

№25 (196) 2014

Выпуск 37

Научный рецензируемый журнал

Основан в 1995 г.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»)

Издатель:

НИУ «БелГУ»
Издательский дом «Белгород».
Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охраны культурного наследия.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-21121 от 19 мая 2005 г.

Редакционная коллегия журнала

Главный редактор

О.Н. Полухин,
ректор НИУ «БелГУ», доктор политических наук, профессор
Зам. главного редактора

И.С. Константинов,
проректор по научной и инновационной деятельности НИУ «БелГУ»,
доктор технических наук, профессор
Научный редактор:

В.М. Московкин,
доктор географических наук, профессор кафедры мировой экономики НИУ «БелГУ»
Ответственный секретарь

О.В. Шевченко,
Зам. начальника УНИД НИУ «БелГУ»,
кандидат исторических наук, кандидат исторических наук,

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

Белгородского государственного университета
Математика Физика

BELGOROD STATE UNIVERSITY
SCIENTIFIC BULLETIN
Mathematics & Physics

Содержание

МАТЕМАТИКА

Уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с фредгольмовым оператором при производных. **А.В. Глушак 5**

Оператор-функции с многомерными частными интегралами. **А.С. Калитвин, А.И. Иноземцев 19**

О корректной разрешимости некоторых нестационарных задач без начальных условий. **А.В. Костин, М.В. Муковнин, М.Х. Гим 30**

К теории спектра 2×2 - гиперболических систем. **В.В. Корниенко, Д.В. Корниенко 39**

Экстремальные управления и параметрический метод. **Г.Д. Садритдинова 44**

О двух определениях спектра вектора. **В.Е. Струков 50**

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

О дробно-дифференциальном уравнении Лиувилля как уравнении динамики открытой системы. **В.В. Учайкин 58**

Модель акустики в конфигурации упругое тело – пороупругая среда. **А.А. Герус, С.А. Гриценко 68**

Численное решение задачи совместного движения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пористой среде на микроскопическом уровне. **О.А. Гальцева, О.В. Гальцев 75**

Парные корреляционные функции стохастического электромагнитного поля. **Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко 97**

Анализ критической поверхности в пространстве термодинамических параметров стохастической модели бинарной реакции с фазовым переходом. **Фам Минь Туан, Ю.П. Вирченко 108**

О численном решении стационарной задачи теплопроводности методом конечных элементов на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры. **А.П. Мотайло 119**

Главный редактор серии

Ю.П. Вирченко,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

Заместители главного редактора:

Н.В. Малай,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

А.М. Мейрманов,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

Ответственный секретарь

М.Н. Бекназаров,
кандидат физико-математических наук
(НИУ «БелГУ»)

Члены редколлегии:

С.В. Блажевич,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

А.В. Глушак,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

С.А. Гриценко,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

В.В. Красильников,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

О.М. Пенкин,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

А.П. Солдатов,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

В.В. Сыщенко,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

Статьи представлены в авторской
редакции

Компьютерная верстка
Ю.П. Вирченко
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Подписано в печать 23.12.2014

Формат 60×84/8

Гарнитура Courier New

Усл.п.л. 19.53

Тираж 1000 экз.

Заказ 348

Подписные индексы в каталоге агентства
«Роспечать» – 81466

Оригинал-макет тиражирован
в издательском доме «Белгород»

Адрес: 308015, г.Белгород, ул.Победы,
85

Структура приближенного решения в методе конечных элементов (прямоугольные элементы) с использованием билинейных сплайнов и сплайн-интерлинации функции. **О.Н. Литвин, И.В. Нефёдова 128**

ФИЗИКА

Ионная адсорбция и ориентация нематика на карбиде кремния в нематической ячейке. **В.С. Захвалинский, С.И. Кучеев, Н.Н. Межаков, Э.О. Перервенко, Е.А. Пилюк 138**

Усиление электрического поля вблизи золотой оптической антенны. **Мехди Зохраби 143**

Микроволновые свойства металлоуглеродных нанокмполитов с ферромагнитными металлическими включениями.

Л.В. Кожитов, А.П. Кузьменко, Д.Г. Муратов, В.В. Родионов, А.В. Попкова, Е.В. Якушко 151

Информация для авторов **161**

№25 (196) 2014
Issue 37

Scientific peer-reviewed journal

Founded in 1995

Journal included into the list of leading peer-reviewed journals and publications coming out in Russian Federation that are recommended for publishing key results of theses for Doktor and Kandidat degree-applicants.

Founder:

Federal state autonomous educational establishment of highest professional education "Belgorod National Research University".

Publisher:

Belgorod National Research University
National Research University Publishing House "Belgorod".

The journal is registered in Federal service of control over law compliance in the sphere of mass media and protection of cultural heritage.

Mass media registration certificate
ПН №ФС77-21121 May 19, 2005.

Editorial Board of Journal

Editor-in-Chief

O.N. Polukhin,

Rector of Belgorod National Research University, Doctor of political sciences, Professor

Deputy of editor-in-chief

I.S. Konstantinov,

Vice-Rector on Scientific and Innovative Work of Belgorod National Research University, Doctor of technical sciences, Professor

Scientific Editor

V.M. Moskovkin,

Doctor of geographical sciences, Professor of world economy department

Assistant Editor

O.V. Shevchenko,

Deputy of Head of scientific and innovative activity department in Belgorod National Research University, candidate of historical sciences

Belgorod State University
Scientific Bulletin
Mathematics & Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

Белгородского государственного университета
Mathematics & Physics

Contents

MATHEMATICS

Euler-Poisson-Darboux's equations with Fredholm's operator at the derivative. ***A.V. Glushak 5***

Operator-functions with multidimensional partial integrals.
A.S. Kalitvin, A.I. Inozemtsev 19

About well-posed solvability of some nonstationary problems without initial conditions. ***A.V. Kostin, M.V. Mukovnin, M.H. Geem 30***

To theory of 2×2 -hyperbolic system spectrum.
V.V. Kornienko, D.V. Kornienko 39

Extreme controls and parametric method. ***G.D. Sadritdinova 44***
About two concepts of vectors' spectrum. ***V.E. Strukov 50***

MATHEMATICAL PHYSICS, MATHEMATICAL MODELING

On fractional differential Liuville equation describing open systems dynamics. ***V.V. Uchaikin 58***

Acoustic model in the configuration of elastic body – poroelastic medium. ***A.A. Gerus, S.A. Gritsenko 68***

Numerical solution of two immiscible incompressible fluids simultaneous flow in a porous medium at microscopic level problem.
O.A. Galtseva, O.V. Galtsev 75

Pair correlation functions of stochastic electromagnetic field.
Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko 97

Analysis of critical surface in thermodynamic parameters space of binary reaction stochastic model with phase transition.
Pham Minh Tuan, Yu.P. Virchenko 108

About numerical calculation of stationary heat conduction problem by the finite element method on the lattice tetrahedral-octahedral structure. ***A.P. Motailo 119***

Editorial Board of Journal Series

Editor-in-Chief

Yu.P. Virchenko,

Professor of Belgorod National Research University

Deputies of editor-in-chief

N.V. Malay,

Professor of Belgorod National Research University

A.M. Meirmanov,

Professor of Belgorod National Research University

Responsible Secretary

M.N. Beknazarov,

Associated Professor of Belgorod National Research University

Members of Editorial Board

S.V. Blazhevich,

Professor of Belgorod National Research University

A.V. Glushak,

Professor of Belgorod National Research University

S.A. Gritsenko,

Professor of Belgorod National Research University

V.V. Krasilnikov,

Professor of Belgorod National Research University

O.M. Penkin,

Professor of Belgorod National Research University

A.P. Soldatov,

Professor of Belgorod National Research University

V.V. Syshchenko,

Professor of Belgorod National Research University

Proposed articles are given in authors' editing

Dummy layout:

Yu.P. Virchenko

e-mail: virch@bsu.edu.ru

Passed for printing 23.12.2014

Format 60×84/8

Typeface Courier New

Printer's sheets: 19.53

Calculation: 1000 copies

Order 348

Subscription reference in Rospechat' agency catalogue: 81466

Dummy layout is replicated at Belgorod National Research University Publishing House "Belgorod"

Address: 85, Pobedy str., Belgorod, Russia, 308015

Structure of finite element method (rectangular elements) approximations on basis of bilinear splines and spline-interpolation. **O.N. Lytvyn , I.V. Nefedova 128**

PHYSICS

Ion adsorption and alignment of nematic on silicon carbide in nematic cell. **V. Zakhvalinskii, S.I. Kucheev, N.N. Mezhakov, E.O. Perervenko, E.A. Piliuk 138**

Strengthening of electric field near gold optic antenna. **Mekhdi Zokhrabi 143**

Microwave properties of metal-carbon nanocomposites with ferromagnetic metallic inclusions. **L.V. Kozhitov, A.P. Kuzmenko, D.G. Muratov, V.V. Rodionov, A.V. Popkov, E.V. Yakushko 151**

Information for authors **161**



MSC 35Q05

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ С ФРЕДГОЛЬМОВЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, Белгород, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Исследованы условия разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с фредгольмовым оператором при производных.

Ключевые слова: абстрактная задача Коши, уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, фредгольмов оператор, каскадный метод.

Пусть A — линейный замкнутый оператор, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 , с плотной в E_1 областью определения $D(A)$.

Оператор A называется нётеровым, если его образ $\text{im } A$ замкнут, ядро $\ker A$ конечномерно и дефектное пространство $\text{coker } A$ конечномерно. Разность $\dim \ker A - \dim \text{coker } A$ называется индексом оператора A . Будем называть нётеровый оператор с нулевым индексом фредгольмовым.

При $k \geq 0$ рассмотрим задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с фредгольмовым оператором A при производных

$$A(t^k u'(t))' = t^k B u(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(0) = U_0, \quad u'(0) = 0. \quad (2)$$

Для простоты изложения будем считать B ограниченным оператором. Отметим также, что уравнения, неразрешённые относительно старшей производной производной, принято называть уравнениями соболевского типа.

В случае существования ограниченного обратного A^{-1} задача Коши (1), (2) исследована в [1], [2], [3]. В этих работах необходимое и достаточное условия разрешимости задачи сформулированы в терминах оценки нормы степени резольвенты оператора $A^{-1}B$ и ее производных.

При исследовании разрешимости задачи (1), (2) с фредгольмовым оператором A при производных будут использованы результаты работы [4], в которой рассмотрена задача Коши для уравнения первого порядка

$$A u'(t) = B u(t), \quad u(0) = U_0 \quad (3)$$



с фредгольмовым оператором A при производной. Обзор других исследований, посвящённых разрешимости задачи (3) может быть найден в [5]- [8]. По поводу линейных уравнений соболевского типа высокого порядка см. [9].

Предложенный в работах [4], [8] метод (каскадный метод) основан на последовательном расщеплении рассматриваемого уравнения на уравнения в подпространствах, одно из которых конечномерно. При этом в другом из подпространств получается уравнение, с обратимым оператором при старшей производной.

Обозначим через $C^n(\mathfrak{T}, E_0)$ пространство n раз сильно непрерывно дифференцируемых при $t \in \mathfrak{T}$ функций со значениями в $E_0 \subset E$.

Определение 1. Решением уравнения (1) называется функция $u(t) \in C^2(\bar{R}_+, E_1)$, для которой $u'(t)$, $u''(t) \in D(A)$ при $t > 0$, и удовлетворяющая уравнению (1).

Для фредгольмова оператора A с $\dim \ker A = \dim \operatorname{coker} A = m_0$ существует разложение банаховых пространств E_1 и E_2 в прямые суммы (см. [10], с. 336):

$$E_1 = \ker A \dot{+} \operatorname{coim} A, \quad E_2 = \operatorname{im} A \dot{+} \operatorname{coker} A. \quad (4)$$

Для $j = 1, 2$ обозначим единичный оператор в E_j через I_j , проектор на $\ker A$ — через P_0 , $P_0 : E_1 \rightarrow \ker A$, проектор на $\operatorname{coker} A$ — через Q_0 , $Q_0 : E_2 \rightarrow \operatorname{coker} A$, а сужение оператора A на $\operatorname{coim} A \cap D(A) = M$ — через \tilde{A} , $\tilde{A} : M \rightarrow \operatorname{im} A$.

Поскольку оператор \tilde{A} отображает M на $\operatorname{im} A$ взаимно однозначно, то, согласно теореме Банаха, имеет ограниченный обратный оператор $\tilde{A}^{-1} : \operatorname{im} A \rightarrow M$, т.е. $\tilde{A}^{-1} \in L(\operatorname{im} A, M)$.

В дальнейшем нам также понадобится оператор $H_0 = \tilde{A}^{-1}(I_2 - Q_0)$, $H_0 \in L(E_2, M)$.

Лемма 1 [4]. Пусть $x \in D(A)$, $y \in E_2$. Тогда уравнение $Ax = y$ эквивалентно системе

$$Q_0 y = 0, \quad x = H_0 y + P_0 x,$$

где $P_0 x$ — произвольный элемент подпространства $\ker A$.

Многие работы посвящались изучению возмущения фредгольмова оператора A ограниченным оператором λB , где $\lambda \in \mathbb{C}$ — малый по модулю параметр, и исследованию обратимости оператора $A + \lambda B$. При этом существенную роль играют B -жордановы цепочки оператора A , в терминах которых описываются свойства оператора $(A + \lambda B)^{-1}$. Основное содержание настоящей статьи составляет применение результатов, полученных в зависимости от условий существования оператора $(A + \lambda B)^{-1}$, к изучению вопросов существования, единственности и неединственности решения задачи Коши для сингулярного дифференциального уравнения второго порядка с фредгольмовым оператором при производных.

Для $x \in D(A)$, $y \in E_2$ рассмотрим уравнение

$$(A + \lambda B)x = y \quad (5)$$

с малым по модулю параметром λ . Согласно лемме I, уравнение (5) эквивалентно системе

$$Q_0 y - \lambda Q_0 Bx = 0, \quad (6)$$



$$x = H_0 y - \lambda H_0 B x + P_0 x. \tag{7}$$

Если $0 < |\lambda| < \|H_0 B\|^{-1}$, то уравнение (7) принимает вид

$$x = (I_1 + \lambda H_0 B)^{-1} (H_0 y + P_0 x), \tag{8}$$

где $P_0 x$ — произвольный элемент подпространства $\ker A$. Подставляя (8) в (6), получим

$$Q_0 B (I_1 + \lambda H_0 B)^{-1} P_0 x = \frac{1}{\lambda} (Q_0 - \lambda Q_0 B (I_1 + \lambda H_0 B)^{-1} H_0) y. \tag{9}$$

Введём обозначения

$$Q_0 B = S_0 \in L(E_1, \text{coker } A), \quad H_0 B = T_0 \in L(E_1, M), \quad S_0 P_0 = A_1 \in L(\ker A, \text{coker } A),$$

$$P_0 x = x_1 \in \ker A, \quad \frac{1}{\lambda} (Q_0 - \lambda Q_0 B (I_1 + \lambda H_0 B)^{-1} H_0) y = y_1 \in \text{coker } A$$

и запишем уравнение (9) в виде

$$A_1 x_1 = \lambda S_0 T_0 (I_1 + \lambda T_0)^{-1} x_1 + y_1. \tag{10}$$

Таким образом, при $0 < |\lambda| < \|T_0\|^{-1}$ уравнение (5) эквивалентно системе (8), (10).

Если оператор A_1 обратим, то из (10) элемент x_1 находится единственным образом, что влечёт за собой существование и ограниченность оператора $(A + \lambda B)^{-1}$ при

$$0 < |\lambda| < \|T_0\|^{-1} (1 + \|A_0^{-1} S_0\|)^{-1}.$$

Если оператор A_1 необратим, то в уравнении (10) A_1 является конечномерным фредгольмовым оператором, причем $\dim \ker A_1 = \dim \text{coker } A_1 = m_1 \leq m_0$ и $m_1 = m_0$ только тогда, когда $A_1 = 0$. Если же $A_1 \neq 0$, то $m_1 < m_0$ и тогда подпространства $\ker A$, $\text{coker } A$ разложимы в прямые суммы подпространств

$$\ker A = \ker A_1 \dot{+} \text{coim } A_1, \quad \text{coker } A = \text{im } A_1 \dot{+} \text{coker } A_1.$$

Повторяя приведённые выше рассуждения, заменим уравнение (10) эквивалентной ему системой. После неоднократного применения леммы 1 устанавливается зависимость структуры решения уравнения (5) от поведения конечномерных операторов $A_0 = A$, $A_j \in L(\ker A_{j-1}, \text{coker } A_{j-1})$, $j \geq 1$.

Операторы A_j для $j \geq 1$ вычисляются по формулам $A_j = S_{j-1} P_{j-1}$, где

$$S_j = Q_j S_{j-1} T_{j-1}, \quad T_j = T_{j-1} - H_j S_{j-1} T_{j-1}, \quad H_j = \tilde{A}_j^{-1} (Q_{j-1} - Q_j), \tag{11}$$

\tilde{A}_j — сужение A_j на M_j — прямое дополнение к $\ker A_j$ в $\ker A_{j-1}$, P_j — проектор на $\ker A_j$ в $\ker A_{j-1}$, Q_j — проектор на $\text{coker } A_j$ в $\text{coker } A_{j-1}$, $m_j = \dim \ker A_j = \dim \text{coker } A_j$.

Теорема 1 [4]. *Для того, чтобы оператор $A + \lambda B$ имел обратный при достаточно малых по модулю λ , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое натуральное число p , что оператор A_p обратим, и в этом случае*

$$(A + \lambda B)^{-1} = \frac{(-1)^{p-1}}{\lambda^p} R_p Q_{p-1} Q_{p-2} \cdots Q_1 Q_0 +$$



$$+\frac{(-1)^{p-2}}{\lambda^{p-1}} (R_p Q_{p-1} Q_{p-2} \cdots Q_1 S_0 H_0 (I_2 - BR_1 Q_0) + R_{p-1} Q_{p-2} \cdots Q_1 Q_0) + \frac{(-1)^{p-3}}{\lambda^{p-2}} \cdots,$$

где $R_p = A_p^{-1}$, $R_{p-j} = H_{p-j} + T_{p-j} R_{p-j+1} Q_{p-j}$ для $j = 1, 2, \dots, p-1$.

Замечание 1 [4]. Если оператор $(A + \lambda B)^{-1}$ существует при некотором λ_0 , то он существует и ограничен при всех $\lambda : 0 < |\lambda| < |\lambda_0|$ из некоторой «проколотой» окрестности нуля.

Пусть при достаточно малых по модулю λ оператор $A + \lambda B$ обратим. Тогда введём в рассмотрение оператор $A_\lambda = I_1 - \lambda(A + \lambda B)^{-1}B$, $A_\lambda \in L(E_1, E_1)$, $\ker A_\lambda = \ker A$.

Теорема 2 [4]. Число 0 для оператора A_λ при достаточно малых по модулю λ является нормальным собственным числом.

Утверждение теоремы 2 означает (см. [11], с. 23), что алгебраическая кратность собственного числа 0 конечна, а пространство E_1 разлагается в прямую сумму инвариантных относительно A_λ подпространств

$$E_1 = \mathfrak{M} \dot{+} \mathfrak{N}. \quad (12)$$

Разложение (12) не зависит от λ , при этом \mathfrak{N} — n -мерное корневое подпространство оператора A_λ , $n = m_0 + m_1 + \cdots + m_{p-1}$, а $\mathfrak{M} = \{x \in E_1 : S_j x = 0, j = 0, 1, \dots, p-1\}$, точнее, $\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}}_p$, указывая на зависимость от p .

Сужение \tilde{A}_λ оператора A_λ на \mathfrak{M} имеет ограниченный обратный

$$\tilde{A}_\lambda^{-1} = I_1 + \lambda T_p, \quad (13)$$

а операторы

$$\Omega = \prod_{j=0}^{p-1} (I_1 - R_{p-j} S_{p-j-1}), \quad \mathfrak{F} = I_1 - \Omega \quad (14)$$

проектируют E_1 , соответственно, на \mathfrak{M} и \mathfrak{N} .

Как мы увидим из дальнейшего, свойства решения задачи Коши (1), (2) с фредгольмовым оператором A при производных полностью зависят от поведения оператора $A + \lambda B$. Если этот оператор обратим при достаточно малых по модулю λ , то тогда существует оператор A_λ , для которого, согласно теореме 2, число 0 является нормальным собственным числом. При этом справедливо разложение (12), осуществляемое с помощью проекторов Ω и \mathfrak{F} , вычисляемых по формулам (14). В свою очередь, n -мерное корневое подпространство \mathfrak{N} может быть разложено в прямую сумму подпространств:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 \dot{+} \mathfrak{N}_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{N}_{p-1}, \quad (15)$$

где $\mathfrak{N}_0 = \ker A_\lambda = \ker A$, \mathfrak{N}_j — линейная оболочка j -ых присоединённых элементов оператора A_λ для $j = 1, 2, \dots, p-1$. Представление (14) справедливо в силу конечномерности подпространства \mathfrak{N} и линейной независимости присоединённых элементов оператора A_λ . Окончательно, $E_1 = \mathfrak{M} \dot{+} \mathfrak{N}_0 \dot{+} \mathfrak{N}_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{N}_{p-1}$, а любой элемент $x \in E_1$ представим в виде

$$x = x_{\mathfrak{M}} + x_0 + x_1 + \cdots + x_{p-1}, \quad (16)$$



Замечание 2 [4]. Если оператор $A + \lambda B$ не является обратимым ни при каком достаточно малом по модулю λ , то существует такое натуральное число q , что $m_0 \geq m_1 \geq \dots > m_q = m_{q+1} > 0$. В этом случае $A_{q+j} = 0$, а $P_{q+j} = P_q$, $Q_{q+j} = Q_q$, $T_{q+j} = T_q$, $S_{q+j} = S_q T_q^j$ для $j \geq 1$ и элементы из $\ker A_q$ имеют цепочки из B -присоединённых элементов бесконечной длины. $\mathfrak{M} = \{x \in E_1 : S_j x = 0, j = 0, 1, 2, \dots\}$ и, в отличие от теоремы 3, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\infty$.

Теорема 4. Пусть оператор $A + \lambda B$ не является обратимым ни при каком достаточно малом по модулю λ . Задача (1), (2) имеет решение $u(t)$ в том и только в том случае, если $U_0 \in \mathfrak{M}$. При этом решение $u(t) \in \mathfrak{M}$ и неединственно. Оно имеет вид

$$u(t) = Y_k(t; T_q)U_0 + \frac{t^{1-k}Y_{2-k}(t; T_q)}{1-k} \int_0^t \tau^k Y_k(\tau; T_q)P_q u(\tau) d\tau - \frac{Y_k(t; T_q)}{1-k} \int_0^t \tau Y_{2-k}(\tau; T_q)P_q u(\tau) d\tau, \quad k \neq 1, \quad (21)$$

$$u(t) = Y_1(t; T_q)U_0 + Z_1(t; T_q) \int_0^t \tau Y_1(\tau; T_q)P_q u(\tau) d\tau - Y_1(t; T_q) \int_0^t \tau Z_1(\tau; T_q)P_q u(\tau) d\tau, \quad k = 1, \quad (22)$$

где $t^k P_q u(t)$ — произвольная непрерывная функция от t от значениями в $\ker A_q$,

$$Z_1(t; T_q) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1 - \tau^2)^{-1/2} \ln(t - t\tau^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\tau s)^{2j} T_q^j}{(2j)!} d\tau.$$

□ Необходимость. Уравнение (1) в силу леммы 1 эквивалентно системе

$$S_0 u(t) \equiv 0, \quad (23)$$

$$(t^k u'(t))' = t^k (T_0 u(t) + P_0 u(t)), \quad t > 0, \quad (24)$$

где $t^k P_0 u(t)$ — произвольная непрерывная функция от значениями в $\ker A$.

Продифференцировав (23) по t и подставив вместо $(t^k u'(t))'$ выражение (24), получим

$$A_1 P_0 u(t) \equiv -S_0 T_0 u(t). \quad (25)$$

Согласно лемме 1 уравнение (25) эквивалентно системе

$$S_1 u(t) \equiv 0, \quad (26)$$

$$P_0 u(t) = P_1 u(t) - H_1 S_0 T_0 u(t). \quad (27)$$

Подставляя (27) в (24), получим

$$(t^k u'(t))' = t^k (T_1 u(t) + P_1 u(t)), \quad (28)$$



где $t^k P_1 u(t)$ — произвольная непрерывная функция от значениями в $\ker A_1$.

Продолжая рассуждения, на q -ом шаге получим уравнение

$$A_q P_{q-1} u(t) \equiv -S_{q-1} T_{q-1} u(t).$$

с необратимым оператором A_q . Следовательно,

$$(t^k u'(t))' = t^k (T_q u(t) + P_q u(t)), \tag{29}$$

где $t^k P_q u(t)$ — произвольная непрерывная функция от значениями в $\ker A_q$.

Заметим, что на каждом из первых q шагов происходит уточнение произвольной функции $t^k P_j u(t)$, поскольку $\ker A_j \subseteq \ker A_{j-1}$, а затем, в силу равенства $P_{q+j} = P_j$ для $j \geq 1$, произвольная функция $t^k P_{q+j} u(t)$ всё время принадлежит $\ker A_q$.

Таким образом, в уравнении (29) слагаемое $t^k P_q u(t)$ произвольно, а оператор T_q ограничен. Следовательно (см. [12]), решение $u(t)$ вычисляется по формулам (21), (22). Из соотношений (23), (26) выводим равенства $S_j u(t) \equiv 0$ для любого $j \geq 0$. Стало быть, $U_0 \in \mathfrak{M}$ и необходимость утверждения в теореме 4 доказана.

Достаточность. Пусть $U_0 \in \mathfrak{M}$ и $k \neq 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим определяемую равенством (21) функцию $u(t)$. Очевидно, $u(0) = U_0$. Покажем, что эта функция $u(t)$ является решением уравнения (1) или также, как и при доказательстве необходимости, является решением системы (23), (24). Дифференцируя (21), получим

$$\begin{aligned} (t^k u'(t))' &= t^k (T_q u(t) + P_q u(t)) = t^k (T_0 u(t) + (T_q - T_0)u(t) + P_q u(t)) = \\ &= t^k (T_0 u(t) + P_0 u_1(t)), \end{aligned} \tag{30}$$

где функция $P_0 u_1(t)$ принадлежит $\ker A$.

Осталось проверить выполнение тождества (23). По индукции (см. [4]) доказывается равенство

$$S_j (t^k u'(t))' = t^k S_{j+1} u(t), \quad j = 0, 1, \dots, q - 1. \tag{31}$$

Применим далее оператор S_q к определяемой равенством (21) функции $u(t)$. Для $k \neq 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ получим

$$\begin{aligned} S_q u(t) &= \Gamma(k/2 + 1/2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j} S_q T_q^j U_0}{j! \Gamma(k/2 + 1/2 + j)} + \\ &+ \frac{\pi t^{1-k}}{2 \cos(\pi k/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j}}{j! \Gamma(3/2 - k/2 + j)} \int_0^t \tau^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\tau/2)^{2i} S_q T_q^{i+j} P_q u(\tau)}{i! \Gamma(k/2 + 1/2 + i)} d\tau - \\ &- \frac{\pi}{2 \cos(\pi k/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j}}{j! \Gamma(k/2 + 1/2 + j)} \int_0^t \tau \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\tau/2)^{2i} S_q T_q^{i+j} P_q u(\tau)}{i! \Gamma(3/2 - k/2 + i)} d\tau = \\ &= \Gamma(k/2 + 1/2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j} S_{q+j} U_0}{j! \Gamma(k/2 + 1/2 + j)} + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{\pi t^{1-k}}{2 \cos(\pi k/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j}}{j! \Gamma(3/2 - k/2 + j)} \int_0^t \tau^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\tau/2)^{2i} A_{q+1+i+j} u(\tau)}{i! \Gamma(k/2 + 1/2 + i)} d\tau - \\
 & - \frac{\pi}{2 \cos(\pi k/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j}}{j! \Gamma(k/2 + 1/2 + j)} \int_0^t \tau \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\tau/2)^{2i} A_{q+1+i+j} u(\tau)}{i! \Gamma(3/2 - k/2 + i)} d\tau \equiv 0. \quad (32)
 \end{aligned}$$

Из (32) и (31) вытекает равенство

$$S_{q-1} (t^k u'(t))' = 0. \quad (33)$$

Интегрируя равенство (33), и учитывая условие $S_{q-1} u(0) = S_{q-1} U_0 = 0$, последовательно получим

$$S_{q-1} u'(t) \equiv 0, \quad S_{q-1} u(t) \equiv 0.$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, придём к тождеству $S_0 u(t) \equiv 0$ при $t \in [0, \infty)$ и доказательство достаточности для случая $k \neq 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ завершено.

Аналогично рассматривается и случай $k = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. ■

Далее при $k \geq 0$ рассмотрим задачу Коши для уравнения, отличающегося от уравнения (1) расположением оператора A , а именно:

$$(t^k A v'(t))' = t^k B v(t), \quad t > 0, \quad (34)$$

$$v(0) = U_0, \quad v'(0) = 0. \quad (35)$$

Определение 2. Решением уравнения (34) называется функция $v(t) \in C^1(\bar{R}_+, E_1)$, для которой $v'(t) \in D(A)$ при $t > 0$, $Av'(t) \in C^1(R_+, E_1)$, и удовлетворяющая уравнению (34).

Теорема 5. Пусть оператор $A + \lambda B$ обратим при достаточно малых по модулю λ . Для того, чтобы задача (34), (35) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $U_0 \in \mathfrak{M}$. В этом случае решение $v(t)$ единственно, принадлежит \mathfrak{M} и имеет вид

$$v(t) \equiv Y_k(t; T_p) U_0 = \Gamma(k/2 + 1/2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j} T_p^j U_0}{j! \Gamma(k/2 + 1/2 + j)}, \quad (36)$$

где число p и оператор T_p определяются теоремой 1 и равенствами (11).

□ Уравнение (34) проинтегрируем и к обеим частям полученного уравнения применим оператор $(A + \lambda B)^{-1}$. В банаховом пространстве E_1 будем иметь эквивалентную (34), (35) задачу нахождения решения уравнение

$$A_\lambda v'(t) = \frac{1}{\lambda t^k} \int_0^t \tau^k (I_1 - A_\lambda) v(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad (37)$$



удовлетворяющего условию $v(0) = U_0$, при этом условие $v'(0) = 0$ автоматически выполнено.

Используя представление $v(t) = v_{\mathfrak{M}}(t) + v_0(t) + v_1(t) + \dots + v_{p-1}(t)$ (см. (16)) и замечая, что $A_\lambda v_0(t) = 0$, $A_\lambda v_j(t) \in \mathfrak{N}_{j-1}$, от уравнения (37) перейдём к уравнениям, соответственно, в подпространствах \mathfrak{M} , \mathfrak{N}_0 , ..., \mathfrak{N}_{p-1}

$$A_\lambda v'_{\mathfrak{M}}(t) = \frac{1}{\lambda t^k} \int_0^t \tau^k (I_1 - A_\lambda) v_{\mathfrak{M}}(\tau) d\tau, \tag{38}$$

$$A_\lambda v'_1(t) = \frac{1}{\lambda t^k} \int_0^t \tau^k (v_0(\tau) - A_\lambda v_1(\tau)) d\tau,$$

.....

$$A_\lambda v'_{p-1}(t) = \frac{1}{\lambda t^k} \int_0^t \tau^k (v_{p-2}(\tau) - A_\lambda v_{p-1}(\tau)) d\tau,$$

$$0 = \frac{1}{\lambda t^k} \int_0^t \tau^k v_{p-1}(\tau) d\tau.$$

Из последнего уравнения следует, что $v_{p-1}(t) = 0$. Учитывая это равенство, из предыдущего получим $v_{p-2}(t) = 0$. Аналогично установим, что $v_{p-3}(t) = \dots = v_0(t) = 0$. Таким образом, $\mathfrak{P}v(t) \equiv 0$ для $t \geq 0$.

К обеим частям уравнения (38), рассматриваемого в подпространстве \mathfrak{M} , применим оператор \tilde{A}_λ^{-1} . Учитывая равенство (13), получим

$$v'_{\mathfrak{M}}(t) = \frac{1}{t^k} \int_0^t \tau^k T_p v_{\mathfrak{M}}(\tau) d\tau. \tag{39}$$

Уравнение (39) — это уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу с ограниченным оператором T_p , следовательно, задача Коши (34), (35) при любом $U_0 \in \mathfrak{M}$ имеет единственное решение, определяемое равенством (36), причём это решение не зависит от λ . ■

Из теорем 3 и 5 следует, что если оператор $A + \lambda B$ обратим при достаточно малых по модулю λ , то задачи (1), (2) и (34), (35) эквивалентны, а их решения совпадают, $u(t) \equiv v(t)$.

Аналогично теореме 4 устанавливается следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть оператор $A + \lambda B$ не является обратимым ни при каком достаточно малом по модулю λ . Задача (34), (35) имеет решение $v(t)$ в том и только в том случае, когда $U_0 \in \mathfrak{M}$. При этом решение $v(t) \in \mathfrak{M}$ и неединственно. Оно имеет вид

$$v(t) = Y_k(t; T_q)U_0 +$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{t^{1-k} Y_{2-k}(t; T_q)}{1-k} \int_0^t \tau^k Y_k(\tau; T_q) P_q v(\tau) d\tau - \frac{Y_k(t; T_q)}{1-k} \int_0^t \tau Y_{2-k}(\tau; T_q) P_q v(\tau) d\tau, \quad k \neq 1, \\
 & v(t) = Y_1(t; T_q) U_0 + \\
 & + Z_1(t; T_q) \int_0^t \tau Y_1(\tau; T_q) P_q v(\tau) d\tau - Y_1(t; T_q) \int_0^t \tau Z_1(\tau; T_q) P_q v(\tau) d\tau, \quad k = 1,
 \end{aligned}$$

где $t^k P_q v(t)$ — произвольная непрерывная функция от t со значениями в $\ker A_q$.

Наконец, при $k \geq 0$ рассмотрим ещё одну задачу Коши

$$(t^k (Aw(t)))' = t^k Bw(t), \quad t > 0, \quad (40)$$

$$w(0) = U_0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} (Aw(t))' = 0. \quad (41)$$

Определение 3. Решением уравнения (40) называется функция $w(t) \in C(\bar{R}_+, D(A))$, для которой $Aw(t) \in C^1(\bar{R}_+, E_1) \cap C^2(R_+, E_1)$, и удовлетворяющая уравнению (40).

Из существования производной у функции $Aw(t)$ не следует, вообще говоря, дифференцируемость $w(t)$, поэтому решение $w(t)$ уравнения (40) представим в виде

$$w(t) = (I_1 - P_0)w(t) + P_0w(t). \quad (42)$$

При этом $Aw(t) = A(I_1 - P_0)w(t)$, и из дифференцируемости функции $Aw(t)$ следует дифференцируемость функции $(I_1 - P_0)w(t)$, поскольку сужение оператора A на M , которое мы обозначили через \tilde{A} , обратимо. Стало быть, уравнение (40) можно записать как

$$(t^k A((I_1 - P_0)w(t)))' = t^k B(I_1 - P_0)w(t) + t^k B P_0 w(t), \quad t > 0,$$

или, учитывая второе из условий (41), в виде

$$A((I_1 - P_0)w(t))' = \frac{1}{t^k} \int_0^t (\tau^k B(I_1 - P_0)w(\tau) + \tau^k B P_0 w(\tau)) d\tau, \quad t > 0. \quad (43)$$

В силу леммы 1 уравнение (43) эквивалентно системе

$$Q_0 B(I_1 - P_0)w(t) + Q_0 B P_0 w(t) \equiv 0, \quad t \geq 0,$$

$$\frac{d}{dt} (I_1 - P_0)w(t) = \frac{1}{t^k} \int_0^t \tau^k (H_0 B(I_1 - P_0)w(\tau) + H_0 B P_0 w(\tau)) d\tau,$$

которую перепишем в виде

$$S_0(I_1 - P_0)w(t) + A_1 P_0 w(t) \equiv 0, \quad (44)$$



$$\frac{d}{dt}(I_1 - P_0)w(t) = \frac{1}{t^k} \int_0^t \tau^k (T_0(I_1 - P_0)w(\tau) + T_0P_0w(\tau)) d\tau. \quad (45)$$

Выразим элемент $P_0w(t)$ с помощью (44) через $(I_1 - P_0)w(t)$, и из уравнения (45) найдём $(I_1 - P_0)w(t)$. Так как A_1 — фредгольмов оператор, то соотношение (44) эквивалентно системе

$$Q_1S_0(I_1 - P_0)w(t) \equiv 0, \quad (46)$$

$$P_0w(t) = -H_1S_0(I_1 - P_0)w(t) + P_1w(t). \quad (47)$$

Подставив выражение для $P_0w(t)$ из (47) в уравнение (45), получим

$$\frac{d}{dt}(I_1 - P_0)w(t) = \frac{1}{t^k} \int_0^t \tau^k (T_0(I_1 - H_1S_0)(I_1 - P_0)w(\tau) + T_0P_1w(\tau)) d\tau. \quad (48)$$

Соотношения (44), (45) эквивалентны соотношениям (46), (47), (48). Если из (47) выразить $P_0w(t)$ и подставить в (42), то вместо (42) для $w(t)$ получим новое представление

$$w(t) = (I_1 - P_0)w(t) - H_1S_0(I_1 - P_0)w(t) + P_1w(t) = (I_1 - H_1S_0)(I_1 - P_0)w(t) + P_1w(t). \quad (49)$$

Продифференцируем соотношение (46) и подставим в полученное равенство выражение (48) для $\frac{d}{dt}(I_1 - P_0)w(t)$. Получим тождество

$$\frac{1}{t^k} \int_0^t \tau^k Q_1S_0(T_0(I_1 - H_1S_0)(I_1 - P_0)w(\tau) + T_0P_1w(\tau)) d\tau \equiv 0,$$

из которого выводим

$$Q_1S_0T_0(I_1 - P_0)w(t) - Q_1S_0T_0H_1S_0(I_1 - P_0)w(t) + Q_1S_0T_0P_1w(t) \equiv 0,$$

или

$$A_2P_1w(t) + S_1(I_1 - H_1S_0)(I_1 - P_0)w(t) = 0. \quad (50)$$

Оператор A_2 фредгольмов, поэтому (50) эквивалентно системе

$$Q_2S_1(I_1 - H_1S_0)(I_1 - P_0)w(t) = 0, \quad (51)$$

$$P_1w(t) = -H_2S_1(I_1 - H_1S_0)(I_1 - P_0)w(t) + P_2w(t), \quad (52)$$

где $P_2w(t) \in \ker A_2$.

Подставим формулу (52) в уравнения (48) и (49), тогда вместо них получим, соответственно, уравнения

$$\frac{d}{dt}(I_1 - P_0)w(t) = \frac{1}{t^k} \int_0^t \tau^k (T_0(I_1 - H_2S_1)(I_1 - H_1S_0)(I_1 - P_0)w(\tau) + T_0P_2w(\tau)) d\tau,$$



$$w(t) = (I_1 - H_2 S_1)(I_1 - H_1 S_0)(I_1 - P_0)w(t) + P_1 w(t).$$

Продолжая аналогичные действия дальше, приходим к следующему результату.

Лемма 2. При $q \in \mathbb{N}$ уравнение (40) эквивалентно системе

$$S_0 w(t) \equiv 0,$$

$$Q_1 S_0 (I_1 - P_0) w(t) \equiv 0,$$

$$Q_2 S_1 (I_1 - H_1 S_0) (I_1 - P_0) w(t) \equiv 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$Q_q S_{q-1} F_{q-1} (I_1 - P_0) w(t) \equiv 0,$$

$$\frac{d}{dt} (I_1 - P_0) w(t) = \frac{1}{t^k} \int_0^t \tau^k (T_0 F_q (I_1 - P_0) w(\tau) + T_0 P_q w(\tau)) d\tau, \quad (53)$$

$$w(t) = F_q (I_1 - P_0) w(t) + P_q w(t), \quad (54)$$

где $F_j = \prod_{i=1}^j (I_1 - H_{j+1-i} S_{j-i})$, $F_0 = I$.

Свойства решения рассматриваемой задачи Коши (40), (41) также зависят от обратимости при достаточно малых по модулю λ оператора $A + \lambda B$.

Теорема 7. Пусть оператор $A + \lambda B$ обратим при достаточно малых по модулю λ . Для того, чтобы задача (40), (41) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы начальный элемент U_0 удовлетворял условиям

$$S_0 U_0 = 0, \quad Q_j S_{j-1} F_{j-1} (I_1 - P_0) U_0 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p-1. \quad (55)$$

При выполнении этих условий $w(t)$ единственно, обладает свойствами

$$S_0 w(t) \equiv 0, \quad Q_j S_{j-1} F_{j-1} (I_1 - P_0) w(t) \equiv 0, \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p-1 \quad (56)$$

и имеет вид $w(t) = Y_k(t; T_p) U_0$, где число p и оператор T_p определяются теоремой 1 и равенствами (11).

□ В силу теоремы 1 существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что A_p обратим. Тогда в уравнении (53) $q = p$ и отсутствует слагаемое $T_0 P(A_p) w(t)$. Уравнение (53) представляет собою уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу с ограниченным оператором $T_0 F_p$, следовательно,

$$(I_1 - P_0) w(t) = Y_k(t; T_0 F_p) (I_1 - P_0) w(0). \quad (57)$$

Из (54) при $q = p$ и начальных условий (41) выводим

$$F_p (I_1 - P_0) w(0) = U_0. \quad (58)$$

Воспользовавшись легко проверяемыми свойствами

$$F_p T_0 = T_p, \quad F_p Y_k(t; T_0 F_p) = Y_k(t; T_p) F_p,$$



которые следуют из определения F_p , T_p и $Y_k(t; T_p)$, из (54), (57), (58) получим

$$w(t) = F_p Y_k(t; T_0 F_p) (I_1 - P_0) w(0) = Y_k(t; T_p) U_0.$$

Справедливость равенств (56) вытекает из леммы 2. ■

Заметим, что условия (55) накладываются на составляющую начального элемента, поэтому менее жёсткие, чем условие принадлежности подпространству \mathfrak{M} , налагаемому в теоремах 3 и 5. При выполнении более жёстких ограничений решения $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ совпадают.

Используя лемму 2, аналогично доказывается и следующая теорема.

Теорема 8. Пусть оператор $A + \lambda B$ не является обратимым ни при каком достаточно малом по модулю λ . Задача (40), (41) имеет решение $w(t)$ в том и только в том случае, когда выполнены равенства (55) для $j \in \mathbb{N}$. При этом решение $w(t)$ обладает свойствами (56) для $j \in \mathbb{N}$ и неединственно. Оно имеет вид

$$w(t) = Y_k(t; T_q) U_0 + \frac{t^{1-k} Y_{2-k}(t; T_q)}{1-k} \int_0^t \tau^k Y_k(\tau; T_q) T_0 P_q w(\tau) d\tau - \frac{Y_k(t; T_q)}{1-k} \int_0^t \tau Y_{2-k}(\tau; T_q) T_0 P_q w(\tau) d\tau, \quad k \neq 1,$$

$$w(t) = Y_1(t; T_q) U_0 + Z_1(t; T_q) \int_0^t \tau Y_1(\tau; T_q) T_0 P_q w(\tau) d\tau - Y_1(t; T_q) \int_0^t \tau Z_1(\tau; T_q) T_0 P_q w(\tau) d\tau, \quad k = 1,$$

где число q определено в замечании 2, $t^k P_q w(t)$ — произвольная непрерывная функция от t со значениями в $\ker A_q$ и такая, что $P_q w(0) = P_q U_0$.

Литература

1. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // ДАН. — 1997. — 352, № 5. — С.587-589.
2. Глушак А.В., Покручин О.А. Необходимое условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. — 2012. — №11(130). — Вып. 27. — С.29-37.
3. Глушак А.В., Покручин О.А. Достаточное условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. — 2014. Вып. 35. —
4. Зубова С.П., Чернышов К.И. О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения и их применение. Вып. 14. Вильнюс: Институт физики и математики АН Литовской ССР, 1976. — С.21-39.
5. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.
6. Федоров В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. — 2000. — 12, Вып.3. — С.173-200.
7. Федоров В. Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах // Мат. сб. — 2004. — 195, №8. — С.131-160.
8. Зубова С.П. Метод каскадной декомпозиции решения задач для псевдорегулярных уравнений / Дис. докт. физ.-мат. наук. Белгород. 2013.



9. Замышляева А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / Челябинск: ЮУрГУ, 2012.
10. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.: Наука, 1969.
11. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов / М.: Наука, 1965.
12. Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Известия ВУЗов, сер. математика. – 1986. – №6. – С.55-56.

**EULER-POISSON-DARBOUX's EQUATIONS
WITH FREDHOLM's OPERATOR AT THE DERIVATIVE**

A.V. Glushak

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. It is investigated the solvability of an abstract Euler-Poisson-Darboux equation with the Fredholm operator at the derivatives of equation coefficients.

Key words: abstract Cauchy problem, equation of Euler-Poisson-Darboux, Fredholm's operator, cascade method.



MSC 45A05

ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

А.С. Калитвин, А.И. Иноземцев

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, Россия, e-mail: kalitvinas@mail.ru, inozemcev.a.i@gmail.com

Аннотация. Получены критерии в пространствах $C(D)$, $L^1(D)$, $L^\infty(D)$ и достаточные условия в пространстве $L^p(D)$ ($1 < p < \infty$) сильной и равномерной непрерывности оператор-функций с многомерными частными интегралами, где $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Ключевые слова: оператор с частными интегралами, многомерные частные интегралы, сильная и равномерная непрерывность, пространства со смешанной нормой, регулярный и двойственный оператор.

1. Введение. Статья содержит условия сильной непрерывности и непрерывности по норме оператор-функций с многомерными частными интегралами в пространствах $C(D)$, где $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$, и $L^p(D)$, где $1 \leq p \leq \infty$. В случае $D = [a, b] \times [c, d]$ такие условия изучались в работах Ю. Аппелля, П. П. Забрейко, А. С. Калитвина, В.А. Калитвина, Е.В. Фроловой и содержатся в работах [1-4]. В работе установлены критерии сильной и равномерной непрерывности оператор-функций с многомерными частными интегралами в пространствах $C(D)$, $L^1(D)$ и $L^\infty(D)$ и приведены достаточные условия в $L^p(D)$ ($1 < p < \infty$), где $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Существенную роль при этом играют критерии и достаточные условия действия операторов с многомерными частными интегралами в заданных пространствах [1-4].

2. Критерии действия операторов с многомерными частными интегралами в пространствах $C(D)$, $L^\infty(D)$ и $L^1(D)$.

Определение 1. *Линейным оператором с многомерными частными интегралами называется оператор*

$$(Kx)(t) = \sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} k_{\alpha}(t, S_{\alpha}) x(s_{\alpha}) dS_{\alpha}, \quad (1)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, причем $\alpha_j \in \{0, 1\}$ при $j = 1, \dots, n$, $t \in R^n$, $S_{\alpha} \subset \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$, $dS_{\alpha} \subset \{d\tau_1, d\tau_2, \dots, d\tau_n\}$.

Вектор s_{α} получается заменой компонент вектора t соответствующими элементами S_{α} , $j = 1, \dots, n$, $D_{\alpha} = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]^{\alpha_j}$ — измеримые множества, а интегралы понимаются в смысле Лебега. В случае $\alpha_k = 0$ получим $[a_k, b_k]^0$, тогда отрезок $[a_k, b_k]$ исключается из декартова произведения.



Обозначим

$$]K[x](t) = \sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(t, S_{\alpha})| x(s_{\alpha}) dS_{\alpha}$$

и

$$(K^{\#}y)(t) = \sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} k_{\alpha}^{*}(t, S_{\alpha}) y(s_{\alpha}) dS_{\alpha},$$

где $k_{\alpha}^{*}(t, S_{\alpha}) = k_{\alpha}(s_{\alpha}, t_{\alpha})$, t_{α} — набор координат t_j , для которых $\alpha_j = 1$.

Достаточные условия и критерий действия оператора (1) в пространстве $C(D)$ приведены в работе [5].

Критерии действия оператора (1) в пространствах $L^p(D)$, при $p = 1$ или $p = \infty$ содержатся в теоремах 1 и 2. Доказательства лемм 1 и 2 аналогично доказательствам, приведенным в работе [2].

