко, Д.В. Корниенко

Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина,
ул. Коммунаров, 28, Елец, 399770, Россия, e-mail: o.v.alexeeva@gmail.com, wk1953@mail.ru

Аннотация. В случае замкнутого дифференциального оператора, порождённого задачей Дирихле для гиперболической системы первого типа (симметричной по терминологи, предложенной А.А. Дезиным в [1]), изучены спектральные свойства. Спектр являясь дискретным, располагается на вещественной прямой комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Ключевые слова: спектр, замкнутый дифференциальный оператор, гиперболические системы, тензорные произведения гильбертовых пространств, базис.

Работа посвящена описанию спектральных свойств дифференциального оператора, порождённого задачей Дирихле для гиперболической системы

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = \lambda u^1 + f^1\ , \quad \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} = \lambda u^2 + f^2\ , \qquad \lambda \in \mathbb{C}; \tag{1}$$

рассматриваемой в области $\Omega = (0,\pi)^2$ евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{t,x}$. вместе с граничными условиями Дирихле

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0\,, \qquad u = (u^1, u^2)\,. \tag{2}$$

Для гиперболических систем первого и второго порядков имеется ряд глубоких результатов, относящихся к описанию «правильных» граничных условий [1], [2] в областях специального вида. Описанию регулярных граничных задач для более общих систем уравнений при числе переменных более двух посвящены работы [3], [4], [5]. Исследованию свойств разрешимости систем уравнений второго порядка эллиптического типа посвящена работа [6]. Сильно и усиленно эллиптическим системам посвящены соответственно работы [7], [8].

Однако спектральные свойства этих граничных задач и граничных задач иного типа почти не изучены. Спектральные свойства гиперболической системы первого типа и первого порядка изучены в работе [9]. Спектральные свойства задачи Дирихле для эллиптических систем второго порядка изучены в работе [10].

Обозначим через $e_1 = (1\ 0)^{\text{т}}$, $e_2 = (0\ 1)^{\text{т}}$ ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{t,x}$ вектор-столбцов, а через $\mathcal{U}$— унитарное пространство элементов $u = u^1 e_1 + u^2 e_2;\ u^k \in \mathbb{C};\ k = 1,2;$ со скалярным произведением $(u, v;\ \mathcal{U}) = u^1\overline{v^1} + u^2\overline{v^2}$.

Пусть $\mathcal{H}^2_{t,x} = \mathcal{L}^2_2(V)$ — гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций $u : V \to \mathbb{C}^2$, $V = \overline{\Omega}$, с нормой $\left|u;\ \mathcal{H}^2_{t,x}\right|$, задаваемой формулой

$$\left|u; \mathcal{H}^2_{t,x}\right|^2 = \iint\limits_V |u(\tau,\xi);\ \mathcal{U}|^2\, d\tau\, d\xi\ .$$

Пусть также $\mathfrak{D}$ — линейное многообразие гладких комплекснозначных вектор-функций $u \in \mathbb{C}\left(\overline{\Omega}\right) \cap \mathbb{C}^{(2)}\left(\Omega\right)$, удовлетворяющих условиям (2).

Обозначая символом $\widetilde{L}$ линейный оператор $\widetilde{L} : \mathcal{H}^2_{t,x} \to \mathcal{H}^2_{t,x}$, областью определения которого является линейное многообразие $\mathfrak{D} \subset \mathcal{H}^2_{t,x}$, а множество значений определяется правой частью системы (1), получаем гиперболический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что (замкнутый) оператор $L : \mathcal{H}^2_{t,x} \to \mathcal{H}^2_{t,x}$ порождён задачей (1), (2). Изучим его спектр. Говоря о спектре замкнутого оператора, мы следуем терминологии, принятой в монографии [11, стр. 23]. Резольвентное множество, спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора L обозначим через ρL, σL, $P\sigma L$, $C\sigma L$ и $R\sigma L$ соответственно.

Теорема 1. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей (1), (2), состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой*

$$\lambda_{k,m,s} = -k^2 + (-1)^m s^2; \qquad k \in \mathbb{N}; \quad m = 1, 2; \quad s \in N\ . \tag{3}$$

Собственные вектор-функции оператора L, соответствующие его собственным значениям (3), представимы в виде

$$u_{k,m,s}(t,x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin(kt) \left(e_1 + (-1)^m e_2\right) \sin(sx)\ .$$

Последовательность $\{u_{m,k,s}(t,x) : m = 1, 2;\ k \in \mathbb{N};\ s \in \mathbb{N}\}$ собственных вектор-функции оператора L образует ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$.

□ Достаточно заметить, что последовательность $\{u_{k,m,s}(t) :\ k \in \mathbb{N}\ m = 1, 2\}$,

$$u_{k,m,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt) \left(e_1 + (-1)^m e_2\right),$$

является полной и ортонормированной в $\mathcal{H}^2_t = \mathcal{H}_t \oplus \mathcal{H}_t$, $\mathcal{H}_t = \mathcal{L}_2[0,\pi]$, и воспользоваться, доказанным в [9], представлением $\mathcal{H}^2_{t,x}$ в виде тензорного произведения гильбертовых пространств $\mathcal{H}^2_t$ и $\mathcal{H}_x$, то есть формулой $\mathcal{H}^2_{t,x} = \mathcal{H}^2_t \otimes \mathcal{H}_x$, где $\mathcal{H}_x = \mathcal{L}_2[0,\pi]$.

