На правах рукописи

Бурцев Максим Владимирович

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Белгород - 2008

Работа выполнена на кафедре математического анализа и дифференциальных уравнений физико-математического факультета Орловского государственного университета.

Научный руководитель -	доктор физико-математических наук, профессор *Зарубин Александр Николаевич*
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор *Репин Олег Александрович* кандидат физико-математических наук, доцент *Жура Николай Андреевич*
Ведущая организация:	Московский государственный университет

Защита состоится 11 ноября 2008 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.015.08 при Белгородском государственном университете по адресу: 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14, аудитория 407.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Белгородского государственного университета.

Автореферат разослан "__"_________ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к. ф.-м. н., доцент Прядиев В.Л.

Актуальность темы. Теория уравнений смешанного типа берет начало от фундаментальных исследований Ф. Трикоми, С. Геллерстедта и Ф. И. Франкля. Именно в это время были впервые поставлены и изучены краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. Дальнейшее развитие теории уравнений смешанного типа связано с именами К.И. Бабенко, А.В. Бицадзе, И.Н. Векуа.

В работах В.Ф. Волкодавова, Е.И. Моисеева, А.М. Нахушева, А.П. Солдатова, С.П. Пулькина, Т.Д. Джураева, Л.С. Пулькиной, К.Б. Сабитова, А.Н. Зарубина, О.А. Репина, А.А. Килбаса, М.С. Салахитдинова, М.М. Смирнова и других математиков, теория уравнений смешанного типа развивалась в различных направлениях.

Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробной производной исследовались в работах А.Н. Кочубея, А.В. Псху, В.А. Нахушевой; для уравнений смешанного типа с дробными производными - в работах С.Х. Геккиевой; для дифференциально-разностных уравнений смешанного типа - в работах А.Н. Зарубина; в работах А.А. Андреева и его учеников рассматривались краевые задачи для уравнений смешанного типа с инвалютивным отклонением.

Тем не менее, следует отметить, что, не смотря на достаточно большое количество работ, посвященных изучению как уравнений с отклоняющимся аргументом, так и уравнений с дробными производными, теория уравнений смешанного типа с дробными производными и отклоняющимся аргументом находится в начале своего развития.

Наиболее близкими в этом направлении являются работы А.Н. Зарубина и Е.А. Зарубина, где были впервые рассмотрены краевые задачи для уравнений смешанного типа с дробной производной и запаздывающим аргументом.

Отсутствие исследований по начально-краевым задачам для уравнений смешанного типа с дробной производной и запаздывающими аргументами, а так же прикладные возможности этих уравнений при математическом моделировании процессов экономики, математической биологии, нелинейной оптики, подтверждает актуальность темы диссертации.

Следует также отметить, что и теория обратных задач представляет собой активно развивающееся направление современной математики. Интенсивное исследование обратных задач в значительной степени обусловлено необходимостью разработки математических методов решения обширного класса важных прикладных проблем, связанных с обработкой и интерпретацией наблюдений. Обратные задачи для линейных уравнений в частных производных, состоящие в определении либо начального, либо граничного условия, либо правой части уравнения, по некоторой дополнительной информации о решении уравнения, исследовались целым рядом авторов, такими как: А.М. Денисов, О.М. Алифанов, М.М. Лаврентьев, Л.А. Чудов и др. Однако, обратные задачи для уравнений смешанного типа практически не изучены, тем более для дифференциально-разностных уравнений смешанного типа с дробными производными.

Цель работы - исследование разрешимости новых, прямых и обратных, нелокальных начально-краевых задач для неоднородных дифференциально-разностных уравнений смешанного типа с дробной производной и запаздыванием по различным переменным, рассматриваемых в неограниченных областях, содержащих внутри себя линию изменения типа.

Для обоснования корректности впервые поставленных задач необходимо доказательство теорем существования и единственности классических решений, что определяет структуру работы и содержание глав.

Методы исследования. В работе широко используются методы теории интегральных уравнений Вольтерра, качественные свойства специальных функций, функции Миттаг-Леффлера, H - функции Фокса, дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных, интегральные преобразования, метод вспомогательных функций (метод "abc"), метод Фурье разделения переменных.

Научная новизна. Все результаты, полученные в работе, являются новыми в актуальной проблеме теории дифференциально-разностных уравнений в частных производных - проблеме решения прямых и обратных нелокальных задач для уравнения смешанного типа с дробной производной и запаздывающими аргументами.

Основные результаты выносимые на защиту:

1. Доказательство теорем существования и единственности решения начально-краевых задач для неоднородных дифференциально-разностных уравнений диффузии дробного порядка в канонических областях.

2. Доказательство теорем существования и единственности решения обратных задач для неоднородных дифференциально-разностных уравнений смешанного типа с дробной производной.

3. Доказательство теорем существования и единственности начально-краевых задач для дифференциально-разностных уравнений смешанного типа высокого порядка с дробными производными, запаздыванием, опережением и отражением.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в качестве основы для дальнейшей разработки теории нелокальных задач для неоднородных дифференциально-разностных уравнений и систем дифференциально-разностных уравнений смешанного типа с дробной производной и отклоняющимися аргументами в областях изменения типа уравнения.