Пусть (D, Σ) — пространство с σ -конечной полной мерой, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(D, \Sigma)$ — пространство всех вещественных измеримых почти всюду конечных функций на D . Эквивалентные функции отождествляются. Пространство \mathcal{M} линейно, в нем естественно вводится полуупорядоченность: для $x, y \in \mathcal{M}$ $x \leq y$, если $x(t) \leq y(t)$ почти всюду на D .

Идеальным пространством (ИП) на D называется линейное множество X в \mathcal{M} такое, что из $x \in X$, $y \in \mathcal{M}$, $|y| \leq |x|$ следует $y \in X$. Для каждой функции x определяется носитель $\text{supp } x = \{t \in D: x(t) \neq 0\}$, а для пространства X носитель определяется как наименьшее измеримое множество, вне которого все функции из X равны нулю. В дальнейшем считаем, что D — носитель пространства X и пользуемся записью $X(D)$. Носители определяются с точностью до множества нулевой меры. ИП с монотонной нормой ($\|x\| \leq \|y\|$, если $x, y \in X$ и $|x| \leq |y|$) называется нормированным идеальным пространством (НИП), полное нормированное идеальное пространство называется банаховым идеальным пространством (БИП).

Определение 2. *Линейный оператор $A: X \rightarrow Y$ называется регулярным, если существует такой положительный оператор \tilde{A} , действующий из БИП X в БИП Y , что $|Ax| \leq \tilde{A}|x|$ ($x \in X$). (Оператор \tilde{A} называется положительным, если $\tilde{A}x \geq \theta$ при $x \geq \theta$). Оператор \tilde{A} называют мажорантой оператора A . Наименьшую мажоранту (в смысле индуцированной упорядоченности пространства линейных операторов) называют абсолютной величиной A и обозначают через $|A|$.*

Лемма 1. *Пусть оператор K с многомерными частными интегралами действует из БИП X в БИП Y . Тогда он является регулярным оператором в том и только в том случае, когда из X в Y действует оператор $]K[$. При этом $|K| =]K[$.*

□ **Достаточность.** Очевидное неравенство $|Kx| \leq]K[|x|$ ($x \in X$), означает, что оператор $]K[$ является одной из мажорант оператора K . Получим $|K| \leq]K[$. Таким образом оператор K — регулярен.

Необходимость. Пусть K — регулярный оператор из X в Y . Для любой неотрицательной функции x из X $|K|x = \sup\{|Kz|: |z| \leq x\} \in Y$ [6]. В множестве $\{z: |z| \leq x\}$



существует счетное и плотное по метрике $\mathcal{M}(D)$ множество E функций, для которого $|K|x = \sup\{|Kz|: z \in E\}$ [7]. Построим такие последовательности множеств $D_{\alpha k}$, ($k = 1, 2, \dots$), что $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{mes}(D_{\alpha k}) = 0$, $D_\alpha = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{\alpha k}$ и каждая точка $t_\alpha \in D_\alpha$ принадлежит бесконечной последовательности множеств $D_{\alpha k}$, где $\text{mes}(D_{\alpha k})$ — мера множества $D_{\alpha k}$. Пусть $U_{\alpha k} = \left(\prod_{\beta \neq \alpha} D_\beta \right) \times D_{\alpha k}$ и

$$E^* = \left\{ y(t) \text{sign } k_{(0, \dots, 0)}(t) \prod_{\alpha} \chi_{U_{\alpha k}} + \sum_{\alpha} \left[v_{\alpha}(t) \prod_{\alpha} \chi_{U_{\alpha k}} \times \prod_{\alpha} \chi_{U'_{\alpha k}} \right] \right\},$$

где $v_{\alpha} \in E$, $k = 1, 2, \dots$, χ_U — характеристическая функция множества $U \subset D$, а $U' = D \setminus U$. Так как $E \subset E^* \subset \{z: |z| \leq x\}$, то $|K|x = \sup\{|Kz|: z \in E^*\}$, а так как E^* — счетное множество, то почти при всех $t \in D$

$$|K|x(t) = \sup\{|Kz(t)|: z \in E^*\}. \tag{2}$$

Пусть $t \in D$ — точка, для которой справедливо (2), и k_p — подпоследовательность, для которой $t_{\alpha} \in D_{\alpha k_p}$, и пусть $v_{\alpha p}$ — такие последовательности функций из E , для которых $v_{\alpha p}(\tau) \rightarrow \text{sign } k_{\alpha}(t, S_{\alpha})x(\tau)$. Положим

$$z_p(\tau) = x(\tau) \text{sign } k_{(0, \dots, 0)}(\tau) \prod_{\alpha} \chi_{\tilde{U}'_{\alpha k_p}}(\tau) + \sum_{\alpha} \left[v_{\alpha p}(\tau) \prod_{\alpha} \chi_{\tilde{U}'_{\alpha k_p}}(\tau) \times \prod_{\alpha} \chi_{\tilde{U}_{\alpha k_p}}(\tau) \right],$$

где $\tilde{U}_{\alpha k_p} = \left(\prod_{\beta \neq \alpha} D_\beta \right) \times D_{\alpha k_p}$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |Kz_p(t)| = \sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(t, S_{\alpha})| x(s_{\alpha}) dS_{\alpha} = |K|x(t),$$

а так как $z_p \in E^*$ ($p = 1, 2, \dots$), то

$$|K|x(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} |Kz_p(t)| \leq \sup\{|Kz|: z \in E^*\}(t).$$

Из полученного неравенства и (2) получим

$$|K|x(t) \leq |K|x(t),$$

тогда $|K|x \leq |K|x$ и, следовательно, $|K| \leq |K|$. То есть оператор $|K|$ неотрицательные функции из X преобразует в функции из Y . Но каждую функцию из X можно представить в виде разности неотрицательных функций из X , тогда $|K|$ преобразует любые функции из X в функции из Y , т.е. $|K|$ действует из X в Y . По доказанному $|K| \leq |K|$, учитывая $|K| \leq |K|$, получим $|K| = |K|$. ■



Теорема 1. Оператор (1) действует в $L^\infty(D)$ тогда и только тогда, когда

$$\|K\| = \operatorname{vraisup}_D \left[\sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(t, S_{\alpha})| dS_{\alpha} \right] < \infty.$$

□ Ввиду того, что любой непрерывный в L^∞ линейный оператор регулярен, то в силу леммы 1 достаточно доказать, что $\|K\| = \operatorname{vraisup}_D \left[\sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(t, S_{\alpha})| dS_{\alpha} \right]$. Если $[K] = \sup\{|Kx(t)| : \|x\| \leq 1\}$ — абстрактная норма действующего в L^∞ оператора (1), то $[K] = \|[K]\|$, где в силу леммы 1 $[K] = \|K\|$. Получим $\|K\|_{L^\infty} = \|[K]\|_{L^\infty} = \|[K]\|_{L^\infty} = \|[K]e\|_{L^\infty} = \operatorname{vraisup}_D \left[\sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(t, S_{\alpha})| dS_{\alpha} \right]$, где $e(t) \equiv 1$. ■

Определение 3. Линейный оператор A' называется двойственным к линейному оператору A , действующему из БИП X в БИП Y , если выполняется равенство $(Ax, y) = (x, A'y)$ ($x \in X, y \in Y'$), где (Ax, y) — действие функционала Ax на y и $(x, A'y)$ — действие функционала x на $A'y$.

Аналогично [1,2] доказывается

Лемма 2. Пусть оператор K с многомерными частными интегралами действует из БИП X в БИП Y . Тогда он обладает двойственным оператором и $K'y = K^\#y$ ($y \in Y', K^\#y \in \mathcal{M}(D)$), где $\mathcal{M}(D)$ — пространство измеримых по совокупности переменных на D вещественных или комплексных функций.

Из теоремы 1 и леммы 2 вытекает

Теорема 2. Оператор (1) действует в $L^1(D)$ тогда и только тогда, когда

$$\|K\| = \operatorname{vraisup}_D \left[\sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(t, S_{\alpha})| dS_{\alpha} \right] < \infty.$$

2. Оператор-функции с многомерными частными интегралами в $C(D)$.

Определение 4. Оператор-функцией с многомерными частными интегралами называется оператор-функция

$$K(\varphi)x(t) = \sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha})x(s_{\alpha}) dS_{\alpha}, \quad (3)$$

где k_{α} — измеримые по совокупности переменных $\varphi \in J, t_{\alpha}, \tau_{\alpha} \in D_{\alpha}$ функции, J — конечный или бесконечный промежуток в $(-\infty, +\infty)$.

При каждом фиксированном φ оператор-функция вида (3) есть оператор вида (1). Будем рассматривать оператор-функции (3) со значениями в пространстве $\mathcal{K}_n(X)$ операторов с многомерными частными интегралами, действующих в пространстве $X =$



$L^p(D)$ ($1 \leq p \leq \infty$) или в $X = C(D)$ непрерывных по совокупности переменных на D функций; в любом случае для любого $\varphi \in J$ $K(\varphi) \in \mathcal{K}_n(X)$.

Определение 5. Оператор-функция $K(\varphi)$ со значениями в пространстве $\mathcal{K}_n(X)$ называется *сильно непрерывной*, если $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \|K(\varphi)x - K(\varphi_0)x\|_X = 0$ для любого $x \in X$ и *равномерно непрерывной или непрерывной по норме*, если $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \|K(\varphi) - K(\varphi_0)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

Несмотря на то, что оператор-функция (3) задает в пространстве $\mathcal{K}_n(X)$ семейство операторов, зависящих от параметра φ , каждый из которых определяется функциями $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$, сильная и равномерная непрерывность оператор-функции (3) не характеризуется свойствами непрерывности по φ заданных функций [1-4]. В связи с этим возникает вопрос о зависимости свойств функций $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ от φ , которая приводит к сильной или равномерной непрерывности оператор-функции (3).

Оценка нормы оператора $K(\varphi) - K(\varphi_0)$ приводит к условиям равномерной непрерывности оператор-функции (3) в $\mathcal{L}(X)$. Ограниченность нормы оператор-функции (3) на J и сходимость $K(\varphi)x \rightarrow K(\varphi_0)x$ при $\varphi \rightarrow \varphi_0$ на некотором множестве функций x , линейная оболочка которых всюду плотна в X , с применением теоремы Банаха-Штейнгауза приводит к условиям сильной непрерывности. В различных пространствах получим различные условия сильной непрерывности оператор-функции (3).

В теоремах 3 и 4 приведены критерии сильной и равномерной непрерывности соответственно оператор-функции (3) в $\mathcal{L}(C)$.

Пусть $D_\alpha = \prod_j [a_j, b_j]^{\alpha_j}$ ($j = \overline{1, n}$),

$$B(\varphi, t) = \sum_\alpha \int_{D_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) dS_\alpha, \tag{4}$$

$$B_\alpha(\varphi, t) = \int_D x_\alpha dg(\varphi, t, \tau) = \sum_\alpha (-1)^{\dim D_\alpha} \left\{ \int_{D_\alpha} g(\varphi, t, \tau) dx_\alpha \Big|_{\bar{D}_\alpha} \right\}, \tag{5}$$

$$\gamma(\varphi, t) = \sum_\alpha \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)| dS_\alpha, \tag{6}$$

где

$$g(\varphi, t, \tau) = \sum_\alpha \int_{D_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, \bar{S}_\alpha) d\bar{S}_\alpha \chi(t_{\bar{\alpha}}, \tau_{\bar{\alpha}}),$$

$D_\alpha = \prod_\alpha [a_i, \tau_i]^{\alpha_i}$, $\alpha_i = 0$ или 1 ; $t_{\bar{\alpha}} = s_\alpha \setminus S_\alpha$, $\tau_{\bar{\alpha}} = \tau \setminus S_\alpha$, \bar{S}_α — набор переменных

интегрирования $\bar{\tau}_\alpha$, $\chi(t_{\bar{\alpha}}, \tau_{\bar{\alpha}}) = \begin{cases} 1, & \forall i \tau_i \geq t_i > a_i \text{ или } \tau_i > t = a_i, \\ 0, & \exists i \tau_i < t_i \text{ или } \tau_i = t_i = a_i. \end{cases}$

В силу критерия действия оператора (3) в пространстве $C(D)$ [5] имеют место следующие теоремы.



Теорема 3. *Оператор-функция (3) является сильно непрерывной в пространстве $\mathcal{L}(C)$ тогда и только тогда, когда функции (4), (5) непрерывны, а функция (6) ограничена на каждом ограниченном подмножестве своей области определения.*

□ Пусть $K(\varphi)$ сильно непрерывна в $\mathcal{L}(C)$. Из равенств $B(\varphi, t) = K(\varphi)1(t)$, $B_\alpha(\varphi, t) = K(\varphi)x_\alpha$, $\sup_D \gamma(\varphi, t) = \|K(\varphi)\|$, где $x_\alpha = \prod_{j=1}^n x_{\xi_j}^{\alpha_j}(t_j)$, с $\alpha_j = 0$ или 1 ($j = 1, 2, \dots, n$), и

$$x_{\xi_j}(t_j) = \begin{cases} \xi_j - t_j & \text{при } a_j \leq t_j \leq \xi_j \leq b_j, \\ 0 & \text{при } b_j > t_j > \xi_j > a_j, \end{cases}$$

из теоремы Банаха-Штейнгауза следует непрерывность функций (4), (5) и ограниченность (6) на каждом ограниченном множестве своей области определения.

Обратно. Покажем, что функция $K(\varphi)x$ непрерывна по φ на J для некоторого множества M функций $x \in C$, всюду плотного в пространстве C . В качестве M возьмем линейную оболочку функций x_α . Тогда любую функцию $x \in M$ можно представить в виде линейной комбинации этих функций. Из того, что функции $K(\varphi)x_\alpha$ непрерывны по φ на R , следует, что по φ на J непрерывна и функция $K(\varphi)x(t)$, которая в силу линейности $K(\varphi)$ является их линейной комбинацией. ■

Теорема 4. *Пусть значения оператор-функции (3) при любом $\varphi \in J$ принадлежат $\mathcal{K}_n(C)$. Тогда она является непрерывной по норме операторов $\mathcal{L}(C)$ в том и только в том случае, когда функция $k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t)$ равномерно относительно t непрерывна по φ на J , а функции k_α обладают следующими свойствами:*

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \sup_D \text{mes} \{S_\alpha : |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| > \theta\} = 0, \quad (7)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \sup_D \int_{A_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha = 0 \quad (\text{mes}(A_\alpha) \rightarrow 0), \quad (8)$$

где $\text{mes}(A)$ — мера множества A .

□ Пусть $K(\varphi)$ — непрерывная по норме оператор-функция в пространстве $\mathcal{K}_n(C)$. Тогда для любого $\varphi_0 \in J$ в силу критерия действия оператора (1) в $C(D)$ [5] получим

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \sup_D |k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t) - k_{(0, \dots, 0)}(\varphi_0, t)| = 0, \quad (9)$$

из чего следует утверждение теоремы для функции $k_{(0, \dots, 0)}$.

Равенство

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \sup_D \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha = 0 \quad (10)$$

и оценки

$$\text{mes}(\{S_\alpha : |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| \geq \theta\}) \leq \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha,$$



$$\int_{A_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha \leq \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha$$

влекут (8).

Пусть для любого $\varphi \in J$ $K(\varphi)$ — непрерывный линейный оператор в пространстве $C(D)$, функция $k_{(0,\dots,0)}(\varphi, t)$ равномерно относительно t непрерывна по φ на J и выполнены равенства (7) и (8). В силу критерия действия оператора (1) в $C(D)$ достаточно показать справедливость равенств (9) и (10).

Равенство (9) очевидно. Докажем равенство (10). Для любого $\epsilon > 0$ в неравенстве

$$\int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha \leq \theta \cdot \mu(D_\alpha) + \int_{A_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha,$$

где $A_\alpha = \{S_\alpha : |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| \geq \theta\}$, $\mu(D_\alpha)$ — мера множества D_α , положим $\theta = \frac{\epsilon}{2\mu(D_\alpha)}$. В силу (8) $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \sup_D \text{mes}(A_\alpha) = 0$, отсюда и (9) вытекает равенство

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \sup_D \int_{A_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha = 0.$$

Следовательно,

$$\sup_D \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha \leq \frac{\epsilon}{2\mu(D_\alpha)} \cdot \mu(D_\alpha) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

при $\varphi \rightarrow \varphi_0$. ■

Определение 6. Функции $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ называются L^1 -непрерывными, если

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t_0, S_\alpha)| dS_\alpha = 0,$$

где $r = |\varphi - \varphi_0| + \sum_{j=1}^n |t_j - t_{j0}|$, и L^1 -ограниченными при каждом φ , если

$$\sup_D \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)| dS_\alpha = K_\alpha(\varphi) < \infty.$$

Теорема 5. Пусть функция $k_{(0,\dots,0)}$ непрерывна по совокупности переменных, а функции $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ L^1 -непрерывны и L^1 -ограничены для любого φ . Тогда оператор-функция $K(\varphi)$ непрерывна по норме операторов пространства $\mathcal{L}(C)$.

□ Для действия оператора $K(\varphi)$ в $C(D)$ достаточно непрерывности функции $k_{(0,\dots,0)}$, L^1 -непрерывности и L^1 -ограниченности функций $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ для любого φ .

Покажем, что $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \|K(\varphi) - K(\varphi_0)\| = 0$. Имеем



$$\begin{aligned} \|K(\varphi) - K(\varphi_0)\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|(K(\varphi) - K(\varphi_0))x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \max_D |(K(\varphi) - K(\varphi_0))x(t)| \leq \\ &\leq \sum_{\alpha} \max_D \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha}) - k_{\alpha}(\varphi_0, t, S_{\alpha})| dS_{\alpha}. \end{aligned}$$

В силу непрерывности по φ функции $k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t)$ в точке (φ_0, t) и L^1 -непрерывности функций $k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha})$ для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} |k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t) - k_{(0, \dots, 0)}(\varphi_0, t)| &< \frac{\epsilon}{2^n}, \\ \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha}) - k_{\alpha}(\varphi_0, t, S_{\alpha})| dS_{\alpha} &< \frac{\epsilon}{2^n} \quad (|\varphi - \varphi_0| < \delta). \end{aligned}$$

Отсюда получаем $\|K(\varphi) - K(\varphi_0)\| < 2^n \cdot (\epsilon/2^n) = \epsilon$ при $|\varphi - \varphi_0| < \delta$. ■

Условие данной теоремы и L^1 -непрерывность ядер $k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha})$ выполняются, если $k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha})$ — непрерывные по совокупности переменных функции. Аналогично [4], из приведенного утверждения вытекает

Следствие 1. Пусть для всех $\varphi \in J$, $t \in D$, $\|k_{\alpha}(t, \cdot)\|_{L^{p_{\alpha}}} \leq A < \infty$, для любого α $1 < p_{\alpha} < \infty$, и пусть ядра $k_{\alpha}(t, S_{\alpha})$ имеют разрывы только вдоль конечного числа поверхностей $\tau_{\alpha} = \varphi_{\alpha}(t)$, где τ_{α} — набор τ_j из S_{α} , $\varphi_{\alpha}(t)$ — набор непрерывных функций $\varphi_{\alpha}^j(t)$ таких, что $\tau_j = \varphi_{\alpha}^j(t)$. Тогда ядра $k_{\alpha}(t, S_{\alpha})$ L^1 -непрерывны.

3. Оператор-функции со значениями в $\mathcal{K}_n(L^{\infty})$ и $\mathcal{K}_n(L^1)$.

Теорема 6. Оператор-функция (3) сильно непрерывна в пространстве $\mathcal{L}(L^{\infty})$ тогда и только тогда, когда функция (6) ограничена в существенном на $J \times D$ для каждого ограниченного промежутка $J \subset (-\infty, +\infty)$, вектор-функция $\varphi \rightarrow k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t)$ непрерывна как функция со значениями в $L^{\infty}(D)$, а вектор-функции аргумента φ

$$\int_{\tilde{D}_{\alpha}} k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha}) dS_{\alpha}$$

непрерывны по φ при каждом измеримом $\tilde{D}_{\alpha} \subset D_{\alpha}$, как функции со значениями в $L^{\infty}(D)$.

Аналогично, оператор-функция (3) сильно непрерывна в пространстве $\mathcal{L}(L^1)$ в том и только в том случае, когда:

$$\sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha})| dS_{\alpha} \leq \text{const} < \infty$$

для почти всех t на каждом ограниченном промежутке $J \subset (-\infty, +\infty)$; вектор-функция $\varphi \rightarrow k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t)$ непрерывна как функция со значениями в $L^{\infty}(D)$; вектор-функции



аргумента φ

$$\int_{\tilde{D}_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) dS_\alpha$$

непрерывны по φ при каждом измеримом $\tilde{D}_\alpha \subset D_\alpha$, как функции со значениями в $L^1(D)$.

□ Заметим, что сильная непрерывность оператор-функции (3) в заданных пространствах равносильна сильной непрерывности оператор-функций

$$K_\alpha(\varphi)x(t) = \int_{\tilde{D}_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)x(s_\alpha) dS_\alpha.$$

Выбирая в качестве всюду плотного множества линейные комбинации функций $\chi(\tilde{D}_\alpha, t_\alpha)$, где $\tilde{D}_\alpha \subset D_\alpha$ — измеримые множества, а $\chi(\tilde{D}_\alpha, t_\alpha)$ — их характеристические функции, и используя теоремы 1 и 2 получим требуемые утверждения. ■

Пусть $X_\alpha = L^1(D_\alpha)$, $L^p = L^p(D)$ ($1 \leq p \leq \infty$), а $L^p[X_\alpha]$ — пространства со смешанной нормой, состоящие из измеримых по совокупности переменных функций $x_\alpha(t, S_\alpha)$, для которых конечны нормы

$$\| \|x_\alpha(t, \cdot)\|_{X_\alpha} \|_{L^p}.$$

Из теоремы 6 следует критерий непрерывности по норме оператор-функции (3) в $\mathcal{L}(L^\infty)$ и в $\mathcal{L}(L^1)$.

Теорема 7. Оператор-функция (3) непрерывна по норме в $\mathcal{L}(L^\infty)$ (в $\mathcal{L}(L^1)$) в том и только в том случае, когда вектор-функции $\varphi \rightarrow k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ ($\varphi \rightarrow k_\alpha(\varphi, s_\alpha, t_\alpha)$) непрерывны как вектор-функции со значениями в L^∞ , $L^\infty[X_\alpha]$.

Так как $C(D) \subset L^\infty(D)$, то из теорем 3 и 6 следует еще один критерий сильной непрерывности оператор-функции (3) в $C(D)$.

Следствие 2. Пусть оператор-функция (3) принимает значения в $\mathcal{K}_n(C)$. Тогда она сильно непрерывна в том и только в том случае, когда функция (6) ограничена на $J \times D$ для каждого ограниченного промежутка $J \subset (-\infty, +\infty)$, вектор-функция $\varphi \rightarrow k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t)$ непрерывна как вектор-функция со значениями в $L^\infty(D)$, а вектор-функции аргумента φ

$$\int_{\tilde{D}_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) dS_\alpha$$

непрерывны по φ при каждом $\tilde{D}_\alpha \subset D_\alpha$ как функции со значениями в $L^\infty(D)$.

4. Оператор-функции со значениями в $\mathcal{K}_n(L^p)$ где $1 < p < \infty$. Критерии сильной непрерывности и непрерывности по норме оператор-функции (3) со значениями в $\mathcal{K}_n(L^p)$ ($1 < p < \infty$) неизвестны, но со значениями в пространстве $\mathcal{K}_r(L^p)$ ($1 < p < \infty$) регулярных в L^p операторов (1) с частными интегралами имеются признаки ее сильной непрерывности и непрерывности по норме. Пусть $\mathcal{R}_{k_\alpha}(L^p)$ — множество измеримых



по совокупности переменных функций $k_\alpha(t, S_\alpha): D \times D_\alpha \rightarrow (-\infty, +\infty)$, для которых конечна норма

$$\|k_\alpha\|_{\mathcal{R}_{k_\alpha}(L^p)} = \sup_{\|x\|_{L^p} \leq 1} \left\| \int_{D_\alpha} |k_\alpha(t, S_\alpha)| x(s_\alpha) dS_\alpha \right\|_{L^p}.$$

Аналогично [2], регулярность в L^p оператора (1) означает, что $k_{(0, \dots, 0)}(t) \in L^\infty$, $k_\alpha(t, S_\alpha) \in \mathcal{R}_{k_\alpha}(L^p)$.

Определение 7. Оператор-функция (3) со значениями в $\mathcal{K}_r(L^p)$ абсолютно сильно непрерывна, если при $\varphi \rightarrow \varphi_0$ $\|K(\varphi) - K(\varphi_0)\| \rightarrow 0$ ($x \in L^p$) и абсолютно непрерывна по норме, если $\|K(\varphi) - K(\varphi_0)\| \rightarrow 0$.

Из абсолютной сильной непрерывности оператор-функции (3) в $\mathcal{K}_n(L^p)$, следует ее сильная непрерывность, из абсолютной непрерывности по норме следует непрерывность по норме. Обратное утверждение не верно при $1 < p < \infty$ уже для $n = 2$ [2]. Из теоремы Банаха-Штейнгауза вытекает критерий абсолютной сильной непрерывности оператор-функции (3) со значениями в $\mathcal{L}(L^p)$.

Теорема 8. Пусть $1 < p < \infty$ и $k_\alpha(t, S_\alpha)$ — измеримые по совокупности переменных функции. Оператор-функция (3) со значениями в $\mathcal{K}_n(L^p)$ абсолютно сильно непрерывна тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1. Вектор-функция $\varphi \rightarrow k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t)$ принимает значения в $L^\infty(D)$ при любом $\varphi \in J$, ограничена на каждом отрезке из J как вектор-функция со значениями в $L^\infty(D)$ и непрерывна как вектор-функция со значениями в $L^1(D)$.
2. Вектор-функции $\varphi \rightarrow k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ при каждом $\varphi \in J$ принимают значения в $\mathcal{R}_{k_\alpha}(L^p)$ и как вектор-функции со значениями в $\mathcal{R}_{k_\alpha}(L^p)$ ограничены на каждом отрезке из J .
3. Для любых измеримых множеств $\tilde{D}_\alpha \subset D_\alpha$ вектор-функции

$$\varphi \rightarrow k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) \prod_{\alpha} \chi(\tilde{D}_\alpha, S_\alpha)$$

со значениями в $L^p[X_\alpha]$, непрерывны на J , где $\chi(\tilde{D}_\alpha, S_\alpha)$ — характеристическая функция множества \tilde{D}_α , а $L^p[X_\alpha]$ — пространства со смешанной нормой.

Сильная непрерывность оператор-функции (3) со значениями в $\mathcal{K}_n(L^p)$ сохранится, если в теореме условие 3 заменить условием:

3'. для любых измеримых множеств $\tilde{D}_\alpha \subset D_\alpha$ непрерывны по $\varphi \in J$ следующие вектор-функции со значениями в L^p :

$$\int_{\tilde{D}_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) dS_\alpha.$$



Следующая теорема содержит условия непрерывности по норме оператор-функции (3) со значениями в $\mathcal{K}_r(L^p)$

Теорема 9. Пусть $1 < p < \infty$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Пусть, далее, выполнены условия:

1. Функция $\varphi \rightarrow k_{(0,0,\dots,0)}(\varphi, t)$ непрерывна как вектор-функция со значениями в $L^\infty(D)$.
2. Функции $\varphi \rightarrow k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ непрерывна как вектор-функция со значениями в одном из пространств со смешанной нормой $L^\infty[L^p[L^q]]$ или $L^\infty[L^q[L^p]]$, где норма в $L^p(D_\alpha)$, $L^q(D_\alpha)$, $L^\infty(D_{\bar{\alpha}})$ вычисляется по переменным t_α , S_α , $t_{\bar{\alpha}}$, соответственно.
3. Функция $\varphi \rightarrow k_{(1,1,\dots,1)}(\varphi, t, \tau)$ непрерывна как вектор-функция со значениями в $L^p[L^q]$ или $L^q[L^p]$, где норма в $L^p(D)$ ($L^q(D)$) вычисляется по переменным t (τ).

Тогда вектор-функция (3) непрерывна по норме пространства $\mathcal{K}_r(L^p)$.

□ Доказательство теоремы получается применением неравенства Гельдера и обобщенного неравенства Минковского. ■

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.
2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.
3. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.
4. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория / Липецк: ЛГПУ, 2004. – 195 с.
5. Иноземцев А.И. Критерий определенности на $C(D)$ линейных операторов с многомерными частными интегралами // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2014. – №5(176). Вып. 34. – С.17-26.
6. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах / М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 548 с.
7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ / М.: Наука, 1977. – 744 с.

OPERATOR-FUNCTIONS WITH MULTIDIMENSIONAL PARTIAL INTEGRALS

A.S. Kalitvin, A.I. Inozemtsev

Lipetsk State Pedagogical University,
 Lenin St., 42, Lipetsk, 398020, Russia, e-mail: kalitvinas@mail.ru, inozemcev.a.i@gmail.com

Abstract. Criteria on spaces $C(D)$, $L^1(D)$, $L^\infty(D)$ and sufficient conditions on the space $L^p(D)$ ($1 < p < \infty$) of strong and norm continuity of operator-functions with multidimensional partial integrals are found where $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Key words: operator with partial integrals, multidimensional partial integrals, strongly continuous and norm-continuous operator functions, spaces with mixed norm, regular and associate operator.



MSC 35K05

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

А.В. Костин, М.В. Муковнин, М.Х. Гим

Воронежский Государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394000, Россия, e-mail: leshakostin@mail.ru

Аннотация. Устанавливается корректная разрешимость по Адамару одной нестационарной задачи для одномерного уравнения теплопроводности, называемой задачей без начальных условий. При этом требуется найти производную от температуры по пространственной переменной, характеризующую тепловой поток на границе раздела сред. Исследования таких задач, как известно, приводят к использованию аппарата дробного интегро-дифференцирования. Однако, как правило, получаемые при этом результаты касаются только вопросов существования решений и их интегро-дифференциальным представлениям. Вопрос же устойчивости решения по исходным данным, требующий использования соответствующих метрических пространств в таких работах не обсуждается. В настоящей заметке эти вопросы решаются методами теории сильно непрерывных полугрупп линейных преобразований в специальных функциональных пространствах.

Ключевые слова: корректная разрешимость, полугруппы, косинус-функция, задача Коши, дробные степени операторов.

Многие процессы тепло- и массопереноса описываются нестационарной задачей

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \quad t \in (-\infty, \infty), x \in (0, \infty). \quad (0.1)$$

$$u(t, 0) = u_0(t), \quad u(t, \infty) = 0. \quad (0.2)$$

t — время, x — пространственная координата, $u(t, x)$ — температура.

Требуется определить выражение для теплового потока, т.е. производную от температуры по координате x на границе области

$$q(t) = \left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (0.3)$$

Частный случай такой задачи (когда $u_0(t)$ — периодическая функция или заданная рядом Фурье) рассмотрен в [1], с. 57. Здесь она называется задачей без начальных условий.

Следует отметить, что решение этих задач в [1] формально осуществляется с помощью функциональных рядов, членами которых являются интегро-дифференциальные конструкции дробного порядка. При этом, вопросы сходимости приближенных решений к точному и их устойчивость к погрешностям исходных данных не обсуждается.



Иными словами, не обсуждается проблема корректной разрешимости по Ж. Адамару рассматриваемых задач, требующая введения соответствующих метрик.

В настоящей заметке методами теории сильно непрерывных полугрупп линейных операторов рассматривается более общая задача отыскания решения уравнения

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \alpha(t) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \gamma(t)u(t, x), \quad (0.4)$$

$x \in (0, \infty), t \in (a, b) \subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, удовлетворяющая условиям

$$u(t, 0) = u_0(t), \quad u(t, \infty) = 0, \quad (0.5)$$

где $\alpha(t), \gamma(t)$ — произвольные непрерывные на (a, b) функции, $u_0(t)$ — элементы некоторого банахова пространства.

В работе устанавливается равномерно корректная разрешимость, в смысле С.Г. Крейна [5], с. 305, с использованием методов сильно непрерывных полугрупп.

§1. Необходимые факты из общей теории

В банаховом пространстве E рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = Au(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (1.1)$$

где оператор A такой, что $-A$ является генератором полугруппы $(T, -A)$ класса C_0 с оценкой

$$\|T(t, -A)\| \leq e^{-\omega t} \quad (\omega \geq 0). \quad (1.2)$$

и, следовательно, по К. Иосида [3], с. 358, определены отрицательный $A^{-\frac{1}{2}}$ и положительный. Квадратные корни

$$A^{-\frac{1}{2}}\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} T(t, -A)\varphi dt, \quad (1.3)$$

$$A^{\frac{1}{2}}\varphi = A \cdot A^{-\frac{1}{2}}\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} T(t, -A)A\varphi dt, \quad (1.4)$$

если $\varphi \in D(A)$.

При этом оператор $-A^{\frac{1}{2}}$ является генератором полугруппы класса C_0 вида

$$T(t, -A^{\frac{1}{2}})\varphi = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4s}\right) T(s, -A)\varphi ds \quad (1.5)$$

(см. [3], с. 369, [2], с. 120).

Далее, согласно С.Г. Крейну [5], с. 306 дадим

Определение 1.1. Функция $u(t)$ называется обобщенным решением уравнения (1.1), если:



- 1) она непрерывна на $[0, \infty)$, имеет непрерывную вторую производную на $(0, \infty)$, а функция $A^{-\frac{1}{2}}u(t)$ имеет непрерывную первую производную на $[0, \infty)$;
- 2) значения $u(t)$ на $(0, \infty)$ принадлежат $D(A)$;
- 3) она удовлетворяет уравнению (1.1).

В дальнейшем будет использована

Теорема 1.1 (С.Г. Крейн [5], с. 324). Если оператор A удовлетворяет выше приведенным условиям, то для всякого $u_0 \in E$ существует единственное ограниченное на полуоси $[0, \infty)$ обобщенное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию $u(0) = u_0$.

Это решение задается формулой

$$u(t) = T(t, -A^{\frac{1}{2}})u_0. \quad (1.6)$$

§2. Полугруппы переносов с деформациями

а) Полугруппы $T_{h,\rho}^+(t)$.

На интервале $(a, b) \subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ конечном или бесконечном, введем непрерывно дифференцируемую функцию $h(x)$ такую, что $h'(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow b} h(x) = \infty$.

Через $L_{p,\omega,h}^+$ будем обозначать пространства функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi\|_1 = \|\varphi\|_{p,\omega,h,g} = \left[\int_a^b |\exp[\omega h(x)]g(x)\varphi(x)|^p dh(x) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (2.1)$$

$p \geq 1$, $\omega > 0$, $g(x) > 0$, $g'(x) > 0$. Введем обозначения $h(x) \oplus t = h^{-1}[h(x) + t]$.

Пусть $\rho(x) \geq 0$ локально интегрируемая на (a, b) функция. Будем рассматривать операторное семейство

$$T_{h,\rho}^+(t)\varphi(x) = \exp \left[\int_{h(x) \oplus t}^x \rho(\xi) dh(\xi) \right] \varphi[h(x) \oplus t]. \quad (2.2)$$

Теорема 2.1. Операторное семейство $T_{h,\rho}^+(t)$ является сильно непрерывной сжимающей полугруппой действующей в пространстве $L_{p,\omega,h}$, удовлетворяющей оценке

$$\|T^+(t)\| \leq \exp \left(-\frac{\omega}{p}t \right). \quad (2.3)$$

□ Сначала оценим

$$\begin{aligned} \|T_{h,\rho}^+(t)\varphi\|_{p,\omega,h,g}^p &= \int_a^b \exp \left[\omega h(x) + p \int_{h(x) \oplus t}^x \rho(\xi) dh(\xi) \right] g(x) |\varphi[h(x) \oplus t]|^p dh(x) \leq \\ &\leq \int_a^b g(x) \exp[\omega h(x)] |\varphi(h(x) \oplus t)|^p dh(x). \end{aligned} \quad (2.4)$$



После замены $h(x) \oplus t = \tau$ неравенство (2.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \|T_{h,\rho}^+(t)\varphi\|_{p,\omega,h,g}^p &\leq \exp(-\omega t) \int_{h(a)\oplus t}^b \exp[\omega h(\tau)]g[h^{-1}(h(\tau) - t)]|\varphi(\tau)|^p dh(\tau) \leq \\ &\leq \exp(-\omega t) \int_a^b \exp[\omega h(\tau)]g(\tau)|\varphi(\tau)|^p dh(\tau). \end{aligned}$$

Отсюда следует ограниченность полугруппы

$$\|T_{h,\rho}^+(t)\varphi\|_{p,\omega,h,g}^p \leq \exp\left(-\frac{\omega}{p}t\right) \|\varphi\|^p. \quad (2.5)$$

Свойство $T_{h,\rho}^+(0)\varphi = \varphi$ очевидно.

Для установления полугруппового соотношения $T(t)T(s) = T(t + s)$ проведем следующие вычисления

$$\begin{aligned} T_{h,\rho}^+(t)T_{h,\rho}^+(s)\varphi(x) &= T_{h,\rho}(t) \exp\left[\int_{h(x)\oplus s}^x \rho(s)d(\xi)\right] \varphi[h(x) \oplus s] = \\ &= \exp\left[\int_{h(x)\oplus t}^x \rho(\xi)dh(\xi)\right] \exp\left[\int_{h(x)\oplus(t+s)}^{h(x)\oplus t} \rho(\xi)dh(\xi)\right] \varphi[h(x) \oplus t + s] = \\ &= \exp\left[\int_{h(x)\oplus(t+s)}^x \rho(\xi)dh(\xi)\right] \varphi[h(x) \oplus t + s] = T_{h,\rho}^+(t + s)\varphi(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Теперь установим сильную непрерывность полугруппы

$$\|T_{h,\rho}^+(t)\varphi - \varphi\| \leq \left[\int_{x(a)\oplus t}^\infty \exp[\omega h^{-1}(\tau)] \exp\left[\int_{h^{-1}(t+\tau)}^{h^{-1}(\tau)} \rho(\xi)dh(\xi)\right] |\varphi[h^{-1}(\tau + t)] - \varphi[h^{-1}(\tau)]|^p d\tau \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Далее, положим $\varphi[h^{-1}(t)] = \psi(t)$, $\rho[h^{-1}(s)] = \mu(s)$ и, используя метод «прибавить–отнять», с применением неравенства Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} \|T_{h,\rho}^+(t)\varphi - \varphi\| &\leq \left[\int_{h(a)}^\infty \exp[\omega h^{-1}(\tau)] \exp\left[\int_{t+\tau}^\tau \mu(s)ds\right] |\psi(t + \tau) - \psi(\tau)|^p d\tau \right]^{\frac{1}{p}} + \\ &+ \left[\int_{h(a)}^\infty \exp[\omega h^{-1}(\tau)] \exp\left[p \int_{t+\tau}^\tau \mu(s)ds\right] - 1 \cdot |\psi(\tau)|^p d\tau \right]^{\frac{1}{p}} = S_1(t) + S_2(t). \end{aligned}$$

Покажем, что $\lim_{t \rightarrow 0} S_1(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} S_2(t) = 0$.

В случае $S_1(t)$ этот факт следует из непрерывности в целом L_p -весовых норм.

В случае $S_2(t)$, для произвольно малого $\varepsilon > 0$ запишем $S_2^p(t)$ в виде суммы

$$S_2^p(t) = \int_{h(a)}^N \exp[\omega h^{-1}(\tau)] \exp\left[p \int_{t+\tau}^\tau \mu(s)ds\right] - 1 \cdot |\psi(\tau)|^p d\tau +$$



$$+ \int_N^\infty \exp[\omega h^{-1}(\tau)] \exp \left[p \int_{t+\tau}^\tau \mu(s) ds \right] - 1 \cdot |\psi(\tau)|^p d\tau = S_2^{(N)}(t) + S_2^{(N)}(t), \quad (2.8)$$

где N выбрано так, что выполняется неравенство $S_2^{(N)}(t) < \frac{\varepsilon}{2}$. Затем, учитывая конечность интервала интегрирования, выбирая t_0 такое, что при всех $t > t_0$ выполняется оценка $S_1^{(N)}(t) < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует соотношение $\lim S_2(t) = 0$, а из (1.18) получаем выполнение сильной непрерывности полугруппы $T_{h,\rho}(t)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|T_{h,\rho}^+(t)\varphi - \varphi\| = 0, \quad \forall \varphi \in L_{p,h,\rho}. \quad (2.9)$$

Это завершает доказательство теоремы. ■

Таким образом, семейство $T_{h,\rho}^+$ является сильно непрерывной полугруппой с оценкой (2.5).

Из теоремы 1.1 и результатов [5], с. 258, [3], с. 327 следует, что для полугруппы $T_{h,\rho}^+(t)$ определен производящий оператор как сильный предел

$$A_{h,\rho}^+ = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [T_{h,\rho}^+(t) - I]\varphi(x).$$

Его область определения $D(A_{h,\rho}^+)$ плотна в $L_{p,h,\omega,g}^+$ и он замкнут.

В соответствии с [5], с. 258 значение производящего оператора можно определить как правую производную полугруппы в точке $t = 0$, то есть

$$A_{h,\rho}^+\varphi(x) = \frac{d}{dt} T_{h,\rho}^+(t)\varphi(x)|_t = \frac{d\varphi(x)}{dh(x)} - \rho(x)\varphi(x) = \mathfrak{D}_{h,\rho}^+\varphi(x). \quad (2.11)$$

Таким образом, производящим оператором полугруппы $T_{h,\rho}^+(t)$ является оператор $A_{h,\rho}^+$, заданный выражением $\mathfrak{D}_{h,\rho}^+\varphi(x)$ и областью определения $D(A_{h,\rho}^+) = \{\varphi \in L_{p,\omega,h,g}^+, \mathfrak{D}_{h,\rho}^+\varphi(x) \in L_{p,\omega,h,g}^+\}$.

б) Полугруппы $T_{h,\rho}^-(t)$.

Рассмотрим случай когда функция $h(x)$, $x \in (a, b)$ удовлетворяет условиям: $h'(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = -\infty$.

Через $L_{p,\omega,h,g}^-$ обозначим пространства функций с нормой

$$\|\varphi\|^- = \|\varphi\|_{p,\omega,h,g}^- = \left[\int_a^b \exp(-\omega h(x)) g(x) |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (2.12)$$

$p \geq 1$, $\omega > 0$, $g(x) > 0$, $g'(x) < 0$.

Пусть $h(x) \ominus t = h^{-1}[h(x) - t]$. Рассмотрим операторные семейства

$$T_{h,\rho}^-(t)\varphi(x) = \exp \left[\int_x^{h(x) \ominus t} \rho(\xi) dh(\xi) \right] \varphi[h(x) \ominus t]. \quad (2.13)$$

Для этих семейств аналогично $T_{h,\rho}^+$ доказываемся



Теорема 2.2. Операторное семейство (2.13) является сильно непрерывной полугруппой действующей в пространстве $L_{p,\omega,h,g}^-$ и удовлетворяющей оценке

$$\|T^-(t)\|_{p,\omega,h,g}^- \leq \exp\left(-\frac{\omega}{p}t\right). \quad (2.14)$$

Ее генератором является оператор $A_{h,p}^-$, заданный выражением

$$\mathfrak{D}_{h,\rho}^- \varphi = -\frac{d\varphi(x)}{dh(x)} - \rho(x)\varphi(x). \quad (2.15)$$

с областью определения $D(A_{h,p}^-) = \{\varphi \in L_{p,\omega,h,g}^-, \mathfrak{D}_{h,\rho}^- \varphi \in L_{p,\omega,h,g}^-\}$.

§3. Некоторые частные случаи

В этом пункте рассмотрим некоторые пример.

1. Если оператор $A_{h,\rho}^+$ задан выражением (2.11), $\rho(x) = \mu \cdot h(x)$, $\mu \geq 0$, то производящая его полугруппа имеет вид

$$T_h^+(t)\varphi(x) = \left(\frac{h(x)}{h(x)+t}\right)^\mu \varphi[h^{-1}(h(x)+t)]. \quad (3.1)$$

Она является сильно непрерывной в пространстве $L_{p,\omega,h,g}^+$ с нормой (2.1).

2. Если $x \in (-\infty, \infty)$, $h(x) = x$, $\mu = 0$, то из (3.1) следует, что $T_h^+(t)\varphi(x) = \varphi(x+t)$ является полугруппой правых сдвигов в пространстве $L_{p,\omega}^+$ с нормой

$$\|\varphi\|^+ = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega x} g(x) |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (3.2)$$

Аналогично, полугруппа левых сдвигов $T_h^-(t)\varphi(x) = \varphi(x-t)$ является сильно непрерывной в пространствах $L_{p,\omega,h,g}^-$ с нормой

$$\|\varphi\|^- = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x} g(x) |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (3.3)$$

Здесь $\omega > 0$. Заметим, что при $\omega = 0$ эти факты не справедливы.

3. Если в (3.1), $(a, b) = (0, \infty)$, $\mu > 0$, то соответствующая полугруппа имеет вид

$$T_{h,\rho}^+(t)\varphi(x) = \left(\frac{x}{x+t}\right)^\mu \varphi(x+t). \quad (3.4)$$

4. Полугруппы Адамара. Если $(a, b) = (0, \infty)$, $h(x) = \ln x$, $\mu = 0$, то полугруппы имеют вид



$$T_h^+(t)\varphi(x) = \varphi(xe^t), \quad (3.5)$$

$$T_h^-(t)\varphi(x) = \varphi(xe^{-t}). \quad (3.6)$$

Эти полугруппы сильно непрерывны в пространствах T с нормами:

$$\|\varphi\|^+ = \left[\int_0^\infty x^\omega |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad \omega > 0, \quad (3.7)$$

$$\|\varphi\|^- = \left[\int_0^\infty x^{-\omega} |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad \omega > 0, \quad (3.8)$$

Производящими операторами этих полугрупп являются операторы: A_α^+ , аданный выражением $\mathfrak{D}_u^+ \varphi = x \frac{d\varphi}{dx}$, с областью определения $D(A_\alpha^+) = \{\varphi \in L_{\omega,p}^+, \mathfrak{D}^+ \varphi \in L_{\omega,p}^+\}$ и соответственно A_α^- , заданный выражением $\mathfrak{D}_u^- \varphi = -x \frac{d\varphi}{dx}$, с областью определения $D(A_\alpha^-) = \{\varphi \in L_{\omega,p}^-, \mathfrak{D}^- \varphi \in L_{\omega,p}^-\}$

Следуя [5] эти операторы мы называем операторами Адамара, а соответствующие полугруппы — полугруппами Адамара.

5. Гиперболические полугруппы. Если $(a, b) = (0, 1)$, $h(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{1-x} \right)$, $\mu = 0$, то нетрудно видеть, что в этом случае мы имеем полугруппу

$$T_h(t)\varphi(x) = \varphi \left(\frac{x+t}{1+xt} \right), \quad (3.9)$$

которая в [10], с. 275 называется гиперболической.