Литература

1. Дезин А.А. Граничные задачи для некоторых симметричных линейных систем первого порядка // Матем. сборник. – 1959. – 49(91);4. – С.459-484.
2. Дезин А.А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // Успехи матем. наук. – 1959. – 14;3(87). – С.21-73.
3. Романко В.К. Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений // Матем.заметки АН СССР. – 1985. – 37;5. – С.727-733.
4. Романко В.К. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Докл. АН СССР. – 1986. – 286;1. - С.47-50.
5. Романко В.К. О системах операторных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1987. – 23(9). – С.1574-1585.
6. Солдатов А.П. О задаче Дирихле для эллиптических систем второго порядка на плоскости / Молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения 2010» Казань, 1-6 октября 2010.
7. Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сборник. – 1951. – 29(71);4. – С.615-676.
8. Солдатов А.П. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. – 2003. –39(5). – С.674-686.
9. Корниенко Д.В. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42;1. – С.91-100.
10. Алексеева О.В. О спектре задачи Дирихле для двух эллиптических систем // Научные ведомости БелГУ. Математика Физика. – 2010. – №17(88);20. – С.5-9.
11. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 207 с.

ON THE SPECTRUM OF DIRICHLET PROBLEM FOR HYPERBOLIC SYSTEMS OF FIRST TYPE

O.V. Alekseeva, V.V. Kornienko, D.V. Kornienko

Elets State University,
Kommunarov St., 28, Elets, 399770, Russia, e-mail: o.v.alexeeva@gmail.com, wk1953@mail.ru

Abstract. It is studied some spectral properties of the closed differential operator generated by Dirichlet's problem connected with the hyperbolic system of first type (being symmetric on the terminology proposed A.A.Desin in [1]). The spectrum being discrete is settled on the real axe of complex plane $\mathbb{C}$.

Key words: spectrum, closed differential operator, hyperbolic systems, tensor products of Hilbert spaces, basis.

MSC 58C35

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В.А. Есин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, г.Белгород, 308007, Россия, e-mail: esin@bsu.edu.ru

Аннотация. Найдены критерии интегрируемости специального гиперраспределения Δ_{p-1} на подмногообразии V_p евклидова пространства E_{p+2}.

Ключевые слова: подмногообразие, внешнее дифференцирование, гиперраспределение, аффинная связность.

К подмногообразию $V_p \subset E_{p+2}$ присоединим подвижной репер

$$R=(x,e_i,e_\alpha),\quad (i,j,k=1,\dots,p;\ \alpha,\beta,\gamma=p+1,p+2)\,,$$

где орты e_i принадлежат касательному пространству $T_x(V_p)$ в точке $x\in V_p$, а векторы e_α образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_2(x)$. Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются уравнениями

$$dx=\omega^i e_i,\quad de_i=\omega_i^j e_j+\omega_i^\alpha e_\alpha,\quad de_\alpha=\omega_\alpha^i e_i+\omega_\alpha^\beta e_\beta.$$

Дифференцируя систему $\omega^\alpha=0$ уравнений подмногообразия внешним образом и применяя лемму Картана, получим

$$\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j\qquad (b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha).$$

Здесь b_{ij}^α — второй основной тензор подмногообразия, $\gamma_{ij}=e_ie_j$ — компоненты метрического тензора, γ^{ij} — контравариантные компоненты этого тензора. При этом

$$d\gamma_{ij}=\gamma_{ik}\omega_j^k+\gamma_{jk}\omega_i^k,\quad d\gamma^{ij}=-\gamma^{ik}\omega_k^j-\gamma^{jk}\omega_k^i\ .$$

Дифференцирование тождеств $e_ie_\alpha=0$ и $e_\alpha e_\beta=\delta_{\alpha\beta}$ приводит к соотношениям

$$\omega_\alpha^k+\gamma^{ki}\omega_i^\alpha=0,\quad \omega_\alpha^\beta+\omega_\beta^\alpha=0.$$

Рассмотрим на $V_p\subset E_{p+2}$ гиперраспределение Δ_{p-1}. В дальнейшем подвижной репер $R=(x,e_i,e_\alpha)$ выбираем таким образом, чтобы $e_a\in\Delta_{p-1}(x)$, а e_p ортогонально $\Delta_{p-1}(x)$ $a,b=1,\dots,p-1)$. В этом случае условием интегрируемости распределения Δ_{p-1} является интегрируемость уравнения $\omega^p=0$.

Поскольку

$$D\omega^p=\omega^a\Lambda\omega_a^b=\omega^a\Lambda\gamma_{ab}^p\omega^b=\gamma_{ab}^p\omega^a\Lambda\omega^b,$$

(здесь γ_{ab}^k — коэффициенты аффинной связности) то это условие равносильно симметричности тензора γ_{ab}^p.

Определим на $V_p \subset E_{p+2}$ поле линейного оператора $F(f^i_j)$, полагая

$$Ft = \nabla_t e_p = \nabla_{t^i e_i} e_p = t^i \nabla_{e_i} e_p = t^i \gamma^k_{pi} e_k = f^k_i t^i e_k.$$

Рассмотрим ограничение этого оператора на Δ_{p-1}, то есть оператор

$$f(f^a_b), \quad (f^a_b = \gamma^a_{pb}).$$

Дифференцируя тождества $e_a e_p = 0$, получаем

$$\gamma^p_{ac} + \gamma^b_{pc}\gamma_{ab} = 0,$$

то есть

$$\gamma^p_{ac} = -f^b_c \gamma_{ab}.$$

Из последних равенств заключаем, что справедлива следуюшая теорема.

Теорема 1. *Гиперраспределение Δ_{p-1} вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда оператор $f(f^a_b)$ симметричен.*

В работе [3] показано, что гиперраспределение Δ_{p-1} инвариантно связано со сферическим изображением $\breve{V}_p$ нашего подмногообразия. Поле двумерных нормалей к $\breve{V}_p$ индуцирует на V_p аффинную связность $\breve{\nabla}$. Там же показано, что эта связность $\breve{\nabla}$ будет эквиаффинной тогда и только тогда, когда гиперраспределение Δ_{p-1} будет вполне интегрируемым. Таким образом, справедлива следуюшая теорема.