Значение работы определяется также прикладной значимостью рассматриваемых задач.

Апробация работы. Основные результаты и содержание работы докладывались и обсуждались на международной конференции "Современные методы физико-математических наук", посвященной 75-летию Орловского государственного университета и 75-летию физико-математического факультета (2006г.) ОГУ, г. Орел; на четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи"(2007г.) СамГТУ, г. Самара; на второй Всероссийской конференции "СамДиф"(2007г.) СГУ, г. Самара; на международном Российско-Азербайджанском симпозиуме "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики"и VI Школе молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики"(2008г.) п. Эльбрус; на научном семинаре кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений в 2004 - 2008гг. Орел, ОГУ (руководитель д. ф.-м. н., профессор А.Н. Зарубин).

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1] - [10], второму автору в [4], [7], [8] и [9] принадлежит только постановка задач.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и библиографического списка. В каждой главе - три параграфа, список литературы содержит 85 наименований. Объем - 148 страниц.

Содержание работы.

Во введении дан краткий обзор наиболее важных публикаций по теме и анализ основных результатов диссертации.

Глава I посвящена начально-краевым задачам для дифференциально-разностных уравнений диффузии дробного порядка.

Под регулярным решением уравнения в области D будем понимать такое решение $U(x,t)$, что $D_{0t}^{\alpha-1}U(x,\xi) \in C(\overline{D})$, $t^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha}U(x,\xi)$, $U_{xx}(x,t) \in C(D)$, где D_{0t}^{α} - оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегродифференцирования порядка α, $0<\alpha<1$, действующий на функцию $U(x,t)$ по переменной t.

В §1 рассматривается смешанная задача для неоднородного уравнения диффузии дробного порядка с запаздывающим аргументом по времени в полуполосе.

В области $D=\big\{(x,t): 0<x<l,\ t>0\big\}$, для уравнения

$$D_{0t}^{\alpha}U(x,\xi)=U_{xx}(x,t)+H(t-h)U(x,t-h)+F(x,t), \tag{1}$$

где $0 < l, h \equiv \text{const}$, $F(x,t) = f(x)g(t)$, $H(t)$ – функция Хевисайда, рассматривается

Задача 1.1. *Найти в области D регулярное решение $U(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начально-краевым условиям*

$$\lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1}U(x,\xi) = \omega(x),\ 0 \le x \le l;\ U(0,t) = U(l,t) = 0,\ t \ge 0,$$

где $\omega(x)$, $F(x,t)$ - заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, причем $\omega(0) = \omega(l) = 0$.

Доказаны

Теорема 1.1. *Однородная задача 1.1 имеет в области $\overline{D}$ только тривиальное решение.*

Теорема 1.2. *Пусть $\omega(x) \in C[0,l] \cap C^2(0,l)$, $F(x,t) = f(x)g(t) \in C(\overline{D}) \cap C_{x,t}^{2,1}(D)$, причем $\omega(0) = \omega(l) = 0$, $F(0,t) = F(l,t) = 0$.*

Тогда существует регулярное решение задачи 1.1.

Для решения задачи был применен метод разделения переменных (метод Фурье) в совокупности с преобразованием Лапласа. При обосновании использовались асимптотические свойства H - функции Фокса.

Единственность решения доказана с помощью метода вспомогательной функции.

В §2 рассматривается смешанная задача для неоднородного уравнения диффузии дробного порядка с запаздывающим аргументом по времени и пространственной координате в четверти плоскости.

В области $D = \{(x,t):\ x > 0,\ t > 0\}$, для уравнения

$$D_{0t}^{\alpha}U(x,\xi) = U_{xx}(x,t) +$$

$$+ H(t-h)U(x,t-h) - H(x-\tau)U(x-\tau,t) + F(x,t), \qquad (2)$$

где $0 < \tau, h \equiv \text{const}$, $F(x,t) = f(x)g(t)$, $H(t)$ - функция Хевисайда, рассматривается

Задача 1.2. *Найти регулярное решение $U(x,t)$ уравнения (2) в области D удовлетворяющее граничному и начальному условиям*

$$U(0,t) = 0,\ t \ge 0;\ \lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1}U(x,\xi) = \omega(x),\ x \ge 0,$$

где $\omega(x)$, $F(x,t)$ - заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, причем $\omega(0) = \omega(+\infty) = 0$.

Доказаны

Теорема 1.3. *Однородная задача 1.2 имеет в области $\overline{D}$ только тривиальное решение.*

Теорема 1.4. *Пусть $\omega(x)$, $f(x)$ - непрерывные абсолютно интегрируемые на $[0,+\infty)$ функции и $\omega(0) = \omega(+\infty) = 0$; $g(t)$ - ограничена и непрерывна.*

Тогда существует регулярное решение $U(x,t)$ задачи 1.2.

При доказательстве теорем существования и единственности использовались методы энергетических неравенств, интегральных уравнений и уравнений Вольтерра, а так же теория специальных функций.

В §3 рассматривается задача Коши для неоднородного уравнения дробной диффузии с запаздывающим аргументом по пространственной координате.