Из наших результатов следует, что эта полугруппа сильно-непрерывна в пространствах с нормой

$$\|\varphi\|_{\omega,p} = \left[\int_0^1 \left(\frac{x+1}{1-x} \right)^{\frac{\omega}{2}} |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (3.10)$$

§4. Решение задачи (0.4)-(0.5)

В предположении $\alpha(t) > 0$, $\gamma(t) \geq 0$, $h'(t) = \alpha(t)$, $\rho(t) = \gamma(t)/\alpha(t)$ будем рассматривать два вида уравнения (0.4).

$$\frac{\partial^2 u_+(t, x)}{\partial x^2} = -\frac{\partial u_+(t, x)}{\partial h(t)} + \rho(t)u(t, x), \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 u_-(t, x)}{\partial x^2} = -\frac{\partial u_-(t, x)}{\partial h(t)} + \rho(t)u(t, x), \quad (4.2)$$

Поменяв местами параметры t и x , уравнения (4.1) и (4.2) запишем в виде

$$\frac{\partial^2 u_+}{\partial t^2} = -\mathfrak{D}_{h,\rho}^+ u_+(t, x), \quad (4.3)$$



$$\frac{\partial^2 u_-}{\partial t^2} = -\mathfrak{D}_{h,\rho}^- u_-(t, x), \quad (4.4)$$

При этом краевые условия (4.5) принимают вид

$$u_{\pm}(0, x) = u_0(x); \quad u_{\pm}(\infty, x) = 0. \quad (4.5)$$

Считая $u_{\pm}(t, x)$ векторзначными функциями $u_{\pm}(t)$ со значениями в пространствах $L_{p,\omega,h,g}^+$ или $L_{p,\omega,h,g}^-$ соответственно, можно записать задачи (4.3)-(4.5) в операторной форме

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_{\pm}}{dt^2} &= A^{\pm} u_{\pm}(t), \\ u_{\pm}(0) &= u_0, \quad u_0 \in L_{p,\omega,h,g}^{\pm} \end{aligned} \quad (4.6)$$

в пространствах $L_{p,\omega,h,g}^+(L_{p,\omega,h,g}^+)$, то из теоремы 1.1. следует

Теорема 4.1. Пусть $t_0 \in (a, b)$, $h(t) = \int_{t_0}^t \alpha(s) ds$, $\rho(t) = \gamma(t)/\alpha(t)$, тогда:

1) для каждого $u_0 \in L_{p,\omega,h,g}^+$ существует единственное обобщенное решение задачи (4.3)-(4.5), и оно представимо в виде

$$u_+(t) = T_{h,\rho}^+[t, -(A_{h,\rho}^+)^{\frac{1}{2}}] u_0 = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4s}\right) T_{h,\rho}^+(s, -A_{h,\rho}^+) u_0 ds; \quad (4.7)$$

2) для каждого $u_0 \in L_{p,\omega,h,g}^-$ существует единственное обобщенное решение задачи (4.4)-(4.5), и оно представимо в виде

$$u_-(t) = T_{h,\rho}^-[t, -(A_{h,\rho}^-)^{\frac{1}{2}}] u_0 = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4s}\right) T_{h,\rho}^-(s, -A_{h,\rho}^-) u_0 ds. \quad (4.8)$$

Теперь, переходя к обозначениям уравнений (4.1) и (4.2) и возвращаясь к задачам (4.1)-(4.3), (4.2)-(4.3), получаем их решения

$$\begin{aligned} u_+(t, x) &= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right) T^+(s, -A_{h,\rho}^+) u_0(t) ds = \\ &= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right) \exp\left[\int_{h(x) \oplus s}^x \rho(\xi) dh(\xi)\right] u_0[h^-(h(s) + x)] ds, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} u_-(t, x) &= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right) T^-(s, -A_{h,\rho}^-) u_0(t) ds = \\ &= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right) \exp\left[\int_x^{h(x) \ominus s} \rho(\xi) dh(\xi)\right] u_0[h^-(h(s) - x)] ds. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из (4.9) и (4.10), в частности следуют представления соответствующих тепловых потоков

$$q_+(t) = \frac{\partial u_+}{\partial x} \Big|_{x=0} = -(A_{\rho,h}^+)^{\frac{1}{2}} u_0(t), \quad (4.11)$$



$$q_-(t) = \left. \frac{\partial u_-}{\partial x} \right|_{x=0} = -(A_{\rho, h}^-)^{\frac{1}{2}} u_0(t), \quad (4.12)$$

В заключении заметим, что результаты полученные в настоящей заметке являются новыми даже в простейшем случае $h(x) = x$, $\rho(x) \equiv 0$, когда $T \pm(t)\varphi(x) = \varphi(x \pm t)$ – полугруппы сдвигов, а операторы $(-A^\pm)^{\frac{1}{2}}$ определяются дробными производными Римана-Лиувилля.

Литература

1. Бабенко Ю.И. Теплообмен: Методы расчета тепловых и диффузных потоков / Л.: Химия, 1986. – 144 с.
2. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Киев: Выща школа, 1989. – 347 с.
3. Иосида К. Функциональный анализ / Учебник, пер. с англ. В.М.Волосова / М.: Мир, 1967. – 624 с.
4. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1966. – 500 с.
5. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / М.: Наука, Глав. ред. физ-мат. лит-ры., 1967. – 464 с.
6. Костин В.А., Небольсина М.Н. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка // ДАН. – 2009. – 428, №1. – С.20-22.
7. Костин В.А., Костин А.В., Костин Д.В. Операторный метод Маслова-Хевисайда и C_0 -операторный интеграл Дюамеля // ДАН. – 2013. – 452, №4. – С.367-370.
8. Костин В.А., Костин А.В., Костин Д.В. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения // ДАН. – 2014. – 455, №2. – С.142-146.
9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
10. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы / М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 829 с.

ABOUT WELL-POSED SOLVABILITY OF SOME NONSTATIONARY PROBLEMS WITHOUT INITIAL CONDITIONS

A.V. Kostin, M.V. Mukovnin, M.H. Geem

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394000, Russia, e-mail: leshakostin@mail.ru

Abstract. It is established well-posed solvability of a Hadamard nonstationary problem for one-dimensional heat equation, referred to the problem without initial conditions. This requires to find the derivative of the temperature at the spatial variable which describes the variable of heat flow at the boundary of matter. Studying of these problems is known lead to the using of mechanism of fractional integro-differentiation. However, in general, the results are obtained concern only with the questions of existence solutions and its integral-differential concepts. The question of the stability solution on the initial data which requires using an appropriate metric spaces in such works is not discussed. In this paper, these problems are solved by using the theory of strongly continuous semigroups of linear transformations in special functional spaces.

Key words: heat- and mass-transfer, time-dependent problems, well-posed solvability, strongly continuous semigroups, fractional powers of operators.



MSC 35L55

К ТЕОРИИ СПЕКТРА 2×2 - ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.В. Корниенко, Д.В. Корниенко

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина,
ул. Коммунаров, 28, Елец, 399770, Россия, e-mail: v_v_kornien@mail.ru, dmkornienko@mail.ru

Аннотация. Для замкнутых дифференциальных операторов $L : \mathcal{H}_{t,x} \rightarrow \mathcal{H}_{t,x}$, порождённых задачей Дирихле для гиперболических систем второго порядка изучены спектры: $C\sigma L = R\sigma L$ – пустое множество; точечный спектр $P\sigma L$ располагается на вещественной прямой комплексной плоскости \mathbb{C} . В случае гиперболической системы без младших членов собственные вектор-функции оператора L образуют ортогональный базис. В случае гиперболической системы с младшими членами вектор-функции оператора L образуют базис Рисса, не являющимся ортогональным в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{t,x}$.

Ключевые слова: гиперболические системы, граничные задачи, замкнутые операторы, спектр, базис, ортогональный базис, базис Рисса.

Работа авторов посвящена сравнительному изучению и описанию спектральных свойств дифференциальных операторов, порождённых задачей Дирихле для гиперболической системы (1) без «младших членов» вида

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = \lambda u^1 + f^1, \\ \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} = \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \quad (1)$$

и для гиперболической системы (2) с «младшими членами», по независимым переменным t и x

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u^1}{\partial t} = \lambda u^1 + f^1, \\ \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial t} = \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \quad (2)$$

рассматриваемых в замыкании $V_{t,x}$ ограниченной области $\Omega_{t,x} = (0; \pi)^2$ евклидова пространства $\mathbb{R}_{t,x}^2$. Присоединив к системам уравнений (1) и (2) условие Дирихле

$$u \Big|_{\partial\Omega_{t,x}} = 0 \quad (3)$$

получим две граничные задачи: задачу (1), (3) и задачу (2), (3).

Для гиперболических систем [1] и более общих, так называемых симметричных [2] и несимметричных систем, имеется ряд глубоких результатов, относящихся к описанию правильных граничных условий [3].



Описанию регулярных граничных задач для более общих систем уравнений первого порядка по выделенной переменной t при числе переменных более двух посвящена работа [4].

Исследованию свойств разрешимости задачи Коши для простейшей гиперболической системы первого порядка в «линзообразной области», посвящена работа [3]. Однако, спектральные свойства этих граничных задач и граничных задач иного типа при числе переменных больше двух почти не изучены. Элементы спектральной теории замкнутых операторов подробно изложены в книгах [5], [6] [7]. Спектральные свойства задачи Дирихле для гиперболических систем первого порядка и систем дифференциально-операторных уравнений изучались в работах [8], [9], [10]. Также, как и в работах [9], [10] системы дифференциальных уравнений (2) и (3) для удобства будем называть гиперболическими системами первого типа с младшими членами. Гиперболической системой второго типа с младшими членами в данном случае будет система вида

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial u^2}{\partial x} = \lambda u^1 + f^1, \\ \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^1}{\partial x} = \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \quad (4)$$

Отметим, что система (4) равносильна системе (2) (для $\lambda = 0$) в следующем смысле: после умножения первого уравнения системы (2) на -1 и формальной замены $-f^1$ на f^1 (в силу произвольности правой части), получаем систему (4). Эти рассуждения наводят на мысль о совпадении свойств разрешимости граничных задач для данных систем безотносительно к условиям, определяющим граничную задачу. Однако, исследования в случае гиперболических систем первого порядка показывают, что спектральные свойства рассматриваемых дифференциальных операторов различны; они в некотором смысле аналогичны тем отличиям, которые проявились при сопоставлении слабой иррегулярности сильной в работе [12], а также при изучении гиперболических систем в [8].

Обозначим символами $e_i = (\delta_i^1 \ \delta_i^2)^T$, $i = 1, 2$; ортонормированный базис евклидова пространства \mathcal{E}_2^2 вектор-столбцов, а через \mathcal{U}_2^2 — унитарное пространство элементов $u = u^1 e_1 + u^2 e_2$; $u^k \in \mathbb{C}$; $k = 1, 2$; со скалярным произведением $(u, v; \mathcal{U}_2^2) = u^1 \overline{v^1} + u^2 \overline{v^2}$.

Пусть $\mathcal{H}_{t,x}^2 = \mathcal{L}_2^2(V_{t,x})$ — гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций $u : V_{t,x} \rightarrow \mathbb{C}^2$, норма в котором задаётся формулой

$$|u; \mathcal{H}_{t,x}^2|^2 = \iint_{V_{t,x}} |u(\tau, \xi); \mathcal{U}_2^2|^2 d\tau d\xi.$$

Пусть также \mathfrak{D} — линейное многообразие гладких комплекснозначных вектор-функций $u = u(t, x)$, принадлежащих классу $\mathbb{C}(\overline{\Omega}_{t,x}) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\Omega_{t,x})$ и удовлетворяющих условиям (3).

Опишем вначале спектральные свойства гиперболической системы первого типа без младших членов.

Гиперболическая система без младших членов. Обозначая символом \tilde{L} оператор, областью определения которого является \mathfrak{D} , а множество значений определяется правой частью (1), получаем гиперболический дифференциальный оператор; этот



оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}_{t,x}^2$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора \tilde{L} . В этом случае говорят, что замкнутый оператор $L : \mathcal{H}_{t,x}^2 \rightarrow \mathcal{H}_{t,x}^2$ порождён задачей (1), (3). Изучим его спектр и спектральные свойства его собственных вектор-функций. Говоря о спектре замкнутого оператора, мы следуем терминологии, принятой в монографиях [5, с. 25], [7, с. 620]. Резольвентное множество, спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора L обозначим символами ρL , σL , $P\sigma L$, $C\sigma L$ и $R\sigma L$ соответственно. Точно также, как и в работе [11] доказывается следующая теорема:

Теорема 1. Спектр σL оператора L , порождённого задачей (1), (3), состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L . Точечный спектр оператора L даётся формулой

$$\lambda_{m,k,s} = -k^2 + (-1)^m s^2; \quad m = 1, 2; \quad k \in \mathbb{N}; \quad s \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Собственная вектор-функция оператора L , принадлежащая его собственному значению (5), представима в виде

$$u_{m,k,s}(t, x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} (e_1 + (-1)^{m+1} e_2) \sin(kt) \sin(sx).$$

Последовательность $\{u_{m,k,s}(t, x) : m = 1, 2; k \in \mathbb{N}; s \in \mathbb{N}\}$ собственных вектор-функций оператора L образует ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}_{t,x}^2$.

□ Достаточно заметить, что последовательность

$$u_{m,k,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt)(e_1 + (-1)^m e_2)$$

является полной и ортонормированной в $\mathcal{H}_t^2 = \mathcal{H}_t \oplus \mathcal{H}_t$, $\mathcal{H}_t = \mathcal{L}_2[0, \pi]$ и воспользоваться доказанным в [9] представлением $\mathcal{H}_{t,x}$ в виде тензорного произведения произведения пространств гильбертовых пространств \mathcal{H}_t и \mathcal{H}_x , то есть формулой $\mathcal{H}_{t,x} = \mathcal{H}_t^2 \otimes \mathcal{H}_x$, где $\mathcal{H}_x = \mathcal{L}_2[0, \pi]$. ■

Гиперболическая система с младшими членами. Также, как и в случае гиперболической системы без младших членов обозначим символом \tilde{L} оператор, областью определения которого является \mathfrak{D} , а множество значений определяется правой частью (2), получаем гиперболический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}_{t,x}^2$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора \tilde{L} . В этом случае говорят, что замкнутый оператор $L : \mathcal{H}_{t,x}^2 \rightarrow \mathcal{H}_{t,x}^2$ порождён задачей (2), (3). Изучим его спектр и спектральные свойства его собственных вектор-функций.

Теорема 2. Спектр σL оператора L , порождённого задачей (2), (3) состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество



$C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L . Точечный спектр оператора L даётся формулой

$$\lambda_{m,k,s} = -\frac{1}{4} + (-1)^m \lambda_s - 4k^2; \quad \lambda_s = -\frac{1}{4} - \frac{s^2}{2}; \quad m = 1, 2; \quad k \in \mathbb{Z}; \quad s \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Собственная вектор-функция оператора L , принадлежащая его собственному значению (6), представима в виде:

$$u_{m,k,s}(t, x) = e^{\frac{x}{2}} \sin x \left(e_1 - (-1)^m e_2 \right) e^{-\frac{t}{2}} e^{i2kt}. \quad (7)$$

Последовательность $\{u_{m,k,s}(t, x) : m = 1, 2; k \in \mathbb{N}; s \in \mathbb{N}\}$ собственных вектор-функций оператора L образует базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}_{t,x}^2$.

□ Достаточно заметить, что последовательность $\{u_{m,k,s}(t) : m = 1, 2; k \in \mathbb{N}\}$ вектор-функций

$$u_{m,k}(t) = e^{\frac{t}{2}} e^{i2kt} (e_1 + (-1)^m e_2) \quad (8)$$

является базисом Рисса в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}_t^2 = \mathcal{H}_t \oplus \mathcal{H}_t,$$

$\mathcal{H}_t = \mathcal{L}_2[0, \pi]$, и воспользоваться, доказанным в [9], представлением гильбертова пространства $\mathcal{H}_{t,x}^2$ в виде тензорного произведения гильбертовых пространств \mathcal{H}_t^2 и \mathcal{H}_x , то есть формулой $\mathcal{H}_{t,x}^2 = \mathcal{H}_t^2 \otimes \mathcal{H}_x$, где $\mathcal{H}_x = \mathcal{L}_2[0, \pi]$. ■

Литература

1. Дезин А.А. Смешанные задачи для некоторых симметрических гиперболических систем // ДАН СССР. – 1956. – 107, №1. – С.13-16.
2. Дезин А.А. Граничные задачи для некоторых симметричных линейных систем первого порядка // Матем. сборник. – 1959. – 49(91), №4. – С.459-484.
3. Дезин А.А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // Успехи матем. наук. – 1959. – XIV, вып. 3(87). – С.21-73.
4. Романко В.К. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Докл. АН СССР. – 1986. – 286, №1. – С.47-50.
5. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач /- М.: Наука, 1980. – 207 с.
6. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов / М.: Гос.из-во физ.-мат. литературы, 1958. – 508 с.
7. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, Т.1. Общая теория / М.: ИЛ, 1962. – 895 с.
8. Корниенко Д.В. О спектральных задачах для линейных систем дифференциально-операторных уравнений // Вестник Елецкого госуниверситета им. И. А. Бунина. – Вып. 5: Серия «Математика, физика». – Елец: ЕГУ им. И.А.Бунина, 2004. – С.71-78.
9. Корниенко Д.В. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42, №1. – С.91-100.
10. Корниенко Д.В. О спектре задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42, №8. – С.1063-1071.



11. Алексеева О.В. О спектре задачи Дирихле для двух эллиптических систем // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика Физика. – 2010. – №17(88). – Вып.20. С.5-9.
12. Дезин А.А. О слабой и сильной иррегулярности // Дифференц. уравнения. – 1981. – 17, №10. – С.1851-1858.

TO THEORY OF 2×2 -HYPERBOLIC SYSTEM SPECTRUM

V.V. Kornienko, D.V. Kornienko

Eletz State University I.A. Bunin,
Kommunarov St., 28, Eletz, 399770, Russia, e-mail: v_v_kornien@mail.ru, dmkornienko@mail.ru

Abstract. For closed differential operators $L : \mathcal{H}_{t,x} \rightarrow \mathcal{H}_{t,x}$, generated by the Dirichlet problem connected with hyperbolic systems of second-order, following spectra are studied: $C\sigma L = R\sigma L$ is empty set; point spectrum of $P\sigma L$ is located on the real line in the complex plane \mathbb{C} . In the case of a hyperbolic system without the minor terms eigenvector-function of the operator L form an orthogonal basis. In the case of a hyperbolic system with minor terms of the vector-valued function of the operator L form the Riesz basis, being non-orthogonal in the Hilbert space $\mathcal{H}_{t,x}$.

Key words: hyperbolic systems, boundary-value problems, closed operators, spectrum, basis, orthogonal basis, basis Riesz.



MSC 49J30

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД

Г.Д. Садритдинова

Томский государственный архитектурно-строительный университет,
Соляная пл., 2, Томск, 634003, Россия, e-mail: dolina1@sibmail.com

Аннотация. Изучаются функционалы от функций комплексного переменного, зависящие от значения функции и её производных в фиксированной точке. В работе параметрическим методом установлены управляющие функции в уравнении Лёвнера, приводящие к граничным функциям, связанным с такими функционалами на классе голоморфных однолистных в круге p -симметричных функций.

Ключевые слова: функционалы, граничные функции, управляющие функции, уравнение Лёвнера.

1. Введение. Пусть S_p , $p = 1, 2, \dots$ — класс голоморфных однолистных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + \dots$, отображающих E на области, имеющие p -кратную симметрию вращения относительно нуля, т.е. таких что

$$f\left(e^{i\frac{2\pi k}{p}} z\right) = e^{i\frac{2\pi k}{p}} f(z), \quad k = 1, 2, \dots, p-1.$$

Плотный подкласс класса S_p образуют функции $f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^\tau \zeta(z, \tau)$, где $\zeta(z, \tau)$ — решение уравнения Лёвнера

$$\frac{d\zeta(z, \tau)}{d\tau} = -\zeta(z, \tau) \frac{\mu^p(\tau) + \zeta^p(z, \tau)}{\mu^p(\tau) - \zeta^p(z, \tau)}, \quad \zeta(z, 0) = z, \quad |z| < 1, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (1)$$

в котором управляющая функция $\mu(\tau)$, $|\mu(\tau)| = 1$, является непрерывной или кусочно-непрерывной на $[0, \infty)$.

Функционалы, зависящие от значения функции и её производных в фиксированной точке области задания, являются объектом исследования в различных экстремальных задачах, главной из которых является нахождение множества значений таких функционалов. Подобные функционалы изучались Л. Биберахом, Г.М. Голузиным, И.Е. Базилевичем, П.П. Куфаревым, Н.А. Лебедевым, И.А. Александровым и другими.

Представляет интерес задача об описании управляющих функций в уравнении Лёвнера, приводящих к функциям, вносящим граничные точки в область значений этих функционалов. Такие $\mu(\tau)$ мы называем экстремальными.

В настоящей работе рассматриваются функционалы

$$I_1(f, z) = \ln \left| \frac{f(z)}{z} \right|, \quad I_2(f, z) = \ln \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right|, \quad I_3(f, z) = \ln |f'(z)|$$



на классе S_p , для которых параметрическим методом находятся экстремальные управляющие функции $\mu(\tau)$ в уравнении (1). Для функционалов I_1, I_3 экстремальные управляющие функции уже были получены в работах [1]-[3]. Кроме того, в работах [4], [5] были получены экстремальные $\mu(\tau)$ для $\arg f'(z)$ на классах $S = S_1$ и $S_p, p = 2, 3, \dots$.

2. Параметризация функционалов. Из уравнения (1) имеем

$$\frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\tau} = -1 - \frac{2\zeta^p}{\mu^p - \zeta^p} \Rightarrow \frac{d(\ln e^\tau \zeta)}{d\tau} = -\frac{2\zeta^p}{\mu^p - \zeta^p}. \quad (2)$$

Продифференцировав равенство (2) по z , и обозначая через ζ' производную функции $\zeta(z, \tau)$ по z , будем иметь

$$\frac{d}{d\tau} \ln \frac{\zeta'}{\zeta} = -\frac{2p\zeta^p \mu^p}{(\mu^p - \zeta^p)^2}. \quad (3)$$

Проинтегрировав равенства (2) и (3) по $\tau, 0 \leq \tau < \infty$, получим

$$\ln \frac{f(z)}{z} = -2 \int_0^\infty \frac{\zeta^p(z, \tau)}{\mu^p(\tau) - \zeta^p(z, \tau)} d\tau \quad (4)$$

и

$$\ln \frac{zf'(z)}{f(z)} = -2p \int_0^\infty \frac{\mu^p(\tau) \zeta^p(z, \tau)}{(\mu^p(\tau) - \zeta^p(z, \tau))^2} d\tau, \quad (5)$$

где $f(z) \in S_p$.

Множества значений функционалов $\ln \frac{f(z)}{z}$ и $\ln \frac{zf'(z)}{f(z)}$ не зависят от $\arg z$, поэтому можно считать, что $z = r, 0 < r < 1$.

Введём обозначения

$$|\zeta(r, \tau)| = \rho(r, \tau), \quad \zeta(r, \tau) \bar{\mu}(\tau) = \rho(r, \tau) y(r, \tau) \quad (6)$$

и запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d \ln \zeta(r, \tau)}{d\tau} = -\frac{1 + \rho^p(r, \tau) y^p(r, \tau)}{1 - \rho^p(r, \tau) y^p(r, \tau)},$$

откуда получаем

$$\frac{d \ln \rho}{d\tau} = -\frac{1 - \rho^{2p}}{|1 - \rho^p y^p|^2}, \quad (7)$$

$$i \frac{d \arg \zeta}{d\tau} = -\frac{\rho^p (y^p - \bar{y}^p)}{|1 - \rho^p y^p|^2}. \quad (8)$$

Из формулы (7) следует, что функция $\rho(\tau)$ монотонно убывает, причём $\rho(r, 0) = r, \lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho(r, \tau) = 0$.

Преобразуем функционалы (4) и (5) при $z = r$, применив обозначения (6). Получим



$$\ln \frac{f(r)}{r} = -2 \int_0^\infty \frac{\rho^p(r, \tau) y^p(r, \tau)}{1 - \rho^p(r, \tau) y^p(r, \tau)} d\tau,$$

$$\ln \frac{r f'(r)}{f(r)} = -2p \int_0^\infty \frac{\rho^p(r, \tau) y^p(r, \tau)}{(1 - \rho^p(r, \tau) y^p(r, \tau))^2} d\tau.$$

Заменим в этих интегралах τ на ρ , используя формулу (7). Тогда

$$\begin{aligned} \ln \frac{f(z)}{z} &= 2 \int_0^r \frac{\rho^{p-1} y^p}{1 - \rho^p y^p} \cdot \frac{-|1 - \rho^p y^p|^2}{1 - \rho^{2p}} d\rho = -2 \int_0^r \frac{\rho^{p-1} y^p (1 - \rho^p \bar{y}^p)}{1 - \rho^{2p}} d\rho = \\ &= -2 \int_0^r y^p \frac{\rho^{p-1} d\rho}{1 - \rho^{2p}} - \frac{1}{p} \ln(1 - r^{2p}), \\ \ln \frac{r f'(r)}{f(r)} &= -2p \int_0^r \frac{(y^p - \rho^p) \rho^{p-1}}{(1 - \rho^p y^p)(1 - \rho^{2p})} d\rho. \end{aligned}$$

Вместо кусочно-непрерывной функции $y(r, \rho)$, $|y(r, \rho)| = 1$, $0 \leq \rho \leq r$, введём вещественнозначную функцию $t(r, \rho)$, такую что $y = \left(\frac{i+t}{i-t}\right)^{1/p}$. Кроме того, в полученных интегралах сделаем замену переменной, положив $\rho = \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{1/p}$. Будем иметь

$$\begin{aligned} \ln \frac{f(r)}{r} &= \frac{1}{p} \int_\sigma^1 \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \frac{ds}{s} - \frac{1}{p} \ln(1 - r^{2p}) + \frac{2i}{p} \int_\sigma^1 \frac{t}{t^2 + 1} \frac{ds}{s}, \\ \ln \frac{r f'(r)}{f(r)} &= \int_\sigma^1 \frac{t^2 - s^2}{t^2 + s^2} \frac{ds}{s} + 2i \int_\sigma^1 \frac{ts}{t^2 + s^2} \frac{ds}{s}, \end{aligned}$$

где $\sigma = \frac{1 - r^p}{1 + r^p}$. Таким образом,

$$I_1(f, r) = \ln \left| \frac{f(r)}{r} \right| = \int_\sigma^1 g_1(s, t) ds - \frac{1}{p} \ln(1 - r^{2p}), \quad (9)$$

где $g_1(s, t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \frac{1}{ps}$,

$$I_2(f, r) = \ln \left| \frac{r f'(r)}{f(r)} \right| = \int_\sigma^1 g_2(s, t) ds, \quad (10)$$

где $g_2(s, t) = \frac{t^2 - s^2}{t^2 + s^2} \frac{1}{s}$.

Очевидно, что

$$I_3(f, r) = \ln |f'(r)| = \int_\sigma^1 g_3(s, t) ds - \frac{1}{p} \ln(1 - r^{2p}), \quad (11)$$

где $g_3(s, t) = g_1(s, t) + g_2(s, t)$.



3. Экстремальные значения функционалов. Каждое из уравнений $(g_i)'_t = 0$, $i = 1, 2, 3$, даёт $t(s) = 0$ и $t(s) = \infty$.

Выполнив интегрирование в (9)-(11) при $t(s) = 0$, получаем

$$I_1 = \ln \frac{1}{(1+r^p)^{2/p}}, \quad I_2 = \ln \frac{1-r^p}{1+r^p}, \quad I_3 = \ln \frac{1-r^p}{(1+r^p)^{1+2/p}}.$$

То есть при $t(s) = 0$ функционалы I_1, I_2, I_3 достигают своих минимальных значений [4]. Вычислив теперь интегралы в (9)-(11) при $t(s) = \infty$, находим значения функционалов

$$I_1 = \ln \frac{1}{(1-r^p)^{2/p}}, \quad I_2 = \ln \frac{1+r^p}{1-r^p}, \quad I_3 = \ln \frac{1+r^p}{(1-r^p)^{1+2/p}},$$

являющиеся максимальными [4].

4. Экстремальные управления. Восстановим управляющие функции $\mu(\tau)$, приводящие к минимумам функционалов I_1, I_2, I_3 .

Берём $t = 0$, следовательно $y = 1^{1/p}$. При таком y уравнение (8) записывается в виде

$$\frac{d \arg \zeta(r, \tau)}{d\tau} = 0, \quad \arg \zeta(r, 0) = 0.$$

Следовательно, $\arg \zeta(r, \tau) = 0$. Таким образом, $\zeta(r, \tau) = \rho(r, \tau)$, и из формул (6) находим $\bar{\mu} = 1^{1/p}$. Значит, $\mu = 1^{1/p}$ — экстремальные управляющие функции, доставляющие минимальные значения функционалам I_1, I_2, I_3 .

Найдём теперь функции $\mu(\tau)$, приводящие к максимумам функционалов I_1, I_2, I_3 . При $t = \infty$ имеем $y = (-1)^{1/p}$, и уравнение (8) с начальным условием $\arg \zeta(r, 0) = 0$ даёт $\arg \zeta(r, \tau) = 0$. Используя формулы (6), находим, что $\mu = (-1)^{1/p}$ — экстремальные управляющие функции, приводящие к максимальным значениям функционалов I_1, I_2, I_3 .

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. Экстремальные управляющие функции, приводящие к минимальным значениям функционалов $I_1(f, z) = \ln |f(z)/z|$, $I_2(f, z) = \ln |zf'(z)/f(z)|$, $I_3(f, z) = \ln |f'(z)|$, где $f(z) \in S_p$, $p = 1, 2, \dots$, имеют вид $\mu = 1^{1/p}$. Экстремальные управляющие функции, приводящие к максимальным значениям этих функционалов, имеют вид $\mu = (-1)^{1/p}$.

Проинтегрировав уравнение Лёвнера (1) с управлением $\mu = 1^{1/p}$, находим

$$\zeta(z, \tau) = \left[\frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4K_1(z) e^{-p\tau}}\right)^2}{4K_1(z) e^{-p\tau}} \right]^{\frac{1}{p}},$$

где $K_1(z) = \frac{z^p}{(1+z^p)^2}$, и выбираем однозначную ветвь функции ζ в соответствии с



условием $\zeta(z, \tau) = e^{-\tau}z + \dots$. Функция $f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau} \zeta(z, \tau) = \frac{z}{(1+z^p)^{2/p}}$ является граничной для функционалов I_1, I_2, I_3 на классе S_p , на которой данные функционалы достигают своих минимальных значений.

Проинтегрировав уравнение (1) с $\mu = (-1)^{1/p}$, получаем

$$\zeta(z, \tau) = \left[\frac{\left(1 - \sqrt{1 + 4K_2(z) e^{-p\tau}}\right)^2}{4K_2(z) e^{-p\tau}} \right]^{1/p}$$

где $K_2(z) = \frac{z^p}{(1-z^p)^2}$. Однозначная ветвь полученного решения, удовлетворяющая условию $\zeta(z, \tau) = e^{-\tau}z + \dots$, даёт функцию $f(z) = \frac{z}{(1-z^p)^{2/p}} \in S_p$, на которой функционалы I_1, I_2, I_3 достигают своих максимумов.

При $p = 1$ получаем экстремальные управляющие функции для функционалов I_1, I_2, I_3 на классе S .

5. Заключение. Область значений любого функционала, зависящего от $f(z)$ и $f'(z)$, $f(z) \in S_p$, можно получить соответствующим преобразованием области значений системы функционалов $\left\{ \ln \left| \frac{f(z)}{z} \right|, \arg \frac{f(z)}{z}, \ln \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right|, \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\}$, $f \in S_p$.

Исследования по описанию экстремальных управляющих функций, проведённые в данной работе, продолжаются в отношении оставшихся функционалов системы. Полученный результат развивает параметрический метод, являющийся одним из основных методов геометрической теории функций комплексного переменного.

Литература

1. Садритдинова Г.Д. Управляющие функции и модуль производной // Вестник Томского государственного университета. – 2007. – №299. – С.104-105.
2. Садритдинова Г.Д. Экстремальное управление для модуля производной на классе p -симметричных функций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2007. – №1. – С.54-57.
3. Садритдинова Г.Д. Экстремальное управление для одного функционала на классах аналитических функций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2014. – №2. – С.29-34.
4. Александров И.А. Александров А.И. Экстремальные управляющие функции в уравнении Лёвнера в теореме вращения // ДАН. – 2000. – 371, №1. – С.7-9.
5. Садритдинова Г.Д. Вестник Томского государственного университета. Математика. Кибернетика. Информатика / 2003. – №280. – С. – 78-80.
6. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций / М.: Наука, 1976. – 344 с.
7. Попов В.И. Исследование некоторых функционалов и свойств линий уровня на классах однолистных функций / Дисс... канд. физ.-мат. наук / Томск, 1965. – 93 с.

**EXTREME CONTROLS AND PARAMETRIC METHOD****G.D. Sadritdinova**Tomsk State University of architecture and construction,
Solyanaya Sq., 2, Tomsk, 634003, Russia, e-mail: dolina1@sibmail.com

Abstract. Functionals on complex variable functions depending on function values and derivative values at fixed point. Using parametric method control functions in the Loewner equation have been set which have led to boundary functions connected with the class of holomorphic univalent in the disk and p -symmetric functions.

Key words: functional, boundary functions, control functions, Loewner's equation.



MSC 46H25

О ДВУХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ СПЕКТРА ВЕКТОРА

В.Е. Струков

Воронежский государственный университет,

Университетская пл., 1, Воронеж, 394036, Россия, e-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com

Аннотация. В статье рассмотрены два определения спектра векторов в банаховых $L^1(\mathbb{R})$ -модулях и доказана их эквивалентность.

Ключевые слова: спектр Берлинга вектора, локальный спектр вектора, банахов модуль.

1. Введение. Пусть X – комплексное банахово пространство, $\text{End } X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X . Пусть $L^1(\mathbb{R})$ – банахова алгебра измеримых суммируемых на \mathbb{R} (классов) комплекснозначных функций со сверткой в качестве умножения, а $W_1^1(\mathbb{R})$ – банахово пространство Соболева, т.е. пространство функций из $L^1(\mathbb{R})$, имеющих обобщенную производную первого порядка. Зададим на банаховом пространстве X структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля с помощью изометрического представления $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$, порождаемого генератором iA , по формуле

$$T(f)x = fx = \int_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x dt.$$

Банахов $L^1(\mathbb{R})$ -модуль X со структурой, порождаемой представлением T , будем обозначать (X, T) . Оператор A будем также называть генератором $L^1(\mathbb{R})$ -модуля (X, T) . Потребуем также, чтобы банахов модуль (X, T) был невырожденным, т.е. для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$ из равенства $fx = 0$ следовало, что $x = 0$. Пусть $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } L^1(\mathbb{R})$ – изометрическая группа операторов сдвига на пространстве $L^1(\mathbb{R})$, для кусочно-непрерывных функций $x \in L^1(\mathbb{R})$ приобретающая вид $(S(t)x)(s) = x(t + s)$.

В настоящей работе будут рассмотрены определения локального спектра и спектра Берлинга векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля, перечислены свойства и доказана их эквивалентность указанных спектров. Аналогичные результаты приведены в [1, глава 1.5].

Замечание 1. Для рассматриваемого банахова модуля (X, T) справедливы следующие свойства:

1. Для всех $x \in X$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $T(t)(fx) = (S(t)f)x = f(T(t)x)$.
2. Для всех $x \in X$ и $f \in L^1(\mathbb{R})$ справедливо неравенство $\|fx\| \leq \|f\|_1 \|x\|$, где $\|\cdot\|_1$ – норма в пространстве $L^1(\mathbb{R})$.



Лемма 1. *Отображение $f \mapsto T(f) : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \text{End}X$ является гомоморфизмом алгебр $L^1(\mathbb{R})$ и $\text{End}X$.*

□ Линейность данного отображения следует из линейности интеграла. Докажем, что $T(f * g) = T(f)T(g)$ для всех $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Для этого рассмотрим оператор $T(f * g)$ на некотором векторе $x \in X$.

$$\begin{aligned} T(f * g)x &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(t)T(-t)xdt = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)ds \right\} T(-t)xdt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(s)T(-s)g(t-s)T(-t+s)xds \right\} dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s)T(-s) \left\{ \int_{\mathbb{R}} g(t-s)T(-t+s)xdt \right\} ds = T(f)T(g), \end{aligned}$$

где изменен порядок интегрирования согласно теореме Фубини

2. Определение и основные свойства спектра Берлинга.

Используемые далее понятия и результаты из спектральной теории модулей можно найти в [1–4].

Определение 1. *Спектром Бёрлинга подмножества $M \subset X$ называется множество $\Lambda(M) = \Lambda(M, T) \subset \mathbb{R}$, являющееся дополнением в \mathbb{R} к множеству*

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \text{существует } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ со свойством } \widehat{f}(\lambda) \neq 0 \text{ такое,} \right.$$

$$\left. \text{что для всех } x \in M \text{ справедливо } fx = 0 \right\}.$$

Если $M = \{x\}$, то будем обозначать $\Lambda(M, T) = \Lambda(x, T) = \Lambda(x)$, причем

$$\Lambda(x) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \text{для всех } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ со свойством } \widehat{f}(\lambda) \neq 0 \text{ справедливо } fx \neq 0 \right\}.$$

Множество $\Lambda(x)$ будем называть *спектром Берлинга* вектора x .

Лемма 2. *Множество $\Lambda(M)$ совпадает с линейной оболочкой инвариантного относительно сдвига двустороннего замкнутого идеала $I(M) = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : fx = 0 \text{ для всех } x \in M\}$, т.е. $\Lambda(M) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \widehat{f}(\lambda) = 0 \text{ для всех } f \in I(M)\}$ - общее множество нулей преобразования Фурье функций из идеала $I(M)$.*

□ По определению для произвольного $\lambda_0 \in \Lambda(M)$ из того, что для всякого $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ следует, что существует $x \in M$ такой, что $fx \neq 0$. Это эквивалентно тому, что для произвольного $\lambda_0 \in \Lambda(M)$ из того, что для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$, таких, что для всех $x \in M$ имеет место равенство $fx = 0$, следует, что $\widehat{f}(\lambda_0) = 0$.



Покажем теперь, что $I(M)$ является инвариантным относительно сдвига двусторонним замкнутым идеалом в алгебре $L^1(\mathbb{R})$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in I(M)$. Поскольку для нее имеет место равенство $fx = 0$ для всех $x \in M$, то для функции $S(h)f$, $h \in \mathbb{R}$, справедливо

$$(S(h)f)x = \int_{\mathbb{R}} (S(h)f)(t)T(-t)xdt = \int_{\mathbb{R}} f(t)T(h-t)xdt = T(h)fx = 0.$$

Для доказательства замкнутости рассмотрим последовательность функций $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I(M)$, сходящуюся к некоторой функции $f_0 \in L^1(\mathbb{R})$. Тогда для любого $x \in M$ будет справедлива оценка $\|f_0x\| \leq \|f_nx\| + \|(f_n - f_0)x\| \leq \|f_n - f_0\|_1 \|x\|$, из которой, с учетом сходимости последовательности $\{f_n\}$, получаем, что $f_0x = 0$. То, что $I(M)$ - идеал, следует из коммутативности свертки и равенства $f(gx) = (f * g)x = (g * f)x = g(fx)$, для любых $f \in I(M)$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in M$. ■

Для идеала $I(M)$ справедлива следующая

Лемма 3. Если для всякого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется функция $f \in I(M)$ такая, что $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$ и $fx = 0$, то $I(M) = L^1(\mathbb{R})$.

□ Доказательство вытекает из аппроксимационной теоремы Винера в [5, глава III.76] и леммы 2. ■

Лемма 4. Пусть (X, T) - банахов $L^1(\mathbb{R})$ -модуль. Справедливы следующие утверждения:

1. Спектр $\Lambda(M)$ замкнут для любого подмножества $M \subseteq X$ и $\Lambda(M) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $M = \{0\}$.
2. $\Lambda(Ax + By) \subseteq \Lambda(x) \cup \Lambda(y)$ для всех операторов $A, B \in \text{End}X$, перестановочных с операторами $T(f)$, $f \in L^1(\mathbb{R})$.
3. $\Lambda(fx) \subset \text{supp } \widehat{f} \cap \Lambda(x)$ для всех $x \in X$, $f \in L^1(\mathbb{R})$.
4. Если функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{f} = 0$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$, то $fx = 0$.
5. Если функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{f} = 1$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$, то $fx = x$.
6. Если функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{f}(\lambda) = \lambda$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$, то $fx = Ax$.
7. Если функция $f_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{f}_\lambda(z) = (z - \lambda)^{-1}$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$ и $\lambda \notin \Lambda(x)$, тогда $f_\lambda x = R(\lambda, A)x$.

□ 1. Покажем, что дополнение к спектру Бёрлинга открыто. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda(M)$, тогда по определению найдется $f \in L^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ такое, что для любого



$x \in M$ справедливо равенство $fx = 0$. Поскольку преобразование Фурье функции из $L^1(\mathbb{R})$ непрерывно, то найденная функция f будет иметь отличное от нуля преобразование Фурье в окрестности точки λ_0 , что означает, что произвольная точка λ_0 входит в $\mathbb{R} \setminus \Lambda(M)$ вместе с некоторой окрестностью. Таким образом, $\mathbb{R} \setminus \Lambda(M)$ открыто, а $\Lambda(M)$ – замкнуто.

Пусть $\Lambda(M) = \emptyset$. Тогда для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ существует $f \in L^1(\mathbb{R})$, такая, что $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$, а $fx = 0$ для всех $x \in M$. Тогда согласно леммам 2 и 3 идеал $I(M)$ совпадает с алгеброй $L^1(\mathbb{R})$. В силу невырожденности банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля получаем, что $M = \{0\}$.

Обратно, если $x \in M = \{0\}$, то $fx = 0$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$. То есть, $I(M) = L^1(\mathbb{R})$ и для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$ такая, что для всех $x \in M$ справедливо $fx = 0$. Таким образом, $\Lambda(M) = \emptyset$.

2. Пусть $\lambda \notin \Lambda(A) \cup \Lambda(B)$, тогда существуют такие функции $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ такие, что $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$, $\widehat{g}(\lambda) \neq 0$ и $fx = 0$, $gy = 0$. Пусть функция $h = f * g$, тогда $\widehat{h}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda) \neq 0$ и справедливо равенство

$$\begin{aligned} h(Ax + By) &= hAx + hBy = T(h)Ax + T(h)By = \\ &= AT(h)x + BT(h)y = A(f * g)x + B(f * g)y = Ag(fx) + Bf(gy) = 0, \end{aligned}$$

то есть, $\lambda \notin \Lambda(Ax + By)$.

3. Пусть $\lambda_0 \notin \text{supp } \widehat{f}$, тогда найдется $\delta > 0$, такое, что $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \cap \text{supp } \widehat{f} = \emptyset$. Рассмотрим функцию $g \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\text{supp } \widehat{g} \subset (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$. Согласно лемме 1 справедливо равенство $f(gx) = (f * g)x = 0$, поскольку $\widehat{f * g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda) = 0$. Таким образом, $\lambda_0 \notin \Lambda(fx)$.

Пусть теперь $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$. Тогда, по определению, существует функция $g \in L^1(\mathbb{R})$, такая, что $\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$ и $gx = 0$. Снова применим лемму 1 и получим $g(fx) = (f * g)x = f(gx) = 0$, т.е. $\lambda_0 \notin \Lambda(fx)$.

4. Доказательство непосредственно вытекает из предыдущего утверждения данной леммы.

5. Рассмотрим произвольное $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Если $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$, то найдем такую функцию $g \in L^1(\mathbb{R})$, что $\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$, а $gx = 0$. Тогда $g(fx - x) = f(gx) - gx = 0$, т.е. $\lambda_0 \notin \Lambda(fx - x)$. С другой стороны, для всех $\lambda_0 \in \Lambda(x)$ функция $\widehat{f} \equiv 1$ и для произвольной функции $g \in L^1(\mathbb{R})$ такой, что $\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$, преобразование Фурье функции $f * g - g$ принимает вид $\widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda) - \widehat{g}(\lambda) = 0$ для всех λ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$. Таким образом, согласно предыдущему пункту, $g(fx - x) = 0$ и $\lambda_0 \notin \Lambda(fx - x)$. Таким образом, для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \notin \Lambda(fx - x)$, и, согласно первому утверждению данной леммы, $fx - x = 0$.

6. Пусть $\widehat{f}(\lambda) = \lambda$ на некоторой окрестности $U_0(\Lambda(x)) = U_0$ спектра Берлинга $\Lambda(x)$ вектора x . Рассмотрим функцию $g \in W_1^1(\mathbb{R})$, такую, что $\widehat{g} \equiv -i$ на U_0 . Тогда, интегрируя по частям, получим

$$g'x = \int_{\mathbb{R}} g'(t)T(-t)x dt = g(t)T(-t)x \Big|_{-\infty}^{+\infty} + iA \int_{\mathbb{R}} g(t)T(-t)x dt = iA(gx).$$



С учетом предыдущего свойства получаем, что $g'x = iA(gx) = iA(-ix) = Ax$. Напомним, что для преобразования Фурье функции $g \in L^1(\mathbb{R})$ с суммируемой производной справедливо равенство $\widehat{g}'(\lambda) = i\lambda\widehat{g}(\lambda)$. Таким образом, на множестве U_0 спектра Берлинга $\Lambda(x)$ имеет место равенство $\widehat{g}'(\lambda) = i\lambda\widehat{g}(\lambda) = \lambda$. Поскольку $\widehat{f}(\lambda) - \widehat{g}(\lambda) = 0$ в окрестности U_0 спектра Берлинга $\Lambda(x)$, то $(f - g')x = 0$, и $fx = g'x = Ax$.

7. Рассмотрим функцию $f_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{f}_\lambda(z) = z - \lambda$ в некоторой окрестности $U(\Lambda(x))$ спектра Берлинга $\Lambda(x)$, тогда согласно предыдущим свойствам $f_\lambda x = (A - \lambda I)x$. Предположим, что $\lambda \notin \Lambda(x)$ и рассмотрим функцию $g_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{g}_\lambda = 1/\widehat{f}_\lambda$. Применим функцию g_λ к вектору $f_\lambda x$ и получим равенство $g_\lambda(f_\lambda x) = (g_\lambda * f_\lambda)x$. Применим преобразование Фурье к функции $g_\lambda * f_\lambda$ и получим $(g_\lambda * f_\lambda)^\wedge(z) = \widehat{g}_\lambda(z)\widehat{f}_\lambda(z) \equiv 1$ для всех $z \in U(\Lambda(x))$, таким образом, $(g_\lambda * f_\lambda)x = x$. В силу коммутативности свертки получаем, что оператор $T(g_\lambda)$ совпадает с $R(\lambda, A)$ на векторе x при $\lambda \notin \Lambda(x)$. ■

Лемма 5. Для произвольного множества $M \subset X$ справедливо равенство

$$\Lambda(M) = \bigcup_{x \in M, \xi \in X^*} \Lambda(\langle \psi_x, \xi \rangle), \text{ где } \langle \psi_x, \xi \rangle = \xi(\psi_x) = \xi(T(t)x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}.$$

□ Пусть $\lambda_0 \notin \Lambda(M)$, тогда найдется такая функция $f \in L^1(\mathbb{R})$, что $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$, такая, что для всех $x \in M$ $fx = 0$. Фиксируем произвольное $h \in \mathbb{R}$ и применим к равенству $fx = 0$ сначала оператор $T(h)$, затем произвольный характер $\xi \in X^*$. Получим, что для произвольного $\xi \in X^*$ и для всех $x \in M$ справедливо равенство $\langle f(T(h)x), \xi \rangle = \langle T(h)(fx), \xi \rangle = 0$, таким образом, для произвольного $\xi \in X^*$ точка $\lambda_0 \notin \Lambda(\langle \psi_x, \xi \rangle)$ и $\bigcup_{x \in M, \xi \in X^*} \Lambda(\langle \psi_x, \xi \rangle) \subset \Lambda(M)$.

Обратно, если $\lambda_0 \in \bigcup_{x \in M, \xi \in X^*} \Lambda(\langle \psi_x, \xi \rangle)$, то для произвольного $x \in M$ и произвольного $\xi \in X^*$ найдется такая функция $f \in L^1(\mathbb{R})$, что $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$ и $\langle \psi_x, \xi \rangle * f = 0$. Поскольку для всех характеров $\xi \in X^*$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} (\langle \psi_x, \xi \rangle * f)(h) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\xi(T(h-t)x)dt = \xi \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)T(h)T(-t)xdt \right) = \\ &= \langle T(h)(fx), \xi \rangle = 0, \end{aligned}$$

то из следствия 13 [6, глава II.3] теоремы Хана-Банаха о продолжении линейного функционала вытекает, что $fx = 0$ и $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$ для всех $x \in M$. ■

3. Определение и основные свойства локального спектра вектора.

Определение 2. Будем говорить, что замкнутый оператор $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ обладает свойством однозначного распространения, если для любой голоморфной функции $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow D(A)$ из равенства $(A - \lambda I)f(\lambda) = 0$, $\lambda \in U$, следует, что $f \equiv 0$.

Определение 3. Пусть оператор $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ обладает свойством однозначного распространения, а $x \in X$. Множество точек $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, для которых существует



открытая окрестность $U_0 = U(\lambda_0)$ точки λ_0 и голоморфная функция $f : U_0 \rightarrow D(A)$ такая, что $f(\lambda) \in D(A)$, $\lambda \in U_0$, и выполнено равенство $(A - \lambda I)f(\lambda) = x$, $\lambda \in U_0$, называется локальным резольвентным множеством вектора $x \in X$ и обозначается $\rho_A(x)$.