Теорема 2. *Для подмногообразия $V_p \subset E_{p+2}$ следующие утверждения равносильны:*

1. *Гиперраспределение Δ_{p-1} вполне интегрируемо.*
2. *Связность $\breve{\nabla}$ эквиаффинна.*
3. *Оператор $f(f^a_b)$ симметричен.*

Литература

1. Базылев В.Т. Геометрия дифференцируемых многообразий / М.: Высшая школа, 1989. – 222 с.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, Т.1 / М.: Наука, 1981. – 344 с.
3. Есин В.А. К геометрии распределений на $V_p \subset E_{p+2}$ // Кишинев: Тезисы 9 Всесоюзной геометрической конференции, 1988. – С.112-113.

ON THE CLASS OF HYPERDISTRIBUTIONS

V.A. Esin
Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: esin@bsu.edu.ru

Abstract. It is found the integrability criterium of the special hyperdistribution Δ_{p-1} on the submanifold V_p in euclidian space E_{p+2}.

Key words: submanifold, exterior differentiation, hyperdistribution, affine connection.

MSC 70H05

О НИЛЬПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ОПЕРАЦИИ КОММУТИРОВАНИЯ МАТРИЦ

Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Доказывается, что любой оператор $\mathsf{K}_{\mathcal{A}}$ в линейном пространстве $n\times n$-матриц над $\mathbb{C}$, порожденный коммутатором с фиксированной матрицей $\mathcal{A}$ скалярного типа не имеет нильпотентных элементов.

Ключевые слова: нильпотентность, коммутатор, матрица, уравнение Ляпунова.

Пусть $\mathfrak{L}$ – линейное пространство и K – линейный оператор в нем. Элемент $x \in \mathfrak{L}$ называется нильпотентным порядка $l \in \mathbb{N}$ для оператора K, если $\mathsf{K}^l x = 0$, $\mathsf{K}^{l-1}x \neq 0$.

Зафиксируем число $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная $n \times n$-матрица. Оператор $\mathsf{K}_{\mathcal{A}}$ в линейном пространстве $\mathfrak{M}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ $n \times n$-матриц над $\mathbb{C}$, порождаемый этой матрицей посредством формулы $\mathsf{K}_{\mathcal{A}}\mathcal{X} = [\mathcal{A}, \mathcal{X}]$ назовем оператором коммутирования. $n \times n$-матрицу $\mathcal{A}$ назовем матрицей скалярного типа (см. [1]), если она посредством некоторого преобразования $\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1}$ на основе невырожденной матрицы $\mathcal{U}$, $\det \mathcal{U} \neq 0$ приводится к диагональной матрице. При этом такая матрица допускает разложение $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{P}_i$, где $\langle \alpha_i; i = 1 \div n\rangle$ – набор ее собственных чисел и $\langle \mathcal{P}_i; i = 1 \div n\rangle$ – соответствующий ему набор одномерных проекторов на собственные направления.

Лемма. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - $n \times n$-матрицы скалярного типа*

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{P}_i\,, \qquad \mathcal{B} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathcal{Q}_i$$

с наборами собственных чисел $\langle \alpha_i; i = 1 \div n\rangle$, $\langle \beta_j; j = 1 \div n\rangle$ и соответствующими им наборами $n \times n$-матриц одномерного проектирования $\langle \mathcal{P}_i; i = 1 \div n\rangle$, $\langle \mathcal{Q}_j; j = 1 \div n\rangle$ такими, что $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = \delta_{ij}\mathcal{P}_i$, $\mathcal{Q}_i\mathcal{Q}_j = \delta_{ij}\mathcal{Q}_j$, $i, j = 1 \div n$. Тогда для разрешимости относительно $n \times n$-матрицы $\mathcal{X}$ линейного матричного уравнения Ляпунова

$$\mathcal{A}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{B} = \mathcal{S} \tag{1}$$

при фиксированной $n \times n$-матрице $\mathcal{S}$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{Q}_j = 0$ для любой пары $\langle i, j\rangle$, для которой имеет место $\alpha_i = \beta_j$. При этом все решения уравнения (1) выражаются формулой

$$\mathcal{X} = \sum_{\langle i,j\rangle\,:\,\alpha_i \neq \beta_j} \frac{\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{Q}_j}{\alpha_i - \beta_j} + \sum_{\langle i,j\rangle\,:\,\alpha_i = \beta_j} \gamma_{ij}\mathcal{P}_i\mathcal{Q}_j\,, \tag{2}$$

где γ_{ij} – произвольные числа.

В частности, для единственности решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_i \neq \beta_j$ для всех пар $\langle i, j\rangle$, $i, j = 1 \div n$.

□ Умножая уравнение (1) слева на $\mathcal{P}_i$ и справа на $\mathcal{Q}_j$ при произвольных значениях $i, j = 1 \div n$, имеем

$$(\alpha_i - \beta_j)\mathcal{P}_i \mathcal{X} \mathcal{Q}_j = \mathcal{P}_i \mathcal{S} \mathcal{Q}_j\,, \tag{3}$$

так как $\mathcal{P}_i\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{P}_i = \alpha_i\mathcal{P}_i$, $\mathcal{Q}_j\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{Q}_j = \beta_j\mathcal{Q}_j$. Откуда следует утверждаемое в лемме необходимое условие для разрешимости уравнения (1). Для тех же пар $\langle i, j\rangle$, для которых выполняется $\alpha_i \neq \beta_j$, имеет место равенство

$$\mathcal{P}_i \mathcal{X} \mathcal{Q}_j = \frac{\mathcal{P}_i \mathcal{S} \mathcal{Q}_j}{\alpha_i - \beta_j}\,. \tag{4}$$