В области $D = \{(x,t):\ |x| < +\infty,\ t > 0\}$, для уравнения

$$D_{0t}^{\alpha} U(x,\xi) = U_{xx}(x,t) - U(x-\tau,t) + F(x,t), \tag{3}$$

где $0 < \tau \equiv \mathrm{const}$; $F(x,t) = g(t)f(x)$, $H(t)$ - функция Хевисайда, рассматривается

Задача 1.3. *Найти регулярное решение* $U(x,t)$ *уравнения (3) в области* D *удовлетворяющее начальному условию*

$$\lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1} U(x,\xi) = \omega(x),\ \ |x| < +\infty,$$

где $\omega(x)$, $F(x,t)$ *- заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, абсолютно интегрируемые при* $x \in (-\infty;+\infty)$, *причем* $\omega(\pm\infty) = 0$, $F(\pm\infty,t) = 0$.

Доказаны

Теорема 1.5. *Однородная задача 1.3 имеет в области* D *только тривиальное решение.*

Теорема 1.6. *Пусть функции* $\omega(x)$, $f(x)$ *- непрерывные, абсолютно интегрируемые на* $(-\infty,+\infty)$, $g(t)$ *- непрерывна и ограничена,* $\omega(\pm\infty) = 0$, $F(\pm\infty,t) = 0$.

Тогда задача 1.3 имеет единственное регулярное решение $U(x,t)$, *стремящееся к нулю при* $x^2 + t^2 \to +\infty$ $(|x| < +\infty,\ t > 0)$.

Единственность решения поставленной задачи доказывается с помощью метода вспомогательных функций, а существование, с использованием теории преобразований Фурье и Лапласа.

Глава II посвящена обратным задачам для дифференциально-разностных уравнений смешанного типа с дробной производной.

Под регулярным решением уравнения в области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, будем понимать такое решение $U(x,t)$, что $D_{0t}^{\alpha-1} U(x,\xi) \in C(\overline{D^+})$, $U(x,t) \in C(\overline{D^-})$, $t^{1-\alpha} D_{0t}^{\alpha} U(x,\xi) \in C(D^+ \cup J)$, $U_{xx}(x,t) \in C(D \backslash J)$, $U_{tt}(x,t) \in C(D^-)$.

В §4 рассматривается обратная начально - краевая задача для дробного диффузионно - волнового уравнения с запаздывающим аргументом по времени.

В области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где
$J = \big\{(x,t):\ \ 0 < x < \tau,\ t = 0\big\}$, $D^+ = \big\{(x,t):\ \ 0 < x < \tau,\ t > 0\big\}$,

$D^- = \{(x,t): \ -t < x < \tau + t, \ -\tau/2 < t < 0\}$, для уравнения

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha} U(x,\xi) = U_{xx}(x,t) + H(t-h)U(x,t-h) + F(x,t), \ t > 0, \\ U_{tt}(x,t) = U_{xx}(x,t), \ t < 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $0 < h, \tau \equiv \mathrm{const}$, $F(x,t) = \sum\limits_{l=1}^{p} g_l(t) f_l(x)$, $1 \le p \in \mathrm{N}$, $H(t)$ - функция Хевисайда, рассматривается

Задача 2.1. *Найти функции* $g_l(t)$, $D_{0t}^{\alpha-1} g_l(\xi) \in C[0;+\infty)$ $(l = \overline{1,p})$, *при известных функциях* $f_l(x) \in C[0;\tau] \cap C^1(0;\tau)$, *и регулярное решение* $U(x,t)$ *уравнения (4) в области* D , *удовлетворяющее краевым условиям*

$$U(0,t) = U(\tau,t) = 0, \ t \ge 0; \ U(x,-x) = \psi(x), \ 0 \le x \le \tfrac{\tau}{2},$$
$$U(x_j,t) = \varphi_j(t), \ t \ge 0, \ 0 < x_j < \tau, \ j = \overline{1,p},$$

условиям сопряжения

$$\lim_{t \to 0-} U(x,t) = \lim_{t \to 0+} D_{0t}^{\alpha-1} U(x,\xi) = \omega(x), \ 0 \le x \le \tau,$$
$$\lim_{t \to 0-} U_t(x,t) = \lim_{t \to 0+} t^{1-\alpha} D_{0t}^{\alpha} U(x,\xi) = \nu(x), \ 0 < x < \tau,$$

где $\psi(x)$, $\varphi_j(t)$ *- заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, причем* $\psi(0) = 0$.

Доказана

Теорема 2.1. *Пусть функция* $\psi(x) \in C[0,\tau/2] \cap C^2(0,\tau/2)$, $D_{0t}^{\alpha} \varphi_j(\xi) \in C(0;+\infty)$, $\varphi_j(+\infty) = 0$ $(j = \overline{1,p})$; $\psi(0) = 0$; $\lim\limits_{t \to 0+} D_{0t}^{\alpha-1} \varphi_j(\xi) = \omega(x_j)$, $f_l(x_j) \ne 0$, $f_l(x) \in C[0,\tau] \cap C^1(0,\tau)$.

Тогда существует единственное регулярное решение $U(x,t)$ *и* $g_l(t)$ $(l = \overline{1,p})$ *задачи 2.1.*

Вопрос существования решения задачи 2.1 сводится к разрешимости дифференциального уравнения относительно функции $\omega(x)$, а задача определения функций $g_l(t)$ $(l = \overline{1,p})$ - к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Единственность $U(x,t)$ следует из того, что однородная задача 2.1 имеет в области D только тривиальное решение.