Определение 4. Локальный спектр вектора $x \in X$ относительно оператора A - это множество $\sigma_A(x) = \mathbb{C} \setminus \rho_A(x)$.

Лемма 6. Справедливы следующие свойства:

1. $\sigma_A(x)$ - замкнутое подмножество из $\sigma(A)$.
2. Если $A \in \text{End}X$, то $\sigma_A(x) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.
3. $\sigma_A(\alpha x + \beta y) \subset \sigma_A(x) \cup \sigma_A(y)$ для любых векторов $x, y \in X$.
4. $\sigma_A(Bx) \subset \sigma_A(x)$ для любого вектора $x \in X$ и любого оператора $B \in \text{End}X$, перестановочного с A (т.е. $BD(A) \subset D(A)$ и $AB = BA$ для любого $x \in D(A)$).

□ 1. Множество $\sigma_A(x)$ замкнуто по определению.

Пусть $\lambda_0 \notin \sigma(A)$, тогда для всех $x \in X$ и для всех окрестностей $U(\lambda_0) \subset \rho(A)$ точки λ_0 найдется голоморфная функция $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $f(\lambda) = R(\lambda, A)x$. Для такой функции f будет справедливо равенство $(A - \lambda I)f(\lambda) = x$, то есть $\lambda_0 \notin \sigma_A(x)$. Следовательно, $\sigma_A(x) \subset \sigma(A)$.

2. Пусть $A \in \text{End}X$. Если $x = 0$, то по свойству однозначного распространения для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ найдется голоморфная функция $f \equiv 0$, для которой будет выполнено равенство $(A - \lambda I)f(\lambda) = 0 = x$, т.е. $\lambda \in \rho_A(x)$ и $\sigma_A(x) = \emptyset$.

Теперь, если $\sigma_A(x) = \emptyset$, то $\rho_A(x) = \mathbb{C}$ и для каждой $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ возможно будет найти такие окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 и такую функцию $f : U(\lambda_0) \rightarrow D(A)$, что $(A - \lambda I)f(\lambda) = x$. Поскольку $A \in \text{End}X$, то для всех $\lambda > \|A\|$ и для всех $x \in X$ справедливо равенство $(A - \lambda I)(A - \lambda I)^{-1}x = x$. В силу свойства однозначного распространения получаем, что $f(\lambda) = R(\lambda, A)x$ для всех $\lambda > \|A\|$, поэтому имеет место равенство $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|f(\lambda)\| = 0$. По теореме Лиувилля [6, глава III.14] для голоморфной функции получаем, что $f \equiv 0$. Из этого следует, что $x = 0$.

3. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_A(x) \cup \sigma_A(y))$, тогда существует такая окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 и найдутся такие функции $f : U(\lambda_0) \rightarrow D(A)$ и $g : U(\lambda_0) \rightarrow D(A)$ такие, что $(A - \lambda I)f(\lambda) = x$, $(A - \lambda I)g(\lambda) = y$ для всех $\lambda \in U(\lambda_0)$. Тогда для всех $\lambda \in U(\lambda_0)$ справедливо равенство $(A - \lambda I)(\alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda)) = \alpha x + \beta y$, то есть $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma_A(\alpha x + \beta y)$.

4. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$, тогда найдется некоторая окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 и голоморфная функция $f : U(\lambda_0) \rightarrow D(A)$ такая, что $(A - \lambda I)f(\lambda) = x$. Применим к обеим частям равенства оператор $B \in \text{End}X$, перестановочный с оператором A в указанном выше смысле. $B(A - \lambda I)f(\lambda) = Bx$. В силу перестановочности оператора B с оператором A для всех $\lambda \in U(\lambda_0)$ получаем $(A - \lambda I)Bf(\lambda) = Bx$. Заметим, что функция $Bf(\lambda)$ голоморфна в окрестности $U(\lambda_0)$, поэтому $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma_A(Bx)$. Таким образом доказано, что $\sigma_A(Bx) \subset \sigma_A(x)$. ■



4. Об эквивалентности спектра Берлинга и локального спектра. Для доказательства основного результата данной работы необходима следующая

Лемма 7. Пусть A - генератор $L^1(\mathbb{R})$ -модуля (X, T) с изометрическим представлением T , тогда A обладает свойством однозначного распространения.

□ Заметим, что поскольку оператор A производит изометрическое представление, то его спектр лежит на вещественной прямой. Доказательство леммы следует из наблюдения о том, что если $\overline{\rho(A)} = \mathbb{C}$, то оператор A обладает свойством однозначного распространения. ■

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. Локальный спектр (относительно генератора A модуля (X, T)) и спектр Берлинга вектора $x \in X$ совпадают, т.е.

$$\sigma_A(x) = \Lambda(x).$$

□ Докажем сначала, что $\sigma_A(x) \subset \Lambda(x)$.

Пусть $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$. Положим $\varepsilon = \frac{1}{2} \text{dist}(\lambda_0, \Lambda(x))$ и $U_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$. Поскольку $U_0 \cap \Lambda(x) = \emptyset$, рассмотрим функцию $g_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{g}_\lambda(z) = (z - \lambda)^{-1}$ в окрестности $\Lambda(x)$. Согласно свойству 7 леммы 4 справедливо равенство $g_\lambda x = R(\lambda, A)x$, в том числе и на множестве U_0 . Таким образом, найдена открытая окрестность U_0 и голоморфная функция $f : U_0 \rightarrow D(A)$, $f(\lambda) = g_\lambda x = R(\lambda, A)x$, т.е. $\lambda_0 \notin \sigma_A(x)$.

Теперь докажем, что $\Lambda(x) = \sigma_A(x)$. Предположим, что $\Lambda(x) \neq \sigma_A(x)$ и пусть $\lambda_0 \in \Lambda(x) \setminus \sigma_A(x)$. Рассмотрим функцию $g \in L^1(\mathbb{R})$ с компактным носителем преобразования Фурье и такую, что $\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$ и $\text{supp } \widehat{g} \cap \sigma_A(x) = \emptyset$. Тогда $gx \neq 0$, поскольку функция g имеет ненулевое преобразование Фурье на спектре Берлинга вектора x . С другой стороны, по доказанному ранее в данной теореме и свойству 3 леммы 4 справедливо включение $\sigma_A(gx) \subset \Lambda(gx) \subset \text{supp } \widehat{g} \cap \Lambda(x)$. Из условий на функцию g получаем, что $\sigma_A(gx) = \emptyset$. Согласно утверждению 1 леммы 6 получаем, что $gx = 0$ и $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$, что противоречит предположению. Следовательно, $\Lambda(x) = \sigma_A(x)$. ■

Литература

1. Баскаков А.Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // СМФН. – 2004. – 9. – С.3-151.
2. Баскаков А.Г., Криштал И.А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Серия матем. – 2005. – 69. – № 3. – С.3-54.
3. Баскаков А.Г., Калужина Н.С. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // Матем. заметки. – 2012. – 92, № 5. – С.643-661.
4. Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. – 2013. – 68, № 1. – С.77-128.
5. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации // М.: Наука. – 1965. – 408 с.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория, т.1 // М.: Мир, 1962. – 896 с.



ABOUT TWO CONCEPTS OF VECTORS' SPECTRUM

V.E. Strukov

Voronezh state university,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394036, Russia, e-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com

Abstract. Two concepts of vectors' spectrum in Banach $L^1(\mathbb{R})$ -modules are under consideration and their equivalence is proved.

Key words: Beurling's spectrum of a vector, local spectrum of a vector, Banach's module.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА,
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MSC 70F99

О ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ЛИУВИЛЛЯ
КАК УРАВНЕНИИ ДИНАМИКИ ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЫ

В.В. Учайкин

Ульяновский государственный университет,
Ульяновск, Россия, e-mail: vuchaikin@gmail.com

Аннотация. Показано, что переход от описания эволюции замкнутой гамильтоновой системы к эволюции открытой системы как её подсистемы сопровождается преобразованием уравнения Лиувилля к его дробно-дифференциальному (по времени) аналогу.

Ключевые слова: уравнение Лиувилля, гамильтонова система, дробное дифференцирование, открытая система.

Последние десять лет отмечены рождением специфического направления математической физики, представленного серией выполненных разными авторами работ, построенных по одной и той же схеме: берётся известное уравнение (Ньютона, Лагранжа, Гамильтона, Лиувилля, ББГКИ, Больцмана, Максвелла, Ланжевена, Фоккера-Планка, Навье-Стокса, Власова, Гинзбурга-Ландау, Бюргерса, Кортевега де Вриза, Шредингера, Гейзенберга и др. – см библиографию в [1, 2]) и первая (или вторая) производная по времени (или координате) в нём заменяется производной нецелого (дробного) порядка, после чего решается какая-нибудь несложная задача. Если с классическим уравнением связаны некоторые преобразования (например, вывод законов сохранения импульса и энергии из кинетического уравнения Больцмана), они повторяются и для дробно-дифференциального уравнения. Однако в большинстве случаев всё этим и кончается, до серьёзных расчётов дело редко доходит¹. И проблема состоит, на мой взгляд, в том, что отсутствует общепринятая интерпретация дробной производной. То есть, не то, чтобы совсем отсутствует, но часто производная дробного порядка выскакивает как «чёрт из табакерки» со ссылкой на фракталы, на сложность, неупорядоченность, (мне приходилось встречать фразу о том, что дробные производные используются авторами из-за чрезвычайной запутанности траекторий! – этого им показалось достаточно для оправдания дробного порядка), на нелинейность (что уж совсем неправильно: дробные степени линейных операторов остаются линейными операторами!) и т.п. Недостаточная ясность интерпретации – не только моё личное мнение. Этот вопрос является постоянной темой круглых столов, завершающих конференции по развитию и применению дробно-дифференциального аппарата.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России 2014/296, при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проекта 13-01-00585.

¹Я говорю здесь о типичных работах. Есть, разумеется, и замечательные работы, содержащие новые и интересные результаты, но их относительно немного, гораздо меньше, чем можно было бы ожидать от применения такого мощного математического аппарата.



Простейшая форма производной дробного порядка $\nu \in (0, 1]$ даётся сочетанием интегрального оператора дробного порядка $\mu = 1 - \nu$

$${}_a I_t^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t (t - t')^{\mu-1} f(t') dt'$$

(продолжающего известную формулу Коши для многократного повторного интеграла в область нецелых порядков) с обычным оператором дифференцирования. В зависимости от порядка следования этих операторов получается производная Римана-Лиувилля

$${}_a D_t^\nu f(t) = \frac{d}{dt} {}_a I_t^{1-\nu} f(t)$$

или Герасимова-Капуто

$${}_a D_t^\nu f(t) = {}_a I_t^{1-\nu} \frac{d}{dt} f(t)$$

порядка $\nu \in (0, 1)$. Поскольку порядки интегральных и дифференциальных операторов теперь образуют непрерывные множества, по ним можно интегрировать и даже дифференцировать. Кроме того, они (порядки) могут быть и комплексными. В конце работы нам понадобится интегральный оператор распределённого комплексного порядка со спектральной функцией $w(\mu)$, определяемый формулой

$${}_0 I_t^{\{w(\cdot)\}} f(t) \equiv \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} w(\mu) {}_0 I_t^\mu f(t) d\mu.$$

Вот несколько примеров применения дробных производных к решению простейших задач механики.

В работе [3] на основе дробно-дифференциального аналога уравнения Ньютона решается задача о падении тел в атмосфере. Не затрудняя себя обоснованием постановки такой задачи, автор ссылается на использование дробных производных для описания процессов с диссипацией и далее просто сопоставляет получаемые решения с классическими. Начав с простейшего случая – падения тела в отсутствия силы сопротивления,

$$m_\nu {}_0^{\nu} D_t V = mg, \tag{1}$$

он приходит к решению

$$V(t) = V_0 + \frac{mgt^\nu}{m_\nu \Gamma(1 + \nu)},$$

из которого следует

$$x(t) = \int_0^t V(\tau) d\tau = x_0 + V_0 t + \frac{mgt^{\nu+1}}{m_\nu \Gamma(2 + \nu)}$$



(здесь и выше V_0 – начальная скорость, x_0 – начальная координата вдоль оси, направленной вниз). Заметим, что при малых временах наблюдается б'ольшая скорость, чем в случае обычного падения ($t^\nu > t$ при $\nu < 1$), тогда как при больших временах ситуация обратная, и этот факт как-то трудно согласуется с влиянием диссипации. Очевидна также проблема размерности коэффициента m_ν : она не совпадает с размерностью массы, что заставляет искать новые формулы для импульса, кинетической энергии и связанных с ними динамических переменных. Чтобы обеспечить согласие с размерностью энергии, в [4, 5] было предложено выражать импульс в виде

$$p_\nu = m_\nu {}_0^\alpha D_t x(t), \quad \alpha = (1 + \nu)/2.$$

В результате выражение для полной энергии принимает вид

$$E = \frac{p_\nu^2}{2m_\nu} + U(x) = \frac{m_\nu}{2} [{}_0^\alpha D_t x(t)]^2 - mgx.$$

Каких-либо дополнительных аргументов в оправдание этих конструкций в работе не приводится, сказано только, что при $\nu \rightarrow 1$ все эти формулы принимают обычный для классической механики вид. Кроме того, приведено решение этой задачи с учётом сопротивления среды,

$$m_\nu {}_0^\nu D_t V + bV = mg, \quad (2)$$

и дана даже (не очень, впрочем внятная) ссылка на эксперимент: свободное падение шести тел (в оригинале «ten») в атмосфере со средним весом одного тела 261,2 фунта с высоты от 31 400 до 2 100 футов удовлетворительно описывается дробно-дифференциальным решением с $\nu = 0,998$ и $m/m_\nu = 1,457$. Беда лишь в том, что и классическое решение хорошо описывает этот процесс.

Приведённая выше формулировка дробной динамики не единственна. Так, Балеану с соавторами [6] построил иную версию такого обобщения, введя *дробную скорость* and *дробный импульс* на интервале $[a, b]$ соотношениями

$$V(t) = (1/2)(A {}_a^\alpha D_t + B {}_t^\beta D_b)x(t),$$

и

$$p(t) = (m/2)(A {}_a^\alpha D_t + B {}_t^\beta D_b)x(t) = p_\alpha + p_\beta,$$

соответственно, где $0 < \alpha, \beta \leq 1$, а A и B – постоянные с размерностями $T^{\alpha-1}$ и $T^{\beta-1}$. В результате дробный аналог второго закона Ньютона получился в виде уравнения

$$(1/2)(\kappa_\alpha {}_t D_b^\alpha p_\alpha + \kappa_\beta {}_a D_b^\beta p_\beta) = F, \quad (3)$$

дополненного *трансверсальным условием*

$$\left[{}_t D_b^{\alpha-1} p_\alpha - {}_a D_t^{\beta-1} p_\beta \right]_a^b = 0. \quad (4)$$

Авторы отмечают, что при $\alpha = 1, \beta = 1$

$${}_a D_t^\alpha = {}_a^\alpha D_t = {}_t D_b^\alpha = {}_t^\alpha D_b = \frac{d}{dt},$$



и уравнения (3)-(4) сводятся к стандартному ньютонову уравнению. Это действительно так. Но последующее замечание: «Если обобщённая сила в уравнении (3) равна нулю, то обобщённый закон Ньютона запишется в виде: $\kappa_\alpha {}_t D_b^\alpha p_\alpha + \kappa_\beta {}_a D_t^\beta p_\beta = 0$ » вызывает некоторое недоумение. Первый закон Ньютона не является просто следствием второго (иначе он не входил бы в систему ньютоновых аксиом). Первый закон выделяет из всех возможных систем отсчёта семейство инерциальных систем, в которых и «работает» второй закон. Используемые в предыдущих формулировках *нелокальные во времени* определения импульсов не могут удовлетворить галилеевым преобразованиям и могли бы иметь смысл для частиц, находящихся в некоторой среде, обеспечивающей нарушения трансляционных свойств лагранжиана системы во времени и пространстве.

Почтительно в этом смысле напомнить задачу о движении тела по поверхности несжимаемой вязкой жидкости. На горизонтальной поверхности $z = 0$ (ось z направлена вверх) бесконечно глубокого слоя ($-\infty < z < 0$) такой жидкости находится больших размеров тонкая пластина, к которой приложена горизонтальная же сила $F(t)$, увлекающая её вместе с прилегающими слоями жидкости в движение вдоль оси x . Движение пластины описывается уравнением Ньютона

$$m \frac{dV}{dt} = F(t) + Q(t), \tag{5}$$

где $Q(t) = -S\eta \partial v(z, t) / \partial z|_{z=0}$ – сила сопротивления, действующая на пластину со стороны жидкости, $v(z, t)$ – x -компонента скорости жидкости на глубине z (остальные компоненты её равны нулю). По условию прилипания $V(t) = v(0, t)$, а поле скоростей $v(z, t)$ удовлетворяет уравнению Навье-Стокса:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \tag{6}$$

В системе уравнений (5)-(6), описывающей механическую систему тело+жидкость, все производные целого порядка и все операторы дифференциальные. Инфинитезимальная эволюция в любой момент времени t зависит только от состояния $(V(t), v(z, t))$ в этот же момент, и по этой причине дальнейшая эволюция системы при заданном состоянии не зависит от предыстории (по вероятностной терминологии процесс марковский).

Но вот, выполняя известные процедуры [7], мы исключаем из этой системы переменную $v(z, t)$ и получаем уравнение для оставшейся переменной – скорости пластины. Если при $t < 0$ жидкость вместе с пластиной находилась в покое, а приложенная затем сила ограничена по величине, остающееся уравнение вид

$$m \frac{dV}{dt} = F - S\sqrt{\eta\rho} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau \right].$$

Теперь это – интегро-дифференциальное уравнение вольтерровского типа с запаздывающим аргументом неизвестной функции под интегралом. Более того, заключённый в квадратные скобки член представляет собой дробную производную порядка $\nu = 1/2$ (при указанных условиях различие между обоими типами производных исчезает).



Перепишем это уравнение в виде

$$m \frac{dV}{dt} + S\sqrt{\eta\rho} {}^{\nu}D_t V = F(t). \quad (7)$$

Физическая интерпретация этого результата заключается в том, что наблюдаемое в момент времени t в точке (x, z) напряжение определяется распределением скоростей жидких частиц, приходящих из окрестности другой точки этого слоя (x', z) , где они находились, скажем, в момент $t' < t$. В силу трансляционной инвариантности решения относительно x , такое же распределение скоростей в этот момент (t') имело место и в точке наблюдения (x, z) . Это и есть простейший механизм эрeditарности – «механическая» память.

Аналогичное уравнение для движения шара массой m и радиуса a в вязкой среде имеет вид

$$m \frac{dV}{dt} = F(t) + Q(t),$$

где сила сопротивления $Q(t)$ дается формулой

$$Q(t) = -6\pi\eta a V(t) - \frac{2}{3}\pi\rho a^3 \frac{dV(t)}{dt} - 6\pi\eta a^2 \sqrt{\frac{\rho}{\pi\eta}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

выведенной в работах Буссинеска [8] и Бассэ [9]. Первый член здесь представляет силу Стокса, второй – инерционную составляющую сопротивления, соответствующую наличию присоединенной массы шара, третий пропорционален дробной производной порядка $\nu = 1/2$ [7]. Если до начального момента $t = 0$ тело покоилось, нижний предел в последнем интеграле можно заменить нулем:

$$\left(m + \frac{2}{3}\pi\rho a^3\right) \frac{dV(t)}{dt} + 6\pi a^2 \sqrt{\rho\eta} {}^{\nu}D_t V + 6\pi\eta a V(t) = F(t). \quad (8)$$

Как следует из тауберовой теоремы, главная асимптотическая (при $t \rightarrow \infty$) часть $V^{\text{as}}(t)$ решений уравнений (7) и (8) удовлетворяет укороченным уравнениям дробного порядка $\nu = 1/2$

$$S\sqrt{\eta\rho} {}^{\nu}D_t V^{\text{as}}(t) = F(t) \quad (9)$$

и

$$6\pi a^2 \sqrt{\rho\eta} {}^{\nu}D_t V^{\text{as}}(t) + 6\pi\eta a V^{\text{as}}(t) = F(t) \quad (10)$$

соответственно. И теперь ясно видно заблуждение авторов цитированных выше работ относительно интерпретации дробных производных в уравнениях (1)-(2): это не аналоги ускорительных членов уравнения Ньютона, это влияние внешней среды, определяющей асимптотическое поведение тела, когда действие инерциальной силы истощилось. По этой причине и начальные условия приложить к этим остаткам ньютоновых уравнений нельзя, и размерность коэффициентов при дробных производных не надо «натягивать» на размерность массы. Не имеет физического смысла уравнение для скорости (координаты), старшая производная в котором имеет дробный порядок, меньший единицы



(двойки), иначе как остаток ньютонова уравнения для асимптотического (при $t \rightarrow \infty$) члена его решения.

Рассмотрим ещё один пример. В горизонтально расположенной открытой с обеих сторон трубке находятся поршень массой m_1 с коэффициентом трения о её стенки η , соединённый пружинкой длиной l и жесткостью $k > (\eta/2)^2$ с шариком массы m_2 , движущимся в трубке без трения. К шарiku с момента $t = 0$ приложена ограниченная по абсолютной величине сила $F(t)$. Мы имеем дело с динамической системой с двумя степенями свободы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -\eta \dot{x}_1 + k(x_2 - x_1 - l), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= F(t) - k(x_2 - x_1 - l). \end{aligned}$$

Дополним эту систему уравнений условиями

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_2(0) = l, \quad \dot{x}_2(0) = 0,$$

предполагающими, что в начальный момент времени система неподвижна и поршень находится в начале координат.

Решение первого уравнения относительно x_1 (в предположении, что $x_2(t)$ известно) при заданных условиях выражается через его функцию Грина

$$G(t) = \frac{1}{m_1 \omega_1} \exp\left(-\frac{\eta t}{2m_1}\right) \sin(\omega_1 t), \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1} - \left(\frac{\eta}{2m_1}\right)^2}$$

соотношением

$$x_1(t) = \int_0^t G(t - \tau) k [x_2(\tau) - l] d\tau.$$

Подставив это решение во второе уравнение системы, получаем замкнутое уравнение для части 1 рассматриваемой системы, имеющее теперь интегро-дифференциальный вид:

$$m_2 \ddot{x}_2 + kx_2 = k^2 \int_0^t G(t - \tau) x_2(\tau) d\tau + F_2(t), \tag{11}$$

со свободным членом

$$F_2(t) = F(t) + kl \left[1 - k \int_0^t G(\tau) d\tau \right].$$

Заметим, что мы опять получили тот же результат: исключая из рассмотрения одну из взаимодействующих между собой частей системы, описываемой уравнениями Ньютона (иными словами, марковской системы), мы обнаруживаем, что оставшаяся часть управляется интегро-дифференциальным уравнением. Теперь это – немарковский процесс, процесс с памятью.



Представим для наглядности, что мы прикрыли экраном часть трубки, содержащей поршень с пружинкой и видим лишь шарик, движение которого подчиняется уравнению (11). Влияние предыстории $x_2(t-\tau)$ движения шарика на его поведение в момент времени t осуществляется через невидимую (скрытую) переменную $x_1(t)$. Не наталкивает ли это на мысль, что наличие таких интегралов с запаздыванием может свидетельствовать о наличии скрытых переменных? Естественно, наталкивает. Еще Зенер, комментируя интегральный (эредитарный, по вольтерровой терминологии) член в конститутивном уравнении вязкоупругости, высказывал предположение о том, что эредитарность эта может служить признаком существования скрытых параметров, к числу которых, как пример, он отнес температуру [10]. А между тем, эредитарность – это явный шаг в сторону дробно-интегрального оператора. Достаточно найти аргумент в пользу специфического вида ядра интегрального оператора $K(t, t')$: предположить, скажем, его инвариантность относительно сдвига во времени

$$K(t, t') = K_0(t - t')$$

(что в двух приведённых выше примерах получалось как бы само собой), а затем потребовать и однородности в эйлеровом смысле:

$$K_0(a\tau) = a^\alpha K_0(\tau).$$

Последнее требование, конечно, ни из каких «первых принципов» не проистекает и может быть введено лишь под давлением каких-нибудь очевидных, например, экспериментальных фактов. Такой подход был использован нами в обосновании дробно-дифференциальной кинетики дисперсионного переноса [11] (см. также развёрнутое изложение этого подхода в книге [12]). В принципе, эйлерова однородность связана с самоподобием системы [13]. Самоподобные системы составляют особый класс открытых систем, не являющихся подсистемами замкнутых систем (назовём его классом A). Рассмотренные выше примеры относились к другому классу открытых систем, которые являются подсистемами замкнутых систем (обозначим этот класс символом B). Обсуждением системы класса B я и хочу закончить эту заметку.

Согласно Линдбладу [14], замкнутая гамильтонова система, управляемая не зависящим от времени гамильтонианом H , разбивается на две подсистемы – основную (S) и её окружение (E), так что сам гамильтониан принимает вид

$$H_{S+E} = H_S \otimes 1_E + 1_S \otimes H_E + \alpha H_{SE},$$

где 1_S и 1_E – тождественные операторы на гильбертовых пространствах состояний соответствующих подсистем, H_{SE} – гамильтониан взаимодействия, действующий на прямом произведении этих пространств. Статистический оператор полной системы удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{d\rho_{S+E}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H_{S+E}, \rho_{S+E}(t)],$$



представляемому в виде

$$\frac{d\rho_{S+E}(t)}{dt} = \mathcal{L}_{S+E}\rho_{S+E}(t) \equiv (\mathcal{L}_S + \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_{SE})\rho_{S+E}(t). \quad (12)$$

В предположении, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ подсистемы S и E некоррелированы,

$$\rho_{S+E}(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E(0),$$

применение проекционных супероператоров P (подробности см., напр., в [15]) позволяет записать уравнение для основной подсистемы в виде

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = \mathcal{L}_S\rho_S(t) + \int_0^t G(t-\tau)\rho_S(\tau)d\tau, \quad (13)$$

где

$$G(t) = \text{Tr}_E\{\mathcal{L}_{SE}e^{t(1-P)\mathcal{L}_{SE}}\mathcal{L}_{SE}\rho_E(0)\}$$

– ядро памяти системы S .

Очевидно, мы имеем два способа предсказания эволюции открытых систем типа B . Первый способ: решив дифференциальное уравнение (12) эволюции *замкнутой системы* $S + E$ при заданных начальных условиях, выбрать из полученного решения всю информацию, касающуюся подсистемы S . Второй способ: решив интегро-дифференциальное уравнение (13) при заданных начальных условиях, получить информацию сразу об открытой системе данного типа, не вовлекая в процесс решения подсистему E . Последнее не означает, что мы игнорируем её влияние на S : интегральный член как раз и описывает передачу информации от подсистемы S в ранние времена t' через её окружение в неё же в более поздние времена t . Сюда же «вплетается» информация о начальном состоянии окружения (последний сомножитель в правой части $F(t)$).

Если речь идёт о пространственно разделённых подсистемах, а не о совмещённых в пространстве, как, например, электронная и ионная компоненты в кристалле, передача этой динамической информации осуществляется через поверхность подсистемы S . Результат зависит от отношения поверхность/объём. Для макроскопических образцов это отношение мало и таким обменом можно пренебречь (микростатистический ансамбль, представляющий открытую подсистему S как замкнутую), или ограничиться обменом некоррелированными малыми порциями (канонический и большой канонический ансамбли). В обоих этих случаях интеграл исчезает, и мы получаем традиционную механическую основу термодинамики.

С уменьшением размеров образца мы вступаем в область мезо- и далее – наномеханики. Число «действующих лиц» здесь резко сокращается (с 10^{23} атомов до сотен тысяч или даже вообще просто до сотен атомов). Роль поверхностных эффектов при этом во многом становится определяющей, и связанный с ними интеграл в уравнении (13) превращается в равноправного партнёра среди остальных членов уравнения.



Однако, причём здесь дробные операторы? Для ответа на этот вопрос представим функцию $F(t)$ с помощью её трансформанты Меллина

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-s} \bar{F}(s) ds, \quad \sigma = \Re s$$

и подставим это выражение в интегральный член уравнения (13):

$$\int_0^t F(t-t') \rho_S(t') dt' = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} W(s) {}_0I_t^{1-s} \rho_S(t) ds.$$

Здесь

$$W(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \bar{F}(s),$$

а

$${}_0I_t^{1-s} \rho_S(t) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^t \frac{\rho_S(t') dt'}{(t-t')^s}$$

– интеграл комплексного порядка $\mu = 1 - s$. Переход от интеграла к дробной производной можно осуществить, скажем, регуляризацией по Адамару (выделением конечной части при $\mu < 0$). В совокупности с операцией умножения на весовой множитель и последующего интегрирования по s этот член уравнения образует дробную производную распределённого порядка со спектральной функцией $W(s)$. В результате уравнение (13) принимает вид

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = \mathcal{L}_S \rho_S(t) + {}_0D_t^{\{w(\cdot)\}} \rho_S(t). \quad (14)$$

Здесь $w(\nu)$ – спектральная функция для для показателей производной $\nu = s - 1$. Заметим, что уравнения в приведённых выше двух примерах систем (пластина+жидкость и демпфер+пружина) имеют, в принципе, вид уравнения (14). В первом из них спектр значений ν состоит из одной точки $\nu = 1/2$, во втором спектральная функция представляется в элементарных функциях:

$$w(\nu) = \frac{k^2}{m_1 \omega_1} \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} \sin(\omega_1 \tau) \tau^\nu d\tau = k^2 \frac{\Gamma(\nu+1) \sin[(\nu+1) \arctg(\omega_1/\alpha)]}{m_1 \omega_1 (\alpha^2 + \omega_1^2)^{(\nu+1)/2}}.$$

Подводя итоги, можно сказать следующее. Уравнение Лиувилля для матрицы плотности открытой системы класса B (то есть, являющейся частью замкнутой гамильтоновой системы) имеет вид (14), включающий в себя производную по времени первого порядка и дробную производную распределённого порядка. Именно спектральная функция и определяет специфику кинетики открытой системы этого класса, и задача теории мезоскопической кинетики заключается в развитии математического аппарата, удобного для вычисления или аппроксимации спектральной функции. Этот вывод и



отличает данную работу от работы [17], посвящённой в принципе этой же тематике, но основанной на переходе к дробно-дифференциальному обобщению уравнения Лиувилля путём прямого введения дробных операторов. При этом теряется производная первого порядка по времени, дробная производная содержит единственный показатель, исчезает спектральная функция и разрывается связь между классической и модифицированной схемами.

Литература

1. В.В. Учайкин, Метод дробных производных / Ульяновск: изд-во Артишок, 2008.
2. V.V.Uchaikin, Fractional Derivatives for Physicists and Engineers, Vol's I-II / Berlin: Springer, НЕР Beijing, 2013.
3. Kwok Sau Fa / Physica A. – 2005. – 350. – P.199.
4. B.N. Narahari Achar, J.W. Hanneken, T. Enck, T. Clarke / Physica A. – 2001. – 297. – P.361.
5. Ya.E. Ryabov, A. Puzenko / Phys.Rev.B. – 2002. – 66. – 184201.
6. D. Baleanu, A.K. Golmankhaneh, R. Nigmatullin, Ali K. Golmankhaneh / Cent.Eur. J.Phys. – 2010. – 8, (1). – P.120.
7. Слёзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / М.: ГИТТЛ, 1955.
8. V.J. Boussinesq / Compt. Rend. de l'Academ. des Sci. – 1885. – 100. – P.935.
9. A.B. Basset / Phil.Trans.Roy.Soc.London A. – 1888. – 179. – P.43.
10. С.М. Zener / Suppl. Nuovo Cimento. – 1958. – 7. – P.544.
11. В.В. Учайкин, Р.Т. Сибатов / Письма в ЖЭТФ. – 2007. – 86. – С.584.
12. V.V. Uchaikin, R.T. Sibatov, Fractional Kinetics in Solids / World Scientific, 2013.
13. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Механика / М.: Наука, 1965.
14. G. Lindblad, On the generators of quantum dynamical semi-groups / Commun. Math. Phys. – 1976. – 48. – P.119.
15. M. Di Ventra, Electrical Transport in Nanoscale Systems / New York: Cambridge University Press, 2008.
16. V.E. Tarasov, Fractional Liouville and BBGKI Equations / Journal of Physics: Conference Series. – 2005. – 7. – P.17.
17. S.Yu. Lukashchuk, Time-fractional extensions of the Liouville and Zwanzig equation / Cent. Eur. J. Phys. – 2013. – 11(6). – P.740.

ON FRACTIONAL DIFFERENTIAL LIUVILLE EQUATION DESCRIBING OPEN SYSTEMS DYNAMICS

V.V. Uchaikin

Ul'anovsk State University,
Ul'anovsk, Russia, e-mail: vuchaikin@gmail.com

Abstract. It is shown that the transition from evolution description of a closed hamiltonian system to the open one as its subsystem is led the transformation of Liouville's equation to its temporally fractional differential analog.

Key words: Luiville's equation, hamiltonian system, fractional differentiation, открытая system.



MSC 74F10

МОДЕЛЬ АКУСТИКИ В КОНФИГУРАЦИИ УПРУГОЕ ТЕЛО – ПОРОУПРУГАЯ СРЕДА

А.А. Герус, С.А. Гриценко

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, г.Белгород, 308007, Россия, e-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru,
artur-gerus@mail.ru

Аннотация. Рассматривается акустика в композитных средах с двумя различными компонентами. Композитная среда Q состоит из некоторого упругого тела $\Omega^{(s)}$ и пороупругой среды Ω . Доказывается существование и единственность обобщенного решения. Выполняется усреднение модели.

Ключевые слова: композитные среды, периодическая структура, уравнения Ламе, уравнения акустики, пороупругость, усреднение периодических структур, двухмасштабная сходимость.

1. Постановка задачи. Пусть рассматриваемая область Q представляет собой единичный куб: $Q = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$, пороупругая среда занимает область $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, a)$, $0 < a < 1$ и область $\Omega^{(s)}$ ($\Omega^{(f)}$, или Ω^0) есть открытое дополнение области Ω :

$$Q = \Omega \cup \Omega^{(s)} \cup S^{(0)}, \quad S^{(0)} = \partial\Omega \cap \partial\Omega^{(s)}.$$

Движение смеси в области Ω при $t > 0$ описывается системой уравнений

$$\left(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^2} + \frac{1 - \chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^2} \right) p + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (1)$$

$$\left(\varrho_f \chi^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon) \varrho_s \right) \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \varrho^\varepsilon \mathbf{F}, \quad (2)$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \bar{\alpha}_\mu \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I}, \quad (3)$$

Движение упругого тела $\Omega^{(s)}$ при $t > 0$ описывается уравнениями Ламе

$$\frac{1}{\left(\bar{c}_s^{(0)} \right)^2} p + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (4)$$

$$\varrho_s^{(0)} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}^{(s)} + \varrho_s^{(0)} \mathbf{F}, \quad (5)$$



$$\mathbb{P}^{(s)} = \bar{\alpha}_\lambda^{(0)} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I}, \quad (6)$$

где $\bar{\alpha}_\lambda^{(0)}$ и $\bar{c}_s^{(0)}$ есть безразмерные постоянные Ламе для упругого тела в области $\Omega^{(s)}$.

Упругие свойства твердого материала в $\Omega^{(s)}$ и Ω могут различаться.

На общей границе $S^{(0)}$ выполняются обычные условия непрерывности перемещений:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^{(s)}}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad (7)$$

и нормальных компонент моментов

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^{(s)}}} \mathbb{P}^{(s)}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbb{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0). \quad (8)$$

Для завершения задачи задаются однородные граничные условия

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in S_T = S \times (0, T), \quad (9)$$

на границе $S = \partial Q$, и однородные начальные условия

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q. \quad (10)$$

Пусть

$$\int_{Q_T} \left(|\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 \right) dx dt = F^2 < \infty,$$

и выполнены следующие предположения:

Предположение 1.

1) Пусть $\chi(\mathbf{y})$ есть 1-периодическая функция, $Y_s = \{\mathbf{y} \in Y : \chi(\mathbf{y}) = 0\}$ есть твердая часть единичного куба $Y = (0, 1)^3 \subset \mathbb{R}^3$, и пусть жидкая часть $Y_f = \{\mathbf{y} \in Y : \chi(\mathbf{y}) = 1\}$ есть открытое дополнение твердой части. Пусть $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ и γ есть непрерывная липшицева поверхность;

2) Область E_f^ε есть периодическое повторение в \mathbb{R}^3 элементарной ячейки $Y_f^\varepsilon = \varepsilon Y_f$ и область E_s^ε есть периодическое повторение в \mathbb{R}^3 элементарной ячейки $Y_s^\varepsilon = \varepsilon Y_s$;

3) Поровое пространство $\Omega_f^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_f^\varepsilon$ есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_f , и твердый скелет $\Omega_s^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_s^\varepsilon$ есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_s . Липшицева граница $\Gamma^\varepsilon = \partial \Omega_s^\varepsilon \cap \partial \Omega_f^\varepsilon$ есть периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon \gamma$;

4) Y_s и Y_f связные множества.

Предположение 2.

Твердый скелет Ω_s^ε есть связная область.

Предположение 3.

Поровое пространство Ω_f^ε есть связная область.

Кроме того предполагается, что все безразмерные параметры зависят от малого параметра ε и существуют (конечные или бесконечные) пределы:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\alpha}_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\alpha}_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\alpha}_\lambda^{(0)}(\varepsilon) = \lambda_0^{(0)},$$



$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{\alpha}_\mu}{\varepsilon^2} = \mu_1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{\alpha}_\lambda}{\varepsilon^2} = \lambda_1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{\alpha}_\lambda^{(0)}}{\varepsilon^2} = \lambda_1^{(0)}.$$

Предполагается, что

$$\mu_0 = 0.$$

Определим обобщенное решение задачи (1)-(10).

Пусть $\zeta(\mathbf{x})$ есть характеристическая функция области Ω и

$$\varrho_{(s)}^\varepsilon = (1 - \zeta)\varrho_s^{(0)} + \zeta\left(\varrho_f\chi^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon)\varrho_s\right),$$

Определение 1. Назовем пару функций $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ таких, что

$$\mathbf{w}^\varepsilon \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,1}(Q_T), \quad p^\varepsilon \in L_2(Q_T),$$

обобщенным решением задачи (1)-(10), если они удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\left((1 - \zeta) \frac{1}{\left(\bar{c}_s^{(0)}\right)^2} + \zeta \left(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^2} + \frac{1 - \chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^2} \right) \right) p^\varepsilon + \nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0, \quad (11)$$

почти всюду в Q_T , и интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \varrho_{(s)}^\varepsilon \left(\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{F} \cdot \varphi \right) dx dt = \\ = \int_{Q_T} \left(\zeta \mathbb{P} + (1 - \zeta) \mathbb{P}^{(s)} \right) : \mathbb{D}(x, \varphi) dx dt \end{aligned} \quad (12)$$

для всех функций φ , таких что $\varphi \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,0}(Q_T)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in \mathbf{L}_2(\Omega_T)$ и $\varphi(\mathbf{x}, T) = 0$ для $\mathbf{x} \in Q$.

Здесь и далее в работе используется обозначение:

$$B : C = \text{tr}(BC^T),$$

где B, C – тензоры второго ранга.



2. Теорема существования и единственности обобщенного решения.

Теорема 1. При всех $\varepsilon > 0$ на произвольном интервале времени $[0, T]$ существует единственное обобщенное решение $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ задачи (1)-(10) и

$$\begin{aligned} & \max_{0 < t < T} \int_{\Omega} \left(\left| p^\varepsilon(\mathbf{x}, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda \left| \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) \right|^2 \right) dx + \\ & \quad \max_{0 < t < T} \int_{\Omega(s)} \left(\left| p^\varepsilon(\mathbf{x}, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda^{(0)} \left| \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) \right|^2 \right) dx + \\ & \quad \max_{0 < t < T} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda \left| \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) \right|^2 \right) dx + \\ & \quad \max_{0 < t < T} \int_{\Omega(s)} \left(\left| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda^{(0)} \left| \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) \right|^2 \right) dx + \\ & \quad \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon \bar{\alpha}_\mu \left(\left| \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) \right|^2 + \left| \mathbb{D}(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}) \right|^2 \right) dx dt \leq C_0 F^2, \quad (13) \end{aligned}$$

где постоянная C_0 не зависит от ε и от параметров $\bar{\alpha}_\lambda, \bar{\alpha}_\lambda^{(0)}, \bar{\alpha}_\mu$.

Доказательство этой теоремы основывается на энергетических тождествах

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho^\varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) + \frac{1}{\bar{\alpha}_p^\varepsilon} \left| p^\varepsilon \right|^2 \right) dx + \\ & \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(s)} \left(\varrho_s \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda^{(0)} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) + \frac{1}{(\bar{c}_s^{(0)})^2} \left| p^\varepsilon \right|^2 \right) dx + \\ & \quad \int_{\Omega} \chi^\varepsilon \left(\bar{\alpha}_\mu \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) \right) dx = \int_Q \tilde{\varrho}^\varepsilon \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho^\varepsilon \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right|^2 + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) + \frac{1}{\bar{\alpha}_p^\varepsilon} \left| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 \right) dx + \\ & \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(s)} \left(\varrho_s \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right|^2 + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda^{(0)} \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) + \frac{1}{(\bar{c}_s^{(0)})^2} \left| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 \right) dx + \\ & \quad \int_{\Omega} \chi^\varepsilon \left(\bar{\alpha}_\mu \mathbb{D}(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}) \right) dx = \int_Q \tilde{\varrho}^\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} dx. \end{aligned}$$

3. Усреднение модели.

Теорема 2. Пусть $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ обобщенное решение задачи (1) – (10) и

$$0 < \lambda_0^{(0)} < \infty, \quad \mu_1 = \lambda_1 = \infty.$$



Тогда пределы \mathbf{w} и p последовательностей $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{p^\varepsilon\}$ удовлетворяют уравнению динамики в форме интегрального тождества

$$\int_{Q_T} \left((1 - \zeta) \lambda_0^{(0)} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I} \right) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) dx dt = \int_{Q_T} \hat{\varrho}_s \left(\mathbf{F} - \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} \right) \cdot \boldsymbol{\varphi} dx dt \quad (14)$$

для любой функции $\boldsymbol{\varphi} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,0}(Q_T)$, и уравнению неразрывности в форме интегрального тождества

$$\int_{Q_T} \left(\left((1 - \zeta) \left(\frac{1}{\bar{c}_s^{(0)}} \right)^2 + \zeta \left(\frac{m}{\bar{c}_f^2} + \frac{1 - m}{\bar{c}_s^2} \right) \right) \frac{\partial p}{\partial t} \psi - \nabla \psi \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) dx dt = 0 \quad (15)$$

для любой гладкой функции $\psi \in W_2^{1,0}(Q_T)$.

Здесь

$$\hat{\varrho}_s = \left(1 - \zeta(\mathbf{x}) \right) \varrho_s^{(0)} + \zeta(\mathbf{x}) \hat{\varrho}, \quad \hat{\varrho} = m \varrho_f + (1 - m) \varrho_s.$$

Соотношения (14)-(15) завершаются однородными граничными условиями

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (16)$$

на границе $S_T \setminus \partial\Omega_T$, и однородными начальными условиями

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q. \quad (17)$$

Будем называть задачу (14) – (17) усредненной моделью I.

Заметим, что интегральные тождества (14), (15) эквивалентны системе Ламе

$$\frac{1}{(\bar{c}_s^{(0)})^2} p + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (18)$$

$$\varrho_s^{(0)} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left(\lambda_0^{(0)} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I} \right) + \varrho_s^{(0)} \mathbf{F} \quad (19)$$

в области $\Omega_T^{(s)}$, и системе акустики

$$\hat{\varrho} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = -\nabla p + \hat{\varrho} \mathbf{F}, \quad \left(\frac{m}{\bar{c}_f^2} + \frac{1 - m}{\bar{c}_s^2} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) = 0 \quad (20)$$

в области Ω_T .

Эти дифференциальные уравнения завершаются условиями непрерывности

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in G}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = -\frac{1}{\hat{\varrho}} \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0), \quad (21)$$



$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in G}} \left(\lambda_0^{(0)} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) - p(\mathbf{x}, t) \mathbb{I} \right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}^0) \quad (22)$$

на общей границе $S_T^{(0)}$, граничным и начальным условием (16), (17), граничным условием

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad (23)$$

на границе $S_T \setminus \partial\Omega_T^{(s)}$ и начальными условиями

$$p(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (24)$$

Основная трудность здесь заключается в граничных условиях на общей границе $S^{(0)}$. Эти условия следуют из предельного интегрального тождества (15) и интегрального тождества

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left((1 - \zeta) \lambda_0^{(0)} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I} \right) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) dx dt = \\ = \int_{Q_T} \int_Y \varrho_{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(\mathbf{F} - \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) dy dx dt, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ есть двухмасштабный предел последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, и

$$\varrho_{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(1 - \zeta(\mathbf{x}) \right) \varrho_s^{(0)} + \zeta(\mathbf{x}) \left(\varrho_f \chi(\mathbf{y}) + \left(1 - \chi(\mathbf{y}) \right) \varrho_s \right).$$

Соотношение (25) влечет динамическое уравнение Ламе (18) и граничное условие (22) на общей границе $S^{(0)}$. Интегральное тождество (15) влечет уравнение неразрывности (19), уравнение неразрывности

$$\left(\frac{m}{\bar{c}_f^2} + \frac{1 - m}{\bar{c}_s^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = 0, \quad (26)$$

в области Ω_T , и граничное условие

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in G}} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0) \quad (27)$$

на общей границе $S^{(0)}$.

В нашем случае $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ и из интегрального тождества (25) следует динамическое уравнение

$$\hat{\varrho} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = -\nabla p + \hat{\varrho} \mathbf{F} \quad (28)$$

в области Ω_T .

Соотношения (26)-(28) дают уравнение акустики (20) в области Ω_T и граничное условие (21) на границе $S^{(0)}$.



Литература

1. Meirmanov A. Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media // *Siberian Mathematical Journal*. – 2007. – **48**. – С.519-538.
2. Meirmanov A. Acoustic and filtration properties of a thermoelastic porous medium: Biot's equations of thermo – poroelasticity // *Sbornik Mathematics*. – 2008. – **199**, №3. – P.1-24.
3. Meirmanov A. Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermoelastic porous media // *Euro. Jnl. of Applied Mathematics*. – 2008. – **19**. – P.259-284.
4. Meirmanov A. A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization // *SIAM J. Math. Anal.* – 2008. – **40**, №3. – P.1272-1289.
5. Meirmanov A. Double porosity models in incompressible poroelastic media // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2010. – **20**, №4. – P.635-659.
6. Meirmanov A. Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2009. – **163**. – №2. – P.111-172.
7. Meirmanov A.M. Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2009. – **163**, №2. – P.111-172.

ACOUSTIC MODEL IN THE CONFIGURATION OF ELASTIC BODY – POROELASTIC MEDIUM

A.A. Gerus, S.A. Gritsenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru
artur-gerus@bsu.edu.ru

Abstract. Acoustics in composite medium with two different components is under consideration. The medium consists of some elastic body and poroelastic medium. Uniqueness and existence of generalized solution of evolution equations system is proved. It is done the homogenization of the model.

Key words: composite medium, periodic structure, Lamé's equations, acoustics equations, poroelastic, homogenization of periodic structures, two-scale convergence.



MSC 76M25

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ НА МИКРОСКОПИЧЕСКОМ УРОВНЕ

О.А. Гальцева, О.В. Гальцев

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: oleggaltsev@yandex.ru

Аннотация. Работа посвящена численному исследованию моделей фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей различной плотности, разделенных свободной границей в пороупругом пространстве. Приводятся численные результаты по разработанным алгоритмам в случае структуры порового пространства в виде изолированных капилляров и несвязных элементов пористой среды.

Ключевые слова: задача со свободной границей, фильтрация жидкости, упругий скелет, численное усреднение.