Положим

$$\mathcal{P}_i \mathcal{X} \mathcal{Q}_j = \gamma_{ij}\mathcal{P}_i \mathcal{Q}_j \tag{5}$$

с произвольными числами γ_{ij} для тех пар $\langle i, j\rangle$, для которых $\alpha_i = \beta_j$, что допускается равенством (3). Пользуясь тем, что $\sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i = \sum_{j=1}^n \mathcal{Q}_j = \mathbf{1}$, определим с помощью (3) сумму

$$\mathcal{X} = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{P}_i \mathcal{X} \mathcal{Q}_j\,,$$

которая совпадает с (2). ■

Следствие. *Пусть матрица $\mathcal{A}$ имеет скалярный тип $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mathcal{P}_i$ с набором собственных чисел $\langle \alpha_i; i = 1 \div n\rangle$ и соответствующим ему набором $n\times n$-матриц одномерного проектирования $\langle \mathcal{P}_i; i = 1 \div n\rangle$. Для того, чтобы линейное матричное уравнение*

$$\mathcal{A}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{A} = \mathcal{S} \tag{6}$$

относительно $n \times n$-матрицы $\mathcal{X}$ имело решение при фиксированной $n \times n$-матрице $\mathcal{S}$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{P}_j = 0$ для всех пар $\langle i, j\rangle$ среди всевозможных значений $i, j = 1 \div n$, для которых выполняется $\alpha_i = \alpha_j$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть матрица $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}_n$ имеет скалярный тип. Тогда, если для соответствующего ей оператора $\mathsf{K}_\mathcal{A}$ выполняется $\mathsf{K}^l_\mathcal{A}\mathcal{X} = 0$, $l > 1$, $l \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{X} \in \operatorname{Ker}\mathsf{K}_\mathcal{A}$, то есть этот оператор не имеет нильпотентных элементов.*

□ Пусть матрица $\mathcal{S} \in \mathfrak{M}_n$ такова, что $[\mathcal{S}, \mathcal{A}] = 0$. Заменим матрицу $\mathcal{S}$ в этом коммутаторе ее разложением по набору одномерных операторов, порождаемых полным набором одномерных проекторов $\langle \mathcal{P}_k; k = 1 \div n\rangle$,

$$\mathcal{S} = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{P}_i \mathcal{S} \mathcal{P}_j\,.$$

В результате, получаем

$$[\mathcal{A},\mathcal{S}] = \sum_{i,j=1}^{n}[\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\mathcal{P}_k,\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{P}_j] = \sum_{i,j=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_j)\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{P}_j\,.$$

Откуда, для тех пар $\langle i,j\rangle$, для которых $\alpha_i \ne \alpha_j$ должно выполняться $\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{P}_j = 0\,.$

Положим теперь $\mathcal{S} = \mathsf{K}_{\mathcal{A}}\mathcal{X}$. Тогда, для матрицы $\mathcal{X}$ выполняется $\mathsf{K}^2_{\mathcal{A}}\mathcal{X} = 0$ и, на основании доказанного, из этого равенства следует, что $\mathcal{P}_i\,(\mathcal{S})\,\mathcal{P}_j = 0$ для всех пар $\langle i,j\rangle$, для которых $\alpha_i \ne \alpha_j$. С другой стороны, это означает, что существует решение $\mathcal{X}$ уравнения (6), что возможно только, если имеет место $\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{P}_j = 0$ для всех пар $\langle i,j\rangle$, для которых $\alpha_i = \alpha_j$. Объединяя оба указанных свойства матрицы $\mathcal{S}$, получаем, что она равна

$$\mathcal{S} = \sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{P}_j = 0\,,$$

то есть $\mathsf{K}_{\mathcal{A}}\mathcal{X} = 0$. ■

Литература

1. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ / М.: Наука, 1969.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / М.: Наука, 1966.

ON NILPOTENT ELEMENTS OF MATRIX COMMUTATION OPERATION

Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. It is proved that any operator K_H in the linear space of $N \times N$-matrices over $\mathbb{C}$ generated by the commutator with the fixed matrix $\mathcal{H}$ having the scalar type does not have nilpotent elements.

Key words: nilpotentness, commutator, matrix, Lyapunov's equation.

MSC 8035M

К ВОПРОСУ О ТЕПЛООБМЕНЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДЕ

Н.В. Малай, С.И. Цыбульников

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: e-mail: malay@bsu.edu.ru

Аннотация. Получено приближенное решение задачи о теплообмене движущейся твердой нагретой сферической частицы со средой при малых числах Пекле и Рейнольдса. Рассмотрен случай, когда внутри частицы действуют неравномерно распределенные источники тепла произвольной природы. Задача решается методом сращиваемых асимптотических разложений по числу Рейнольдса. При рассмотрении теплообмена предполагалось, что средняя температура поверхности частицы может существенно отличается от температуры окружающей ее газообразной среды. При решении уравнения конвективного теплопереноса учитывался степенной вид зависимости коэффициентов теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры.

Ключевые слова: поле температуры, метод сращиваемых асимптотических разложений.

Введение. Исследование многочисленных энергетических процессов связано с решением задач переноса теплоты и вещества. Перенос этих субстанций в твердых телах, жидкостях и газах подчиняется условно принятым линейным зависимостям, например, перенос теплоты – закону Фурье: плотность теплового потока (удельный тепловой поток) пропорционален температурному градиенту; молекулярный перенос вещества – закону диффузии Фика: плотность потока вещества пропорциональна градиенту концентраций (или разности диффузионных химических потенциалов). На основании этих линеаризованных законов выводятся соответствующие дифференциальные уравнения.