В §5 рассматривается обратная задача для неоднородного уравнения смешанного типа с дробной производной и запаздывающим аргументом по времени и пространственной координате.

В области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где $D^+ = \{(x,t): \ x > 0, \ t > 0\}$, $J = \{(x,t): \ x > 0, \ t = 0\}$, $D^- = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_k^-$, $D_k^- = \{(x,t): \ k\tau - t < x < t + (k+1)\tau, \ -\tau/2 < t < 0\}$, для уравнения

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0t}U(x,\xi) = U_{xx}(x,t) + H(t-h)U(x,t-h)- \\ \qquad\qquad - H(x-\tau)U(x-\tau,t) + F(x,t),\ t>0, \\ U_{tt}(x,t) = \ U_{xx}(x,t) - H(x-\tau)U(x-\tau,t),\ t<0, \end{cases} \tag{5}$$

где $0<h,\tau\equiv\mathrm{const}$, $F(x,t)=\sum\limits_{l=1}^{p} g_l(t)f_l(x)$, $1\le p\in N$, $H(t)$ - функция Хевисайда, рассматривается

Задача 2.2. *Найти функции* $g_l(t),\ D^{\alpha-1}_{0t}g_l(\xi)\in C[0;+\infty)$ $(l=\overline{1,p})$, *при известных функциях* $f_l(x)\in C[0;+\infty)\cap C^1(0;+\infty)$ *и регулярное решение* $U(x,t)$ *уравнения (5) в области* D *, удовлетворяющее краевым условиям*

$$U(0,t)=0,\ t\ge 0;\ U(x,k\tau-x)=\psi_k(x),\ k\tau\le x\le (2k+1)\tau/2,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}U(x_j,t)=\varphi_j(t),\ t>0,\ 0<x_j<+\infty,\ j=\overline{1,p},$$

условиям сопряжения

$$\lim_{t\to 0-}U(x,t)=\lim_{t\to 0+}D^{\alpha-1}_{0t}U(x,\xi)=\omega(x),\ 0\le x<+\infty,$$
$$\lim_{t\to 0-}U_t(x,t)=\lim_{t\to 0+}t^{1-\alpha}D^{\alpha}_{0t}U(x,\xi)=\nu(x),\ 0<x<+\infty,$$

где $\psi_k(x)$, $\varphi_j(t)$ *- заданные непрерывные, достаточно гладкие функции.*

Доказана

Теорема 2.2. *Пусть функция* $\psi_k(x)\in C[k\tau,(2k+1)\tau/2]\cap C^2\big(k\tau,(2k+1)\tau/2\big)$, $D^{\alpha}_{0t}\varphi_j(\xi)\in C(0;+\infty)$, $\varphi_j(+\infty)=0$ $(j=\overline{1,p})$ *;* $\lim\limits_{k\to+\infty}\max\limits_{[k\tau,(k+1)\tau]}|\psi_k(x)|=0$ *;* $\lim\limits_{t\to 0+}D^{\alpha-1}_{0t}\varphi_j(\xi)=\frac{d}{dx}\Big\{z^{\omega}_k(x_j)+$

$$+\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x_j-m\tau)\int\limits_0^{x_j-m\tau}\eta((x_j-m\tau)^2-\eta^2)^{m-1}z^{\omega}(\eta)d\eta\Big\},$$

$$\frac{d}{dx}\Big\{z^{f_l}_k(x_j)+\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x_j-m\tau)\int\limits_0^{x_j-m\tau}\eta((x_j-m\tau)^2-\eta^2)^{m-1}z^{f_l}(\eta)d\eta\Big\}\ne 0,$$

$k\tau\le x_j\le(k+1)\tau\ (j=\overline{1,p})$, $f_l(x)\in C[0,+\infty)\cap C^1(0,+\infty)$ *, где*

$$z^{\omega}(x)=\{z^{\omega}_k(x),\ k\tau\le x\le(k+1)\tau\ (k=0,1,2,\dots)\},$$

$$z^{\omega}_k(x)=\omega(x)H(x)+\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\gamma_m H(x-m\tau)\int\limits_0^{x-m\tau}\eta(x^2-(\eta+m\tau)^2)^{m-1}\omega(\eta)d\eta,$$

$z^{f_l}(x)$ *имеет форму* $z^{\omega}(x)$ *, если там заменить* $\omega(x)$ *на* $f_l(x)$ *.*

Тогда существует единственное регулярное решение $U(x,t)$ *и* $g_l(t)$ $(l=\overline{1,p})$ *задачи 2.2.*

Вопрос существования решения задачи 2.2 редуцируется к разрешимости дифференциального уравнения относительно функции $z^{\omega}(x)$, а определения функций $g_l(t)$ $(l=\overline{1,p})$ - к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Единственность решения $U(x,t)$ следует из того, что однородная задача 2.2 имеет в области D только тривиальное решение.

В §6 рассматривается обратная задача для неоднородного уравнения смешанного типа с дробной производной и опережающе-запаздывающими аргументами.