1. Введение. Проблемы моделирования физических процессов различной природы в различных средах возникают в механике жидкости и газа, в механике твердого тела, электродинамике и многих других областях. При этом общей проблемой является соотношение микро-и макроскопических подходов их описания. Часто требуется построить модель среды, локальные свойства которой резко меняются, поэтому удобнее перейти от микроскопического ее описания к макроскопическому, то есть рассматривать усредненные характеристики такой среды. Во многих случаях рассматриваемые физические процессы в сильно неоднородных средах описываются уравнениями с частными производными, причем сильная неоднородность этих сред приводит к дифференциальным уравнениям с резко изменяющимися коэффициентами. Такие задачи возникают в теории упругости и гидродинамике, в теории гетерогенных сред и композитных материалов, теории фильтрации и других задачах физики и механики. Непосредственное численное решение таких задач, как правило, затруднительно даже на современных ЭВМ. Поэтому возникает вопрос о построении моделей для сильно неоднородных сред, приводящих к более простым дифференциальным уравнениям, которые называются усредненными. Часто такие дифференциальные уравнения имеют постоянные коэффициенты. Усредненные уравнения позволяют определить с большой точностью эффективные характеристики первоначальной среды. Это условие обеспечивается основным требованием, которому должны удовлетворять усредненные уравнения – близость решений соответствующих краевых задач для исходных и усредненных уравнений. Математическое описание сильно неоднородных сред часто основано на предположении о наличии у таких сред какой-либо упорядоченной микроструктуры (например, периодической, квазипериодической, случайной однородной и др.).

В настоящей работе приводятся уравнения задачи о нахождении поверхности контактного разрыва при движении двух несжимаемых вязких жидкостей в порах скелета



грунта (с периодической структурой) и алгоритмы их численного решения в двух различных случаях, когда скелет является абсолютно твердым телом, и когда он является упругим телом.

Уравнения пороупругости, полученные К. фон Терцаги [1] и М. Био [2] долгое время являлись общепринятыми и служили основой для решения практических задач пороупругости. Эти уравнения учитывают перемещение не только жидкости в порах, но и твердого скелета. Предлагаемые К. фон Терцаги и М. Био модели называют феноменологическими: в них постулируются свойства смеси твердой и жидкой компонент. Позже, ряд авторов (Р. Барридж и Дж. Келлер [3], Э. Санчес-Паленсия [4], Т. Леви) предложили вывод уравнений пороупругости на основе основных законов механики сплошных сред и методов усреднения. Это было вполне естественно, сначала описать совместное движение упругого скелета и жидкости в порах на микроскопическом уровне, используя классические законы механики сплошных сред, а затем найти соответствующие аппроксимирующие модели с помощью теории усреднения (усредненные уравнения).

Так, совместное движение в области Ω описывалось ими математической моделью [5]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \tilde{\chi} \mathbb{P}_f + (1 - \tilde{\chi}) \mathbb{P}_s) = \rho \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

где $\nabla \cdot \mathbf{u}$ – дивергенция \mathbf{u} , матрица $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ определяется как

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}),$$

для векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , и \mathbf{c} , $\tilde{\chi}$ есть характеристическая функция порового пространства Ω_f , \mathbb{P}_f и \mathbb{P}_s – тензоры напряжения жидкой и твердой компонент соответственно, \mathbf{v} – скорость среды, ρ – плотность среды и \mathbf{F} – заданный вектор распределенных массовых сил.

Уравнения (1) и (2) понимаются в смысле теории распределения (как соответствующие интегральные тождества) и содержат динамические уравнения для жидкой компоненты

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \mathbb{P}_f + \rho \mathbf{F}, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

в Ω_f при $t > 0$, динамические уравнения для твердой компоненты

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \mathbb{P}_s + \rho \mathbf{F}, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

в Ω_s при $t > 0$, и условие непрерывности нормальных напряжений

$$(\mathbb{P}_s - \mathbb{P}_f) \cdot \mathbf{n} = 0$$

на общей границе «поровое пространство – твердый скелет» $\Gamma(t)$, где \mathbf{n} есть единичная нормаль к $\Gamma(t)$.



Приведенная задача сильно нелинейная и содержит еще одну неизвестную величину – границу раздела порового пространства и твердого скелета. Главный постулат здесь – твердая и жидкая компоненты не смешиваются. Таким образом неизвестная (свободная) граница $\Gamma(t)$ является поверхностью *контактного разрыва* [5], которая определяется из задачи Коши

$$\frac{d\tilde{\chi}}{dt} \equiv \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} + \nabla \tilde{\chi} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \tilde{\chi}(\mathbf{x}, 0) = \chi_0(\mathbf{x}) \quad (3)$$

для характеристической функции $\tilde{\chi}$ в области Ω при $t > 0$.

Для описания совместного движения двух неоднородных жидкостей в упругом скелете динамическая система уравнений дополняется уравнением переноса для плотности $\rho^e(\mathbf{x}, t)$ смеси жидкой и твердой компонент:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (4)$$

В частности, эта система описывает движение двух несмешивающихся жидкостей различной (и постоянной) плотности ρ_f^+ и ρ_f^- в несжимаемом твердом скелете постоянной плотности ρ_s , если уравнение (4) дополнить начальным условием

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_s, \quad \mathbf{x} \in \Omega_s, \quad \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_f^\pm, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f^\pm, \quad (5)$$

где Ω_f^\pm есть область занятая жидкостью плотности ρ_f^\pm в начальный момент времени.

Очевидно, что даже такое упрощение не делает задачу намного легче. Более того, если задачу (1), (3)-(5) удастся решить, то эта математическая модель будет бесполезна для практического применения, так как функция $\tilde{\chi}$ меняет свои значения от 0 до 1 в масштабе нескольких микрон в то время как задача в целом рассматривается в области в несколько десятков (сотен) метров. Поэтому наиболее подходящим здесь будет усреднение рассматриваемой модели. Но в этом случае задача (1)-(3) становится совершенно неразрешимой. Чтобы получить что-то подходящее для практических нужд и все еще разумное с теоретической точки зрения, воспользуемся схемой, предложенной в [3, 4] и линеаризуем основную динамическую систему.

А именно, аппроксимируем характеристическую функцию $\tilde{\chi}$ жидкой части Ω_f ее значением в начальный момент времени

$$\tilde{\chi} \simeq \chi_0(\mathbf{x})$$

и свободную границу $\Gamma(t)$ ее начальным положением Γ_0 .

Далее предположим, что

$$\mathbf{v} \simeq \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t},$$

где \mathbf{w} есть вектор перемещения среды,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) \simeq (\rho_f \chi_0 + \rho_s(1 - \chi_0)) \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2},$$



где ρ_f и ρ_s есть плотности жидкости в порах и твердого скелета соответственно, и

$$\mathbb{P}_f = 2\mu \mathbb{D}(x, \mathbf{v}) - p \mathbb{I}, \quad (6)$$

$$\mathbb{P}_s = 2\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I}. \quad (7)$$

Здесь $\mathbb{D}(x, \mathbf{v})$ есть симметричная часть $\nabla \mathbf{v}$, \mathbb{I} – единичный тензор, \mathbf{w} – вектор перемещения среды, μ – динамическая вязкость, ν – объемная вязкость, и λ – постоянная упругости Ламе.

Предположение 1. Пусть $\chi(\mathbf{y})$ есть 1-периодическая по переменной \mathbf{y} функция, такая, что $\chi(\mathbf{y}) = 1$, $\mathbf{y} \in Y_f \subset Y$, $\chi(\mathbf{y}) = 0$, $\mathbf{y} \in Y_s = Y \setminus \bar{Y}_f$, Y – единичный квадрат R^2 .

1) Множество Y_f открытое и $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ есть Липшицева поверхность.

2) Пусть Y_f^ε есть периодическое повторение в R^2 элементарной ячейки εY_f . Тогда Y_f^ε есть связное множество с липшицевой границей ∂Y_f^ε , которая является периодическим повторением границы $\varepsilon \gamma$.

3) $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с Липшицевой границей $S = \partial \Omega$ и $\Omega_f^\varepsilon = \Omega \cap Y_f^\varepsilon$ есть поровое пространство, $\Omega_s^\varepsilon = \Omega \setminus \bar{\Omega}_f^\varepsilon$ – твердый скелет, $\Gamma_0 = \Gamma^\varepsilon = \partial \Omega_f^\varepsilon \cap \partial \Omega_s^\varepsilon$ – общая граница «твердый скелет – поровое пространство».

Пусть $\zeta(\mathbf{x})$ характеристическая функция области Ω . Тогда $\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x})\chi(\mathbf{x}/\varepsilon)$ будет характеристической функцией жидкой области Ω_f^ε .

В безразмерных переменных

$$\mathbf{x} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{w} \rightarrow \frac{\mathbf{w}}{L}, \quad t \rightarrow \frac{t}{\tau}, \quad \mathbf{F} \rightarrow \frac{\mathbf{F}}{g},$$

где L есть характерный размер физической области, τ есть характерное время физического процесса, g – значение ускорения свободного падения.

Тогда динамическая система примет вид

$$\alpha_\tau \varrho^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \varrho^\varepsilon \mathbf{F}, \quad (8)$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}) + (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I}, \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0. \quad (10)$$

В (8) – (10) $\varepsilon = l/L$ есть безразмерный размер пор, l – средний размер пор,

$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}, \quad \alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau L g \rho^0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{L g \rho^0},$$

$$\varrho^\varepsilon = \varrho_f \chi^\varepsilon + \varrho_s (1 - \chi^\varepsilon),$$

ϱ_f и ϱ_s – безразмерные плотности жидкости в порах и твердого скелета, соотнесенные к плотности воды ρ^0 .



Различные частные случаи линейризации (1) – (3) изучались многими авторами: Бьюкенен – Гилберт-Лин [6, 7], Бакингом [8], Барридж-Келлер [3], Клопиу-Ферри-Гилберт-Микелич-Паоли [9–11], Леви [12], Нгуэтсенг [13], Санчес-Хьюберт [14], Санчес-Паленсия [4].

Наиболее полно задача усреднения общей линейризованной системы для сжимаемых сред была исследована в работах А.М. Мейрманова [15, 16].

В частности, в [15, 16] была предложена классификация физических процессов и физических сред в зависимости от значений безразмерных критериев

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\tau(\varepsilon) = \tau_0, \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0.$$

Для очень медленных процессов, таких как фильтрация жидкости, скорость среды составляет всего 3 – 6 метров в год. Поэтому характерное время процесса очень велико и $\alpha_\tau \sim 0$. Для быстротекающих процессов таких, как акустика или гидравлический удар, $\alpha_\tau \sim 1$, или $\alpha_\tau \sim \infty$.

В этом случае инерционными слагаемыми в (6) можно пренебречь и ограничиться уравнением

$$\nabla \cdot \mathbb{P} + \varrho^\varepsilon \mathbf{F} = 0. \tag{11}$$

При описании совместного движения двух неоднородных жидкостей в упругом скелете система уравнений (10) – (11) дополняется уравнением переноса

$$\frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho^\varepsilon = 0, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \tag{12}$$

для плотности ρ^ε смеси жидкой и твердой компонент и начальным условием

$$\rho^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \rho_s, \quad \mathbf{x} \in \Omega_s, \quad \rho^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \rho_f^\pm, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f^\pm. \tag{13}$$

Самым простым случаем системы (10) – (12) является случай, когда твердый скелет предполагается абсолютно твердым телом. Он характеризуется равенством

$$\lambda_0 = \infty.$$

Соответствующая система уравнений состоит из уравнений Стокса

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{14}$$

$$\nabla \cdot (\alpha_\mu \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - p \mathbb{I}) + \varrho_f \mathbf{F} = 0 \tag{15}$$

для скорости \mathbf{v} и давления p жидкости в области Ω_f при $t > 0$ и равенства

$$\mathbf{v} = 0 \tag{16}$$

в твердом скелете Ω_s (более точно, система (14)-(16) получается из системы (10)-(12) предельным переходом при $\alpha_\lambda \rightarrow \infty$).



Отметим, что нетривиальное усреднение системы (14) – (16) возможно только при условии

$$\alpha_\mu = \varepsilon^2 \mu_0, \quad \mu_0 = \text{const} > 0. \quad (17)$$

(см. [15, 16]).

При описании совместного движения двух неоднородных жидкостей в абсолютно твердом скелете система уравнений (14)-(17) дополняется уравнением переноса

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_f = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f \quad (18)$$

для плотности ρ^ε смеси жидкой и твердой компонент и начальным условием

$$\rho_f(\mathbf{x}, 0) = \rho_f^\pm, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f^\pm. \quad (19)$$

В исходной постановке для точных уравнений динамики (1), (3), (4), задачи (12)-(3) и (18)-(19) эквивалентны и для упругого скелета, когда равенство (15) может и не выполняться. Но при линеаризации динамических уравнений мы потеряли важное свойство границы $\Gamma(t)$ «поровое пространство – твердый скелет» быть поверхностью контактного разрыва. Грубо говоря, жидкая и твердая компоненты среды теперь могут «протекать» через ее аппроксимацию – границу Γ_0 . Поэтому на участках, где жидкая компонента «втекает» в поровое пространство, необходимо задавать значение плотности, что не вызвано существом дела.

Вообще говоря, такая постановка задачи, когда решением является искомая функция ρ_f (а не комбинация ρ^ε , в которой плотность твердого скелета ρ_s известна) более естественна и привычна для исследователя. Поэтому, чтобы «подправить» последнюю постановку задачи о транспорте массы, воспользуемся диффузионным приближением

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_f = D_0 \Delta \rho_f \quad (20)$$

с достаточно малым коэффициентом диффузии D_0 , который впоследствии можно устремить к нулю.

Данное уравнение допускает два вида краевых условий на границе Γ_0 , не требующих знания искомой плотности ρ_f

$$(D_0 \nabla \rho_f - \rho_f \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (21)$$

или

$$D_0 \nabla \rho_f \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (22)$$

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к границе Γ_0 .

Условие (21) является точным для линеаризованных динамических уравнений с фиксированной границей раздела Γ_0 . Здесь под «точным условием» мы понимаем условие, запрещающее перетоки жидкости из порового пространства в твердый скелет или перетоки из твердого скелета в поровое пространство. С другой стороны, условие (22) является точным для точных нелинеаризованных динамических уравнений с



неизвестной границей раздела $\Gamma(t)$. В этом случае условие на сильном разрыве для уравнения диффузии (22) примет вид [5]

$$\rho_f (V_n - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + D_0 \nabla \rho_f \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{23}$$

где V_n есть скорость движения поверхности $\Gamma(t)$ в направлении нормали \mathbf{n} . Поскольку данная поверхность $\Gamma(t)$ есть поверхность контактного разрыва, то

$$V_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$$

и мы приходим к (22).

2. Разработка алгоритмов численного решения математических моделей 1 и 2. Задача численного усреднения математической модели 1 совместного движения жидкости и упругого скелета решалась для двух различных геометрий элементарной ячейки порового пространства: несвязные капилляры (Рис. 1 – геометрия «а») и несвязный упругий скелет (Рис. 1 – геометрия «б»).

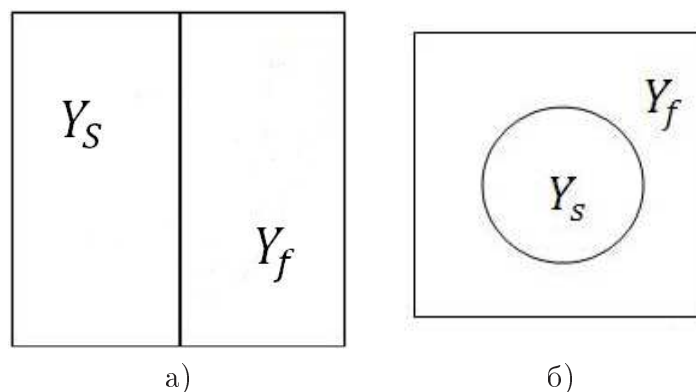


Рис. 1. Структура порового пространства: а) в виде изолированных капилляров, б) в виде несвязных элементов твердого скелета.

Предположение 2.

1) Пусть «жидкая компонента» Y_f единичного квадрата $Y = (0, 1)^2 \subset R^2$ является открытым множеством, а $Y_s = Y / \overline{Y}_f$ - «твердая компонента» в Y . $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ - липшицева граница.

$$\overline{Y} = Y_f \cup Y_s \cup \gamma \cup \partial Y, \quad Y = (0, 1) \times (0, 1), \quad \varepsilon Y = (0, \varepsilon) \times (0, \varepsilon).$$

2) Пусть Y_f^ε есть периодическое повторение в R^2 элементарной ячейки εY_f , с липшицевой границей ∂Y_f^ε , которая является периодическим повторением границы $\varepsilon \gamma$. Y_s^ε - периодическое повторение в R^2 элементарной ячейки εY_s .

3) Пусть $\Omega \in R^2$ - ограниченная область с липшицевой границей S , $\Omega = \Omega_f^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon \cup \Omega_s^\varepsilon$, где $\Omega_f^\varepsilon = \Omega \cap Y_f^\varepsilon$ - поровое пространство, $\Omega_s^\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\Omega_f^\varepsilon}$ - твердый скелет, и $\Gamma^\varepsilon = \partial \Omega_f^\varepsilon \cap \partial \Omega_s^\varepsilon$ - общая граница «твердое тело - поровое пространство».



Модель 1. Совместное движение вязкой жидкости в поровом пространстве и упругого скелета на микроскопическом уровне описывается системой

$$\nabla \cdot (\chi^\varepsilon \mu_0 \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) + (1 - \chi^\varepsilon) \lambda_0 \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) - p \mathbb{I}) + \rho^\varepsilon \mathbf{F} = 0, \quad (24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla \rho_f = 0, \quad \rho^\varepsilon = \chi^\varepsilon \rho_f + (1 - \chi^\varepsilon) \rho_s, \quad (26)$$

которая состоит из стационарной системы уравнений Стокса

$$\nabla \cdot (\mu_0 \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})) - \nabla p^\varepsilon - \rho_f^\varepsilon \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0, \quad (27)$$

для скорости $\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t$ и давления p^ε неоднородной несжимаемой жидкости в области Ω_f^ε при $t > 0$ и стационарной системы уравнений Ламэ

$$\nabla \cdot (\lambda_0 \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon)) - \nabla p^\varepsilon - \rho_s^\varepsilon \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0, \quad (28)$$

для перемещения \mathbf{w}^ε и давления p^ε упругого несжимаемого скелета в области Ω_s^ε при $t > 0$, транспортного уравнения (26). На общей границе «твердый скелет – поровое пространство» Γ^ε выполнено условие непрерывности перемещений и нормальных напряжений.

Система (26)-(28) дополняется начальным и граничным условиями

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f^\varepsilon, \quad (29)$$

$$\mathbf{w}^\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad t > 0, \quad (30)$$

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_f^\varepsilon \quad (31)$$

и условием нормировки

$$\int_{\Omega} p(x, t) dx = 0, \quad t > 0. \quad (32)$$

Процесс численного усреднения ($\varepsilon \searrow 0$) моделируется увеличением количества капилляров для геометрии «а», или количества элементов упругого скелета для геометрии «б». Таким образом, можно считать, что при достаточно малом ε система (26)-(31) описывает задачу вязкоупругой фильтрации.

Отметим, что основные сложности при численном решении системы уравнений Стокса связаны с нахождением поля давления. А наличие стратификации дополнительно требует расчета поля плотности. Пусть в некоторый момент времени $t_n = n\tau$, где τ – величина шага по времени, n – число шагов, известно поле скоростей $\mathbf{v} = \partial \mathbf{w} / \partial t$, давление p и плотность ρ . Тогда чтобы найти неизвестные функции, процесс вычисления можно представить в следующем виде:



Этап 1. Решается система уравнений Ламэ (28) с граничными и начальными условиями для перемещения \mathbf{w} (30), (31). На первом шаге по времени находим промежуточное значение $\tilde{\mathbf{w}}$, решая уравнение

$$\lambda_0 \Delta \tilde{\mathbf{w}} - \nabla \tilde{p} = -\rho_s \mathbf{F}, \quad (33)$$

дополненное граничным условием

$$\tilde{\mathbf{w}}|_{S \cup \Gamma^\varepsilon} = 0.$$

В данном случае условие несжимаемости (25) не удовлетворяется. Поэтому будем искать поправки к полю перемещения и давления в следующем виде

$$\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{w}}, \quad p = \tilde{p} + \dot{p}_s, \quad (34)$$

где $\tilde{p}|_{t=0} = 0$.

Подставив (34) в (28), получим уравнения для коррекции давления и перемещения упругого скелета

$$\lambda_0 \Delta \dot{\mathbf{w}}_s - \nabla \dot{p}_s = 0, \quad (35)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{w}}_s = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}_s, \quad (36)$$

$$\dot{\mathbf{w}}_s|_{S \cup \Gamma^\varepsilon} = 0.$$

Выразим градиент $\nabla \dot{p}_s$ из системы (35) и применим дивергенцию к обеим частям, получим уравнение для поправки давления

$$\Delta \dot{p}_s = \lambda_0 \nabla \cdot (\Delta \dot{\mathbf{w}}_s). \quad (37)$$

Учитывая, что $\nabla \cdot (\Delta \dot{\mathbf{w}}) = \Delta(\nabla \cdot \dot{\mathbf{w}})$ и равенство (36), уравнение (37) примет вид

$$\Delta \dot{p}_s = -\lambda_0 \Delta(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}_s), \quad (38)$$

которое дополним следующими граничными условиями

$$\nabla \dot{p}_s \cdot \mathbf{n}|_S = 0,$$

$$\nabla \dot{p}_s \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma^\varepsilon} = -\lambda \Delta \tilde{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma^\varepsilon}.$$

Найдя \dot{p}_s , легко решим (35) и, соответственно, найдем окончательные значения перемещения и давления в (34).

Этап 2. Используя найденные значения \mathbf{w}_s и p_s , находим нормальные напряжения на границе Γ^ε

$$(\lambda_0 \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I}) \mathbf{n} = \mathbf{A}, \quad (39)$$

где \mathbf{n} есть единичный вектор нормали к границе Γ^ε .



Этап 3. Так как на общей границе между упругим скелетом и жидкостью выполняется условие непрерывности перемещений и нормальных напряжений, то решаем систему уравнений Стокса (27) в Ω_f^ε , учитывая граничное условие на общей границе Γ^ε

$$(\mu_0 \mathbb{D}(x, \tilde{\mathbf{v}}) - p \mathbb{I}) \mathbf{n} = \mathbf{A}, \quad (40)$$

где правая часть равенства известна с предыдущего этапа.

В виду того, что p уже известно из (40), уравнение для $\tilde{\mathbf{v}} = \partial \tilde{\mathbf{w}} / \partial t$ на первом шаге будет иметь следующий вид

$$\mu_0 \Delta \tilde{\mathbf{v}} - \nabla p = -\rho_f \mathbf{F}, \quad \tilde{\mathbf{v}}|_S = 0. \quad (41)$$

Затем аналогичные действия повторяются, а именно, находим поправку для поля скоростей и давления

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{v}}_f, \quad \tilde{p} = p + \dot{p}_f. \quad (42)$$

Подставляя (42) в (27) и в уравнение неразрывности, получим уравнения для коррекции скорости и давления

$$\mu_0 \Delta \dot{\mathbf{v}}_f - \nabla \dot{p}_f = 0, \quad (43)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{v}}_f = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \quad (44)$$

которые дополним граничными условиями

$$\dot{\mathbf{v}}_f|_S = 0, \quad (\mu_0 \mathbb{D}(x, \dot{\mathbf{v}}_f) - \dot{p}_f \mathbb{I}) \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma^\varepsilon.$$

Выразим градиент $\nabla \dot{p}_f$ и применим дивергенцию к обеим частям в (43). Получим уравнение для поправки давления

$$\Delta \dot{p}_f = -\mu_0 \Delta (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}^n), \quad (45)$$

которое дополняется граничными условиями

$$(\nabla \dot{p}_f \cdot \mathbf{n})|_S = 0, \quad \nabla \dot{p}_f \cdot \mathbf{n} = -\mu_0 \Delta \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{на } \Gamma^\varepsilon.$$

Найдя \dot{p}_f , решим (43). Учитывая известные $\tilde{\mathbf{v}}$, $\dot{\mathbf{v}}_f$ и \dot{p}_f легко найдем \mathbf{v} , p_f . Нормальное напряжение на общей границе Γ^ε находится, как

$$\mathbb{B} = (\mu_0 \mathbb{D}(x, \mathbf{v}) - \tilde{p}) \mathbf{n}.$$

Этап 4. Используя уже известное значение скорости жидкости, находим значение плотности на следующем временном слое (ρ_f^{n+1}), решая численно уравнение

$$\frac{\rho_f^{n+1} - \rho_f^n}{\tau} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_f^n. \quad (46)$$



Этап 5. На этом текущий цикл заканчивается. На последующих временных слоях алгоритм нахождения неизвестных в упругом скелете решаем уравнение

$$\lambda_0 \Delta \tilde{\mathbf{w}}_s^n - \nabla \tilde{p} = -\rho_s \mathbf{F} \quad (47)$$

с граничным условием

$$(\lambda_0 \mathbb{D}(x, \tilde{\mathbf{w}}^n) - \nabla \tilde{p}) \cdot \mathbf{n} = \mathbb{B},$$

найденным на Этапе 3, и условием на S

$$\tilde{\mathbf{w}}_s \Big|_S = 0.$$

```

1  for каждой ячейки сетки do
2      if ячейка принадлежит область упругого скелета then
3          находим  $\mathbf{w}$  из уравнения (33).
4          При  $p|_{t=0} = 0$  ищем  $\dot{\mathbf{w}}_s$ , решая систему уравнений (35)-(36).
           Получаем  $\dot{p}_s$  из (37).
5          if  $\Delta \dot{p}_s = -\lambda_0 \Delta(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}_s)$  then
6              решаем (34).
7          end
8          Находим нормальное напряжение на  $\Gamma^\varepsilon$  из (39).
9          end
10         else
11             Ищем  $\mathbf{v}^\varepsilon$  с учетом найденного значения нормального
                напряжения на общей границе «упругий скелет – поровое
                пространство», соблюдая аналогичный порядок действий,
                что и для расчета перемещения в упругом скелете.
12         end
13         Находим  $\rho_f^{n+1}$  (значение плотности на следующем временном
                слое).
14     end
    
```

Алгоритм 1. Решение системы уравнений (26)-(28).

Поправки для давления и перемещения будем искать как

$$\mathbf{w}_s^n = \tilde{\mathbf{w}}_s^n + \dot{\mathbf{w}}_s^n, \quad p = \tilde{p} + \dot{p}_s^n. \quad (48)$$

Уравнения для коррекции $\dot{\mathbf{w}}_s$ и \dot{p}_s будут

$$\lambda_0 \Delta \dot{\mathbf{w}}_s^n - \nabla \dot{p}_s^n = 0, \quad (49)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{w}}_s^n = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}_s^n \quad (50)$$



со следующими граничными условиями

$$\dot{\boldsymbol{w}}_s^n|_S = 0, \quad (\lambda_0 \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{w}}_s) - \dot{p}_s \mathbb{I}) \boldsymbol{n} = 0 \text{ на } \Gamma^\varepsilon.$$

Поправку для давления находим из уравнения

$$\Delta \dot{p}_s^n = -\lambda_0 \Delta(\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{w}}_s^n) \quad (51)$$

$$\nabla \dot{p}_s \cdot \boldsymbol{\nu}|_S = 0, \quad \nabla \dot{p}_s \cdot \boldsymbol{n}|_{\Gamma^\varepsilon} = -\lambda_0 \Delta \tilde{\boldsymbol{w}}_s^n \cdot \boldsymbol{n} \text{ на } \Gamma^\varepsilon.$$

Как и ранее, находим $\dot{\boldsymbol{w}}_s^n$, затем \boldsymbol{w}_s^n и p и повторяем этапы 2–4. Процедура повторяется, пока не получим сходящееся решение.

Модель 2. Математическая модель 2 движения жидкости в абсолютно твердом скелете решалась численно в области Ω , которая имеет структуру элементарной ячейки как геометрии «а», так и геометрии «б». Движение жидкости в одном капилляре описывается системой уравнений Стокса

$$\nabla \cdot (\mu_0 \varepsilon^2 \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}^\varepsilon) - p^\varepsilon \mathbb{I}) + \rho_f^\varepsilon \boldsymbol{F} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon, t \in (0, T), \quad (52)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}^\varepsilon = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon, t \in (0, T), \quad (53)$$

которая дополняется уравнением переноса

$$\frac{\partial \rho_f^\varepsilon}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho_f^\varepsilon = 0, \quad \rho_f^\varepsilon(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_f^{(0)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon, t \in (0, T) \quad (54)$$

для плотности жидкости ρ_f^ε и условием нормировки

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} p^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) dx = 0, \quad (55)$$

где $\mu_0 = \alpha_\mu / \varepsilon^2$.

Выполняется следующее граничное условие

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S \cup \Gamma^\varepsilon, \quad t > 0, \quad (56)$$

где $S = \partial\Omega$.

Процесс численного усреднения ($\varepsilon \searrow 0$) моделируется увеличением количества капилляров для геометрии «а», или количества элементов твердого скелета для геометрии «б». Таким образом, можно считать, что при достаточно малом ε система (52), (56) описывает классическую задачу Маскета. Алгоритм нахождения неизвестных функций скорости, давления и плотности будет иметь следующий вид:

Этап 1. На первом временном слое находим промежуточное значение скорости $\tilde{\boldsymbol{v}}$ в Ω_f из уравнения

$$\frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{v}} = -\rho^1 \boldsymbol{F}, \quad \tilde{\boldsymbol{v}}|_{S \cup \Gamma^\varepsilon} = 0, \quad \rho^1 = \rho_f^0. \quad (57)$$



Скорость и давление, с учетом промежуточного значения и поправки, можно представить в виде

$$\mathbf{v}^1 = \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', \quad p^1 = \tilde{p} + p'. \quad (58)$$

Находим поправки скорости из уравнений

$$\frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \Delta \mathbf{v}' - \nabla p' = 0, \quad (59)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \quad (60)$$

$$\mathbf{v}'|_{S \cup \Gamma^\varepsilon} = 0.$$

Выразив градиент $\nabla p'$ и применив дивергенцию к обеим частям, получим уравнение для поправки давления

$$\Delta p' = \frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \nabla \cdot (\Delta \mathbf{v}'). \quad (61)$$

Учитывая $\nabla \cdot (\Delta \mathbf{v}') = \Delta(\nabla \cdot \mathbf{v}')$ и равенство (60), найдем p'

$$\Delta p' = \frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \nabla \cdot (\Delta \tilde{\mathbf{v}}), \quad (62)$$

$$\nabla p' \cdot \mathbf{n}|_{S \cup \Gamma^\varepsilon} = \frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \Delta \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}|_{S \cup \Gamma^\varepsilon},$$

зная которое, решим (59).

Используя уже известные значения $\tilde{\mathbf{v}}$ и \mathbf{v}' , найдем \mathbf{v}^1 , p^1 и вычислим (ρ^2) на следующем шаге

$$\frac{\rho^2 - \rho^1}{\tau} = -\mathbf{v}^1 \cdot \nabla \rho^1. \quad (63)$$

Этап 2. На втором и последующих временных шагах проделываем аналогичные действия, принимая во внимание уже известное значение давления. Находим промежуточное значение скорости $\tilde{\mathbf{v}}^n$ из уравнения

$$\frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \Delta \tilde{\mathbf{v}}^n - \nabla p^{(n-1)} = -\rho^n \mathbf{F}, \quad \tilde{\mathbf{v}}^n|_{S \cup \Gamma^\varepsilon} = 0. \quad (64)$$

Находим поправки для скорости и давления, как на предыдущем шаге

$$\mathbf{v}^n = \tilde{\mathbf{v}}^n + \mathbf{v}^n, \quad p^n = p^{(n-1)} + p^n. \quad (65)$$

Подставив (58) в исходное уравнение Стокса и уравнение неразрывности, получим уравнения для коррекции скорости и давления

$$\frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \Delta \mathbf{v}^n - \nabla p^n = 0, \quad (66)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^n = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}^n. \quad (67)$$



$$\Delta \dot{p}^n = -\frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \nabla \cdot (\Delta \tilde{v}^n), \quad (68)$$

$$\nabla \dot{p} \cdot \mathbf{n}|_{S \cup \Gamma^\varepsilon} = -\frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \Delta \tilde{v}^n.$$

Затем решим (65).

И, наконец, находим значение (ρ^{n+1}) , численно решая уравнение

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau} = -\mathbf{v}^n \cdot \nabla \rho^n. \quad (69)$$

```

1 for каждой ячейки сетки do
2   for первого каждого временного слоя  $n = 1$   $\tilde{v}$  из (57). do
3     Находим  $\dot{v}$  из (59).
4     Находим  $\dot{p}$  из (62).
5     Определим  $\mathbf{v}^1$  и  $p^1$ .
6     Ищем  $\rho^2$  из (63) для следующего шага по времени.
7   end
8   for второго и последующего временного слоя находим  $\tilde{v}^n$ 
   из (64). do
9     Находим поправки скорости и давления.
10    Решаем (65).
11    Ищем  $\rho^{n+1}$  из (69).
12  end
13 end

```

Алгоритм 2. Решение системы уравнений (52)-(54).

3. Численное решение модели 1. В качестве численного метода решения моделей 1 и 2 был выбран метод VOF (volume of fluid).

В механике сплошных сред принято использовать лагранжевы координаты в качестве основы в численных расчетах. В гидродинамике, однако, с успехом используются как Лагранжевы, так и эйлеровы координаты. Выбор той или иной системы зависит от конкретной решаемой задачи, так как каждый подход обладает своими преимуществами и недостатками. Для численного решения моделей, рассматриваемых в данной работе, мы будем использовать эйлерову постановку, так как для задач, в которых свободные границы проходят такие деформации, использование лагранжева метода невозможно.

Дискретное лагранжево представление для жидкости концептуально просто, так как каждая зона накладываемой на расчетную область сетки отождествляется с элементом жидкости в каждый момент времени. Объемные и поверхностные силы в этих элементах легко определить, соответственно динамические характеристики элементов легко вычисляемы. Эти два способа отличаются способом вычисления скорости в той области,



которая касается перемещения элемента жидкости в новое положение. В Лагранжевом случае сетка просто перемещается с рассчитанными скоростями элемента потока, тогда как в Эйлеровом случае необходимо вычислить поток жидкости через сетку. Этот поток требует усреднения параметров жидкости для всех элементов жидкости, которые находятся в данной ячейки сетки.

Именно этот процесс усреднения присущ аппроксимации конвективного потока. Это самый большой недостаток метода Эйлера. Конвективное усреднение приводит к сглаживанию всех вариаций в потоке и, в частности, к размытию поверхности разрыва (свободной поверхности). Единственный способ преодолеть эту проблему на границе – это ввести некоторую специальную обработку, которая позволила бы избежать разрыва. Сравнения относительных преимуществ и недостатков уже существующих методов преодоления этой проблемы привели к новой технике, которая является простой, но эффективной. Это метод объема жидкости в ячейке (VOF).

VOF-метод может быть использован в тех задачах, где необходимо найти свободную границу некоторого количества несмешивающихся сред: однофазное течение или течение несмешивающихся жидкостей.

В основе VOF-метода лежит схема дробного объема жидкости для отслеживания свободной поверхностью. В этой технике, функция $\rho(x_1, x_2, t)$ равна единице если ячейка занята жидкостью полностью и нулю, если ячейка пуста, когда усредненное по клеткам вычислительной сетки, среднее значение ρ в ячейке равно дробному объему ячейки, занятой жидкостью. В частности, единичное значение ρ соответствует ячейке, заполненной жидкостью, а нулевое значение указывает, что ячейка не содержит жидкости. Ячейки со значениями ρ между нулем и единицей содержат свободную поверхность.

Как отмечалось выше, процесс численного усреднения моделируется увеличением количества капилляров для геометрии «а», или количества элементов упругого скелета для геометрии «б» ($\varepsilon \searrow 0$).

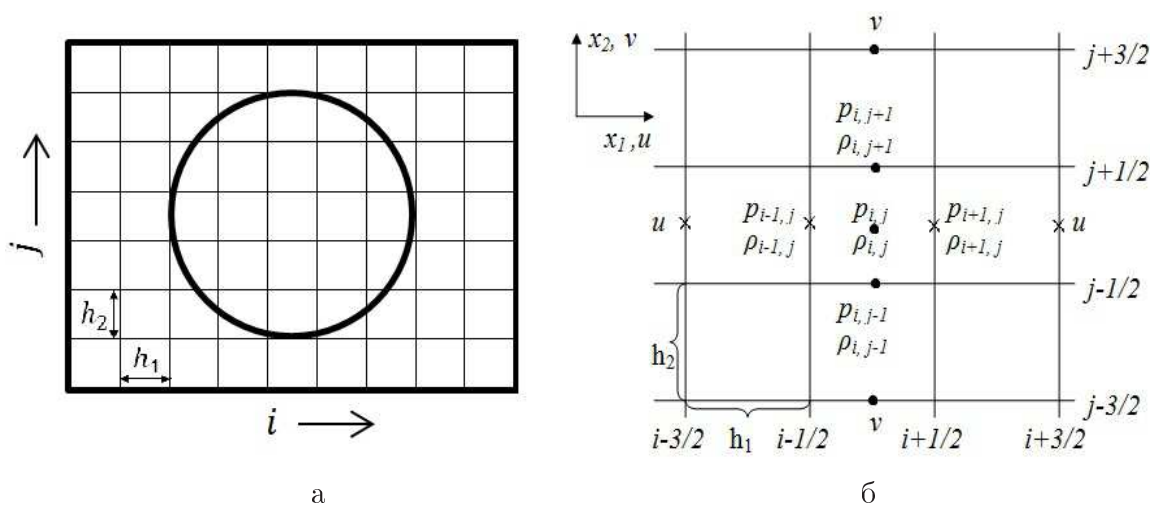


Рис. 2. Шаблон расчетной сетки.

В силу выбранного нами метода решения задачи исследуемая область течения по-



крывается равномерной по x_1 и x_2 сеткой ячеек (смотрите рисунок 2, «а» и «б»)

$$\Omega_f = \left(\begin{array}{l} x_1^{(i+1/2)} = ih_1, \quad h_1 > 0; \quad i = 0, 1, \dots, N_1; \\ x_2^{(j+1/2)} = jh_2, \quad h_2 > 0; \quad j = 0, 1, \dots, N_2; \end{array} \right)$$

где h_1, h_2 – размер сетки, N_1, N_2 – количество ячеек сетки, соответственно, в направлении x_1 и x_2 (точка с координатами (i, j) совпадает с центром ячейки).

Выбор такой сетки обусловлен тем, что в рассматриваемых нами моделях нет областей где необходимо было бы отслеживать границу раздела фаз более точно. Это также обусловлено и скоростью протекания процесса.

Здесь, как и в исходном методе VOF, будем использовать «шахматную» сетку. Это дает возможность четко интерпретировать каждую ячейку, как элемент объема, который характеризуется рассчитываемыми давлением и плотностью в его центре.

Дискретные значения переменных расположены в ячейке, как показано на рисунке 2 «б». Здесь свободная граница (i, j) определяется как ячейка, содержащая ненулевое значение ρ и имеющая по крайней мере одну соседнюю ячейку $(i \pm 1, j)$ или $(i, j \pm 1)$, плотность в которой равна 0. Ячейки с нулевым ρ содержат вторую жидкость. Ячейки с ненулевыми значениями ρ и ненулевыми соседними ячейками считаем заполненными первой жидкостью.

Кратко, основную процедуру решения модели 1 за один шаг по времени можно представить в виде трехэтапной схемы:

(1) Используя явные приближения уравнений (27),(28) и, следуя алгоритму, изложенному выше, находим значения скорости и перемещения.

(2) Используя разработанный алгоритм, удовлетворяем уравнению неразрывности (25) в каждой ячейке, так как из-за изменения давления в одной ячейке, нарушается баланс в четырех соседних клетках. В стандартном методе VOF предполагается, что на свободной границе раздела жидкостей выполняется условие сжимаемости среды. Так как нам необходимо учитывать поведение еще и упругого тела, то необходимо удовлетворять условие (25) в каждой ячейке всей области. Это небольшая модификация метода позволяет избежать непредусмотренных возмущений при переходе на новый временной слой.

(3) И, наконец, находим значения плотности ρ .

Повторение этих шагов даст решение через заданный интервал времени. На каждом шаге, конечно, необходимо соблюдать граничные условия.

Конечно-разностные аналоги пространственных переменных для соответствующих производных, входящих в исходную систему уравнений, центрируются в соответствии с выбранным шаблоном. Например, слагаемые с градиентом давления вычисляются с помощью односторонних разностей по формулам вида

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h_1}, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h_2}. \quad (70)$$

Для аппроксимации диффузионных членов уравнений используется схема с центральными разностями, как, например, для компоненты скорости перемещения жидко-



сти

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{u_{i+3/2,j} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}}{h_1^2}, \quad (71)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{u_{i+1/2,j+1} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j-1}}{h_2^2}. \quad (72)$$

Более полные выражения конечно-разностных аналогов соответствующих слагаемых двухмерных и трехмерных уравнений движения приведены, например, у О.М. Белоцерковского [17]. Используемая конечно-разностная схема аппроксимирует рассматриваемые уравнения с первым порядком точности по времени и со вторым порядком точности по пространственным переменным $O(\Delta\tau, h^2)$ и можно показать, что она устойчива. Подставим конечно-разностные формулы в исходную систему уравнений движения (24)–(26). Тогда после простых преобразований получим их дискретные аналоги для x_1 и x_2 направлений соответственно.

Полученные разностные алгебраические уравнения, разрешенные относительно компонент перемещения $w_{1\ i+1/2,j}$, $w_{2\ i,j+1/2}$ и дополненные уравнением неразрывности, преобразуются к следующему конечно - разностному виду

$$\begin{aligned} \lambda_0 \left(\frac{w_{1\ i+3/2,j}^n - 2w_{1\ i+1/2,j}^n + w_{1\ i-1/2,j}^n}{h_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{w_{1\ i+1/2,j+1}^n - 2w_{1\ i+1/2,j}^n + w_{1\ i+1/2,j-1}^n}{h_2^2} \right) = \\ = \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{h_1} + \rho_{s\ i+1/2,j}^n F_1, \quad (73) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_0 \left(\frac{w_{2\ i+1,j+1/2}^n - 2w_{2\ i,j+1/2}^n + w_{2\ i-1,j+1/2}^n}{h_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{w_{2\ i,j+3/2}^n - 2w_{2\ i,j+1/2}^n + w_{2\ i,j-1/2}^n}{h_2^2} \right) = \\ = \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{h_2} + \rho_{s\ i,j+1/2}^n F_2, \quad (74) \end{aligned}$$

$$\frac{w_{1\ i+1/2,j}^n - w_{1\ i-1/2,j}^n}{h_1} + \frac{w_{2\ i,j+1/2}^n - w_{2\ i,j-1/2}^n}{h_2} = 0, \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{s\ i,j}^{n+1} - \rho_{s\ i,j}^n}{\tau} = -w_{1\ i+1/2,j}^n \frac{\rho_{s\ i+1/2,j}^n - \rho_{s\ i-1/2,j}^n}{h_1} - \\ - w_{2\ i,j+1/2}^n \frac{\rho_{s\ i,j+1/2}^n - \rho_{s\ i,j-1/2}^n}{h_2}. \quad (76) \end{aligned}$$

где n – номер шага по времени, w_1 , w_2 – компоненты вектора перемещений, ρ_s – плотность упругого скелета.



Величины с дробными индексами относятся к границам ячеек, например

$$w_{1i+1/2,j} = \frac{w_{1i,j} + w_{1i+1,j}}{2}, \quad w_{2i,j+1/2} = \frac{w_{2i,j} + w_{2i,j+1}}{2}.$$

В случаях, когда нам необходимо определить значения функции в точках сетки, необходимо воспользоваться средним арифметическим, например

$$\rho_{i+1/2,j}^s = \frac{1}{2}(\rho_{i+1,j}^s + \rho_{i,j}^s), \quad \rho_{i,j+1/2}^s = \frac{1}{2}(\rho_{i,j+1}^s + \rho_{i,j}^s).$$

Легко видеть, что эти конечно-разностные схемы (так и ниже следующие) аппроксимируют систему уравнений (26)-(28) с погрешностью порядка $O(\tau, h^2)$, где $h = \max(h_1, h_2)$. Таким образом, приведенная разностная схема имеет второй порядок точности по пространству.

Критерием окончания решения служит условие, когда максимальная относительная разность между значениями искоемых переменных на предыдущем и следующем временном шаге не превышает заданную величину ошибки α

$$\max \left| \frac{v^{n+1} - v^n}{v^{n+1}} \right| \leq \alpha.$$

В плоском случае, геометрические характеристики дробных ячеек могут быть определены непосредственными измерениями. В аксиально-симметрическом случае необходимо провести дополнительные вычисления для нахождения расстояния от каждой дробной ячейки до оси симметрии. Разностные уравнения для дробных ячеек получаются путем небольшой модификации разностного уравнения для целой ячейки.

На рис. 3 представлены результаты численного усреднения задачи (26)-(31) по разработанному алгоритму для случая элементарной ячейки «б».

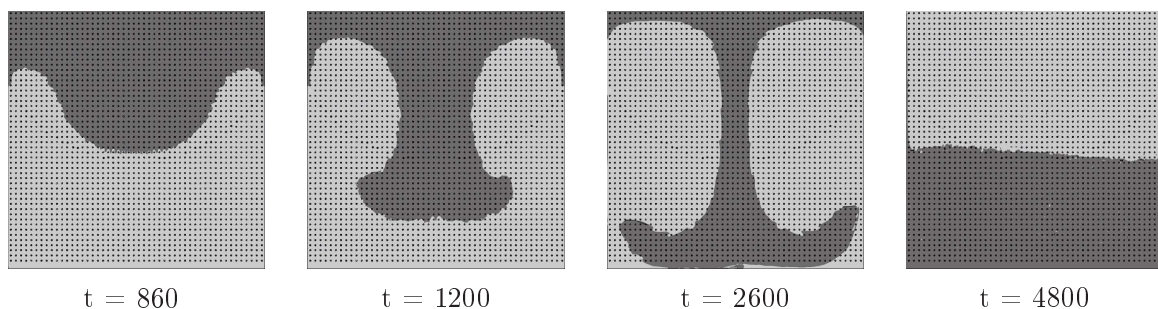


Рис. 3. Совместное движение жидкости и упругого скелета в виде изолированных капилляров.

4. Численное решение модели 2. Процесс аппроксимации системы уравнений (52)-(56) разностным представлением ничем не отличается от описанного выше, так как модель 2 является подмоделью модели 1, где отсутствуют перемещения скелета и, соответственно, на границе жидкости и твердого скелета выполняется условие непротекания.



Полученные разностные алгебраические уравнения, разрешенные относительно компонент перемещения $u_{i+1/2,j}$, $v_{i,j+1/2}$ и дополненные уравнением неразрывности, преобразуются к следующему конечно-разностному виду

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \left(\frac{u_{i+3/2,j}^n - 2u_{i+1/2,j}^n + u_{i-1/2,j}^n}{h_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{u_{i+1/2,j+1}^n - 2u_{i+1/2,j}^n + u_{i+1/2,j-1}^n}{h_2^2} \right) = \\ = \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{h_1} + \rho_{i+1/2,j}^n F_1, \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \left(\frac{v_{i+1,j+1/2}^n - 2v_{i,j+1/2}^n + v_{i-1,j+1/2}^n}{h_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{v_{i,j+3/2}^n - 2v_{i,j+1/2}^n + v_{i,j-1/2}^n}{h_2^2} \right) = \\ = \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{h_2} + \rho_{i,j+1/2}^n F_2, \end{aligned} \quad (78)$$

$$\frac{u_{i+1/2,j}^n - u_{i-1/2,j}^n}{h_1} + \frac{v_{i,j+1/2}^n - v_{i,j-1/2}^n}{h_2} = 0, \quad (79)$$

$$\frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n}{\tau} = -u_{i+1/2,j}^n \frac{\rho_{i+1/2,j}^n - \rho_{i-1/2,j}^n}{h_1} - v_{i,j+1/2}^n \frac{\rho_{i,j+1/2}^n - \rho_{i,j-1/2}^n}{h_2}. \quad (80)$$

При замене дифференциальной задачи на конечно-разностное представление необходимо обратить внимание на приближение граничных условий, так как их конкретное приближение прямо влияет на корректность метода и устойчивость схемы, а также скорость сходимости. Сформулируем граничные условия, введя серию фиктивных ячеек (так, чтобы каждая вычисляемая точка становилась внутренней и описанный алгоритм сохранялся для всех ячеек). Для первого порядка аппроксимации достаточно одного слоя, для второго порядка аппроксимации – два слоя. Так в случае, когда боковые стенки есть твердая поверхность, то условие прилипания и непротекания представляется в виде

$$v_{-1/2,j+1/2} = 0 \text{ (условие прилипания),}$$

$$u_{i-1/2,j} = 0 \text{ (условие непротекания).}$$

Из условия прилипания можно получить

$$v_{0,j+1/2} = \frac{v_{0,j+1/2}^n}{2} + \frac{v_{1,j+1/2}^n}{6} + \frac{h_1^2 \rho_{0,j+1/2}^n}{8 \mu} F_2 + O(h_1^3).$$



Для расчета поля плотности в «приграничных» ячейках рассматривается следующее представление (смотрите рисунок 4):

$$\rho_{0j}^{n+1,k+1} = \rho_{0j}^n - \tau \left[\frac{(\rho u)_{1/2,j}^n}{h_1} + \frac{(\rho v)_{0,j+1/2}^n - (\rho v)_{0,j-1/2}^n}{h_2} \right] + O(h^2). \quad (81)$$

приведенные краевые условия для расчета скорости и плотности в «приграничных» ячейках имеют порядок точности по пространственным переменным не ниже второго.