В дальнейшем, мы будем рассматривать случай однородной среды без диффузии и химических реакций, протекающих с конечной скоростью. Если скорость движения сплошной среды мала по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемым ими изменением плотности (и других термодинамических величин) можно пренебречь. Общие уравнения закона сохранения энергии вне и внутри частицы упрощаются и принимают следующий вид [1]:

$$\rho_e c_{pe} \left(\mathbf{U_e} \nabla\right) T_e = \operatorname{div}\left(\lambda_e \nabla T_e\right), \quad \operatorname{div}\left(\lambda_i \nabla T_i\right) = -q_i \tag{1}$$

с краевыми условиями в сферической системе координат r, θ, φ

$$r = R, \;\; T_e = T_i, \;\; \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \sigma_o \sigma_1 \left(T_i^4 - T_{e\infty}^4\right), \tag{2}$$

$$r \to \infty, \quad T_e = T_{e\infty}, \tag{3}$$

$$r \to 0, \quad T_i \neq \infty, \tag{4}$$

где R – радиус частицы, σ_o – постоянная Стефана-Больцмана; σ_1 – интегральная степень черноты; ρ_e, $\mathbf{U_e}$ и c_{pe} – плотность, массовая скорость и удельная теплоемкость жидкости; q_i – плотность тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы, за счет которых происходит нагрев ее поверхности. В уравнение (1) входит массовая скорость газообразной среды $\mathbf{U_e}$. Для определения этой величины использовались результаты работы [2].

В литературе первое уравнение в выражении (2) называется конвективным уравнением переноса тепла. Оно описывает переноса тепла в газообразной среде за счет движения самой среды левая часть этого уравнения и за счет теплопроводности - правая часть. Наличие левой части делает это уравнение существенно нелинейным, что приводит к большим математическим трудностям при нахождении его решений.

Значимость процесса теплообмена, как в природе, так и в технике определяется, прежде всего, тем, что свойства тел самым существенным образом зависят от их теплового состояния, которое в свою очередь само определяется условиями теплообмена [3]. Эти условия оказывают существенное влияние на процессы изменения состояния вещества, механические, магнитные и другие свойства тел. Кроме того при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение нагретых частиц; при разработке методов тонкой очистки газов от аэрозольных частиц; при математическом моделировании процесса осаждения частиц в разнотемпературных плоскопараллельных каналах и т.п. необходимо знать поле температуры в их окрестности.

Таким образом, многие задачи по тепло-и массопереносу с которыми сталкиваются сегодня физики, инженеры и специалисты по прикладной математике, не поддаются точному решению. Среди причин, затрудняющих точное решение, можно указать, например, нелинейные уравнения движения. Переменные коэффициенты и нелинейные граничные условия на известных или неизвестных границах сложной формы. Для решения подобных задач мы вынуждены пользоваться различного рода приближениями, комбинируя аналитические и численные методы. Среди аналитических методов весьма мощными являются методы возмущений (асимптотических разложений) по большим или малым значениям параметра или координаты [4].

1. Постановка задачи. Метод решения. Рассматривается установившейся процесс теплообмена в потоке вязкой неизотермической газообразной среде, обтекающей твердую сферическую частицу радиусом R. На большом расстоянии от сферы скорость потока равна $\mathbf{U}_\infty$. При описании свойств газообразной среды и частицы рассматривается степенной вид зависимости динамической вязкости и теплопроводности от температуры [5], таким образом

$$\mu_e = \mu_{e\infty} t_e^\beta, \quad \lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha, \quad \rho_e = \rho_{e\infty} t_e, \quad \lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^\omega,$$
$$\mu_{e\infty} = \mu_e\left(T_{e\infty}\right), \quad \rho_{e\infty} = \rho_e\left(T_{e\infty}\right), \quad \lambda_{e\infty} = \lambda_e\left(T_{e\infty}\right), \quad \lambda_{i\infty} = \lambda_i\left(T_{e\infty}\right),$$
$$t_k = T_k/T_{e\infty}, \quad k = e,\ i, \quad 0,5 \le \alpha,\ \beta \le 1, \quad -1 \le \omega \le 1.$$

Здесь и далее индекс e указывает на газообразную среду, индекс i — на принадлежность частице, а индекс ∞ означает параметры газообразной среды на бесконечности, т.е. вдали от частицы.

Определяющими параметрами задачи являются коэффициенты $\rho_{e\infty}$, $\mu_{e\infty}$, $\lambda_{e\infty}$ и сохраняющиеся в процессе движения частицы величины – R, U_∞ и $T_{e\infty}$. Из этих параметров составить следующие безразмерные комбинации: число Рейнольдса $\mathrm{Re}_\infty = (\rho_{e\infty} U_\infty R)/\mu_{e\infty}$, число Пекле $\mathrm{Pe}_\infty = \mathrm{Re}_\infty \cdot \mathrm{Pr}_\infty$, где $\mathrm{Pr}_\infty = (c_{pe}\mu_{e\infty}/\lambda_{e\infty}$ — число Прандтля, U_∞ — величина характерной скорости. Обезразмерим уравнения и граничные условия: $\mathbf{V_e} = \mathbf{U_e}/U_\infty$, $y_m x_m/R$.