В области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где $D^+ = \{(x,t): \ |x| < +\infty, \ t > 0\}$, $J = \{(x,t): \ x > 0, \ t = 0\}$, $D^- = \{(x,t): x > 0, -x < t < 0\}$, для уравнения

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha} U(x,\xi) = U_{xx}(x,t) - U(x-\tau,t) + F(x,t), \ t > 0, \\ U_{xx}(x,t) - U_{tt}(x,t) = H(-t-h)U(x,t+h), t < 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $0 < h, \tau \equiv \mathrm{const}$, $F(x,t) = \sum\limits_{l=1}^{p} g_l(t) f_l(x)$, $1 \le p \in N$, $H(t)$ - функция Хевисайда , рассматривается

Задача 2.3. *Найти функции* $g_l(t)$, $D_{0t}^{\alpha-1} g_l(\xi) \in C[0;+\infty)$ $(l = \overline{1,p})$, *при известных функциях* $f_l(x) \in C^j(0;+\infty)$ $(j = \overline{1,p})$, *и регулярное решение* $U(x,t)$ *уравнения (6) в области* D , *удовлетворяющее начальным и краевым условиям*

$$\lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1} U(x,\xi) = \beta(x), \ -\infty < x \le 0; \ U(x,-x) = \psi(x), \ x \ge 0;$$

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} U(0,t) = \varphi_j(t), \ j = \overline{1,p}, \ t > 0,$$

условиям сопряжения

$$\lim_{t\to 0-} U(x,t) = \lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1} U(x,\xi) = \omega(x), \ x \ge 0,$$

$$\lim_{t\to 0-} U_t(x.t) = \lim_{t\to 0+} t^{1-\alpha} D_{0t}^{\alpha} U(x,\xi) = \nu(x), \ x > 0,$$

где $\psi(x)$, $\varphi_j(t)$ *- заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, причем* $\beta(0) = \psi(0)$.

Доказана

Теорема 2.3. *Пусть функции* $\psi(x) \in C[0;+\infty) \cap C^j(0;+\infty)$ *;* $\beta(x) \in C(-\infty;0] \cap C^j(-\infty;0)$ *;* $D_{0t}^{\alpha} \varphi_j(\xi) \in C(0;+\infty)$ *,* $\varphi_j(+\infty) = 0$ *;* $\lim\limits_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1} \varphi_j(\xi) = \frac{d^j}{dx^j}\omega(0)$ *,* $\frac{d^j}{dx^j} f_l(0) \neq 0$ *,* $f_l(x) \in C^j(0;+\infty)$ $(j = \overline{1,p})$.

Тогда существует единственное регулярное решение $U(x,t)$ *и* $g_l(t)$ $(l = \overline{1,p})$ *задачи 2.3.*

Вопрос существования решения задачи 2.3 сводится к разрешимости интегро-дифференциально-разностного уравнения относительно функции $\omega(x)$, а $g_l(t)$ $(l = \overline{1,p})$ - к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Глава III посвящена начально-краевым задачам для дифференциально-разностных уравнений смешанного типа высокого порядка с дробными производными и отклоняющимися аргументами.

Под регулярным решением уравнения в области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, будем понимать такое решение $U(x,t)$, что

$D_{0t}^{\alpha-1}U(x,\xi) \in C(\overline{D^+})$, $U(x,t) \in C(\overline{D^-})$, $t^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha}U(x,\xi) \in C(D^+ \cup J)$, $U_{xx}(x,t) \in C(D^+ \cup D^-)$, $U_{tt}(x,t) \in C(D^-)$.

В §7 рассматриваются начально-краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений смешанного типа высокого порядка с дробными производными и отклоняющимися аргументами.

• **В области** $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где $D^+ = \{(x,t):\ 0 < x < \tau, t > 0\}$, $J = \{(x,t):\ 0 < x < \tau,\ t = 0\}$, $D^- = \{(x,t):\ -t < x < \tau + t,\ -\frac{\tau}{2} < t \le 0\}$, для уравнения

$$\begin{cases} FLU(x,t) = 0,\ t > 0, \\ U_{tt}(x,t) = U_{xx}(x,t),\ t < 0, \end{cases} \qquad (7)$$

где

$$LU(x,t) = D_{0t}^{\alpha}U(x,\xi) - U_{xx}(x,t) - H(t-h)U(x,t-h),$$

$F = \sum\limits_{l=0}^{p} a_l \frac{\partial^l}{\partial x^l}$, $0 < \tau, h, a_l \equiv \mathrm{const}$, $1 \le p \in \mathrm{N}$, $H(t)$ - функция Хевисайда, рассматривается.

Задача 3.1. *Найти регулярное решение $U(x,t)$ уравнения (7) в области D удовлетворяющее краевым условиям*

$$U(0,t) = U(\tau,t) = 0,\ t \ge 0;\ U(x,-x) = \psi(x),\ 0 \le x \le \tfrac{\tau}{2},$$
$$U(x_j,t) = \varphi_j(t),\ t \ge 0,\ 0 < x_j < \tau,\ j = \overline{1,p},$$

условиям сопряжения

$$\lim_{t\to 0-} U(x,t) = \lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1}U(x,\xi) = \omega(x),\ 0 \le x \le \tau,$$
$$\lim_{t\to 0-} U_t(x,t) = \lim_{t\to 0+} t^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha}U(x,\xi) = \nu(x),\ 0 < x < \tau,$$

где $\psi(x)$, $\varphi_j(t)$ - заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, причем $\psi(0) = 0$.