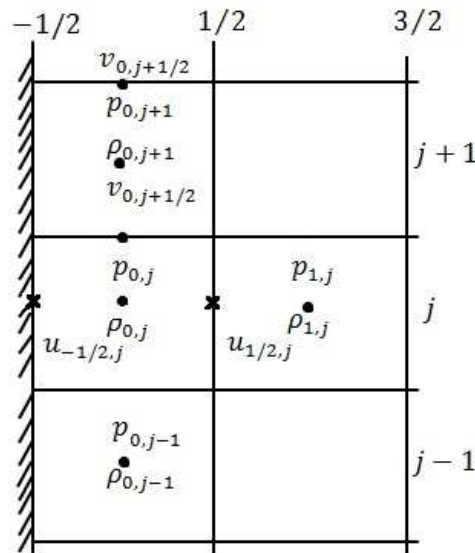


Рис. 4. Расчетная сетка у границы «жидкость – упругое тело» («абсолютно твердое тело»).

Численное решение этой задачи в одном капилляре в абсолютно твердом скелете показало совпадение с результатами [18]. На рис. 6 можно увидеть гладкую свободную границу в капилляре в различные моменты времени.

Процесс численного усреднения ($\varepsilon \searrow 0$) моделируется увеличением количества капилляров для геометрии «а», или количества элементов твердого скелета для геометрии «б». Таким образом, можно считать, что при достаточно малом ε система (52), (56) описывает классическую задачу Маскета.

Легко заметить, что для одного и того же времени процесса в задаче Маскета возникает переходная фаза в случае абсолютно твердого скелета (см. [16]), в то время, как при вязкоупругой фильтрации свободная граница сохраняется.



Литература

1. Terzaghi K. Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungsercheinungen // Sitzung berichte. Akademie der Wissenschaften, Wien Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. – 1923. – 132, №IIa. – P.104-124.
2. Biot M. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid // Journal of Applied Physics. – 1955. – 26. – P.182-185.
3. Burridge R., Keller J.B. Poroelasticity equations derived from microstructure // J. Acoust. Soc. Am. – 1981. – 70, №4. – P.1140-1146.
4. Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory // Lecture Notes in Physics. – Berlin: Springer, 1980.
5. Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред. Часть 2 / Новосибирск: НГУ, 1977. – 69 с.
6. Buchanan J.L., Gilbert R.P. Transition loss in the farfield for an ocean with a Biot sediment over an elastic substrate // ZAMM. – 1997. – №77. – P.121-135.
7. Gilbert R.P., Lin J.Z. Acoustic waves in shallow inhomogeneous oceans with a poro-elastic seabed // ZAMM. – 1997. – №4. – P.1-12.
8. Buckingham M.J. Seismic wave propagation in rocks and marine sediments: a new theoretical approach // Underwater Acoustics. – 1998. – 1. – P.299-300.
9. Clopeau Th., Ferrin J.L., Gilbert R.P., Mikelić A. Homogenizing the acoustic properties of the seabed. Part II // Mathematical and Computer Modelling. – 2001. – 33. – P.821-841.
10. Ferrin J.L., Mikelić A. Homogenizing the acoustic properties of a porous matrix containing an incompressible inviscid fluids // Math. Meth. Appl. Sci. – 2003. – 26. – P.831-859.
11. Mikelić A., Paoli L. Homogenization of the inviscid incompressible fluid flow trough a 2D porous medium // Proceedings of the AMS. – 1999. – 17. – P.2019-2028.
12. Levy T. Acoustic phenomena in elastic porous media // Mech. Res. Comm. – 1977. – №4. – P.253-257.
13. Nguetseng G. Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics // SIAM J. Math. Anal. – 1990. – 21. – P.1394-1414.
14. Sanchez-Hubert J. Asymptotic study of the macroscopic behavior of a solid-liquid mixture // Math. Methods Appl. Sci. – 1980. – 2. – P.1-18.
15. Мейрманов А.М. Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмо-акустики в упругих пористых средах // Сибирский Математический Журнал. – 2007. – №3. – С.645-667.
16. Мейрманов А. М. Вывод уравнений сейсмоакустики и уравнений фильтрации в упругих пористых средах через усреднение периодических структур // Труды семинара имени И.Г. Петровского. – М.: Наука, 2008. – С.178-238.
17. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / М.: Физматлит, 1994. – 448 с.
18. Daly B.J. Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability // Phys. Fluids. – 1967. – №2. – P.297-307.



**NUMERICAL SOLUTION OF TWO IMMISCIBLE INCOMPRESSIBLE
FLUIDS SIMULTANEOUS FLOW IN A POROUS MEDIUM
AT MICROSCOPIC LEVEL PROBLEM**

O.A. Galtseva, O.V. Galtsev

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: oleggaltsev@bsu.edu.ru

Abstract. Two models of filtration of two immiscible incompressible fluids of different density separated by free boundary in a porous elastic medium is studied numerically. Numerical results are given according to developed algorithms in the case when the structure of pore space has the form of isolated capillaries and disconnected elements of porous medium.

Key words: free boundary problem, liquid filtration, numerical averaging.



MSC 81P20

ПАРНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучается стохастическое электромагнитное поле, описывающее его тепловые флуктуации. Находится общий вид матрицы парных корреляционных функций этого поля.

Ключевые слова: стохастическое электромагнитное поле, гауссовское случайное поле, уравнения Максвелла, стохастическая модель, корреляционная функция.

1. Постановка задачи. Понятие о стохастическом электромагнитном поле возникает естественным образом при статистическом подходе к описанию электромагнитного поля, имеющего тепловое происхождение. В этом смысле представление о стохастическом электромагнитном поле восходит к работам Рэлея, Джинса, Вина и Планка при попытке построения ими теории излучения абсолютно черного тела (см., например, [1-4]). Следствием предложенной М.Планком [5] теоретической корпускулярной модели электромагнитного излучения, позволяющей объяснить экспериментальные данные, связанные с тепловым излучением абсолютно черного тела, в теоретической физике возникло, в частности, понятие квантования электромагнитного поля. При построении этой теории авторы, в то время, исходили из термодинамических соображений, так как не могли последовательно использовать какой-либо формализм теории вероятностей при построении статистической теории теплового излучения, так как соответствующего ее раздела, идейным образом связанного с изучением случайных полей, – теории случайных процессов, фактически, еще не существовало. К настоящему времени развитие теории случайных процессов в двадцатом столетии привело к построению стройной довольно развитой математической теории, которая позволяет по новому подойти к теоретической задаче математического описания теплового излучения электромагнитного поля (см., например, монографии [2, 3], идеи которых развиваются в настоящей работе). Наличие такого подхода к изучению стохастических электромагнитных полей отнюдь не ведет к необходимости пересмотра современной квантовой точки зрения на электромагнитное поле, однако дает новые математические возможности при теоретическом моделировании теплового электромагнитного излучения в статистической физике.

В более ранних публикациях мы исследовали частный случай стохастического электромагнитного поля – т.н. *гауссовскую модель* со статистически независимыми и эквивалентными электрической и магнитной составляющими, которая естественна в том случае, когда физически имеется малость величины поля в среднем квадратичном. Нами полностью был изучен случай, когда поле, сосредоточенное в ограниченной полости прямоугольной формы, является стохастически однородным (в частности, находится



в термодинамическом равновесии). В настоящем сообщении, мы находим общие ограничения на вид парных корреляционных функций стохастического электромагнитного поля. В частности, наше рассмотрение распространяется и на случай, когда поле сосредоточено в ограниченной полости. Полученный результат применим как в случае, когда поле является гауссовским, так и в случае, когда его гауссовость не предполагается. Это, в частности, дает полное описание всего класса гауссовских электромагнитных полей, без дополнительных предположений об их стохастической пространственной однородности и независимости электрической и магнитной компонент. При этом мы, с самого начала, считаем, что поле обладает нулевым средним значением, что, с одной стороны, с физической точки зрения, всегда выполняется в случае его теплового происхождения электромагнитного поля, а, с другой стороны, не является каким-то существенным ограничением с математической точки зрения, так как исследование любого случайного поля всегда может быть сведено к изучению поля с нулевым средним подходящим неслучайным сдвигом значений его реализаций.

2. Стохастические электромагнитные поля. Электромагнитное поле в вакууме, в пространственной области Ω , описывающей полость (она, в частности, может быть и неограниченной и распространяться на все физическое пространство \mathbb{R}^3), где сосредоточено тепловое электромагнитное поле, представляется парой $(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{H}(\mathbf{x}, t))$ векторного и псевдовекторного полей на Ω , значения которых в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega$ и момент времени t подчиняются системе уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + [\nabla, \mathbf{E}] &= 0, \quad (\nabla, \mathbf{H}) = 0, \\ t &\in \mathbb{R}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - [\nabla, \mathbf{H}] &= 0, \quad (\nabla, \mathbf{E}) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

c – скорость света в вакууме. При записи этой системы уравнений использован векторный дифференциальный оператор Гамильтона ∇ . Если электромагнитное поле стохастическое, то определяющие его поля \mathbf{E} и \mathbf{H} представляются *случайными реализациями*. Конкретная математическая модель стохастического электромагнитного поля определяется распределением вероятностей, заданном на семействе всех допустимых реализаций. В дальнейшем, усреднение случайных величин – всевозможных характеристик электромагнитного поля по этому распределению вероятностей будем обозначать угловыми скобками $\langle \cdot \rangle$. Самым важным в математической конструкции стохастического электромагнитного поля является то, что каждая (с вероятностью 1) случайная реализация пары полей $(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{H}(\mathbf{x}, t))$ должна удовлетворять уравнениям (1), то есть являются их решениями. При этом, однако, нужно уточнить в каком смысле эти решения должны пониматься, так как в теории случайных полей их реализации определяются только лишь на счетном всюду плотном множестве точек. Значения полей $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ в конкретной фиксированной точке не являются наблюдаемыми с физической точки зрения, а, наоборот, наблюдаемы только лишь их интегральные характеристики по физически малым областям пространства. Поэтому пространственные производные в уравнениях (1) нужно понимать в смысле какой-то интегральной метрики по пространственным областям. Принимая во внимание, что для каждой случайной реализа-



ции $(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{H}(\mathbf{x}, t))$ в любой момент времени должен оставаться конечным интеграл по любой пространственной области от функции $(\mathbf{E}^2(\mathbf{x}, t) + \mathbf{H}^2(\mathbf{x}, t))$, который пропорционален энергии электромагнитного поля в этой области, то естественно выбрать в качестве функционального пространства, в котором расположены случайные реализации электромагнитного поля, пространство локально квадратично интегрируемых функций, то есть пространственные производные в дифференциальных уравнениях (1) должны пониматься в смысле метрики этого пространства. Таким образом, случайные реализации $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ с вероятностью 1 локально квадратично интегрируемы и имеют локально квадратично-интегрируемые производные по пространственным переменным.

Заметим следующее. В теории вероятностей принято различать на письме случайные величины от неслучайных посредством некоторых дополнительных соглашений. В настоящей работе, мы, с целью упрощения изложения, не будем следовать этому правилу и это не вызовет недоразумений, так как, далее, везде векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} всегда будут представлять случайные математические объекты.

Таким образом, распределение вероятностей P стохастического электромагнитного поля таково, что каждая из реализаций удовлетворяет уравнениям (2) с вероятностью 1, и это свойство является ограничением на возможный выбор распределения вероятностей P . Это ограничение состоит, в частности, в том, что каждая случайная реализация $(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{H}(\mathbf{x}, t))$ в момент времени t определяется однозначно своими значениями в какой-то фиксированный момент времени t_0 , то есть она является условно неслучайной, если заданы ее значения $(\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0), \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0)) \equiv (\mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{H}(\mathbf{x}))$. Это связано с тем, что система уравнений (1) не содержит стохастических источников. Следовательно, для описания случайного электромагнитного поля $(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{H}(\mathbf{x}, t))$ нужно задать распределение вероятностей P_0 для случайной пары электрического и магнитного полей $(\mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{H}(\mathbf{x}))$. В свою очередь, на выбор конкретной модели поля (его распределения вероятностей) должны быть наложены ограничения в виде удовлетворения случайными реализациями с вероятностью 1 тех уравнений в системе (1), которые выражают свойство их бездивергентности. Поэтому задача описания всего класса допустимых моделей стохастических электромагнитных полей сводится к описанию класса распределений вероятностей для статических бездивергентных случайных полей $(\mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{H}(\mathbf{x}))$.

Заметим, наконец, что при построении конкретной модели стохастического электромагнитного поля нужно учитывать что электрическая и магнитная составляющие по разному ведут себя при отражениях физического пространства, так как $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ является векторным полем, $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ – псевдовекторным. Это обстоятельство накладывает ограничения на возможный вид их совместного распределения вероятностей с точки зрения его преобразования при поворотах системы координат.

Далее, будем предполагать, что совместное распределение вероятностей случайных полей $(\mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{H}(\mathbf{x}))$ таково, что остаются конечными их вторые моменты, то есть существуют конечные парные корреляционные функции

$$K_{ij}^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \langle F_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}) F_j^{(\beta)}(\mathbf{y}) \rangle, \quad \alpha, \beta = \mathbf{E}, \mathbf{H}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

(далее, наряду с векторными обозначениями, будем применять индексные обозначения для их компонент), где $\mathbf{F}^{(\mathbf{E})} \equiv \mathbf{E}$, $\mathbf{F}^{(\mathbf{H})} \equiv \mathbf{H}$. Такое ограничение естественно, с фи-



зической точки зрения, так как только такие стохастические электромагнитные поля можно рассматривать могут представлять интерес, ввиду того, что должно быть конечно среднее значение $\left(K_{ii}^{(E,E)}(\mathbf{x}; \mathbf{x}) + K_{ii}^{(H,H)}(\mathbf{x}; \mathbf{x})\right)/8\pi$ в любой фиксированный момент времени t_0 , которое определяет среднюю величину плотности энергии стохастического электромагнитного поля в этот момент времени (здесь и далее подразумевается, что по повторяющимся нижним индексам производится суммирование по их значениям 1,2,3).

Набор корреляционных функций (3) обладает очевидным свойством симметрии

$$K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = K_{ji}^{(\beta,\alpha)}(\mathbf{y}; \mathbf{x}). \quad (3)$$

Если оказываются конечными все моменты пары полей $(\mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{H}(\mathbf{x}))$, что имеет место в таком частном, но важном случае гауссовского случайного поля, то полный набор этих моментов $\left\langle \prod_{j=1}^n F_{ij}^{(\alpha_j)}(\mathbf{x}_j) \right\rangle$, $n \in \mathbb{N}$ полностью определяет распределение вероятностей стохастического электромагнитного поля.

Принимая во внимание, что условие дифференцируемости с вероятностью 1 случайных реализаций $(\mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{H}(\mathbf{x}))$ также можно сформулировать в терминах корреляционных функций $K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ и, в связи с конечностью парных корреляционных функций $K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$, задачу описания всех возможных моделей стохастических электромагнитных полей мы будем понимать как задачу об описании таких необходимых и достаточных условий для матрицы функций с тензорными значениями $K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$, которые дают возможность трактовать их как соответствующие корреляционные функции $\langle F_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}) F_j^{(\beta)}(\mathbf{y}) \rangle$.

3. Свойство положительной определенности. Решение поставленной задачи основано на явном представлении пары случайных полей $(\mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{H}(\mathbf{x}))$, удовлетворяющих с вероятностью 1 условию бездивергентности. Это представление, наряду с учетом условия положительной определенности матрицы парных корреляционных функций, которому должна удовлетворять матрица парных корреляционных функций пары случайных полей, приводит к общей формуле для этой матрицы, описывающей весь класс допустимых матриц такого типа для стохастического электромагнитного поля. Условие положительности мы обсудим в настоящем разделе.

Очевидно, что корреляционные функции $\langle F_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}) F_j^{(\beta)}(\mathbf{y}) \rangle$ пары, состоящей из электрического и магнитного полей (\mathbf{E}, \mathbf{H}) удовлетворяет неравенству

$$\left\langle \left| \int_{\Omega} F_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}) w_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|^2 \right\rangle = \int_{\Omega^2} K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) w_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}) w_j^{(\beta)}(\mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \geq 0, \quad (4)$$

в которых по повторяющимся индексам, как нижним $i, j = 1, 2, 3$ (см. замечание выше), так и верхним $\alpha, \beta = E, H$, подразумевается суммирование. Здесь вектор-функции $(w_1^{(\alpha)}(\mathbf{x}), w_2^{(\alpha)}(\mathbf{x}), w_3^{(\alpha)}(\mathbf{x}))$, $\alpha = E, H$ являются произвольными финитными и бесконечно дифференцируемыми по пространственным координатам вектора \mathbf{x} . Это неравенство является также достаточным условием для того, чтобы набор, перечисляемый посредством $\alpha, \beta = E, H$ матриц-функции $K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ с $i, j = 1, 2, 3$ представлял собой набор



парных корреляционных функций $\langle F_i^{(\alpha)}(\mathbf{x})F_j^{(\beta)}(\mathbf{y}) \rangle$ для некоторой пары $(E_i(\mathbf{x}), H_j(\mathbf{x}))$ векторных случайных полей, что является следствием из известной теоремы Бохнера-Хинчина в применении к рассматриваемому нами случаю [6].

В силу (3), имеется три независимых корреляционных матриц-функций: $K_{ij}^{(E,E)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \equiv K_{ij}^{(E)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$, $K_{ij}^{(H,H)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \equiv K_{ij}^{(H)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$, $K_{ij}^{(E,H)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$. В терминах этих матриц условие положительности (4) записывается в виде

$$(K^{(E)}\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (K^{(H)}\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2(K^{(E,H)}\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0, \quad (5)$$

где для $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ — обозначения для соответствующих компонент пары вектор-функций $\mathbf{w}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$, $\alpha = E, H$; $K^{(E)}$, $K^{(H)}$, $K^{(E,H)}$ — интегральные операторы с ядрами в виде соответствующих корреляционных функций и скобками обозначены скалярные произведения в $L_2(\Omega)$.

Условие положительности в форме (5) можно переформулировать эквивалентным образом. Для этого воспользуемся тем, что функция \mathbf{u} и \mathbf{v} произвольны. Тогда заменим функцию \mathbf{v} на $\lambda\mathbf{v}$ с произвольным множителем $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда (5) запишется в виде

$$(K^{(E)}\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \lambda^2(K^{(H)}\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2\lambda(K^{(E,H)}\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0,$$

где квадратное неравенство должно иметь место при любом значении λ . Это приводит к следующему набору неравенств, которые будут, тем самым, эквиваленты неравенству (5),

$$(K^{(E)}\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0, \quad (K^{(H)}\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0, \quad (K^{(E)}\mathbf{u}, \mathbf{u})(K^{(H)}\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq (K^{(E,H)}\mathbf{u}, \mathbf{v})^2. \quad (6)$$

4. Описание класса всех допустимых наборов $(K_{ij}^{(E)}, K_{ij}^{(H)}, K_{ij}^{(E,H)})$. Наша задача дать общую формулу, описывающую все многообразие троек корреляционных функций $(K_{ij}^{(E)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), K_{ij}^{(H)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), K_{ij}^{(E,H)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, которые удовлетворяют требованию, чтобы соответствующие им случайные векторные поля $(\mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{H}(\mathbf{x}))$ удовлетворяли с вероятностью 1 уравнениям $(\nabla, \mathbf{E}) = 0$, $(\nabla, \mathbf{H}) = 0$.

Так как оба уравнения математически одинаковы, то будем рассматривать только второе из них. В классической электродинамике используется общее решение этого уравнения, которое дается формулой $[\nabla, \mathbf{A}] = \mathbf{H}$, где векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$ представляет собой т.н. *векторный потенциал*. Тот факт, что такое представление является достаточным для поля \mathbf{H} , чтобы оно было бездивергентным, очевиден. Сложнее доказать, что оно является также и необходимым, что тесно связано с так называемой теоремой Гельмгольца об однозначном, с точностью до постоянной, разложении любого поля на сумму потенциального и соленоидального слагаемых. Эта теорема обычно доказывается, при дополнительном ограничении на поле \mathbf{H} в случае некомпактности области Ω его определения, которое выражается в виде стремления поля к нулю на бесконечности. Здесь мы строго докажем необходимость представления $[\nabla, \mathbf{A}] = \mathbf{H}$ для решений уравнения $(\nabla, \mathbf{H}) = 0$ для областей $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ довольно произвольного вида, равно как и соответствующее уточнение теоремы Гельмгольца без использования этого



дополнительного условия. Ранее, в работе [4], нами было дано доказательство теоремы Гельмгольца в случае, когда электромагнитное поле является почти периодическим в среднем квадратичном.

Теорема 1. Пусть Ω – связная область в \mathbb{R}^3 . Тогда уравнение $\mathbf{H} = [\nabla, \mathbf{A}]$ относительно векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ – гладкое (локально в среднем квадратичном) поле на Ω , удовлетворяющее условию $(\nabla, \mathbf{H}) = 0$, разрешимо внутри Ω , где $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ – дважды дифференцируемое (локально в среднем квадратичном) поле на Ω . При этом существует единственное решение $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, которое удовлетворяет дополнительному условию $(\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{x})) = 0$.

□ Выберем пару чисел $L, \varepsilon > 0$ так, что $\varepsilon < L/2$. Определим для каждого $\mathbf{j} = \langle j_1, j_2, j_3 \rangle \in \mathbb{Z}^3$ кубическую область $\Omega_{\mathbf{j}} = \bigotimes_{l=1}^3 [j_l L - \varepsilon, (j_l + 1)L + \varepsilon]$. Пара областей $\Omega_{\mathbf{j}}$ и $\Omega_{\mathbf{k}}$ с $\mathbf{j} \neq \mathbf{k} = \{k_1, k_2, k_3\}$ имеет непустое пересечение только в том случае, если $j_l \in \{k_l - 1, k_l, k_l + 1\}$, $l = 1, 2, 3$ при выполнении условия $\mathbf{j} \neq \mathbf{k}$. Тогда семейство областей $\{\Omega_{\mathbf{j}}; \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^3\}$ образует атлас, так как $\bigcup_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^3} \Omega_{\mathbf{j}} = \mathbb{R}^3$, которые являются его картами.

Пусть Ω – связная компактная область в \mathbb{R}^3 . Доопределим поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ для всех точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ равенством $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0$. Очевидно, что $(\nabla, \mathbf{H}) = 0$ вне области Ω . Тогда такое расширение векторного поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ является гладким в среднем квадратичном локально и в том же смысле удовлетворяет условию $(\nabla, \mathbf{H}) = 0$. Рассмотрим уравнение $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = [\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{x})]$ на всей внутренней части каждого куба $\Omega_{\mathbf{j}}$, $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^3$.

Зафиксируем целочисленный вектор \mathbf{j} . Сужение поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ на куб $\Omega_{\mathbf{j}}$ будем обозначать $\mathbf{H}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$. При этом поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ является дифференцируемым продолжением поля $\mathbf{H}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$. Поле $\mathbf{H}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$ представим в виде ряда Фурье

$$\mathbf{H}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \sum_{\{\boldsymbol{\kappa}\}} \bar{\mathbf{H}}_{\mathbf{j}}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})} \quad (7)$$

по счетному множеству векторов $\{\boldsymbol{\kappa}\}$, определяемому величиной ребра куба $\Omega_{\mathbf{j}}$, $\boldsymbol{\kappa} = (n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3)/(L + 2\varepsilon)$, $\langle n_1, n_2, n_3 \rangle \in \mathbb{Z}^3$. Ряд (7) сходится в среднем квадратичном, так как поле $\mathbf{H}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$ локально квадратично интегрируемо и ввиду компактности $\Omega_{\mathbf{j}}$, причем в окрестности точек гладкости поля $\mathbf{H}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$ он сходится равномерно.

Решение $\mathbf{A}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$ уравнения

$$\mathbf{H}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = [\nabla, \mathbf{A}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})] \quad (8)$$

будем искать в виде суммы двух слагаемых $\mathbf{A}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_{\mathbf{j}}^{(0)}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_{\mathbf{j}}^{(1)}(\mathbf{x})$, где первое слагаемое равно $\mathbf{A}_{\mathbf{j}}^{(0)}(\mathbf{x}) = [\bar{\mathbf{H}}_{\mathbf{j}}(0), \mathbf{x}]/2$,

$$\bar{\mathbf{H}}_{\mathbf{j}}(0) = \frac{1}{|\Omega_{\mathbf{j}}|} \int_{\Omega_{\mathbf{j}}} \mathbf{H}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

а второе дается рядом Фурье

$$\mathbf{A}_{\mathbf{j}}^{(1)}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \neq 0} \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{j}}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})} \quad (9)$$



с суммированием по тому же множеству $\{\kappa\}$ векторов. Подставляя разложения Фурье для $\mathbf{H}_j(x)$ и $\mathbf{A}_j^{(1)}(\mathbf{x})$ в уравнение $\mathbf{H}_j(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{H}}_j(0) = [\nabla, \mathbf{A}_j^{(1)}(\mathbf{x})]$, находим уравнение для коэффициентов $\bar{\mathbf{A}}_j(\kappa)$, $\bar{\mathbf{H}}_j(\kappa) = i[\kappa, \bar{\mathbf{A}}_j(\kappa)]$, которое разрешимо при $\kappa \neq 0$,

$$\bar{\mathbf{A}}_j(\kappa) = \frac{i}{\kappa^2}[\kappa, \bar{\mathbf{H}}_j(\kappa)]. \quad (10)$$

Из явного вида коэффициентов $\bar{\mathbf{A}}_j(\kappa)$ следует, что ряд (9) сходится в среднем квадратичном (при $|\kappa| > 1$ ряд $\sum |\bar{\mathbf{A}}_j(\kappa)|^2$ мажорируется рядом $\sum |\bar{\mathbf{H}}_j(\kappa)|^2$).

Построенное решение единственно, если потребовать $(\nabla, \mathbf{A}_j(\mathbf{x})) = 0$, так как подстановка разложения (9) в это дифференциальное уравнение приводит к условию для коэффициентов $(\kappa, \bar{\mathbf{A}}_j(\kappa)) = 0$. Тогда выражение (10) является единственным решением уравнения $\bar{\mathbf{H}}_j(\kappa) = i[\kappa, \bar{\mathbf{A}}_j(\kappa)]$ при $\kappa \neq 0$. Автоматически, из этого представления коэффициентов $\bar{\mathbf{A}}_j(\kappa)$ следует, что поле $\mathbf{A}_j^{(1)}(\mathbf{x})$ является гладким в среднем квадратичном, так как сходится ряд

$$\sum_{\{\kappa\}} \kappa^2 |\bar{\mathbf{A}}_j(\kappa)|^2 < \infty,$$

в чем легко убедиться непосредственной подстановкой в него выражений для $\bar{\mathbf{A}}_j(\kappa)$, $j \in \mathbb{Z}^3$.

Если поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ – гладкое в точке \mathbf{x} , то ряд (7) сходится к нему равномерно в малой окрестности этой точки, что имеет место для любого ряда Фурье. Поэтому решение $\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x})$ и, следовательно, поле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ также являются гладкими в этой точке \mathbf{x} .

Пусть точка \mathbf{x} принадлежит внутренней части пересечения каких-либо двух кубов Ω_j и Ω_k и, следовательно в этой точке определены, соответственно, поля $\mathbf{A}_j(\mathbf{x})$ и $\mathbf{A}_k(\mathbf{x})$. Тогда вычитая, уравнения (8) при значениях j и k , находим $[\nabla, (\mathbf{A}_j - \mathbf{A}_k)](\mathbf{x}) = 0$. Общим решением этого уравнения является $\mathbf{A}_j(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_k(\mathbf{x}) = \nabla\Phi(\mathbf{x})$. Доопределим эту функцию на каждом из кубов Ω_j и Ω_k нулем в точках, которые находятся внутри симметрической разности $(\Omega_j \setminus \Omega_k) \cup (\Omega_k \setminus \Omega_j)$. Тогда такая расширенная функция $\Phi(\mathbf{x})$ представляется на Ω_j рядом Фурье

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{\{\kappa\}} \bar{\Phi}(\kappa) e^{i(\kappa, \mathbf{x})}.$$

Следовательно,

$$\nabla\Phi(\mathbf{x}) = i \sum_{\{\kappa\}} \kappa \bar{\Phi}(\kappa) e^{i(\kappa, \mathbf{x})}.$$

Так как каждое из слагаемых $\mathbf{A}_j(\mathbf{x})$ и $\mathbf{A}_k(\mathbf{x})$ дифференцируемо в среднем квадратичном, то таким же свойством обладает $\nabla\Phi(\mathbf{x})$. Тогда, в частности, ряд

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{\{\kappa\}} \kappa^2 \bar{\Phi}(\kappa) e^{i(\kappa, \mathbf{x})} \quad (11)$$

сходится в среднем квадратичном. Теперь, так как оба векторных поля $\mathbf{A}_j(\mathbf{x})$ и $\mathbf{A}_k(\mathbf{x})$ бездивергентные, то вычисляя дивергенцию от обеих разности этих полей так, что диф-



ференцирование возможно производить почленно, ввиду квадратичной сходимости ряда (11), получим

$$\sum_{\{\kappa\}} \kappa^2 \bar{\Phi}(\kappa) e^{i(\kappa, \mathbf{x})} = 0.$$

Таким образом, $\bar{\Phi}(\kappa) = 0$, при всех $\kappa \neq 0$. Следовательно, $\mathbf{A}_j(\mathbf{x})$ совпадает с $\mathbf{A}_k(\mathbf{x})$ в любой внутренней точке \mathbf{x} пересечения $\Omega_j \cap \Omega_k$.

Так как доказанное совпадение решений $\mathbf{A}_j(\mathbf{x})$ и $\mathbf{A}_k(\mathbf{x})$ имеет место для внутренних точек пересечения любого конечного набора кубов Ω_l , то мы тем самым построили единое дифференцируемое в среднем квадратичном поле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ для почти всех точек из Ω , которое на каждом из кубов Ω_j совпадает с $\mathbf{A}_j(\mathbf{x})$. Это поле, по построению, единственное, которое удовлетворяет условию $(\nabla, \mathbf{A}) = 0$.

Положим, теперь, что поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ – гладкое в Ω . Тогда оно является, в частности, гладким в среднем квадратичном, и поэтому, по доказанному, имеется единственное поле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ – гладкое в среднем квадратичном, которое удовлетворит уравнениям $\mathbf{H} = [\nabla, \mathbf{A}]$ и $(\nabla, \mathbf{A}) = 0$. Так как в левой части стоит гладкое поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, то поле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ может быть продолжено до гладкого во всех точках Ω поля. ■

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что известная теорема Гельмгольца о разложении любого векторного поля на два составляющих, одно из которых является потенциальным, в второе – соленоидальным, допускает следующее обобщение.

Следствие. Пусть поле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, заданное в произвольной связной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, является гладким в среднем квадратичном. Тогда оно допускает такое представление $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}(\mathbf{x})$ в любой точке $\mathbf{x} \in \Omega$, что имеют место равенства $(\nabla, \mathbf{B}) = 0$, $[\nabla, \mathbf{C}(\mathbf{x})] = 0$ (разложение Гельмгольца). Любые два таких представления $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_2(\mathbf{x})$ отличаются друг от друга на градиент $\nabla\Phi(\mathbf{x})$, где $\Phi(\mathbf{x})$ – гармоническая в Ω функция.

□ Пользуясь дифференцируемостью поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ сформулируем уравнение $[\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{x})] = [\nabla, \mathbf{B}(\mathbf{x})]$ относительно поля $\mathbf{B}(\mathbf{x})$. Это уравнение имеет единственное решение, которое удовлетворяет условию $(\nabla, \mathbf{B}) = 0$. Определим поле $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x})$. Очевидно, что, по построению, ротор этого поля равен нулю. Таким образом, по крайней мере, одно разложение поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ требуемого вида существует. Рассмотрим два произвольных разложения Гельмгольца. Для их потенциальных составляющих \mathbf{C}_1 и \mathbf{C}_2 имеет место равенство

$$(\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{x})) = (\nabla, \mathbf{C}_1(\mathbf{x})) = (\nabla, \mathbf{C}_2(\mathbf{x})).$$

С другой стороны, ввиду выполнимости для этих составляющих равенств $[\nabla, \mathbf{C}_1(\mathbf{x})] = 0$ и $[\nabla, \mathbf{C}_2(\mathbf{x})] = 0$, на основании критерия потенциальности поля, существуют функции $\Psi_1(\mathbf{x})$ и $\Psi_2(\mathbf{x})$ такие, что $\mathbf{C}_1(\mathbf{x}) = \nabla\Psi_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{C}_2(\mathbf{x}) = \nabla\Psi_2(\mathbf{x})$. Подставляя в приведенное выше равенство, получим, что $\Delta\Psi_1 = \Delta\Psi_2$.

Так как при этом $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_2(\mathbf{x}) = \nabla\Phi(\mathbf{x})$ вместе с $\mathbf{C}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{C}_1(\mathbf{x}) = \nabla\Phi(\mathbf{x})$, где введено скалярное поле $\Psi_2 - \Psi_1 = \Phi$, для которого выполняется $\Delta\Phi = 0$. ■

Таким образом, из доказанной теоремы следует, что для задания стохастического поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ необходимо и достаточно задать стохастическое поле векторного потенциала



$\mathbf{A}(\mathbf{x})$. При этом в силу линейности связи между $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, для парной корреляционной функции случайного поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ полностью определяется парной корреляционной функцией поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. В нашем случае, эта связь между парными корреляционными функциями имеет вид,

$$\begin{aligned} K_{ij}^{(H)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \langle [\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{x})]_i [\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{y})]_j \rangle = \varepsilon_{ikl} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_m} \langle A_l(\mathbf{x}) A_n(\mathbf{y}) \rangle = \\ &= \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_m} K_{ln}^{(A)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (12)$$

где $K^{(A)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ – парная корреляционная функция случайного поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Для обеспечения положительной определенности парной корреляционной функции $K_{ij}^{(H)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, ввиду произвольности функций $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, необходимо и достаточно, чтобы была положительно определена парная корреляционная функция $K_{ij}^{(A)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$, так как

$$\begin{aligned} (K^{(H)} \mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\mathbb{R}^3} v_i(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{y}) \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_m} K_{ln}^{(A)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} v'_i(\mathbf{x}) v'_n(\mathbf{y}) K_{ln}^{(A)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (K^{(A)} \mathbf{v}', \mathbf{v}'), \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}) = [\nabla, \mathbf{v}(\mathbf{x})].$$

Тогда достаточность положительной определенности функции $K_{ln}^{(A)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для положительной определенности функции $K_{ij}^{(H)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ очевидна. Необходимость же положительной определенности функции $K_{ln}^{(A)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ следует из ее определения как парной корреляционной функции случайного поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Обратимся, теперь, к удовлетворению условия, случайное поле $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ должно удовлетворять условию $(\nabla, \mathbf{E}) = 0$. Так как в предыдущих рассуждениях нигде не было использовано условие, что поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ является псевдовекторным. Существенно было лишь, что оно представляет собой общее решение уравнения $(\nabla, \mathbf{H}) = 0$, то мы можем воспользоваться уже полученными результатами для поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ и применить их к описанию случайного поля $\mathbf{E}(\mathbf{x})$.

Вводя случайное поле $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, как общее решение уравнения $(\nabla, \mathbf{E}) = 0$ запишем представление $\mathbf{E} = [\nabla, \mathbf{B}]$. Тогда общий вид корреляционной функции $K_{ij}^{(E)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ дается формулой, аналогичной (12),

$$K_{ij}^{(E)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_m} K_{ln}^{(B)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (13)$$

При этом введенное поле $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ является псевдовекторным и мы отходим от общепринятой схемы, когда электрическое поле \mathbf{E} посредством соотношения

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$



в котором частная производная по времени является независимым от поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ случайным векторным полем. Для положительной определенности корреляционной функции $K_{ij}^{(E)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$, как и выше необходимо и достаточно, чтобы была положительно определенной корреляционная функция $K_{ij}^{(B)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$. При этом имеет место $(K^{(E)}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (K^{(B)}\mathbf{u}', \mathbf{u}')$, где достаточно, чтобы \mathbf{u}' была произвольной финитной функцией.

Наконец, проанализируем возможность удовлетворить последнему неравенству из набора неравенств (6). Прежде всего, нужно найти выражение для корреляционной функции $K_{ij}^{(E,H)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$. Подставляя в определение этой функции (см. (2) при $\alpha = E, \beta = H$) выражения для стохастических полей $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = [\nabla, \mathbf{B}(\mathbf{x})]$ и $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = [\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{x})]$, получим

$$K_{ij}^{(E,H)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_m} \langle B_l(\mathbf{x}) A_n(\mathbf{y}) \rangle = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_m} K_{ln}^{(B,A)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}).$$

Теперь, подставляя в левую часть последнего равенства в (6) выражения $(K^{(E)}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (K^{(B)}\mathbf{u}', \mathbf{u}')$ и $(K^{(H)}\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (K^{(A)}\mathbf{v}', \mathbf{v}')$, а в правую – выражение для $(K^{(E,H)}\mathbf{u}, \mathbf{v})$, полученное в результате преобразований

$$\begin{aligned} (K^{(E,H)}\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{y}) \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_m} K_{ln}^{(B,A)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u'_l(\mathbf{x}) v'_n(\mathbf{y}) K_{ln}^{(B,A)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (K^{(B,A)}\mathbf{u}', \mathbf{v}'), \end{aligned}$$

в результате, находим эквивалентное неравенство

$$(K^{(B)}\mathbf{u}', \mathbf{u}') (K^{(A)}\mathbf{v}', \mathbf{v}') \geq (K^{(B,A)}\mathbf{u}', \mathbf{v}')^2, \quad (14)$$

которое достаточно, чтобы оно выполнялось при всех непрерывных финитных функциях \mathbf{u}' и \mathbf{v}' .

Полученная совокупность неравенств (14) и $(K^{(B)}\mathbf{u}', \mathbf{u}') \geq 0, (K^{(A)}\mathbf{v}', \mathbf{v}') \geq 0$ означает, что матриц-функция вида

$$K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}), \quad \alpha, \beta = B, A, \quad i, j = 1, 2, 3$$

является положительно-определенной относительно пары пространственных точек \mathbf{x}, \mathbf{y} . Это влечет за собой возможность определить пару случайных полей $\langle \mathbf{B}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle$, для которых эта матриц-функция является матрицей парных корреляционных функций

$$K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \langle B_i(\mathbf{x}) A_j(\mathbf{y}) \rangle, \quad \alpha, \beta = B, A, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2. В общем случае, совокупность парных корреляционных функций $K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}), \alpha, \beta = E, H$ стохастического электромагнитного поля $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H} \rangle$ допускает представление в виде

$$K_{ij}^{(E,E)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_m} K_{ln}^{(B,B)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}), \quad K_{ij}^{(H,H)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_m} K_{ln}^{(A,A)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}),$$



$$K_{ij}^{(E,H)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_m} K_{ln}^{(B,A)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}),$$

где совокупность

$$K_{ij}^{(B,B)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}), \quad K_{ij}^{(A,A)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}), \quad K_{ij}^{(B,A)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$$

является набором парных корреляционных функций упорядоченной пары случайных полей $\langle \mathbf{B}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle$.

Эта теорема дает ответ на поставленный во введении вопрос об общем виде корреляционной функции стохастического электромагнитного поля.

Литература

1. Борн М. Атомная физика / М.: Мир, 1965 - 492с.
2. Планк М. О законе распределения энергии в нормальном спектре // Избранные труды / М.: Наука, 1975. – С.259-267.
3. Федорюк М.В. Метод перевала / М.: Наука, 1977. – 368 с.
4. Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П. Гауссовские почти периодические в среднем квадратичном соленоидальные векторные поля // Belgorod State University Scientific. Bulletin Mathematics & Physics. – 2014. – 5(176);34. – С.134-141.
5. Рытов С.М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения.- М.: Изд. АН СССР, 1953.
6. Рытов С.М., Татарский В.И., Кравцов Ю.А. Введение в статистическую радиофизику, ч.2 Случайные поля/ С.М. Рытов.- М.: Наука, 1978.- 464с.
7. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики / М.: Мир, 1970. - 428 с.
8. Фат Л.Т., Вирченко Ю.П. Движение частицы в случайном стохастически однородном и изотропном магнитном поле с частотным спектром белого шума// Материалы международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения"26-31 мая 2013, Белгород/ Белгород: Политерра, 2013.- С.192-193.
9. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей.– М.: Эдиториал, УРСС, 2001.
10. Фат Лам Тан, Вирченко Ю.П. Стохастически однородные и изотропные магнитные поля// Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics.- 2013.- 19(162); 32.- С.176-183.
11. Фат Лам Тан, Вирченко Ю.П. О теореме Гельмгольца для почти-периодических в среднем квадратичном векторных полей// Belgorod State University Scientific. Bulletin Mathematics & Physics.- 2013.- 26(169); 33.- С.99-104.
12. Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П. Стохастически однородные и изотропные соленоидальные гауссовские поля// Тезисы зимней математической школы С.Г.Крейна/ Воронеж: ВГУ, 2014.- С.204-208.
13. Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П. Гауссовские почти периодические в среднем квадратичном соленоидальные векторные поля// Belgorod State University Scientific. Bulletin Mathematics & Physics.- 2014.- 5(176); 34.- С.134-141.

PAIR CORRELATION FUNCTIONS OF STOCHASTIC ELECTROMAGNETIC FIELD

Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. Stochastic electromagnetic field that describes heat fluctuation in vacuum is studied. The general form of pair matrix correlation functions of the field is found.

Key words: stochastic electromagnetic field, gaussian random field, Maxwell's equations, stochastic model, correlation function.



MSC 80A30

АНАЛИЗ КРИТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БИНАРНОЙ РЕАКЦИИ С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ

Фам Минь Туан, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучается трехпараметрическая стохастическая модель бинарной циклической химической реакции на основе уравнений химической кинетики со стохастическим возмущением. В общем случае, при всех допустимых значениях параметров, исследуется критическая поверхность, которая разделяет в пространстве параметров системы качественно различные стационарные динамические режимы: с унимодальной и бимодальной плотностями распределения концентраций химических реагентов.

Ключевые слова: критическая поверхность, уравнения химической кинетики, стохастическая модель, уравнение Фоккера-Планка, плотность распределения, фазовый переход, бифуркация.

1. Введение. В работе [1] нами анализировалась стохастическая модель химической кинетики, введенная ранее в работах [2, 3]. Эта модель описывает протекание автокаталитических химических реакций определенного типа между двумя реагентами с учетом тепловых флуктуаций одного из параметров. В рамках этой модели эволюция во времени относительной доли \tilde{x}_t концентрации одного реагента описывается посредством стохастического дифференциального уравнения

$$d\tilde{x}_t = [\alpha - \tilde{x}_t + \lambda\tilde{x}_t(1 - \tilde{x}_t)] dt + \sigma\tilde{x}_t(1 - \tilde{x}_t)d\tilde{w}_t, \quad (1)$$

со свободными параметрами модели $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $\alpha \in [0, 1]$ и с мультипликативным белым шумом $d\tilde{w}_t/dt$. Стохастический дифференциал $d\tilde{w}_t$ в этом уравнении понимается по Стратоновичу. Таким образом, эволюция системы представляет собой неоднородный диффузионный марковский случайный процесс в пространстве относительных концентраций. Известно [1-3], что этот процесс обладает финальной плотностью распределения $p(x)$ для случайной величины \tilde{x}_t , которая, в зависимости от указанных выше допустимых значений трех параметров $\langle \lambda, \sigma^2, \alpha \rangle$ модели является либо унимодальной, либо бимодальной. Это положение соответствует двум качественно различным стационарным динамическим режимам поведения системы. Переход между этими двумя режимами при изменении (достаточно медленным) параметров системы представляет собой, с физической точки зрения, фазовый переход между двумя «фазами»: унимодальной и бимодальной. Значения наборов параметров $\langle \lambda, \sigma^2, \alpha \rangle$, соответствующие каждой из фаз, образуют области в пространстве параметров системы, которые разделены между



собой некоторой поверхностью, называемой «критической». Таким образом, для описания фазового перехода, необходима полная информация о геометрии этой поверхности. Полному исследованию этой геометрии посвящена настоящая работа. Ранее нами в работах [4, 5] были исследованы сечения критической поверхности при исключительных значениях параметра $\alpha = 0, 1/2, 1$.

2. Уравнение критической поверхности. Финальная плотность распределения случайных значений x_t , сосредоточенная на отрезке $[0, 1]$, определяется явной формулой (см. [1])

$$p(x) = \frac{A}{x(1-x)} \left(\frac{x}{1-x} \right)^\beta \exp \left\{ \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{\alpha-1}{1-x} - \frac{\alpha}{x} \right) \right\}, \quad (2)$$

$$A = \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma^2} + \beta \ln \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right\} \left[K_{-\beta} \left(-\frac{4}{\sigma^2} \sqrt{\alpha(1-\alpha)} \right) \right]^{-1},$$

где $K_{-\beta}(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода с показателем $(-\beta)$ и $\beta = 2(2\alpha + \lambda - 1)/\sigma^2$. Переход от унимодальной плотности к бимодальной происходит при пересечении *критической поверхности* Σ в пространстве параметров $\langle \lambda, \sigma^2, \alpha \rangle$. Уравнение этой поверхности получается из условия одновременного обращения в нуль производных $p'(x) = p''(x) = 0$, что приводит к необходимости существования двойного корня полинома

$$Q(x) \equiv \alpha - x + \lambda x(1-x) - \frac{\sigma^2}{2} x(1-x)(1-2x), \quad x \in [0, 1]. \quad (3)$$

то есть должно иметь место одновременное обращение в нуль $Q(x)$ и производной $Q'(x) = 0$. Для эквивалентности же условий $p'(x) = p''(x) = 0$ и $Q(x) = Q'(x) = 0$ нужно дополнительно потребовать, чтобы двойной корень x_* полинома $Q(x)$ находился на интервале $[0, 1]$. В работе [4] показано, что точками бифуркации плотности распределения не могут быть концы интервала ее определения.

Таким образом, нам нужно изучить ситуацию с существованием двойного корня у полинома $Q(x)$. Для возможности существования такого двойного корня нужно потребовать, чтобы остаток от его деления на $Q'(x)$ должен обратиться в нуль. Применяя алгоритм Евклида для полиномов $Q(x)$ и $Q'(x)$ находится явный вид этого уравнения для параметров модели (см. [1]), которому удовлетворяют точки критической поверхности в пространстве параметров модели

$$P(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) \equiv \lambda^4 + \lambda^2 \left(1 - 5\sigma^2 - \sigma^4/2 \right) - \lambda(9\sigma^4 + 18\sigma^2 - 4\lambda^2)\varepsilon - 4\sigma^2 \left(1 - \sigma^2/4 \right)^3 - 27\sigma^4 \varepsilon^2 = 0, \quad (4)$$

где $\varepsilon = \alpha - 1/2$. Однако, не все многообразие решений этого уравнения относится к критической поверхности. Точки критической поверхности выделены дополнительным условием, которое состоит в том, что ее точки определяют те значения параметров, при которых решения x_* полинома (3) находятся внутри интервала $[0, 1]$. Это условие формулируется в виде следующего неравенства (см. [5])

$$G_+(\lambda, \sigma^2, \varepsilon)G_-(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) \geq 0,$$



где функции $G_{\pm}(\lambda, \sigma^2, \varepsilon)$ даются формулами

$$G_{\pm}(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) \equiv (2\sigma^2 + 1 \pm 2\lambda)^2 - (\sigma^2 + 2(4 \mp 9\varepsilon))^2 + 4(4 \mp 9\varepsilon)^2 - 1. \quad (5)$$

Следовательно, допустимая область для расположения точек критической поверхности представляет собой пересечение областей, границами которых являются соответственно гиперболы $G_{\pm}(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) = 0$. Случай, когда одновременно $G_{\pm}(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) < 0$ является нефизическим, так как при этом $\sigma^2 < 0$.