При $\varepsilon = \mathrm{Re}_\infty \ll 1$ решение уравнений гидродинамики находятся в виде ряда по ε [2]. Перейдем теперь к решению уравнений теплопроводности. Если перейти к безразмерным величинам, то конвективное уравнение теплопроводности принимает вид

$$\varepsilon \frac{\mathrm{Pr}_\infty}{t_e}\left(V_r \frac{\partial t_e}{\partial y} + \frac{V_\theta}{y}\frac{\partial t_e}{\partial \theta}\right) = \mathrm{div}\left(t_e^\alpha \nabla t_e\right). \tag{5}$$

Конвективное уравнение переноса теплоты является нелинейным и для его решения применим метод сращиваемых асимптотических разложений [4]. В работе будем рассматриваться задача с возмущениями, действующими в очень узких областях, или зонах, в которых зависимые переменные испытывают достаточно резкие изменения. Ввиду наличия малого параметра при старшей производной эти узкие зоны часто оказываются лежащими вблизи границы области, в которой решается задача. Поэтому в задачах механики жидкостей и газов такие зоны получили название пограничными слоями, в механике твердого тела – областями краевого эффекта, в электрических приложениях – поверхностными, или скин-слоями.

Следовательно, во многих физических задачах, где резкие изменения зависимых переменных часто происходят внутри интересующих нас областей эти узкие зоны называются — ударными слоями (скачками уплотнения), точками перехода или стоксовскими линиями или поверхностями. Указанные быстрые изменения мы не можем исследовать с помощью обычных медленных масштабов; это приводит к необходимости вводить новые – быстрые, увеличенные или растянутые переменные [4]. Таким образом, исследование обыкновенных дифференциальных уравнений показали, что получить равномерно пригодные разложения в случаях, когда в некоторых областях изменения независимых переменных, где зависимые переменные испытывают резкие изменения обычными методами невозможно.

Один из методов, связанных с этой проблемой, заключается в построении прямых разложений (называемых внешними разложениями) с использованием исходных переменных и в построении разложений (называемых внутренними разложениями), описывающих эти резкие изменения и использующих увеличенные масштабы. Внешние разложения становятся непригодными в областях резких изменений, в то время как пригодность внутренних разложений нарушается при выходе из этих областей. Чтобы связать эти разложения, используют так называемую процедуру сращивания [4].

Внутренние и внешние асимптотические разложения обезразмеренной температуры представим как

$$t_e(y,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{en}(y,\theta), \quad (f_0(\varepsilon) = 1), \tag{6}$$

$$t_e^*(\xi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(\varepsilon) t_{en}^*(\xi,\theta), \tag{7}$$

где $\xi = \varepsilon y$ - «сжатая» радиальная координата [4].

При этом требуется, чтобы $f_{n+1}/f_n \to 0$, $f_{n+1}^*/f_n^* \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Недостающие граничные условия для внутреннего и внешнего разложений вытекают из условия тождественности продолжения асимптотических разложений того и другого в некоторую промежуточную область, т.е.

$$t_e(y \to \infty, \theta) = t_e^*(\xi \to 0, \theta)\,. \tag{8}$$

Асимптотическое разложение решения внутри частицы, как показывают граничные условия на поверхности частицы, следует искать в аналогичном виде

$$t_i(y,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{in}(y,\theta). \tag{9}$$

Относительно функций $f_n^*(\varepsilon)$ и $f_n(\varepsilon)$ предполагается, что их порядок малости по ε увеличивается с ростом n.

С учетом сжатой радиальной координаты имеем следующее уравнение для температуры t_e^*

$$\frac{Pr_\infty}{t_e^*}\left(V_r^*\frac{\partial t_e^*}{\partial \xi} + \frac{V_\theta^*}{\xi}\frac{\partial t_e^*}{\partial \theta}\right) = \mathrm{div}\left(t_e^{*\alpha}\nabla t_e^*\right), \quad t_e^* \to 1 \text{ при } \xi \to \infty\,, \tag{10}$$

$$\mathbf{V_e^*}(\xi,\theta) = \mathbf{n_z} + \varepsilon \mathbf{V_e^{(1)*}}(\xi,\theta) + \ldots, \quad P_e^*(\xi,\theta) \to P_\infty \quad \xi \to \infty\,. \tag{11}$$

Здесь $t_e^* = t_e^*(\xi,\theta)$, $\mathbf{n_z}$ – единичный вектор в направлении оси z.

2. Поля температур в окрестности нагретой аэрозольной частицы. При нахождении распределений температур в окрестности аэрозольной частицы мы ограничимся поправками первого порядка малости по ε. Они определяются последовательно с учетом условия сращивания. Ввиду громоздкости полученных формул мы приведем нулевые и первые члены разложения в случае малых относительных перепадов температуры

$$t_e^*(\xi,\theta) = t_{e0}^* + \varepsilon t_{e1}^*, \quad t_e(y,\theta) = t_{e0} + \varepsilon t_{e1}, \quad t_i(y,\theta) = t_{i0} + \varepsilon t_{i1}, \quad t_{e0}(y) = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}\,,$$

$$t_{e0}^* = 1, \quad t_{i0}(y) = B_0 + \frac{1}{4\,\pi\, R^2 T_{e\infty}\lambda_{e\infty} y^2}\int_V q_i\, dV + \int_1^y \frac{\psi_0}{y}\, dy - \frac{1}{y^2}\int_1^y \psi_0\, dy\,,$$

$$t_{e1}^*(\xi,\theta) = \frac{\Gamma_0}{\xi}\exp\left\{\frac{1}{2}\mathrm{Pr}_\infty \xi\big(x-1\big)\right\}, \quad t_{e1}(y,\theta) = \frac{\omega}{2y}\big(1-y\big) + \cos\left[\frac{\Gamma_0}{y^2} + \omega\Big(\frac{1}{2} - \frac{A_1}{4y^3} + \frac{A_2}{2y}\Big)\right],$$

$$t_{i1}(y,\theta) = \cos\left\{B_1 y + \frac{1}{4\,\pi R^2 T_{e\infty}\lambda_{e\infty} y^2}\int_V q_i\, z\, dV + \frac{1}{3}\left[y\int_1^y \frac{\psi_1}{y^2}\, dy - \frac{1}{y^2}\int_1^y \psi_1 y\, dy\right]\right\},$$

$$\psi_n(y) = -\frac{R^2 y^2}{\lambda_{i\infty} T_{e\infty}} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} q_i \, P_n(\cos\theta) \, d(\cos\theta) \ \ (n \geq 0), \ \ x = \cos\theta, \ \ \omega = \mathrm{Pr}_\infty \Gamma_0 \, .$$

Постоянные интегрирования, входящие в выражения для полей температур определяются из граничных условий на поверхности частицы. Что же касается постоянных A_1, A_2 — они определяются из граничных условий для массовой скорости [2].