• **В области** $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где $D^+ = \{(x,t):\ x > 0, t > 0\}$, $J = \{(x,t):\ x > 0,\ t = 0\}$, $D^- = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_k^-$, $D_k^- = \{(x,t):\ k\tau - t < x < t + (k+1)\tau,\ -\tau/2 < t < 0\}$, для уравнения

$$\begin{cases} FLU(x,t) = 0,\ t > 0, \\ U_{tt}(x,t) = U_{xx}(x,t) - H(x-\tau)U(x-\tau,t),\ t < 0, \end{cases} \qquad (8)$$

где

$$LU(x,t) = D_{0t}^{\alpha}U(x,\xi) - U_{xx}(x,t) - H(t-h)U(x,t-h) + H(x-\tau)U(x-\tau,t),$$

$F = \sum\limits_{l=0}^{p} a_l \frac{\partial^l}{\partial x^l}$, $0 < \tau, h, a_l \equiv \mathrm{const}$, $1 \le p \in \mathrm{N}$, $H(t)$ - функция Хевисайда, рассматривается

Задача 3.2. *Найти регулярное решение $U(x,t)$ уравнения (8) в области D , удовлетворяющее краевым условиям*

$$U(0,t)=0,\ t\geq 0;\ U(x,k\tau-x)=\psi_k(x),\ k\tau\leq x\leq (2k+1)\tau/2,$$
$$\tfrac{\partial}{\partial x}U(x_j,t)=\varphi_j(t),\ t>0,\ 0<x_j<+\infty,\ j=\overline{1,p},$$
условиям сопряжения
$$\lim_{t\to 0-}U(x,t)=\lim_{t\to 0+}D_{0t}^{\alpha-1}U(x,\xi)=\omega(x),\ 0\leq x<+\infty,$$
$$\lim_{t\to 0-}U_t(x,t)=\lim_{t\to 0+}t^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha}U(x,\xi)=\nu(x),\ 0<x<+\infty,$$
где $\psi_k(x)$, $\varphi_j(t)$ *- заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, причем* $\lim\limits_{k\to+\infty}\max\limits_{[k\tau,(k+1)\tau]}|\psi_k(x)|=0,\ \psi_0(0)=0.$

• **В области** $D=D^+\cup D^-\cup J$, где $D^+=\{(x,t):\ |x|<+\infty,\ t>0\}$, $J=\{(x,t):\ x>0,\ t=0\}$, $D^-=\{(x,t):\ x>0,-x<t<0\}$, для уравнения

$$\begin{cases} FLU(x,t)=0,\ t>0,\\ U_{xx}(x,t)-U_{tt}(x,t)=H(-t-h)U(x,t+h),\ t<0,\end{cases}\tag{9}$$

где
$$LU(x,t)=D_{0t}^{\alpha}U(x,\xi)-U_{xx}(x,t)+U(x-\tau,t),$$
$F=\sum\limits_{l=0}^{p}a_l\frac{\partial^l}{\partial x^l}$, $0<\tau,h,a_l\equiv\mathrm{const}$, $1\leq p\in\mathrm{N}$, $H(t)$ - функция Хевисайда, рассматривается.

Задача 3.3. *Найти регулярное решение* $U(x,t)$ *уравнения (9) в области* D *, удовлетворяющее краевым условиям*
$$\lim_{t\to 0+}D_{0t}^{\alpha-1}U(x,\xi)=\beta(x),\ -\infty<x\leq 0;\ U(x,-x)=\psi(x),\ x\geq 0;$$
$$\tfrac{\partial^j}{\partial x^j}U(0,t)=\varphi_j(t),\ j=\overline{1,p},\ t>0,$$
условиям сопряжения
$$\lim_{t\to 0-}U(x,t)=\lim_{t\to 0+}D_{0t}^{\alpha-1}U(x,\xi)=\omega(x),\ x\geq 0,$$
$$\lim_{t\to 0-}U_t(x,t)=\lim_{t\to 0+}t^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha}U(x,\xi)=\nu(x),\ x>0,$$
где $\psi(x)$, $\varphi_j(t)$ *- заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, причем* $\beta(0)=\psi(0)$.

Решение задач 3.1 - 3.3 строится путем сведения их к обратным задачам, так как, если $U_1(x),\ U_2(x),\ldots,U_p(x)$ - линейно независимые решения уравнения $FV=0$, где $V=LU(x,t)$, то его общее решение имеет вид
$$V=LU(x,t)=\sum_{l=1}^{p}C_l(t)U_l(x);$$
$C_l(t)$ - произвольные непрерывные, достаточно гладкие функции.

В §8 рассматривается начально-краевая задача для уравнения смешанного типа высокого порядка с дробными производными по времени и пространству с запаздывающим аргументом.