На это обстоятельство не было обращено должного внимания в предшествующих работах [2, 3]. По этой причине, критическая поверхность Σ является, вообще говоря, только одной связной частью поверхности, определяемой уравнением (4).

3. Аналитическое описание фазовой диаграммы. Будем исследовать критическую поверхность Σ посредством ее сечений. Такой подход оправдан тем, что практическое изучение фазовых переходов в физике осуществляется на основе *фазовых диаграмм*, которые как раз и представляют собой сечения критической поверхности в пространстве параметров системы плоскостями, кривые пересечения которых представляют зависимости между двумя физическими параметрами, изменяющимися в секущей плоскости при фиксированных значениях всех остальных. В нашем случае мы будем фиксировать значение параметра $\varepsilon \in [-1/2, 1/2]$. Известно (см. [1]), что поверхность Σ расположена вне эллиптического цилиндра с образующей вдоль оси ε , который определяется уравнением

$$\Delta \equiv 4\lambda^2 + 3\sigma^4 - 12\sigma^2 = 0, \quad (6)$$

имея с этой цилиндрической поверхности общие точки. Эти точки являются точками соприкосновения двух поверхностей.

Координаты $\langle \lambda_*(\varepsilon), \sigma_*^2(\varepsilon) \rangle$ точек соприкосновения (здесь явно указано, что λ_* и σ_*^2 зависят от зафиксированного значения ε) находятся из совместного решения уравнений $P(\lambda_*, \sigma_*^2, \varepsilon) = 0$ и $4\lambda_*^2 + 3\sigma_*^4 - 12\sigma_*^2 = 0$. В результате, получаем (см. [1])

$$\lambda_* = -\frac{9\varepsilon\sigma_*^2}{1 + 2\sigma_*^2}, \quad (7)$$

Возводя в квадрат и выразив λ_*^2 и подставляя это выражение в уравнение цилиндра, получим уравнение, определяющее зависимость σ_*^2 от ε ,

$$(4 - \sigma_*^2)(1 + 2\sigma_*^2)^2 = 108\varepsilon^2\sigma_*^2, \quad \sigma_*^2 \neq 0. \quad (8)$$

Это уравнение имеет одно вещественное решение $\sigma_*^2(\varepsilon) \geq 1$, что устанавливается следующим образом.

Из формы уравнения (8) легко установить, что оно эквивалентно уравнению

$$4(\sigma_*^2 - 1)^3 = 27\sigma_*^2(1 - 4\varepsilon^2). \quad (9)$$

В правой части этого уравнения стоит линейная функция, а в левой – выпуклая при $\sigma_*^2 > 1$. (При $\sigma_*^2 < 1$ уравнение не имеет решений, так как $|\varepsilon| < 1/2$.) Тогда имеется не более двух вещественных решений. С другой стороны, правая часть – линейная



функция больше левой при $\sigma_*^2 = 1$, то есть находится выше выпуклой кривой. Следовательно, имеется только одно пересечение этой прямой с выпуклой левой частью. Это пересечение, как видно из (8) должно происходить при $\sigma_*^2 < 4$. Заметим также, что равенство $\sigma_*^2 = 1$ возможно только при $|\varepsilon| = 1/2$.

Зафиксируем значение параметра ε . Для анализа характера поведения поверхности Σ вблизи точек соприкосновения, вычислим, сначала, частные производные первого порядка

$$-\frac{\partial P}{\partial \sigma^2} = (5 + \sigma^2)\lambda^2 + 18(\sigma^2 + 1)\varepsilon\lambda + 54\varepsilon^2\sigma^2 + 4(1 - \sigma^2)\left(1 - \frac{\sigma^2}{4}\right)^2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} = 4\lambda^3 + 12\varepsilon\lambda^2 + \lambda(2 - 10\sigma^2 - \sigma^4) - 9\varepsilon\sigma^2(\sigma^2 + 2).$$

Непосредственной подстановкой значений $\langle \lambda_*(\varepsilon), \sigma_*^2(\varepsilon) \rangle$ из формулы (7) в вычисленные выражения для частных производных находим, что

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_*, \sigma_*^2} = 0, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial \sigma^2}\right)_{\lambda_*, \sigma_*^2} = 0.$$

Вычислим теперь производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2 \partial \lambda} = -2\lambda(5 + \sigma^2) - 18\varepsilon(\sigma^2 + 1),$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} = 12\lambda^2 + 2(1 - 5\sigma^2 - \sigma^4/2) + 24\varepsilon\lambda, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial (\sigma^2)^2} = -\lambda^2 - 18\varepsilon\lambda - 54\varepsilon^2 + 3(2 - \sigma^2)\left(1 - \frac{\sigma^2}{4}\right).$$

После исключения ε , используя уравнение (7), находим

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2 \partial \lambda}\right)_{\lambda_*, \sigma_*^2} = \frac{2\lambda_*}{\sigma_*^2}(\sigma_*^2 - 1)^2, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2}\right)_{\lambda_*, \sigma_*^2} = -6(\sigma_*^2 - 1)^2, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial (\sigma^2)^2}\right)_{\lambda_*, \sigma_*^2} = -\frac{2\lambda_*^2}{3\sigma_*^4}(\sigma_*^2 - 1)^2.$$

В уравнении $P(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) = 0$ произведем замену

$$\lambda = \lambda_* + \rho \cos \varphi, \quad \sigma^2 = \sigma_*^2 + \rho \sin \varphi,$$

Разложим, далее, полином $P(\lambda, \sigma^2, \varepsilon)$ в ряд Тейлора около точки $\langle \lambda_*(\varepsilon), \sigma_*^2(\varepsilon), \varepsilon \rangle$ по степеням $(\lambda - \lambda_*)$ и $(\sigma^2 - \sigma_*^2)$ с указанной подстановкой. В силу того, что полином $P(\lambda, \sigma^2, \varepsilon)$ имеет четвертую степень, то это разложение обрывается на четвертой степени по ρ . Используя явные выражения для частных производных по λ и σ^2 первого и второго порядка в точке $\langle \lambda_*, \sigma_*^2 \rangle$ и выражения для производных третьего порядка в этой же точке

$$\left(\frac{\partial^3 P}{\partial (\sigma^2)^3}\right)_{\lambda_*, \sigma_*^2} = \frac{3}{2}(\sigma_*^2 - 3), \quad \left(\frac{\partial^3 P}{\partial \lambda \partial (\sigma^2)^2}\right)_{\lambda_*, \sigma_*^2} = \frac{2\lambda_*}{\sigma_*^2}(1 + \sigma_*^2),$$



$$\left(\frac{\partial^3 P}{\partial \lambda^2 \partial \sigma^2}\right)_{\lambda_*, \sigma_*^2} = -2(5 + \sigma_*^2), \quad \left(\frac{\partial^3 P}{\partial \lambda^3}\right)_{\lambda_*, \sigma_*^2} = \frac{8\lambda_*}{3\sigma_*^2}(7\sigma_*^2 - 1),$$

а также, учитывая, что согласно (10) производные четвертого порядка являются постоянными, т.е. не зависят от точки на эллипсе, находим

$$P(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) = -3\rho^2(\sigma_*^2 - 1)^2 \sin^2 \varphi S_2(z) + \frac{1}{6}\rho^3 \sin^3 \varphi S_3(z) + \frac{1}{16}\rho^4 \sin^4 \varphi S_4(z), \quad (11)$$

где $z = \operatorname{ctg} \varphi$, $z_* = \operatorname{ctg} \varphi_* = \lambda_*/3\sigma_*^2$,

$$S_2(z) = (z - z_*)^2 \geq 0, \quad S_3(z) = 8z_*(7\sigma_*^2 - 1)z^3 - 6(\sigma_*^2 + 5)z^2 + 18z_*(1 + \sigma_*^2)z + \frac{3}{2}(\sigma_*^2 - 3),$$

$$S_4(z) = (4z^2 - 1)^2 \geq 0.$$

Мы здесь ввели переменную z , заметив, что $\operatorname{ctg} \varphi \neq \infty$, $\varphi \neq 0, \pi$. Это связано с тем, что, в противном случае, уравнение $P(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) = 0$ при фиксированном ε должно было иметь решение $\lambda \neq \lambda_*$ при $\sigma^2 = \sigma_*^2$. А это невозможно, так как при фиксированном значении ε и σ_*^2 , обязательно, из (6) и (8) следует выражение (7) для значения λ .

Заметим, что число z_* , которое является функцией от ε , принадлежит интервалу $[-1/2, 1/2]$. Это следует из того, что точка $\langle \lambda_*, \sigma_*^2 \rangle$ лежит на эллипсе (6), и поэтому $z_*^2 = \lambda_*^2/9\sigma_*^4 = (4 - \sigma_*^2)/12\sigma_*^2 \leq 1/4$ при $\sigma_*^2 \geq 1$.

Из (11) находим аналитическое выражение, определяющее фазовую диаграмму («критическую кривую», по которой происходит пересечение критической поверхности с плоскостью с фиксированным значением ε). В уравнении $P(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) = 0$, исключив из рассмотрения двукратный корень $\rho^2 = 0$, который является точкой соприкосновения фазовой диаграммы с эллипсом (6), то есть поделив уравнение на $\rho^2 \sin^2 \varphi$, получаем квадратное уравнение относительно ρ ,

$$\frac{1}{16}\rho^2 \sin^2 \varphi S_4(z) + \frac{1}{6}\rho \sin \varphi S_3(z) - 3(\sigma_*^2 - 1)^2 S_2(z) = 0. \quad (12)$$

Дискриминант этого уравнения $\sin^2 \varphi (S_3^2(z) + 27(\sigma_*^2 - 1)^2 S_4(z) S_2(z))/36$ неотрицателен. Поэтому уравнение всегда имеет два решения, то есть две однозначных функции

$$\rho_{\pm}(\varphi) = \frac{4}{3 \sin \varphi S_4(z)} \left(-S_3(z) \pm \sqrt{S_3^2(z) + 27(\sigma_*^2 - 1)^2 S_4(z) S_2(z)} \right). \quad (13)$$

Это означает, что кривая четвертого порядка, определяемая уравнением $P = 0$, распадается на две кривых, определяемых решениями $\rho_{\pm}(\varphi)$ при тех значениях φ , при которых они принимают неотрицательные значения. Ввиду неотрицательности дискриминанта функция $\rho_+(\varphi)$ неотрицательна при $\sin \varphi \geq 0$. Тогда $\rho_+(\varphi)$ определяет кривую при $\varphi \in [0, \pi]$. Она может обращаться в нуль только при $S_2(z) = 0$, либо при $S_4(z) = 0$. Наоборот, кривая $\rho_-(\varphi)$ может обращаться в нуль только в исключительном случае, когда $S_3(z) = 0$ и либо $S_2(z) = 0$, либо $S_4(z) = 0$. Эти случаи реализуются только при $\varepsilon = \pm 1/2$. Таким образом, при $|\varepsilon| \neq 1/2$ функция $\rho_-(\varphi)$ неотрицательна и она определяет кривую только при $\sin \varphi < 0$, то есть $\varphi \in (-\pi, 0)$.



Выявленные нами две кривых, при фиксированном значении ε , могут пересекаться только при равенстве нулю дискриминанта, то есть только при $|\varepsilon| = 1/2$, так как они расположены в разных полуплоскостях. При $|\varepsilon| = 1/2$ их пресечение возможно только при $\varphi = 0, \pi$. В дальнейшем, этот случай мы не рассматриваем, так как он уже был детально исследован в более ранней публикации [5].

Заметим, далее, что справедлива

Лемма 1. *Связные кривые $\rho_{\pm}(\varphi)$ не пересекают гипербол $G_{\pm} = 0$, ограничивающих разрешенную для расположения точек бифуркации область значений пар $\langle \lambda, \sigma^2 \rangle$, за исключением, может быть, точек, лежащих на эллипсе $\Delta = 0$.*

□ Совместные решения – пары $\langle \lambda(\varepsilon), \sigma^2(\varepsilon) \rangle$ двух уравнений $P = 0$ и $G_{\pm} = 0$ при фиксированном ε приводят к тому, что полином $Q(x)$ может иметь такой двойной корень, который равен 0 при знаке (+) и 1 при знаке (-). Непосредственная подстановка этих значений в $Q(x)$ (см. (3)) приводит к тому, что это возможно только при $\varepsilon = \mp 1/2$. ■

Заметим, что приведенные рассуждения неверны при $\Delta = 0$, либо при $\sigma^2 = 0$, что вытекает непосредственно из метода получения условия $G_+(\lambda, \sigma^2, \varepsilon)G_-(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) \geq 0$ для существования двойного корня $Q(x) = 0$ внутри интервала $[0, 1]$ (см. [4]). Поэтому эти случаи должны быть рассмотрены отдельно. При $\sigma^2 = 0$ имеем $Q(x) = \varepsilon + 1/2 - x + \lambda x(1 - x)$ и $P = \lambda^2(\lambda^2 - 4\varepsilon\lambda + 1)$. Тогда, если $|\varepsilon| \neq 1/2$, то совместное решение уравнений $P = 0$ и $Q(x) = 0$ дает $\lambda = 0$ и $x = \varepsilon + 1/2$. Следовательно, при $|\varepsilon| \neq 1/2$ имеет место $x \neq 0, 1$. Таким образом, и в этом случае пересечение кривой, которая является проекцией критической поверхности с гиперболами $G_{\pm} = 0$ невозможно.

Наконец, если $\sigma^2 \neq 0$, но $\Delta = 0$, что происходит в точках соприкосновения кривых $\rho_{\pm}(\varphi)$ с эллипсом $\Delta = 0$, то такое пересечение возможно только в точках $\langle \lambda_*(\varepsilon), \sigma_*^2(\varepsilon) \rangle$.

Лемма 2. *При $|\varepsilon| \neq 1/2$ кривая $\rho_+(\varphi)$ не пересекает гипербол $G_{\pm} = 0$, которые ограничивают область значений пар $\langle \lambda, \sigma^2 \rangle$, допустимых для точек бифуркации, а кривая $\rho_-(\varphi)$ пересекает обе гиперболы $G_{\pm} = 0$ одновременно в точке $\langle 0, 0 \rangle$, лежащей на эллипсе $\Delta = 0$, но при этом она остается в области запрещенной для нахождения точек бифуркации.*

□ Кривые $\rho_{\pm}(\varphi)$ могут пересекаться эллипсом $\Delta = 0$ только в случае $\rho_{\pm}(\varphi) = 0$, либо в точке луча с $\sigma^2 = 0$. В последнем случае, как было указано выше, обязательно $\lambda = 0$.

Если $\rho_-(\varphi) = 0$, то, как было показано выше, это возможно только при $\varepsilon = \pm 1/2$. Так как мы считаем, что $\varepsilon \neq \pm 1/2$, то этот случай мы исключаем из анализа. Рассмотрим возможность пересечения гипербол ветвью $\rho_+(\varphi) = 0$. С этой целью перейдем в равенствах $G_{\pm} = 0$ к полярным координатам с началом в точке $\langle \lambda_*(\varepsilon), \sigma_*^2(\varepsilon) \rangle$, в которой функция $\rho_+(\varphi)$ обращается в нуль. Тогда

$$G_{\pm}(\lambda_* + \rho \cos \varphi, \sigma_*^2 + \rho \sin \varphi, \varepsilon) =$$

$$= \rho^2 \left[4(1 \pm \sin 2\varphi) - \sin^2 \varphi \right] + 2\rho \left[\pm 2 \cos \varphi \left(2(\sigma_*^2 \pm \lambda_*) + 1 \right) + \sin \varphi (3\sigma_*^2 \pm 4\lambda_* - 6 \pm 18\varepsilon) \right],$$

где учтено, что $G_{\pm}(\lambda_*, \sigma_*^2, \varepsilon) = 0$.



Плоскость $\langle \lambda, \sigma^2 \rangle$ разделена на две части кривой $\rho_+(\varphi) = 0$. Тогда, точкам пересечения кривой $\rho_+(\varphi) = 0$ и одной из кривых $G_{\pm} = 0$ соответствуют такие решения уравнения $G_{\pm} = 0$, которые, в окрестности точки $\rho = 0$, при непрерывном изменении угла φ переходят из одной области плоскости в другую. Поэтому тривиальное решение $\rho = 0$ уравнений $G_{\pm} = 0$, как неопределяющее никакой кривой, нужно исключить. Исследуем решения, которые имеют эти уравнения после деления их на ρ . Эти решения определяют кривые $\rho^{(\pm)}(\varphi)$ при непрерывном изменении φ . Поделим на $\sin \varphi$ уравнения, которые получились после деления на ρ , и обозначим посредством $z_0^{(\pm)}$ предельные значения $\operatorname{ctg} \varphi$, когда φ стремится соответственно к таким значениям $\operatorname{arcsctg} z_0^{(\pm)}$, при которых $\rho^{(\pm)}(\varphi)$ обращаются в нуль. Величины $z_0^{(\pm)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\pm 2z_0^{(\pm)} \left[2(\sigma_*^2 + \lambda_*) + 1 \right] + 3(\sigma_*^2 - 2) \pm 4\lambda_* \pm 18\varepsilon = 0.$$

Исключим, используя формулу (6), величину λ_* ,

$$\pm z_0^{(\pm)} \left[2(2\sigma_*^2 + 1)^2 \mp 36\varepsilon\sigma_*^2 \right] + 3(\sigma_*^2 - 2)(2\sigma_*^2 + 1) \pm 18\varepsilon = 0.$$

После деления на $(2\sigma_*^2 + 1)$ и учета, что $z_* = -3\varepsilon/(1 + 2\sigma_*^2)$, получим окончательно уравнение, определяющее $z_0^{(\pm)}$ в следующем виде:

$$\pm z_0^{(\pm)} \left[2(2\sigma_*^2 + 1) \pm 12\sigma_*^2 z_* \right] + 3(\sigma_*^2 - 2) \mp 6z_* = 0. \quad (14)$$

Заметим, что имеет место $(2\sigma_*^2 + 1) \pm 6\sigma_*^2 z_* > 0$, в силу очевидного неравенства

$$z_*^2 = \frac{4 - \sigma_*^2}{12\sigma_*^2} < \left(\frac{2\sigma_*^2 + 1}{6\sigma_*^2} \right)^2,$$

которое сводится к квадратному неравенству $7\sigma_*^4 - 8\sigma_*^2 + 1 > 0$, выполняющемуся всегда при $\sigma_*^2 > 1$.

Покажем, что решение

$$z_0^{(+)} = -\frac{3(\sigma_*^2 - 2) - 6z_*}{2(2\sigma_*^2 + 1) + 12\sigma_*^2 z_*}$$

уравнения (13) удовлетворяет неравенству $z_0^{(+)} < z_*$, умножив его на выражение, стоящее в знаменателе. В результате, получим

$$12\sigma_*^2 z_*^2 + 4z_*(\sigma_*^2 - 1) + 3(\sigma_*^2 - 2) > 0.$$

Заменив здесь $z_*^2 = (4 - \sigma_*^2)/12\sigma_*^2$, сводим это неравенство к очевидному

$$(1 + 2z_*)(\sigma_*^2 - 1) > 0 \quad \text{при} \quad \sigma_*^2 > 1.$$

Точно также имеет место неравенство $z_0^{(-)} > z_*$, где

$$z_0^{(-)} = \frac{3(\sigma_*^2 - 2) + 6z_*}{2(2\sigma_*^2 + 1) - 12\sigma_*^2 z_*}.$$



Оно эквивалентно очевидному неравенству

$$(1 - 2z_*)(\sigma_*^2 - 1) > 0 \quad \text{при} \quad \sigma_*^2 > 1,$$

так как $z_* \in (-1/2, 1/2)$.

Из доказанных неравенств $z_0^{(+)} < z_* < z_0^{(-)}$ следует, что при достаточно малом изменении z , вдоль кривой $\rho_+(\varphi)$ в окрестности точки с полярными координатами $\langle 0, \varphi_* \rangle$ и вдоль кривых $\rho^{(\pm)}(\varphi)$ в окрестности соответственно точек $\langle 0, \operatorname{arcsctg} z_0^{(\pm)} \rangle$, эти неравенства сохраняются. Следовательно, каждая из кривых $\rho^{(\pm)}(\varphi)$ не пересекает кривую $\rho_+(\varphi)$ в точке ее каспа, где происходит их соприкосновение.

Исследуем теперь возможность пересечения гипербол $G_{\pm} = 0$ с кривой $\rho_-(\varphi)$ в точке $\langle 0, 0 \rangle$, так как обе эти гиперболы проходят через эту точку. Непосредственно из формулы (13) и выражений для $S_2(z)$, $S_3(z)$, $S_4(z)$ проверяется, что кривая $\rho_-(\varphi)$ проходит через нулевую точку, так как значение функции $\rho_-(\varphi)$ равно расстоянию между нулевой точкой и точкой соприкосновения $\langle \lambda_*, \sigma_*^2 \rangle$ кривой $\rho_+(\varphi)$ с эллипсом $\Delta = 0$, в которую помещен центр полярных координат. При этом полярный угол φ_0 нулевой точки определяется как $\operatorname{ctg} \varphi_0 = \lambda_*/\sigma_*^2 = z_0$, то есть имеет место равенство $\rho_-(\varphi_0) = (\lambda_*^2 + \sigma_*^4)^{1/2}$. Таким образом, $\rho_-(\varphi)$ пересекает обе гиперболы $G_{\pm} = 0$ при указанном значении φ_0 . Покажем, что это пересечение таково, что точки кривой $\rho_-(\varphi)$ находятся внутри области, определяемой неравенством $G_+G_- < 0$ при $\varphi \neq \varphi_0$.

В силу утверждения Леммы 1, кривая $\rho_-(\varphi)$ будет обладать указанным свойством во всех точках, если это свойство для нее имеет место в окрестности нулевой точки. Поэтому выполнимость неравенства $G_-G_+ < 0$ достаточно проверить для точек кривой $\rho_-(\varphi)$, находящихся сколь угодно близко к $\langle 0, 0 \rangle$. Для этого воспользуемся тем, что точки кривой $\rho_-(\varphi)$ удовлетворяют уравнению $P(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) = 0$ в окрестности нулевой точки, в то время как это не имеет места для точек кривой $\rho_+(\varphi)$. Определим направление касательной кривой $\rho_-(\varphi)$ в точке φ_0 , исходя из этого уравнения. Так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \sigma^2}\right)_{(0,0)} = -4, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)_{(0,0)} = 0,$$

то отсюда по теореме о неявной функции следует, что $(d\sigma^2/d\lambda)_{(0,0)} = 0$, то есть касательная к кривой $\rho_-(\varphi)$ в нулевой точке определяется уравнением $\sigma^2 = 0$.

Вычислим, теперь касательные к кривым $G_{\pm} = 0$ в нулевой точке, рассматривая эти кривые в окрестности этой точки как функции $\sigma_{\pm}^2(\lambda)$. Исходя из выражений (5) для гипербол $G_{\pm} = 0$, находим

$$\frac{\partial G_{\pm}}{\partial \lambda} = 4(2\sigma^2 + 1 \pm 2\lambda), \quad \left(\frac{\partial G_{\pm}}{\partial \lambda}\right)_{(0,0)} = 4,$$

$$\frac{\partial G_{\pm}}{\partial \sigma^2} = 6\sigma^2 - 12(1 \mp 3\varepsilon) \pm 8\lambda, \quad \left(\frac{\partial G_{\pm}}{\partial \sigma^2}\right)_{(0,0)} = -12(1 \mp 3\varepsilon).$$

Следовательно, по теореме о неявной функции,

$$\left(\frac{d\sigma_{\pm}^2}{d\lambda}\right)_{(0,0)} = [3(1 \mp 3\varepsilon)]^{-1} \neq 0.$$



Тогда для точек касательной $\sigma^2 = 0$ к кривой $\rho_-(\varphi)$ в нулевой точке при подстановке ее координат $\langle \lambda, 0 \rangle$ в выражения для G_{\pm} имеем, $G_{\pm}(\lambda, 0, \varepsilon) \sim \pm 4\lambda + O(\lambda^2)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Следовательно, на точках касательной выполняется неравенство $G_+G_- < 0$ при $\lambda \neq 0$. Следовательно, такое же неравенство имеет место для точек кривой $\rho_-(\varphi)$, достаточно близких к нулевой точке. ■

Теорема. Кривая, которая разделяет области существования бимодальной и унимодальной фаз стохастической динамической системы (1), являющаяся решением уравнения $P(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) = 0$ и подчиняющаяся неравенству $G_+(\lambda, \sigma^2, \varepsilon)G_-(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) > 0$, при $|\varepsilon| < 1/2$, параметрически определяется функцией $\rho_+(\varphi)$ при $0 < \varphi < \pi$.

□ Утверждение теоремы следует непосредственно утверждений лемм 1 и 2 и проведенного выше анализа. ■

4. Исследование фазовой диаграммы.

Лемма 3. Каждая из кривых $\rho_{\pm}(\varphi)$ стремится к бесконечности при $z \rightarrow \pm 1/2$.

□ Из явных формул для коэффициентов $S_2(z)$, $S_3(z)$, $S_4(z)$ следует, что функции $\rho_{\pm}(\varphi)$, определяемые (12), остаются ограниченными при $z \rightarrow \pm\infty$. В самом деле, при $z \rightarrow \pm\infty$, то есть при $\varphi \rightarrow 0, \pi$, выполняются асимптотические формулы $S_4(z) \sim 16z^4$, $S_2(z) \sim z^2$ и $S_3(z) \sim 8z_*(7\sigma_*^2 - 1)z^3$. Так как функции $\rho_{\pm}(\varphi)$ удовлетворяют уравнению (12), то умножая его на $\sin^2 \varphi$ и переходя к пределу $\varphi \rightarrow 0$ ($\varphi \rightarrow \pi$) получим, что предельные значения ρ_{\pm} функций $\rho_{\pm}(\varphi)$ при таком предельном переходе удовлетворяют, соответственно, уравнениям (Предельное значение $\cos \varphi_{\infty}$ не может обратиться в нуль, так как это противоречит условию $z \rightarrow \infty$.)

$$\rho_{\pm}^2 + \frac{4}{3}z_*(7\sigma_*^2 - 1)\rho_{\pm} - 3(\sigma_*^2 - 1)^2 = 0 \quad (\rho_{\pm}^2 - \frac{4}{3}z_*(7\sigma_*^2 - 1)\rho_{\pm} - 3(\sigma_*^2 - 1)^2 = 0),$$

то есть эти предельные значения конечны. ²⁾

Исследуем возможность принимать функциями $\rho_{\pm}(\varphi)$ сколь угодно большие значения. В этом случае, как следует из приведенного рассуждения, величина z должна оставаться ограниченной, то есть должны оставаться ограниченными значения функций $S_2(z)$, $S_3(z)$, $S_4(z)$, которые являются полиномами. Тогда, как следует из формулы (13), функции $\rho_{\pm}(\varphi)$ могут стремиться к ∞ только в том, случае, когда $S_4(z) \rightarrow 0$, то есть $z \rightarrow \pm 1/2$, то есть $\sin \varphi \rightarrow \pm 2\sqrt{5}/5$, и, в этих условиях, числитель в этой формуле стремится к ненулевому значению. Вычисление числа $S_3(\pm 1/2)$ на основе выражения (7) для λ_* и $z_* = \lambda_*/3\sigma_*^2$ приводят к формуле $S_3(\pm 1/2) = -12(1 \pm 2\varepsilon) < 0$. Ввиду отрицательности этой величины $\rho_+(\varphi) > 0$. В результате, имеем следующую асимптотическую формулу

$$\rho_+(\varphi) \sim \frac{\sqrt{5}(1 \pm 2\varepsilon)}{(z \mp 1/2)^2} \quad \text{при } z \rightarrow \pm \frac{1}{2}.$$

Для функции $\rho_-(\varphi)$ аналогичные рассуждения, ввиду $-S_3(\pm 1/2) > 0$, приводят к выполнению такой же асимптотической формуле, то есть $\rho_+(\varphi) \sim \rho_-(\varphi)$ при $z \rightarrow \pm 1/2$. ■

²⁾Эти предельные значения определяют расстояния от центра полярной системы координат до точек, в которых кривые $\rho_{\pm}(\varphi)$ имеют горизонтальные касательные.



Исследуем поведение кривой $\rho_+(\varphi)$ в окрестности точки ее соприкосновения с эллипсом $\Delta = 0$, то есть вблизи точки $\rho = 0$, $z = z_*$ ($\varphi = \varphi_*$) при $\sigma_*^2 \neq 1$ (случай $\sigma_*^2 = 1$ соответствует $|\varepsilon = 1/2|$, что изучено в работе [5]). Покажем, что фазовая диаграмма имеет «касп» в этой точке при $\varepsilon \neq \pm 1/2$. С этой целью, найдем асимптотическое выражение кривой $\rho_+(\varphi)$ в окрестности точки $\langle \lambda_*, \sigma_*^2 \rangle$ при малых значениях $(z - z_*)$.

Заметим, сначала, что в точке $z = z_*$ выполняется неравенство

$$S_3(z_*) = \frac{8}{9\sigma_*^4}(\sigma_*^2 - 1)^3 > 0.$$

Оно получается подстановкой выражения z_* в $S_3(z_*)$ с учетом связи λ_* и σ_* посредством формулы (7), то есть $z_*^2 = (4 - \sigma_*^2)/12\sigma_*^2$. Тогда, по непрерывности, $S_3(z) > 0$ в окрестности точки соприкосновения при $\rho_+(\varphi) \rightarrow 0$ (естественно, если $\sigma_*^2 > 1$).

Рассмотрим, теперь, асимптотическую формулу для квадратного корня, который связан с формулой (13),

$$\sqrt{1 + 27(\sigma_*^2 - 1)^2 \frac{S_4(z)S_2(z)}{S_3^2(z)}} = 1 + \frac{27S_4(z_*)S_2(z)}{2S_3^2(z_*)}(\sigma_*^2 - 1)^2 + O((z - z_*)^3),$$

которая выполняется в силу $S_3(z_*) > 0$ и так как $S_2(z) = (z - z_*)^2$. Тогда, на основании (13),

$$\rho_+(\varphi) = 18 \frac{(\sigma_*^2 - 1)^2}{\sin \varphi_*} \frac{S_2(z)}{S_3(z_*)} + O((z - z_*)^3).$$

Учитывая, что $\sin \varphi_* = (1 + z_*^2)^{-1/2}$ и явное выражение для $S_3(z_*)$, эта формула преобразуется к виду

$$\rho_+(\varphi) = \frac{3\sigma_*^2}{1 - 4\varepsilon^2}(\sigma_*^2 - 1)^2(1 + z_*^2)^{1/2}(z - z_*)^2 + O((z - z_*)^3). \quad (14)$$

Из полученной асимптотической формулы следует, что кривая $\rho_+(\varphi)$ имеет «касп», симметрично расположенный относительно оси $\varphi = \varphi_*$. Этот факт устанавливается переходом в локальные декартовы координаты $\langle u, v \rangle$ с центром в точке $\langle \lambda_*, \sigma_*^2 \rangle$ и азимутальной осью, направленной под углом φ_* . В терминах таких координат кривая $\rho_+(\varphi)$, локально, представляется уравнением $u^2 + v^2 = C^2 \arctg^4(v/u)$, $u > 0$, где $\rho = (v^2 + u^2)^{1/2}$, $\varphi - \varphi_* = \arctg(v/u)$. Из этого уравнения следует, что при $u, v \rightarrow 0$, с необходимостью, для координат кривой должно выполняться условие $v/u \rightarrow 0$. Следовательно, имеет место асимптотическая эквивалентность $u^2 + v^2 \sim C^2(v/u)^4$. В свою очередь, это приводит к тому, что $u^6 \sim C^2v^4$, то есть $v \sim \pm C^{-1}u^{3/2}$. Такой тип асимптотической зависимости при $u, v \rightarrow 0$ указывает на то, что в окрестности нулевой точки (начала координат на эллипсе $\Delta = 0$) кривая $\rho_+(\varphi)$ имеет особенность типа «каспа» с острием в нулевой точке. Таким образом, обнаруженное нами асимптотическое поведение фазовой диаграммы вблизи $\langle \lambda_*, \sigma_*^2 \rangle$ описывает «касп» с острием в этой точке.

Заметим, что полученная асимптотика в окрестности точки соприкосновения фазовой диаграммы с эллипсом совпадает с той, которая была получена в работе [4] в



случае $\varepsilon = 0$, с той лишь разницей, что смысл координат должен быть изменен, $u \Rightarrow v$, $v \Rightarrow -u$.

Литература

1. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Анализ стохастической модели химической кинетики бинарной автокаталитической реакции // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 11(154);31. – С.130-146.
2. Arnold L., Horsthemke W., Lefever R. White and coloured external noise and transition phenomena in nonlinear systems // Zs. Phys. – 1978. – В29. – P.367-373.
3. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии / Пер. с англ. / М.: Мир, 1987. – 400 с.
4. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Анализ фазовой диаграммы в стохастической модели химической кинетики бинарной циклической реакции // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 26(169);33. – С.57-63.
5. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Исследование критической поверхности стохастической модели химической кинетики бинарной автокаталитической реакции. Сильно асимметричный случай // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2014. – 5(176);34. – С.103-111.

ANALYSIS OF CRITICAL SURFACE IN THERMODYNAMIC PARAMETERS SPACE OF BINARY REACTION STOCHASTIC MODEL WITH PHASE TRANSITION

Pham Minh Tuan, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru,

Abstract. Three-parametric stochastic model of binary cyclic chemical reaction is studied on the basis of chemical kinetics equations with stochastic perturbation. At all allowable values of parameters, the critical surface in thermodynamic parameters space is investigated in general case. The surface divides qualitatively different stationary dynamic regimes in the parameter space of the system. These regimes correspond to unimodal and bimodal distribution densities of chemical reagents concentrations.

Key words: critical surface, chemical kinetics equations, stochastic model, Fokker-Plank's equation, distribution density, phase transition, bifurcation.



О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА РЕШЕТКЕ ТЕТРАЭДРАЛЬНО-ОКТАЭДРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

А.П. Мотайло

Херсонский национальный технический университет,
Бериславское шоссе, 24, Херсон, 73008, Украина, e-mail: akilehzna@ukr.net

Аннотация. В работе установлена сходимость метода конечных элементов на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры с применением кусочно-линейных координатных функций шестиузлового октаэдра. На примере стационарной задачи теплопроводности показана эффективность использования октаэдра в качестве ячейки пространственной решетки.

Ключевые слова: октаэдр, кусочно-линейные узловые функции, тетраэдрально-октаэдральная решетка.

Введение. Первый опыт применения октаэдра в качестве конечного элемента (КЭ) относится к 1998 г. – времени появления публикации [1] о целесообразности использования такого многогранника в сочетании с тетраэдром при решении методом конечных элементов (МКЭ) задач визуализации. Основным преимуществом пространственной решетки тетраэдрально-октаэдральной структуры (по сравнению с тетраэдральной) при этом является уменьшение размеров матрицы узлов дискретизации, матрицы КЭ и, как следствие, снижение времени вычислений, необходимого для достижения результата заданной точности.

Анализ предшествующих публикаций, цели статьи. Авторы [1] используют модель октаэдра с семью узлами интерполяции (рис.1) и кусочно-линейные узловые функции: $\varphi_0 = 1 - |x| - |y| - |z|$; $\varphi_{1,3} = (x \pm |x|)/2$; $\varphi_{2,4} = (y \pm |y|)/2$; $\varphi_{5,6} = (z \pm |z|)/2$. Автором статьи построены несколько различных систем узловых координатных функций для шестиузловой модели октаэдра (без центрального узла), изучены интерполяционные качества каждого набора функций [2]. В работе [3] установлено, что октаэдр с кусочно-линейными узловыми координатными функциями интерполирует точно линейные поля и может быть использован для решения краевых задач математической физики с дифференциальным оператором второго порядка.

Цель статьи – на примере задачи о распределении температуры в сплошной среде установить сходимость метода конечных элементов на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры (рис. 2) с использованием кусочно-линейных узловых координатных функций октаэдра, результаты проверить численным экспериментом.

Основная часть. Рассмотрим прямоугольный брус $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq h\}$, где $a, b, h > 0$, изготовленный из изотропного материала, одна из граней которого поддерживается при заданной температуре $T = f(y)$, остальные – при температуре $T = 0$ (рис.3).

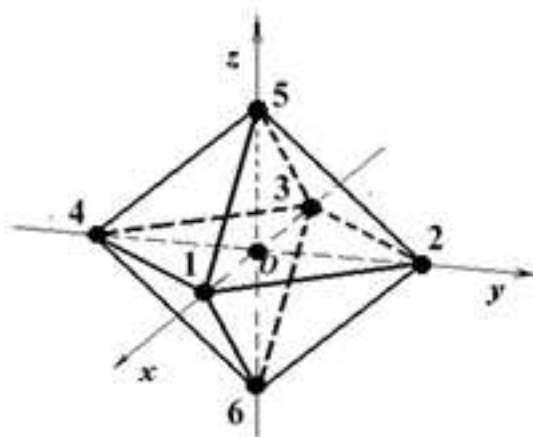
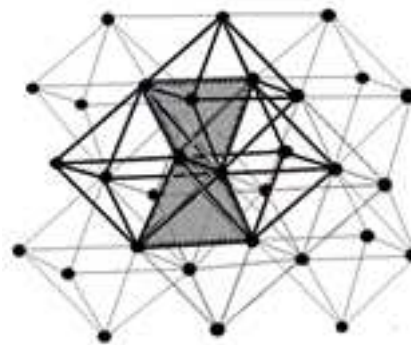
Рис. 1. Октаэдр $|x| + |y| + |z| \leq 1$.

Рис. 2. Фрагмент решетки тетраэдрально-октаэдральной структуры.

Стационарное распределение температуры в пространственной области V удовлетворяет уравнению:

$$\Delta T = 0, \quad (1)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — трехмерный оператор Лапласа, $T = T(x, y, z)$ — температура в произвольной точке (x, y, z) бруса V , с граничными условиями Дирихле:

$$T|_{x=0} = T|_{y=0} = T|_{y=b} = T|_{z=0} = T|_{z=h} = 0; \quad T|_{x=a} = f(y). \quad (2)$$

Аналитическое решение задачи (1), (2) найдено в сечении $V_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ бруса V плоскостью $z = \text{const}$ [4]:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\text{sh}(\pi n x/b)}{\text{sh}(\pi n a/b)} \sin(\pi n y/b),$$

где

$$f_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin(\pi n y/b) dy.$$

В эквивалентной трехмерной вариационной постановке МКЭ задача (1), (2) сводится к нахождению функции $T(x, y, z)$, минимизирующей функционал

$$\chi = \iiint_V \left((\partial \hat{T} / \partial x)^2 + (\partial \hat{T} / \partial y)^2 + (\partial \hat{T} / \partial z)^2 \right) dx dy dz,$$

где $\hat{T} = \hat{T}(x, y, z)$ — функция множества допустимых в области V пробных функций. При этом, согласно [5], функция $\hat{T}(x, y, z)$ является допустимой в области V , если $\hat{T}(x, y, z)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывные частные производные в этой области.

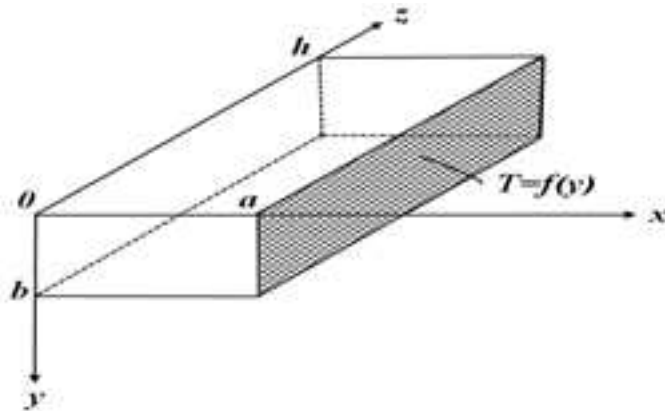


Рис. 3. Брус $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq h\}$.

Разобьем область V на l конечных элементов Ω_r в форме октаэдров и тетраэдров. Тогда элементный вклад χ^{Ω_r} в функционал $\chi = \sum_{r=1}^l \chi^{\Omega_r}$ определяется равенством:

$$\chi^{\Omega_r} = \int \int \int_{\Omega_r} \left((\partial \hat{T}^{\Omega_r} / \partial x)^2 + (\partial \hat{T}^{\Omega_r} / \partial y)^2 + (\partial \hat{T}^{\Omega_r} / \partial z)^2 \right) dx dy dz,$$

где Ω_r — октаэдр Ω_r^o или тетраэдр Ω_r^t ,

$$\hat{T}^{\Omega_r} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_r} N_i T_i & , (x, y, z) \in \Omega_r ; \\ 0 & , (x, y, z) \notin \Omega_r \end{cases}$$

— пробная функция, $N_i = N_i(x, y, z)$ — узловые координатные функции Ω_r , $T_i = T(x_i, y_i, z_i)$ — значения температуры T в узлах (x_i, y_i, z_i) КЭ Ω_r , n_r — число узлов Ω_r , причем $n_r = 6$, если $\Omega_r = \Omega_r^o$, и $n_r = 4$, если $\Omega_r = \Omega_r^t$.

Положим, что

$$N_i(x, y, z) = \begin{cases} NL_i(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega_r^o, i = \overline{1, 6}; \\ L_i(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega_r^t, i = \overline{1, 4}, \end{cases} \quad (3)$$

где $NL_i(x, y, z)$ — кусочно-линейные функции [2], соответствующие узлам октаэдра, а $L_i(x, y, z)$ — линейные функции, объёмные координаты тетраэдра [4]. При этом $NL_i(x, y, z)$ получаются из функций

$$NL_i(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} (1 + 2|\xi| \pm 3\xi - |\eta| - |\zeta|)/6, & i = 1, 3; \\ (1 + 2|\eta| \pm 3\eta - |\xi| - |\zeta|)/6, & i = 2, 4; \\ (1 + 2|\zeta| \pm 3\zeta - |\xi| - |\eta|)/6, & i = 5, 6 \end{cases} \quad (4)$$



заменой $(x, y, z)^T = [J] \cdot (\xi, \eta, \zeta)^T + (x_{0,r}, y_{0,r}, z_{0,r})^T$, где $[J]$ — матрица преобразования локальной системы координат $O\xi\eta\zeta$ в глобальную $Oxyz$, $(x_{0,r}, y_{0,r}, z_{0,r})$ — координаты начала $O\xi\eta\zeta$ для октаэдра Ω_r^o в системе $Oxyz$.

Утверждение. Функция $\hat{T}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i T_i$, где $N_i = N_i(x, y, z)$ определяются равенствами (3), (4), n — число узлов разбиения $V = \bigcup_{r=1}^l \Omega_r$, является допустимой в области V .

□ Покажем, что функция $\hat{T}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i T_i$ непрерывна в области $V = \bigcup_{r=1}^l \Omega_r$. Действительно, из определения функции $\hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z)$ в области V следует, что

$$\hat{T}(x, y, z) = \hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega_r, \quad i = \overline{1, l}.$$

Из равенств (3)-(4) следует, что для любого $r = \overline{1, l}$ функция $\hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z)$ непрерывна в области Ω_r :

1) если $\Omega_r = \Omega_r^t$, то $\hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z) = \alpha_1^{(r)} + \alpha_2^{(r)}x + \alpha_3^{(r)}y + \alpha_4^{(r)}z$ непрерывна как линейная в области конечного элемента для любого $r = \overline{1, l_1}$;

2) если $\Omega_r = \Omega_r^o$, то

$$\hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z) = \beta_1^{(r)} + \beta_2^{(r)}x + \beta_3^{(r)}y + \beta_4^{(r)}z + \beta_5^{(r)}|x - x_{0,r}| + \beta_6^{(r)}|y - y_{0,r}| + \beta_7^{(r)}|z - z_{0,r}|$$

непрерывна как кусочно-линейная в области для любого $r = \overline{1, l_2}$ ($\alpha_j^{(r)}, \beta_j^{(r)}$ — действительные числа, которые однозначно определяются координатами узлов КЭ Ω_r [6, 7], $l_1 + l_2 = l$).

В межэлементной зоне, т.е. на гранях смежных элементов, для любых $r, s = \overline{1, l}$ равенство $\hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z) = \hat{T}^{\Omega_s}(x, y, z)$ справедливо на непустых множествах $\Omega_r^t \cap \Omega_s^t$ [6]

и $\Omega_r^o \cap \Omega_s^o$ [3]. Таким образом, функция $\hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z)$ непрерывна в области $V = \bigcup_{r=1}^l \Omega_r$.

Последнее означает, что частные производные функции $\hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z)$ в области V существуют и определяются равенствами:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial x} = \begin{cases} \alpha_2^{(i)}, & (x, y, z) \in \Omega_i^t, i = \overline{1, l_1}; \\ \beta_2^{(j)} + \beta_5^{(j)} \cdot \text{sgn}(x - x_{0,j}), & (x, y, z) \in \Omega_j^o, j = \overline{1, l_2}; \end{cases}$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial y} = \begin{cases} \alpha_3^{(i)}, & (x, y, z) \in \Omega_i^t, i = \overline{1, l_1}; \\ \beta_3^{(j)} + \beta_6^{(j)} \cdot \text{sgn}(y - y_{0,j}), & (x, y, z) \in \Omega_j^o, j = \overline{1, l_2}; \end{cases}$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial z} = \begin{cases} \alpha_4^{(i)}, & (x, y, z) \in \Omega_i^t, i = \overline{1, l_1}; \\ \beta_4^{(j)} + \beta_7^{(j)} \cdot \text{sgn}(z - z_{0,j}), & (x, y, z) \in \Omega_j^o, j = \overline{1, l_2}; \end{cases}$$

При этом $\partial \hat{T} / \partial x, \partial \hat{T} / \partial y, \partial \hat{T} / \partial z$ непрерывны в области $V \setminus \bigcup_{r=1}^{l_2} \Omega_r^o$ и кусочно-непрерывны

в области $\bigcup_{r=1}^{l_2} \Omega_r^o$, т.е. $\partial \hat{T} / \partial x, \partial \hat{T} / \partial y, \partial \hat{T} / \partial z$ кусочно-непрерывны в области V . ■



Заметим, что условие допустимости функции $\hat{T}(x, y, z)$ в области V является условием сходимости МКЭ к точному решению в рассматриваемой задаче [6, стр.321]. При этом сходимость МКЭ означает, что при неограниченном уменьшении размеров КЭ величина χ стремится к нулю.

Минимизация функционала $\chi = \sum_{r=1}^l \chi^{\Omega_r}$ предполагает дифференцирование по T_i ($i = \overline{1, n}$), как по неизвестной величине, функции $\chi(T_1, T_2, \dots, T_n)$, связанное с вычислением интегралов по каждому элементу Ω_r :

$$\frac{\partial \chi^{\Omega_r}}{\partial T_i} = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_r} \left(\frac{\partial N_p}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial x} + \frac{\partial N_p}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial y} + \frac{\partial N_p}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (5)$$

где p, q — глобальные номера узловых координатных функций КЭ Ω_r .