Заключение. Получены выражения для распределения температур вне и внутри аэрозольной частицы с учетом влияния движения среды (т.е. учтено влияние конвективного члена в уравнении теплопроводности) при произвольных относительных перепадах температуры в окрестности частицы. Поскольку частица нагрета, то при решении уравнений газовой динамики использовался степенной вид зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. При нахождении полей температур вне и внутри аэрозольной частицы в случае значительных перепадов температуры предполагалось, что коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа, т.е. $\lambda_i \gg \lambda_e$. При выполнении этого условия в коэффициенте динамической вязкости $\mu_e(r,\theta)$ можно пренебречь зависимостью по углу θ в системе частица-газ и, считать, что $\mu_e(t_e) \approx \mu_e(t_{e0})$ (предполагалась слабая угловая асимметрия распределения температуры). Это позволило рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется через граничные условия.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред / М.: ГИТ-ТЛ, 1954. – 795 с.
2. Малай Н.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С. К вопросу о гравитационном движении равномерно нагретой частицы в газообразной среде // ПМТФ. – 2008. – 49;1. – С.74-80.
3. Брюханов О.Н., Шевченко С.Н. Тепломассообмен / М.: Ассоциация строительных вузов, 2005. – 460 с.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М.: Мир, 1967. – 310 с.
5. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета / М.: Химия, 1966. – 536 с.

ON HEAT EXCHANGE BETWEEN SPHERICAL PARTICLE IN GASEOUS MEDIUM

N.V. Malay, S.I. Tsybulnikov

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: e-mail: malay@bsu.edu.ru

Abstract. Approximated solution of the heat exchange between moving hard spherical particle at small Pecle's and Reynolds' numbers is obtained. The case when inhomogeneous distributed heat sources acted into particle is under consideration. The problem are solved by the method of joined asymptotic expansions on Reynolds' number powers when averaged temperature on the particle surface may be essentially differed from the temperature of surround gaseous medium.

Key words: temperature distribution, method of joined asymptotic expansions.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика» выходит четыре раза в год. В журнале печатаются статьи по всем направлениям чистой и прикладной математики (за исключением текстов, имеющих чисто компьютерное содержание и вычислительной эмпирики).

Редколлегия журнала принимает от авторов рукописи статей, написанные на русском или на английском языках. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора(ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором(ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности и с таким расчетом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором(ами) направлению исследований, но более широкому кругу математиков. Ни в коем случае рукопись не должна представлять собой краткий отчет о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи. В связи с этим, рукопись должна быть структурирована — разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае, рукопись должна содержать введение и заключение. Разделы должны быть пронумерованы и иметь заголовки.

Во введении должны быть описаны: проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объёме физико-математического знания, представлены краткая история вопроса и полученный автором(ами) результат. В заключении работы должна быть дана характеристика полученного результата с указанием его значения для дальнейшего развития темы исследования.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются и для обзорной статьи, с той лишь разницей, что их содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Возможна также публикация статьи, носящей методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается редколлегией отдельно.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в чисто математических текстах должны быть четко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объём рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата А4. Она должна быть написана шрифтом 12pt через два интервала. Объём обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлегией журнала.

После подготовки одним из членов редколлегии заключения о соответствии рукописи нормам журнала «Научные ведомости» она рассматривается на общем собрании редколлегии. В отдельных случаях редколлегией может быть принято решение о более тщательном изучении рукописи внешним (не входящем в состав редколлегии журнала) рецензентом. Редколлегия оставляет за собой право на мелкие стилистические исправления текста рукописи после принятия решения о её публикации.

В редакцию присылается следующая информация:

1) основная содержательная часть статьи, представляемая на русском или английском языках. При этом название статьи должно состоять не более чем из 20 слов.

2) индекс MSC (см. Mathematical Subject Classification) того научного направления, которому посвящена статья;

3) список авторов с указанием порядка их размещения при публикации статьи;

4) аннотация на русском языке; её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;

5) список ключевых слов (не более 10-12);

6) текст перевода заголовка статьи, аннотации и ключевых слов на английском языке;

7) список литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;

8) данные об авторах статьи с указанием места их работы, точного почтового адреса предприятия. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить также на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;

9) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи.

Порядок оформления этой информации в электронном файле указан в приложении в конце настоящих правил (см. п.5) требований к электронному набору).

В редакцию присылается электронный файл работы. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). **Файлы, приготовленные в другом редакторе, рассматриваться редколлегией не будут**. При этом нужно присылать файл работы с расширением «tex» и pdf-копию файла с расширением «dvi» работы, для того, чтобы редакция имела возможность сравнения его с авторским оригиналом при редактировании и верстке журнала. Присылать сам dvi-файл при этом не нужно.

Особые требования к электронному набору в редакторе LaTeX (и тому подобным редакторам) следующие.

1) Нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды.

2) «Выключные» формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерации соответствующих номеров формул в тексте. Допускается применение для меток формул цифр, снабженных штрихами (или цифр совместно с буквами латинского алфавита). Однако этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста.