В области $D=D^+\cup D^-\cup J$, где $D^+=\{(x,t):|x|<+\infty,t>0\}$; $D^-=\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}D_k^-$, $D_k^-=\{(x,t):k\tau-t<x<(k+1)\tau+t,-\tau/2<t<0\}$;

$J = \{(x,t) : x > 0, t = 0\}$, для уравнения

$$FLU(x,t) = 0, \tag{10}$$

в котором

$$F \equiv H(t)(D_{0x}^{\beta} + \gamma) + H(-t),$$

$$LU(x,t) \equiv U_{xx}(x,t) - D_{0t}^{\alpha H(t)+2H(-t)}U(x,t)-$$

$$-\left(H(t) + H(-t)H(x-\tau)\right)U(x-\tau,t),$$

$0 < \alpha < 1$; $n-1 < \beta < n$ ($n \in \mathbf{N}$); $0 < \gamma, \tau \equiv const$; $H(\xi)$ - функция Хевисайда, рассматривается

Задача 3.4. *Найти регулярное решение* $U(x,t)$ *уравнения (10) в области* D *, удовлетворяющее начально-краевым условиям*
$\lim\limits_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1}U(x,t) = f(x),\ x \le 0;\ U(x, k\tau - x) = \psi_k(x),\ k\tau \le x \le (2k+1)\tau/2,$

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\beta-j}U(\xi,t) = \varphi_j(t),\ t > 0\ (j = \overline{1,n}),$$

условиям сопряжения

$$\lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1}U(x,\xi) = \lim_{t\to 0-} U(x,t) = \omega(x), x \in \overline{J},$$

$$\lim_{t\to 0+} t^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha}U(x,\xi) = \lim_{t\to 0-} U_t(x,t) = \nu(x), x \in J,$$

где $\psi_k(x)$, $\varphi_j(t)$ *- заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, причем* $f(0) = \psi_0(0)$ *,* $\varphi_k(+\infty) = 0$ *,* $f(-\infty) = 0$ *,* $\lim\limits_{k\to+\infty} \max\limits_{x\in[k\tau,(2k+1)\tau/2]} |\psi_k(x)| = 0$ *.*

Если в (10) $LU = V$, то общее решение уравнения $FV = 0$ имеет вид

$$V = LU(x,t) = H(t)\sum_{l=1}^{n} C_l(t)x^{\beta-l}E_{\beta,\beta-l+1}^{1}(-\gamma x^{\beta}), \tag{11}$$

где $C_l(t)$ $(l = \overline{1,n})$ - неизвестные непрерывные, достаточно гладкие функции.

Поэтому решена обратная

Задача 3.4 $'$. *Найти функции* $C_l(t)$ *,* $D_{0t}^{\alpha-1}C_l(\xi) \in C[0,+\infty)$ $(l = \overline{1,n})$ *и регулярное решение* $U(x,t)$ *уравнения (11) в области* D *, удовлетворяющее краевым условиям и условиям сопряжения задачи 3.4, где* $f(x) \in C(-\infty,0] \cap C^2(-\infty,0)$ *и абсолютно интегрируема на* $(-\infty,0)$ *вместе со своими производными;* $\psi_k(x) \in C[k\tau,(2k+1)\tau/2] \cap C^2(k\tau,(2k+1)\tau/2)$; $D_{0t}^{\alpha-1}\varphi_j(t) \in C[0,+\infty)$; $f(0) = \psi_0(0)$ *,* $f(-\infty) = 0$ *,* $\varphi_j(+\infty) = 0$; $\lim\limits_{k\to+\infty} \max\limits_{x\in[k\tau,(2k+1)\tau/2]} |\psi_k(x)| = 0$ *;* $\lim\limits_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1}\varphi_j(\xi) = \lim\limits_{x\to 0} D_{0x}^{\beta-j}\overline{\omega}(\xi)$ $(j = \overline{1,n})$ *,* $\overline{\omega}(x) = H(x)\omega(x) + H(-x)f(x)$ *.*

Вопрос существования решения задачи 3.4 $'$ сводится к разрешимости интегро-дифференциально-разностного уравнения относительно функции $\omega(x)$, а $C_l(t)$ $(l = \overline{1,n})$ - к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

В §9 рассматривается начально-краевая задача типа Геллерстедта для диффузионно-волнового уравнения высокого порядка с дробными производными по времени и пространству с отражением и опережающе-запаздывающими аргументами.

В области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где $D^+ = \{(x,t) : |x| < +\infty, t > 0\}$; $D^- = D_1^- \bigcup D_2^-$, $D_1^- = \{(x,t) : x > 0, t > -x\}$, $D_2^- = \{(x,t) : x < 0, t > x\}$, $J = \{(x,t) : |x| < +\infty, t = 0\}$ для уравнения

$$\begin{cases} \left(D_{0x}^{\beta} + \gamma\right)(U_{xx}(x,t) - D_{0t}^{\alpha}U(x,t) - U(x-\tau,t)) = 0, t > 0, \\ U_{xx}(x,t) - U_{tt}(x,t) = H(-t-h)U(-x,t+h), t < 0, \end{cases} \tag{12}$$

в котором $0 < \alpha < 1$; $n-1 < \beta < n$ $(n \in \mathbf{N})$; $0 < \gamma, \tau, h \equiv const$; $H(\xi)$ - функция Хевисайда, рассматривается

Задача 3.5. *Найти регулярное решение $U(x,t)$ уравнения (12) в области D , удовлетворяющее начально-краевым условиям*

$$U(x,-x) = \psi_1(x),\ x \geq 0;\ U(x,x) = \psi_2(x),\ x \leq 0;$$
$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\beta-j}U(\xi,t) = \varphi_j(t),\ t \geq 0\ (j = \overline{1,n});$$

условиям сопряжения

$$\lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1}U(x,\xi) = \lim_{t\to 0-} U(x,t) = \omega(x), x \in \overline{J}$$
$$\lim_{t\to 0+} t^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha}U(x,\xi) = \lim_{t\to 0-} U_t(x,t) = \nu(x), x \in J;$$

где $\psi_i(x)$ $(i = 1,2)$, $\varphi_j(t)$ $(j = \overline{1,n})$ - заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, причем $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, $\psi_i((-1)^{i+1}\infty) = 0$ $(i = 1,2)$, $\varphi_j(+\infty) = 0$.

Аналогично §8 задача 3.5 может быть решена как обратная

Задача 3.5 $'$. *Найти функции $C_l(t)$, $D_{0t}^{\alpha-1}C_l(t) \in C[0,+\infty)$ $(l = \overline{1,n})$ и регулярное решение $U(x,t)$ уравнения*

$$\begin{cases} U_{xx}(x,t) - D_{0t}^{\alpha}U(x,t) - U(x-\tau,t) = F(x,t), t > 0, \\ U_{xx}(x,t) - U_{tt}(x,t) = H(-t-h)U(-x,t+h), t < 0, \end{cases}$$

в области D удовлетворяющее начально-краевым условиям и условиям сопряжения задачи 3.5, где $F(x,t) = \sum\limits_{l=1}^{n} C_l(t)x^{\beta-l}E_{\beta,\beta-l+1}^{1}(-\gamma x^{\beta})$; $\psi_i(x) \in C\{(-1)^{i+1}x \geq 0\} \cap C^2\{(-1)^{i+1}x > 0\}$ $(i = 1,2)$; $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, $\psi_i((-1)^{i+1}\infty) = 0$ $(i = 1,2)$, $\varphi_j(+\infty) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1}\varphi_j(\xi) = \lim\limits_{x\to 0} D_{0x}^{\beta-j}\omega(\xi)$ $(j = \overline{1,n})$.

Пользуясь случаем автор выражает глубокую благодарность и признательность научному руководителю - Александру Николаевичу Зарубину за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации:

1. *Бурцев М.В.* Начально-краевая задача для дифференциально-разностного уравнения дробного порядка // Вестник науки. - Орел: ОГУ, В.3, 2004. - с 32 - 34.

2. *Бурцев М.В.* Начально-краевая задача для смешанного уравнения диффузии дробного порядка с запаздывающим аргументом // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.25. - Казань: Издательство Казанского математического общества, 2004. - с. 55 - 56.

3. *Бурцев М.В.* Смешанная задача для неоднородного уравнения диффузии дробного порядка с запаздывающим аргументом по времени в полуполосе // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы Третьей международной конференции. Нальчик, 2006. - с. 70 - 71.

4. *Бурцев М.В., Зарубин А.Н.* Задача Коши для составного уравнения дробной диффузии с некарлемановским сдвигом // Вестник науки. - Орел: ОГУ, В.6, 2007. - с. 38 - 40.

5. *Бурцев М.В.* Смешанная задача для неоднородного уравнения дробной диффузии с запаздывающим аргументом по времени и пространственной координате // Материалы конференции "СамДиф-2007". - Самара: Издательство "Универс групп", 2007. - с. 35 - 36.

6. *Бурцев М.В.* Задача Трикоми для неоднородного уравнения смешанного типа с дробной производной и запаздывающим аргументом // Труды Всероссийской заочной научно-практической конференции "Актуальные проблемы обучения математике (К 155 - летию со дня рождения А.П. Киселева)". - Орел: ОГУ, 2007. - с. 399 - 402.

7. *Бурцев М.В., Зарубин А.Н.*Начально-краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения с некарлемановским сдвигом // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения". - Новосибирск: НГУ, 2007. - с. 105 - 106.

8. *Бурцев М.В., Зарубин А.Н.* Теорема единственности смешанной задачи для неоднородного уравнения дробной диффузии с запаздывающим аргументом по обеим переменным // Труды четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи". Ч.3. - Самара: СамГТУ, 2007. - с. 42 - 45.

9. *Бурцев М.В., Зарубин А.Н.* Обратная начально-краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения с некарлемановским сдвигом // Дифференциальные уравнения. - 2008. -Т. 44, №3. - с. 373 - 383.

10. *Бурцев М.В.* Обратная начально-краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения опережающе-запаздывающего типа // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Труды международной научной конференции. Стерлитамак. - 2008. - Т. 3 - С. 74 - 85.

Подписано в печать 3.09.2008г. формат 60x80 1/16
Печать на ризографе. Бумага офсетная. Гарнитура Times
Объем 1 усл. п.л. Тираж 100 экз. Заказ № 650

Отпечатано с готового оригинал-макета на полиграфической базе
редакционно-издательского отдела
ГОУ ВПО "Орловский государственный университет"
302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95. тел. (4862)74-45-08