3) В случае, если в статье имеются разделы в виде *приложений* в конце основного текста работы, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть независимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложения. Каждый из разделов-приложений начинается словом ПРИЛОЖЕНИЕ с порядковым номером этого приложения. Это слово должно быть выровнено по правому полю страницы. Затем следует заголовок этого приложения.

4) Литературные источники в ссылках на основе команд cite (или непосредственно) в электронном тексте рукописи нужно обозначать цифрами, соответствующими их порядковому номеру появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.

5) Ниже прилагается шаблон, согласно которому должен оформляться файл статьи. Для авторов **следование этому шаблону обязательно**.

Шаблон для приготовления файла с рукописью

```
\setcounter{figure}{0}
\setcounter{equation}{0}
MSC XXX (по индекс научного направления Mathematical Subject Classification)
\vskip 0.3cm

\begin{center}
{\bf НАЗВАНИЕ СТАТЬИ}
\medskip
{\bf И.О. Автор1, И.О. Автор2, ... }
\medskip
{\small {\sf  Учреждение,\\
ул. Название улицы (пр. Название проспекта, пл. Название площади и т.д.),
Номер дома, Город, Индекс, Страна, e-mail: \underline{имя@адрес}}}
\end{center}

{\small {\bf Аннотация.} Текст аннотации.
\medskip
{\bf Ключевые слова:} слово1, слово2, ...\ .}
\vskip 1 cm

Текст статьи
\vskip 1 cm

\renewcommand\baselinestretch{0.6}

{\small
\centerline{{\bf Литература}}

\def\sk{\vskip - 0.25cm}

\begin{enumerate}
\bibitem{1}     Источник 1
\bibitem{2} \sk Источник 2
...
\end{enumerate}
\vskip 0.5cm

\begin{center}
{\bf TITLE 1st line \\
\vskip 0.1cm

2d   line \\
\vskip 0.1cm and so on }\medskip
```

```
{\bf  N.N. Author1, N.N. Author2, ...}
\medskip
{\small  {\sf Enterprize,\\
Street St. (Avenue Av., Square Sq. and so on), Number, City, Index, Country,
e-mail: \underline{name@address}}}
\end{center}

{\small {\bf Abstract.} Text of abstract. {\bf Key words:} word1, word2, ...\ .}}
\newpage

\renewcommand\baselinestretch{1.0}
```

Рисунки

Особое внимание при подготовке рукописи к печати должно быть уделено рисункам, если они имеются в тексте работы. Они должны быть качественно выполнены и представлены в редакцию в электронной форме в виде отдельных файлов в формате «ps». Файлы рисунков необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам.

На представляемых в электронном формате рисунках **не следует** наносить те комментирующие их подписи, которые присылаются в редколлегию отдельным списком.

Внимание! В случае присылки в редакцию работы с некачественно выполненными рисунками, она **будет возвращена автору(ам) на доработку**.

Таблицы

Если в тексте работы есть таблицы, то их следует формировать на основе программы LaTeX и ни в коем случае не оформлять в виде рисунков.

Список литературных источников

Обращаем внимание авторов на требование к качественному оформлению списка используемых в работе литературных источников. В связи с тем, что требования, предъявляемые ГОСТом, при оформлении такого списка весьма сложны и ориентированы на решение задач, связанных с централизованным поиском и хранением научной информации, которые не специфичны для научно-исследовательской практики, в журнале используется собственная система его оформления. Типы литературных источников качественно довольно разнообразны. Поэтому редакция не предлагает универсальный рецепт их оформления. Единственным общим принципом, которым должен руководствоваться автор, состоит в том, литературная ссылка должна оформляться так, чтобы читатель имел максимально точную информацию о том, как найти и ознакомиться с научным результатом, на который опирается его работа.

Несмотря на отсутствие общего рецепта оформления списка, редакция требует соблюдение строгих правил оформления ссылок на литературные источники двух типов, которые являются наиболее распространенными. Это касается статей в регулярных периодических изданиях (в журналах) и книг (монографий и учебников). Принятые в журнале правила оформления литературных источников указанных двух типов демонстрируются следующими примерами:

Журнальные статьи –

```
\item  Цегельник В.В. Гамильтонианы, ассоциированные с третьим и пятым уравнениями

Пенлеве~// Теоретическая и математическая физика.~-- 2010.~-- 162;1.~-- С.69-74.

\item Demidov A.S., Kochurov A.S., Popov A.Yu. To the problem of the recovery of

non-linearities in equations of mathematical physics~// Journal of Mathematical

Sciences.~-- 2009.~-- 163;1.~-- P.46-77.
```

Книги (в частности, многотомные издания) –

```
Рытов~С.М., Кляцкин Ю.А., Татарский~В.И. Введение  в статистическую радиофизику~/

Случайные поля, т.2~/ М.: Наука, 1978.~-- 464~с.
```

(если издание однотомное, то позиция между двумя слэш-черточками становится ненужной и, поэтому исчезает).

Обращаем внимание на то, что:

1) должны быть указаны полные названия журнальных статей, а также указаны не только начальные страницы этих статей, но обязательно также и конечные;

2) при указании журнальных статей после года издания стоит номер (обязательно арабскими цифрами) тома журнала (если он имеется) и через точку с запятой стоит дополнительная информация (номер внутри тома, в частности, номер выпуска и т.д.); при этом номер тома может иметь сложное начертание и не выражаться только одним числом;

3) название журнала нужно давать полностью без сокращений;

4) каждая из книг в списке цитируемой литературы обязательно должна быть дана с указанием полного числа страниц.

При несоблюдении описанных правил оформления литературных источников **работа будет возвращена автору(ам) на доработку**.