Процедура вычисления интеграла (5) по объему тетраэдра Ω_r^t описана в [6, 8]. Интегрирование по октаэдру Ω_r^o выполним в локальных координатах:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_r^o} \left(\frac{\partial N_p}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial x} + \frac{\partial N_p}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial y} + \frac{\partial N_p}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \iiint_{(\Omega_r^o)^*} \left(\frac{\partial N_p}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial x} + \frac{\partial N_p}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial y} + \frac{\partial N_p}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial z} \right) |J| d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

где $(\Omega_r^o)^*$ — октаэдр Ω_r^o в системе координат $O\xi\eta\zeta$ и

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_p}{\partial y} \\ \frac{\partial N_p}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_p}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_p}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \equiv [J][B].$$

При этом, учитывая кусочно-непрерывный характер частных производных функций N_p, N_q , область октаэдра $(\Omega_r^o)^*$ может быть представлена в виде $(\Omega_r^o)^* = \bigcup_{s=1}^8 \Omega_s$, где Ω_s — равновеликие по объему прямоугольные тетраэдры, внутри которых переменные ξ, η, ζ сохраняют знак. Например, интегрирование по области $\Omega_1 = \{(\xi, \eta, \zeta) : 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1 - \xi, 0 \leq \zeta \leq 1 - \xi - \eta\}$, где $\xi, \eta, \zeta \geq 0$, а функции $\partial N_p / \partial \xi, \partial N_p / \partial \eta, \partial N_p / \partial \zeta$ непрерывны, принимает вид:

$$\iiint_{\Omega_1} \left(\frac{\partial N_p}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial x} + \frac{\partial N_p}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial y} + \frac{\partial N_p}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial z} \right) |J| d\xi d\eta d\zeta =$$



$$= \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} d\eta \int_0^{1-\xi-\eta} [B_1]^T [J]^T [J] [B_1] |J| d\zeta,$$

где

$$B_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрица частных производных узловых координатных функций октаэдра Ω_r^o , определенных в области Ω_1 .

Очевидно, что подынтегральное выражение не зависит от ξ, η, ζ , при этом объем тетраэдра Ω_1 равен

$$\int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} d\eta \int_0^{1-\xi-\eta} d\zeta = \frac{1}{6}.$$

Аналогично можно получить объемные интегралы по Ω_s , $s = \overline{2, 8}$. Тогда

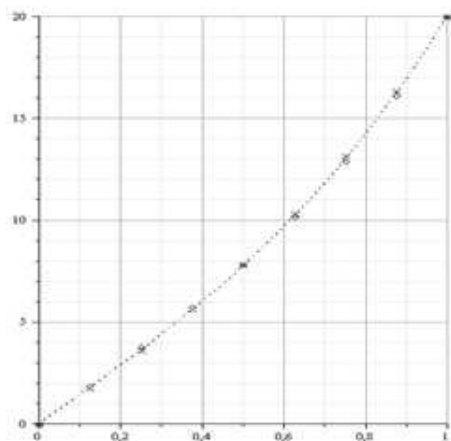
$$\iiint_{\Omega_r^o} \left(\frac{\partial N_p}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial x} + \frac{\partial N_p}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial y} + \frac{\partial N_p}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial z} \right) |J| dx dy dz = \frac{|J|}{6} \cdot \sum_{s=1}^8 [B_s]^T [J]^T [J] [B_s], \quad (6)$$

где

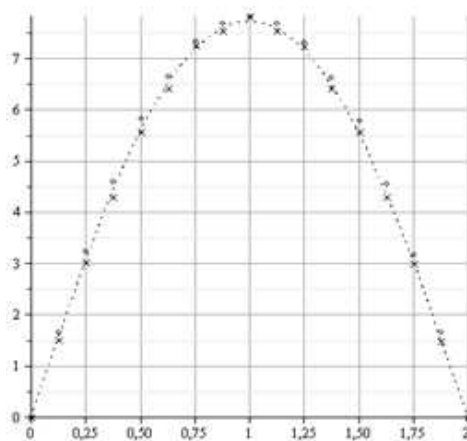
$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}; & B_3 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}; \\ B_4 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}; & B_5 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}; \\ B_6 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}; & B_7 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}; \\ B_8 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Полученная формула (6) является формулой численного интегрирования по октаэдру Ω_r^o .

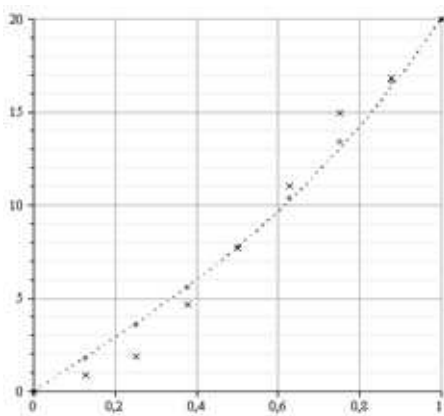
Условия минимума $\partial\chi/\partial T_i = 0$ функционала χ приводят к решению системы линейных алгебраических относительно $[T] = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ уравнений $[h][T] = 0$, где $[h]$ — глобальная матрица теплопроводности, элементы которой определяются равенствами $h_{ij} = \sum_{r=1}^l (\partial\chi^{\Omega_r}/\partial T_i)$, $i, j = \overline{1, n}$. Удовлетворяя главным граничным условиям (2) путем корректирования отдельных строк матрицы $[h]$ и нулевого вектора в правой части системы, получаем численное решение в виде $\hat{T}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i T_i$.



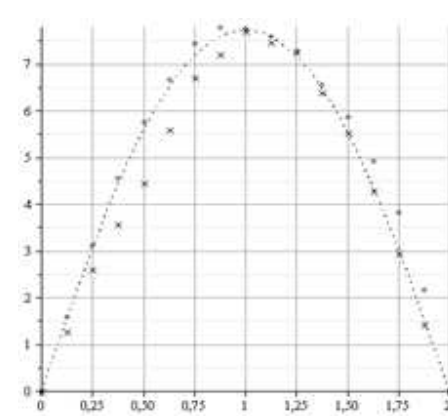
а



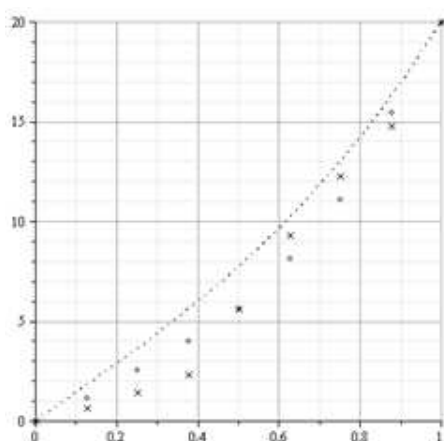
б



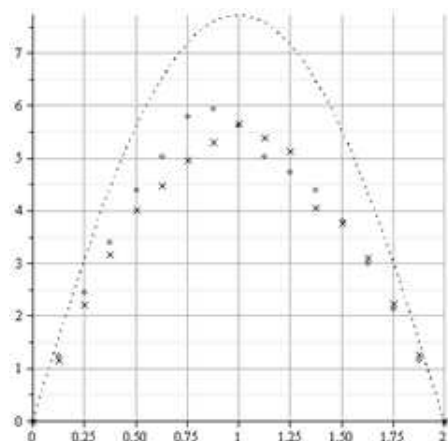
в



г



д



е

Рис. 6. Температура бруса V вдоль осей сечений $h = z/2$, $h = z/4$, $h = z/8$: \dots — аналитическое решение (с точностью до 10^{-6}); \times — решение МКЭ на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры; \diamond — решение МКЭ на решетке тетраэдральной структуры.



Для нахождения численного решения МКЭ задачи (1), (2) с использованием тетраэдральной и тетраэдрально-октаэдральной решеток автором статьи составлены программы в среде Maple. На рис. 4 значения температуры бруса найдены в направлениях осей $y = b/2$ и $x = a/2$ в сечениях $z = h/2$ (4а, 4б); $z = h/4$ (4в, 4г); $z = h/8$ (4д, 4е). Результаты численного эксперимента соответствуют размерам $a = 1$, $b = 2$, $h = 10$ и условию на границе: $f(y) = t_0 y(b - y)$ для $t_0 = 20$.

Анализируя результаты численного эксперимента, заметим, что решение задачи, полученное на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры (8864 тетраэдра, 344 октаэдра, 2121 узел интерполяции), достаточно близко к точному и решению МКЭ с использованием тетраэдральной решетки (24576 тетраэдров, 4913 узлов интерполяции). При этом время работы программы (в секундах) в первом случае 2621.05, во втором — 6402.11. Последнее означает, что, используя октаэдр с кусочно-линейными узловыми координатными функциями, в рассматриваемой задаче можно сократить время и объем вычислений.

Выводы. В работе установлена сходимость МКЭ на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры с применением кусочно-линейных координатных функций шестизлового октаэдра; получены формулы численного интегрирования по октаэдру и решение МКЭ стационарной задачи теплопроводности для прямоугольного изотропного бруса. Результаты численного эксперимента свидетельствуют о том, что использование октаэдра в качестве ячейки пространственной решетки в данной задаче оптимизирует время и объем вычислений, сохраняя достаточно высокую их точность.

Литература

1. Grosso R., Greiner G. Hierarchical Meshes for Volume Data Computer Graphics International 1998 (CGI'98). – 1998. – P.761-771.
<http://dblp.uni-trier.de/db/conf/cgi/cgi1998.html#GrossoG98>.
2. Мотайло А.П., Хомченко А.Н. Порівняльний аналіз базисів октаедра // Матеріали. ІХ міжнародної науково-практичної конференції «Найновіші наукові досягнення - 2013». Серія: Математика: Фізика. Сучасні інформаційні технології (7-15 березня 2013 р.). – Софія, Болгарія: «Бял ГРАД-БГ» ООД, 2013. – Т.21 — С.28–33.
3. Мотайло А.П., Хомченко А.Н. Интерполяция кусочно-линейными функциями на решетках тетраэдрально-октаэдральной структуры // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. №8. – Кам'янець-Поділ. нац.ун-т ім. І.Огієнка; Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова, Нац.акад.наук України. — Кам'янець-Поділ.: К-ПДУ ім. Івана Огієнка, 2013. – С.139-150.
4. Несис Е.И. Методы математической физики / М.: Просвещение, 1977. – 199 с.
5. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов / Пер. с англ. / М.: Мир, 1981. – 304 с.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / М.: Мир, 1975. – 541 с.
7. Хомченко А.Н., Мотайло А.П. Две модели кусочно-линейной интерполяции на октаэдре // Проблеми інформаційних технологій: зб. наук. пр. – №1. – Херсон: ХНТУ, 2011. – С. 47–50.
8. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / М.: Мир, 1979. – 392 с.



**ABOUT NUMERICAL CALCULATION
OF STATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEM
BY THE FINITE ELEMENT METHOD
ON THE LATTICE TETRAHEDRAL-OCTAHEDRAL STRUCTURE**

A.P. Motailo

Kherson National Technical University,
Beryslav Highway, 24, Kherson, 73008, Ukraine, e-mail: akilehzna@ukr.net

Abstract. Convergence of numerical approximations on the basis of the finite element method is established when the lattice of tetrahedral-octahedral structure is used by six nodal octahedron with piecewise linear functions. The efficiency of octahedron as the cell of space lattice is shown on the basis of the example of stationary heat conduction problem.

Key words: octahedron, piecewise linear nodal function, tetrahedral-octahedral lattice structure.



MCS 65N30

СТРУКТУРА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ) С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИЛИНЕЙНЫХ СПЛАЙНОВ И СПЛАЙН-ИНТЕРЛИНАЦИИ ФУНКЦИИ

О.Н. Литвин, И.В. Нефёдова

Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, Харьков, 61003, Украина, e-mail: niv_artem@mail.ru

Аннотация. В работе предложен общий метод построения структуры приближенного решения краевой задачи в области Ω , согласно которому проводится выбор координат узлов сетки, который сохраняет глобальную непрерывность приближенного решения в области Ω , или непрерывность приближенного решения и его частных производных до $n - 1$ порядка включительно. Метод существенно использует интерполяцию функций, интерлинацию функций двух переменных на системе взаимно перпендикулярных прямых (линиях ректангуляции) и метод построения базисных сплайнов 2-го порядка.

Ключевые слова: метод конечных элементов, структура приближенного решения, интерлинация функций, прямоугольные элементы.

Введение. В данное время метод конечных элементов является одним из наиболее широко используемых методов исследования тепловых, электромагнитных и физико-механических полей. Как отмечалось на международной конференции «Современные проблемы концентрации напряжений», которая проходила в Донецком национальном университете в 1998 году под руководством акад. О.С. Космодамианского, современные системы исследования напряженного состояния корпусов самолетов, автомобилей и т.п., требуют решения многих десятков тысяч уравнений. Это связано с тем, что при формировании систем метода конечных элементов (МКЭ) не учитываются известные в теории упругости факты о возможном наличии на поверхности напряженно-деформированного тела точек, в которых возникает концентрация напряжения, т.е. прогиб поверхности в окрестности указанных точек может иметь особенности. На указанной выше конференции, в частности, был сделан вывод о необходимости разработки методов оптимального выбора узлов в МКЭ.

В работах [1] - [3] предложен метод построения оптимальных схем метода конечных элементов, в которых находятся не только узловые параметры, а также базисные функции и координаты узлов элементов из условия минимума функционала энергии соответствующего решаемой краевой задаче. Одной из нерешенных проблем этого метода на данное время остается проблема оптимального разбиения области интегрирования на элементы. На практике при оптимальном выборе узлов элементов (прямоугольные элементы) возникает необходимость разбиения отдельно взятого элемента с наибольшим значением функционала на несколько дополнительных элементов. В результате



получаем нерегулярное разбиение области на элементы, которое не исследовалось в цитированных выше работах.

В работах Иво Бабушки и его учеников [4]-[5] был разработан метод сгущения сетки в МКЭ в окрестности точек, в которых есть концентрация напряжений. Этот метод хорошо себя зарекомендовал, но проблема эффективного выбора узлов в окрестности особых точек остается неисследованной в случае, когда схема МКЭ использует только прямо-угольные элементы. Это утверждение связано с тем, что в цитированных выше работах Иво Бабушки и его сотрудников предлагается переходить к полярной системе координат с центром в особой точке.

В настоящей работе предлагается общий метод построения структуры приближенно-го решения краевой задачи в области Ω на базе использования прямоугольных элементов в МКЭ, который сохраняет глобальную непрерывность решения в области. Метод существенным образом использует интерлинацию функций двух переменных на линиях ректангуляции (системе взаимно перпендикулярных прямых) [6].

1. Постановка задачи. Предположим, что область Ω разделена линиями $x = x_k$, ($k = \overline{1, m}$), $y = y_l$, ($l = \overline{1, n}$) на прямоугольные элементы $\Pi_{k,l} = [x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}]$ ($k = \overline{1, m-1}$, $l = \overline{1, n-1}$) и в каждом из этих элементов приближенное решение $\tilde{u}(x, y)$ краевой задачи

$$Lu(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

где

$$Lu(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(p^{(1)}(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p^{(2)}(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) + q(x, y) u(x, y),$$

$p^{(1)}, p^{(2)} \in C^1(\Omega)$, $q \in C(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ представляется в виде: $\tilde{u}(x, y) = u_{k,l}(x, y)$, $(x, y) \in \Pi_{k,l} \subset \Omega$,

$$u_{k,l}(x, y) = C_{k,l} h_{k,l}^{(1),0}(s) h_{k,l}^{(2),0}(t) + C_{k+1,l} h_{k+1,l}^{(1),1}(s) h_{k+1,l}^{(2),0}(t) + \quad (1)$$

$$+ C_{k,l+1} h_{k,l+1}^{(1),0}(s) h_{k,l+1}^{(2),1}(t) + C_{k+1,l+1} h_{k+1,l+1}^{(1),1}(s) h_{k+1,l+1}^{(2),1}(t) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^1 \sum_{\nu=0}^1 C_{k+\mu, l+\nu} h_{k+\mu, l+\nu}^{(1),\mu}(s) h_{k+\mu, l+\nu}^{(2),\nu}(t) = w_{k,l}(s, t),$$

где $s = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$, $t = \frac{y - y_l}{y_{l+1} - y_l}$, функции $h_{k,l}^{(1),\mu}(s)$, $h_{k,l}^{(2),\nu}(t) \in C^2[0, 1]$ и имеют свой-

ства $h_{k,l}^{(1),0}(0) = h_{k,l}^{(2),0}(0) = 1$, $h_{k,l}^{(1),0}(1) = h_{k,l}^{(2),0}(1) = 0$, $h_{k,l}^{(1),1}(0) = h_{k,l}^{(2),1}(0) = 0$, $h_{k,l}^{(1),0}(1) = h_{k,l}^{(2),0}(1) = 1 \forall (x_k, y_l) \in \bar{\Omega}$.



Введем обозначение

$$J_{k,l} = \int_0^1 \int_0^1 \left[p_{k,l}^{(1)}(s,t) \left(\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial s} \right)^2 \Delta_k^{(1)-2} + p_{k,l}^{(2)}(s,t) \left(\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial t} \right)^2 \Delta_k^{(2)-2} + \right. \quad (2)$$

$$\left. + q_{k,l}(s,t) w_{k,l}^2(s,t) - 2f_{k,l}(s,t) w_{k,l}(s,t) \right] \Delta_k^{(1)} \Delta_l^{(2)} ds dt,$$

где $\Delta_k^{(1)} = x_{k+1} - x_k$, $\Delta_l^{(2)} = y_{l+1} - y_l$,

$$p_{k,l}^{(1)}(s,t) = p^{(1)}\left(s\Delta_k^{(1)} + x_k, t\Delta_l^{(2)} + y_l\right), \quad p_{k,l}^{(2)}(s,t) = p^{(2)}\left(s\Delta_k^{(1)} + x_k, t\Delta_l^{(2)} + y_l\right),$$

$$q_{k,l}(s,t) = q\left(s\Delta_k^{(1)} + x_k, t\Delta_l^{(2)} + y_l\right), \quad f_{k,l}(s,t) = f\left(s\Delta_k^{(1)} + x_k, t\Delta_l^{(2)} + y_l\right).$$

Значения приближенного решения $u_{k,l}$ во всех внутренних узлах сетки находятся путём минимизации функционала

$$J(\tilde{u}) = \sum_{\Pi_{k,l} \subset G} \tilde{J}_{k,l} \rightarrow \min_{C_{k,l}}.$$

2. Основные положения предлагаемого метода оптимизации сетки узлов.

Дадим пошаговое описание алгоритма предлагаемого метода.

Шаг 1. Разбиваем область Ω на элементы $\Pi_{p,q} \subset \Omega$ прямыми $x = x_p$, $y = y_q$. В данной работе считаем, что Ω является объединением таких прямоугольных элементов.

Шаг 2. При фиксированном разбиении области интегрирования на элементы $\Pi_{k,l}$, при известных базисных функциях и узловых параметрах, вычисляем все значения $J_{k,l}$ и находим среди них максимальное.

Шаг 3. Если выполняется неравенство $\max_{(p,q) \neq (k,l)} |J_{p,q} - J_{k,l}| \leq \varepsilon$, $k \neq p$, $l \neq q$, процесс разбиения области на элементы прекращаем.

Шаг 4. Если значение $J_{p,q}$ в элементе $\Pi_{p,q} \subset \Omega$ является максимальным, т.е. удовлетворяет следующим неравенствам

$$|J_{p,q} - J_{k,l}| > \varepsilon, \quad k \neq p, l \neq q, \quad (3)$$

где ε — заданное число, то считаем элемент $\Pi_{p,q}$ базовым и для оптимизации сетки будем разбивать этот элемент на четыре элемента прямыми

$$x = x_{p+0,5} = \frac{x_p + x_{p+1}}{2}, \quad y = y_{q+0,5} = \frac{y_q + y_{q+1}}{2}.$$

Тогда элемент $\Pi_{p,q}$ разобьется на четыре элемента (см. рис. 1):

$$\Pi_{p,q}^{(1)} = [x_p, x_{p+0,5}] \times [y_q, y_{q+0,5}]; \quad \Pi_{p,q}^{(2)} = [x_p, x_{p+0,5}] \times [y_{q+0,5}, y_{q+1}];$$

$$\Pi_{p,q}^{(3)} = [x_{p+0,5}, x_{p+1}] \times [y_q, y_{q+0,5}]; \quad \Pi_{p,q}^{(4)} = [x_{p+0,5}, x_{p+1}] \times [y_{q+0,5}, y_{q+1}].$$

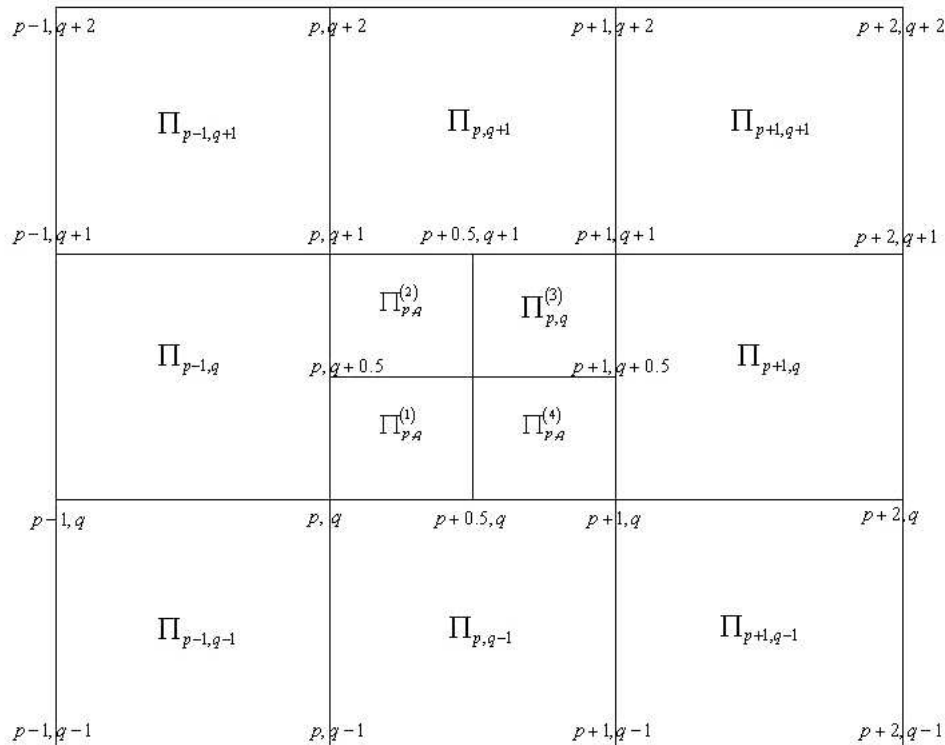


Рис. 1. Разбиение области Ω на прямоугольные элементы.

Таким образом, получено новое разбиение области интегрирования на прямоугольные элементы. Приближенное решение, которое соответствует полученному разбиению, имеет новый вид в элементах $\Pi_{p,q}^{(1)}$, $\Pi_{p,q}^{(2)}$, $\Pi_{p,q}^{(3)}$, $\Pi_{p,q}^{(4)}$, а также в соседних четырех элементах $\Pi_{p,q-1}$, $\Pi_{p-1,q}$, $\Pi_{p,q+1}$, $\Pi_{p+1,q}$, если эти элементы принадлежат области интегрирования. Во всех других элементах разбиения форма приближенного решения не изменяется.

В элементах $\Pi_{p,q}^{(1)}$, $\Pi_{p,q}^{(2)}$, $\Pi_{p,q}^{(3)}$, $\Pi_{p,q}^{(4)}$ приближенные решения будут иметь вид:

$$\tilde{w}_{p,q}^{(1)}(x, y) = C_{p,q} h_{p,q}^{(3),0}(s_1) h_{p,q}^{(4),0}(t_1) + C_{p+0.5,q} h_{p+0.5,q}^{(3),1}(s_1) h_{p+0.5,q}^{(4),0}(t_1) + \quad (4)$$

$$+ C_{p,q+0.5} h_{p,q+0.5}^{(3),0}(s_1) h_{p,q+0.5}^{(4),1}(t_1) + C_{p+0.5,q+0.5} h_{p+0.5,q+0.5}^{(3),1}(s_1) h_{p+0.5,q+0.5}^{(4),1}(t_1),$$

$$\tilde{w}_{p,q}^{(2)}(x, y) = C_{p,q+0.5} h_{p,q+0.5}^{(3),0}(s_1) h_{p,q+0.5}^{(4),0}(t_2) + C_{p+0.5,q+0.5} h_{p+0.5,q+0.5}^{(3),1}(s_1) h_{p+0.5,q+0.5}^{(4),0}(t_2) +$$

$$+ C_{p,q+1} h_{p,q+1}^{(3),0}(s_1) h_{p,q+1}^{(4),1}(t_2) + C_{p+0.5,q+1} h_{p+0.5,q+1}^{(3),1}(s_1) h_{p+0.5,q+1}^{(4),1}(t_2) \quad (5)$$



$$\begin{aligned} \tilde{w}_{p,q}^{(3)}(x,y) &= C_{p+0.5,q+0.5} h_{p+0.5,q+0.5}^{(3),0}(s_2) h_{p+0.5,q+0.5}^{(4),0}(t_2) + \\ &\quad + C_{p+1,q+0.5} h_{p+1,q+0.5}^{(3),1}(s_2) h_{p+1,q+0.5}^{(4),0}(t_2) + \\ &\quad + C_{p+0.5,q+1} h_{p+0.5,q+1}^{(3),0}(s_2) h_{p+0.5,q+1}^{(4),1}(t_2) + C_{p+1,q+1} h_{p+1,q+1}^{(3),1}(s_2) h_{p+1,q+1}^{(4),1}(t_2), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\tilde{w}_{p,q}^{(4)}(x,y) = C_{p+0.5,q} h_{p+0.5,q}^{(3),0}(s_2) h_{p+0.5,q}^{(4),0}(t_1) + C_{p+1,q} h_{p+1,q}^{(3),1}(s_2) h_{p+1,q}^{(4),0}(t_1) + \quad (7)$$

$$+ C_{p+0.5,q+0.5} h_{p+0.5,q+0.5}^{(3),0}(s_2) h_{p+0.5,q+0.5}^{(4),1}(t_1) + C_{p+1,q+0.5} h_{p+1,q+0.5}^{(3),1}(s_2) h_{p+1,q+0.5}^{(4),1}(t_1)$$

где

$$s_1 = \frac{x - x_p}{x_{p+0.5} - x_p}, \quad s_2 = \frac{x - x_{p+0.5}}{x_{p+1} - x_{p+0.5}}, \quad t_1 = \frac{y - y_q}{y_{q+0.5} - y_q}, \quad t_2 = \frac{y - y_{q+0.5}}{y_{q+1} - y_{q+0.5}};$$

$$h_{p,q}^{(3),\mu}(s_1), h_{p,q}^{(4),\nu}(t_1), h_{p,q}^{(3),\mu}(s_2), h_{p,q}^{(4),\nu}(t_2) \in C^2[0,1]$$

и имеют место равенства $h_{p,q}^{(3),0}(0) = h_{p,q}^{(4),0}(0) = 1$, $h_{p,q}^{(3),0}(1) = h_{p,q}^{(4),0}(1) = 0$, $h_{p,q}^{(3),1}(0) = h_{p,q}^{(4),1}(0) = 0$, $h_{p,q}^{(3),1}(1) = h_{p,q}^{(4),1}(1) = 1 \forall (x_p, y_q) \in \bar{\Omega}$.

Для написания структуры приближенного решения в элементах $\Pi_{p,q-1}$, $\Pi_{p-1,q}$, $\Pi_{p,q+1}$, $\Pi_{p+1,q}$ будем использовать интерлинацию функций на четырех сторонах указанных прямоугольников [7]. В элементе $\Pi_{p-1,q}$ структура приближенного решения будет иметь вид:

$$\tilde{w}_{p-1,q}(x,y) = U(x_{p-1},y) h_{p-1,q}^{(1),0}(s) + U(x_p,y) h_{p,q}^{(1),1}(s) + U(x,y_q) h_{p-1,q}^{(2),0}(t) + \quad (8)$$

$$+ U(x,y_{q+1}) h_{p-1,q+1}^{(2),1}(t) - C_{p-1,q} h_{p-1,q}^{(1),0}(s) h_{p-1,q}^{(2),0}(t) - C_{p-1,q+1} h_{p-1,q+1}^{(1),0}(s) h_{p-1,q+1}^{(2),1}(t) -$$

$$- C_{p,q} h_{p,q}^{(1),1}(s) h_{p,q}^{(2),0}(t) - C_{p,q+1} h_{p,q+1}^{(1),1}(s) h_{p,q+1}^{(2),1}(t),$$

где $x_{p-1} \leq x \leq x_p$, $y_q \leq y \leq y_{q+1}$,

$$s = \frac{x - x_{p-1}}{x_p - x_{p-1}}, \quad t = \frac{y - y_q}{y_{q+1} - y_q},$$



$$U(x_{p-1}, y) = C_{p-1,q} h_{p-1,q}^{(2),0}(t) + C_{p-1,q+1} h_{p-1,q+1}^{(2),1}(t),$$

$$U(x, y_q) = C_{p-1,q} h_{p-1,q}^{(1),0}(s) + C_{p,q} h_{p,q}^{(1),1}(s),$$

$$U(x, y_{q+1}) = C_{p-1,q+1} h_{p-1,q+1}^{(1),0}(s) + C_{p,q+1} h_{p,q+1}^{(1),1}(s),$$

$$U(x_p, y) = \begin{cases} C_{p,q} h_{p,q}^{(4),0}(t_1) + C_{p,q+0.5} h_{p,q+0.5}^{(4),1}(t_1), & y_q \leq y \leq y_{q+0.5}; \\ C_{p,q+0.5} h_{p,q+0.5}^{(4),0}(t_2) + C_{p,q+1} h_{p,q+1}^{(4),1}(t_2), & y_{q+0.5} \leq y \leq y_{q+1}; \end{cases}$$

$$t_1 = \frac{y - y_q}{y_{q+0.5} - y_q}, \quad t_2 = \frac{y - y_{q+0.5}}{y_{q+1} - y_{q+0.5}}.$$

Лемма 1. Если в элементе $\Pi_{p-1,q}$ структура приближенного решения имеет вид (8), то

$$\tilde{w}_{p-1,q}(x_{p-1}, y) = C_{p-1,q} h_{p-1,q}^{(2),0}(t) + C_{p-1,q+1} h_{p-1,q+1}^{(2),1}(t),$$

$$\tilde{w}_{p-1,q}(x, y_q) = C_{p-1,q} h_{p-1,q}^{(1),0}(s) + C_{p,q} h_{p,q}^{(1),1}(s),$$

$$\tilde{w}_{p-1,q}(x, y_{q+1}) = C_{p-1,q+1} h_{p-1,q+1}^{(1),0}(s) + C_{p,q+1} h_{p,q+1}^{(1),1}(s),$$

$$\tilde{w}_{p-1,q}(x_p, y) = \begin{cases} C_{p,q} h_{p,q}^{(4),0}(t_1) + C_{p,q+0.5} h_{p,q+0.5}^{(4),1}(t_1), & y_q \leq y \leq y_{q+0.5}; \\ C_{p,q+0.5} h_{p,q+0.5}^{(4),0}(t_2) + C_{p,q+1} h_{p,q+1}^{(4),1}(t_2), & y_{q+0.5} \leq y \leq y_{q+1}; \end{cases}$$

где

$$t_1 = \frac{y - y_q}{y_{q+0.5} - y_q}, \quad t_2 = \frac{y - y_{q+0.5}}{y_{q+1} - y_{q+0.5}}.$$

Аналогичные леммы формулируются и доказываются для структур приближенных решений в элементах $\Pi_{p,q-1}$, $\Pi_{p,q+1}$, $\Pi_{p+1,q}$ нового разбиения.

Для элемента $\Pi_{p,q-1}$ приближенное решение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{p,q-1}(x, y) = & U(x_p, y) h_{p,q-1}^{(1),0}(s) + U(x_{p+1}, y) h_{p+1,q-1}^{(1),1}(s) + U(x, y_{q-1}) h_{p,q-1}^{(2),0}(t) + \quad (9) \\ & + U(x, y_q) h_{p,q}^{(2),1}(t) - C_{p,q-1} h_{p,q-1}^{(1),0}(s) h_{p,q-1}^{(2),0}(t) - C_{p,q} h_{p,q}^{(1),0}(s) h_{p,q}^{(2),1}(t) - \\ & - C_{p+1,q-1} h_{p+1,q-1}^{(1),1}(s) h_{p+1,q-1}^{(2),0}(t) - C_{p+1,q} h_{p+1,q}^{(1),1}(s) h_{p+1,q}^{(2),1}(t), \end{aligned}$$



где $x_p \leq x \leq x_{p+1}$, $y_{q-1} \leq y \leq y_q$,

$$s = \frac{x - x_p}{x_{p+1} - x_p}, \quad t = \frac{y - y_{q-1}}{y_q - y_{q-1}},$$

$$U(x_p, y) = C_{p, q-1} h_{p, q-1}^{(2), 0}(t) + C_{p, q} h_{p, q}^{(2), 1}(t),$$

$$U(x, y_{q-1}) = C_{p, q-1} h_{p, q-1}^{(1), 0}(s) + C_{p+1, q-1} h_{p+1, q-1}^{(1), 1}(s),$$

$$U(x_{p+1}, y) = C_{p+1, q-1} h_{p+1, q-1}^{(2), 0}(t) + C_{p+1, q} h_{p+1, q}^{(2), 1}(t),$$

$$U(x, y_q) = \begin{cases} C_{p, q} h_{p, q}^{(3), 0}(s_1) + C_{p+0.5, q} h_{p+0.5, q}^{(3), 1}(s_1), & x_p \leq x \leq x_{p+0.5}; \\ C_{p+0.5, q} h_{p+0.5, q}^{(3), 0}(s_2) + C_{p+1, q} h_{p+1, q}^{(3), 1}(s_2), & x_{p+0.5} \leq x \leq x_{p+1}; \end{cases}$$

где

$$s_1 = \frac{x - x_p}{x_{p+0.5} - x_p}, \quad s_2 = \frac{x - x_{p+0.5}}{x_{p+1} - x_{p+0.5}}.$$

При этом

$$\tilde{w}_{p, q-1}(x, y)|_{(x_p, y_{q-1})} = C_{p, q-1}, \quad \tilde{w}_{p, q-1}(x, y)|_{(x_{p+1}, y_{q-1})} = C_{p+1, q-1},$$

$$\tilde{w}_{p, q-1}(x, y)|_{(x_p, y_q)} = C_{p, q}, \quad \tilde{w}_{p, q-1}(x, y)|_{(x_{p+0.5}, y_q)} = C_{p+0.5, q},$$

$$\tilde{w}_{p, q-1}(x, y)|_{(x_{p+1}, y_q)} = C_{p+1, q}.$$

Для элемента $\Pi_{p, q+1}$ приближенное решение будет иметь вид:

$$\tilde{w}_{p, q+1}(x, y) = U(x_p, y) h_{p, q+1}^{(1), 0}(s) + U(x_{p+1}, y) h_{p+1, q+1}^{(1), 1}(s) + U(x, y_{q+1}) h_{p, q+1}^{(2), 0}(t) + \quad (10)$$

$$+ U(x, y_{q+2}) h_{p, q+2}^{(2), 1}(t) - C_{p, q+1} h_{p, q+1}^{(1), 0}(s) h_{p, q+1}^{(2), 0}(t) - C_{p, q+2} h_{p, q+2}^{(1), 1}(s) h_{p, q+2}^{(2), 1}(t) -$$

$$- C_{p+1, q+1} h_{p+1, q+1}^{(1), 1}(s) h_{p+1, q+1}^{(2), 0}(t) - C_{p+1, q+2} h_{p+1, q+2}^{(1), 1}(s) h_{p+1, q+2}^{(2), 1}(t),$$

где $x_p \leq x \leq x_{p+1}$, $y_{q+1} \leq y \leq y_{q+2}$,

$$s = \frac{x - x_p}{x_{p+1} - x_p}, \quad t = \frac{y - y_{q+1}}{y_{q+2} - y_{q+1}};$$

$$U(x_p, y) = C_{p, q+1} h_{p, q+1}^{(2), 0}(t) + C_{p, q+2} h_{p, q+2}^{(2), 1}(t),$$

$$U(x, y_{q+2}) = C_{p, q+2} h_{p, q+2}^{(1), 0}(s) + C_{p+1, q+2} h_{p+1, q+2}^{(1), 1}(s),$$



$$U(x_{p+1}, y) = C_{p+1, q+1} h_{p+1, q+1}^{(2), 0}(t) + C_{p+1, q+2} h_{p+1, q+2}^{(2), 1}(t),$$

$$U(x, y_{q+1}) = \begin{cases} C_{p, q+1} h_{p, q+1}^{(3), 0}(s_1) + C_{p+0.5, q+1} h_{p+0.5, q+1}^{(3), 1}(s_1), & x_p \leq x \leq x_{p+0.5}; \\ C_{p+0.5, q+1} h_{p+0.5, q+1}^{(3), 0}(s_2) + C_{p+1, q+1} h_{p+1, q+1}^{(3), 1}(s_2), & x_{p+0.5} \leq x \leq x_{p+1}; \end{cases}$$

где

$$s_1 = \frac{x - x_p}{x_{p+0.5} - x_p}, \quad s_2 = \frac{x - x_{p+0.5}}{x_{p+1} - x_{p+0.5}}.$$

При этом

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{p, q+1}(x, y)|_{(x_p, y_{q+1})} &= C_{p, q+1}, & \tilde{w}_{p, q+1}(x, y)|_{(x_{p+0.5}, y_{q+1})} &= C_{p+0.5, q+1}, \\ \tilde{w}_{p, q+1}(x, y)|_{(x_{p+1}, y_{q+1})} &= C_{p+1, q+1}, & \tilde{w}_{p, q+1}(x, y)|_{(x_{p+1}, y_{q+2})} &= C_{p+1, q+2}, \\ \tilde{w}_{p, q+1}(x, y)|_{(x_p, y_{q+2})} &= C_{p, q+2}. \end{aligned}$$

Для элемента $\Pi_{p+1, q}$ приближенное решение будет иметь вид:

$$\tilde{w}_{p+1, q}(x, y) = U(x_{p+1}, y) h_{p+1, q}^{(1), 0}(s) + U(x_{p+2}, y) h_{p+2, q}^{(1), 1}(s) + U(x, y_q) h_{p+1, q}^{(2), 0}(t) + \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &+ U(x, y_{q+1}) h_{p+1, q+1}^{(2), 1}(t) - C_{p+1, q} h_{p+1, q}^{(1), 0}(s) h_{p+1, q}^{(2), 0}(t) - C_{p+1, q+1} h_{p+1, q+1}^{(1), 0}(s) h_{p+1, q+1}^{(2), 1}(t) - \\ &- C_{p+2, q} h_{p+2, q}^{(1), 1}(s) h_{p+2, q}^{(2), 0}(t) - C_{p+2, q+1} h_{p+2, q+1}^{(1), 1}(s) h_{p+2, q+1}^{(2), 1}(t), \end{aligned}$$

где $x_{p+1} \leq x \leq x_{p+2}$, $y_q \leq y \leq y_{q+1}$,

$$s = \frac{x - x_{p+1}}{x_{p+2} - x_{p+1}}, \quad t = \frac{y - y_q}{y_{q+1} - y_q};$$

$$U(x, y_q) = C_{p+1, q} h_{p+1, q}^{(1), 0}(s) + C_{p+2, q} h_{p+2, q}^{(1), 1}(s),$$

$$U(x_{p+2}, y) = C_{p+2, q} h_{p+2, q}^{(2), 0}(t) + C_{p+2, q+1} h_{p+2, q+1}^{(2), 1}(t),$$

$$U(x, y_{q+1}) = C_{p+1, q+1} h_{p+1, q+1}^{(1), 0}(s) + C_{p+2, q+1} h_{p+2, q+1}^{(1), 1}(s),$$

$$U(x_{p+1}, y) = \begin{cases} C_{p+1, q} h_{p+1, q}^{(4), 0}(t_1) + C_{p+1, q+0.5} h_{p+1, q+0.5}^{(4), 1}(t_1), & y_q \leq y \leq y_{q+0.5}; \\ C_{p+1, q+0.5} h_{p+1, q+0.5}^{(4), 0}(t_2) + C_{p+1, q+1} h_{p+1, q+1}^{(4), 1}(t_2), & y_{q+0.5} \leq y \leq y_{q+1}; \end{cases}$$



где

$$t_1 = \frac{y - y_q}{y_{q+0,5} - y_q}, \quad t_2 = \frac{y - y_{q+0,5}}{y_{q+1} - y_{q+0,5}}.$$

При этом

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{p+1,q}(x,y)|_{(x_{p+1},y_q)} &= C_{p+1,q}, & \tilde{w}_{p+1,q}(x,y)|_{(x_{p+1},y_{q+0,5})} &= C_{p+1,q+0,5}, \\ \tilde{w}_{p+1,q}(x,y)|_{(x_{p+1},y_{q+1})} &= C_{p+1,q+1}, & \tilde{w}_{p+1,q}(x,y)|_{(x_{p+2},y_{q+1})} &= C_{p+2,q+1}, \\ \tilde{w}_{p+1,q}(x,y)|_{(x_{p+2},y_q)} &= C_{p+2,q}. \end{aligned}$$

Шаг 5. Находим среди всех элементов нового разбиения Θ такой элемент $\prod_{p',q'}$, в котором выполняются условия

$$|J_{p',q'} - J_{k,l}| > \varepsilon, \forall (k,l) \in \Theta, \quad k \neq p', l \neq q',$$

где ε — заданное число, и переходим к шагу 2.

Отметим, что последовательность максимальных значений $J_{p,q}$ будет не возрастающей и, кроме того, такой элемент $\prod_{k,l}$ может быть не единственным.

Теорема 1. Если в указанных восьми элементах разбиения структуру приближенного решения $\tilde{u}(x,y)$ записать согласно приведённому выше алгоритму, а во всех других элементах разбиения её оставить неизменной, то независимо от выбора неизвестных параметров $C_{i,j}$ ($i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n-1}$), $C_{p,q+0,5}$, $C_{p+0,5,q+0,5}$, $C_{p+0,5,q}$, $C_{p+0,5,q+1}$, $C_{p+1,q+0,5}$ и неизвестных базисных функций $h_{p,q}^{(1),\mu}$, $h_{p,q}^{(2),\nu}$, $h_{p,q}^{(3),\mu}$, $h_{p,q}^{(4),\nu} \in C^1[0,1]$ с соответствующими индексами $0 \leq \mu, \nu \leq 1$, приближенное решение будет сохранять непрерывность, т.е. $\tilde{u}(x,y) \in C(\Omega)$ и $\tilde{u}(x,y) \in W_2^1(\Omega)$.

Замечание. Предложенный метод разбиения на элементы может быть обобщен также на случай сплайн-интерлинации с использованием базисных сплайнов на неравномерной сетке узлов [6].

Вывод. В работе предложен общий метод построения структуры приближенного решения краевой задачи с использованием сплайн-интерлинации функции двух переменных для построения адаптивной сетки узлов МКЭ (прямоугольные элементы), сгущающейся в окрестности точек, в которых точное решение имеет особенности.

Литература

1. Литвин О.Н. Оптимальные схемы МКЭ // Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. — Киев, 1978. — С.160-165.
2. Литвин О.Н. Обобщенная нелинейная интерполяция и решение граничных задач // Доповіді АН УРСР. Сер.А. — 1980. — №6. — С.23-29. (на украинском языке)
3. Литвин О.Н. Оптимальные координатные функции в методе конечных элементов // Дифференц. уравнения. — 1984. — 20, №4. — С 677-688.
4. Babuska I. Finite Element Method for domain with corners // Computing. — 1970. — 6, №3. — P.264-273.



5. Zienkiewicz O.C., Gago J.P.R., Kelly D.W. The hierarchic concept in finite element analysis // *Comp. Struct.* – 1983. – 16. – P.53-65.
6. Литвин О.Н. Интерлинация функций и некоторые её применения / Харьков: Основа, 2002. – 544 с. (на украинском языке)
7. Литвин О.Н., Носов К.В. Численная реализация оптимального метода конечных элементов для бигармонической задачи с краевыми условиями второго рода // *Соврем. проблемы конц. напр.: Тр. междунар. науч. конф.* – Донецк: ДонГУ, «Кассиопея», 1998. – С.151-157.

**STRUCTURE OF FINITE ELEMENT METHOD (RECTANGULAR ELEMENTS)
APPROXIMATIONS ON BASIS OF BILINEAR SPLINES
AND SPLINE-INTERLINATION**

O.N. Lytvyn , I.V. Nefedova

Ukrainian Engineering Pedagogical Academy,
Universitetskaya St., 16, Kharkiv, 61003, Ukraine, e-mail: niv_artem@mail.ru

Abstract. It is proposed the general method of constructing of the approximate solution of boundary value problem in the domain Ω . According to this method, the choice of grid nodes is done. It conserves the global continuity of the approximate solution in Ω , or the continuity of the approximate solution and its partial derivatives up to order $n - 1$ inclusively. The method essentially uses the interpolation of functions and also the interlination of functions of two variables in the system of mutually perpendicular lines (lines of rektangulation) together with the construction of basis two-order splines.

Key words: finite element method, structure approximate solution, interlination of functions, rectangular elements.



УДК 620.1.72:532.783

**ИОННАЯ АДсорбция И Ориентация Нематика
на карбиде кремния в нематической ячейке****В.С. Захвалинский, С.И. Кучеев, Н.Н. Межаков,
Э.О. Перервенко, Е.А. Пилюк**Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, 308015, Россия, e-mail: skucheev@yahoo.com

Аннотация. В экспериментах исследовались пороги светочувствительности структур типа Si/SiC/нематик/ITO и ориентация в этих структурах нематического жидкого кристалла на наноразмерных пленках карбида кремния (SiC). Установлено, что (1) для нематика Д205, используемого без дополнительной очистки, на пленке SiC формируется гомеотропная ориентация, и (2) пороги светочувствительности структур в окрестности пленки SiC превышают более чем на несколько вольт пороги над Si для свежеприготовленных структур. Особенности светочувствительности и ориентации нематика связываются с адсорбцией на развитой поверхности пленки соответственно ионной подсистемы и определенных компонент жидкокристаллического материала, эффективно формирующих гомеотропную ориентацию.

Ключевые слова: карбид кремния, нематик, ориентация, ион, светочувствительность.

Оптически адресуемые жидкокристаллические модуляторы света, базирующиеся на принципах функционирования МДП структур, являются важной частью приборов и систем амплитудной и/или фазовой обработки оптического волнового фронта [1,2]. К ориентации молекул жидкокристаллического материала [3], как среды, которая непосредственно модулирует свет, предъявляются определенные требования. В приборах дифракционного типа, одним из важных требований является отсутствие или минимизация возникновения постоянных, электрически неуправляемых, дифракционных картин, обычно возникающих на микрорельефе системы электродов или периодически расположенных пленках, ориентирующих молекулы жидкого кристалла при освещении модулятора когерентным излучением. Требование планаризации достаточно жесткое. Для контактных методов, в рамках которых в подавляющем большинстве случаев используются механически натертые органические пленки до десятых микрометра толщиной, выполнение его достаточно сложное. Поэтому поиск неконтактных методов получения (изменения) требуемой ориентации молекул жидкого кристалла на определенных участках поверхности с микронным разрешением (в плоскости) и наноразмерным рельефом по высоте, гарантирующим отсутствие дифракции, остается актуальной задачей.

Другим важным направлением расширения функциональных возможностей оптически адресуемых модуляторов света является контролируемое варьирование поверхностной проводимости участков поверхности полупроводниковой части модулятора требуемой формы и размеров с разрешением в доли микрон. Существующие методы основаны на легировании поверхности полупроводника, что значительно усложняет, и соответственно, удорожает подобные структуры.

В данной работе экспериментально рассмотрена возможность использовать наноразмерные плёнки SiC с целью изменения ориентации молекул нематического жидкого кристалла и варьирования пороговых напряжений светочувствительности структур Si/SiC/нематик/ИТО как прототипа оптически адресуемого жидкокристаллического модулятора света.

В качестве подложки в структуре использовался образец монокристаллического кремния *n*-типа проводимости с удельным сопротивлением 7,5 Ом см. Пленки SiC получали магнетронным методом в атмосфере Ar [3]. Толщина пленок SiC варьировалась временем напыления и не превышала пару десятков нанометров. Контроль толщины осуществлялся атомным силовым микроскопом [3]. Пленки SiC на поверхности Si напылялись в виде полосок, что давало возможность проводить сравнительный анализ ориентации нематика и электрооптических характеристик структуры соответствующих поверхностям SiC и Si в одной и той же структуре. Другим электродом служила плёнка окиси индия (ИТО) с натертой полиимидной плёнкой, которая обеспечивает референтную жесткую планарную ориентацию молекул жидкого кристалла.

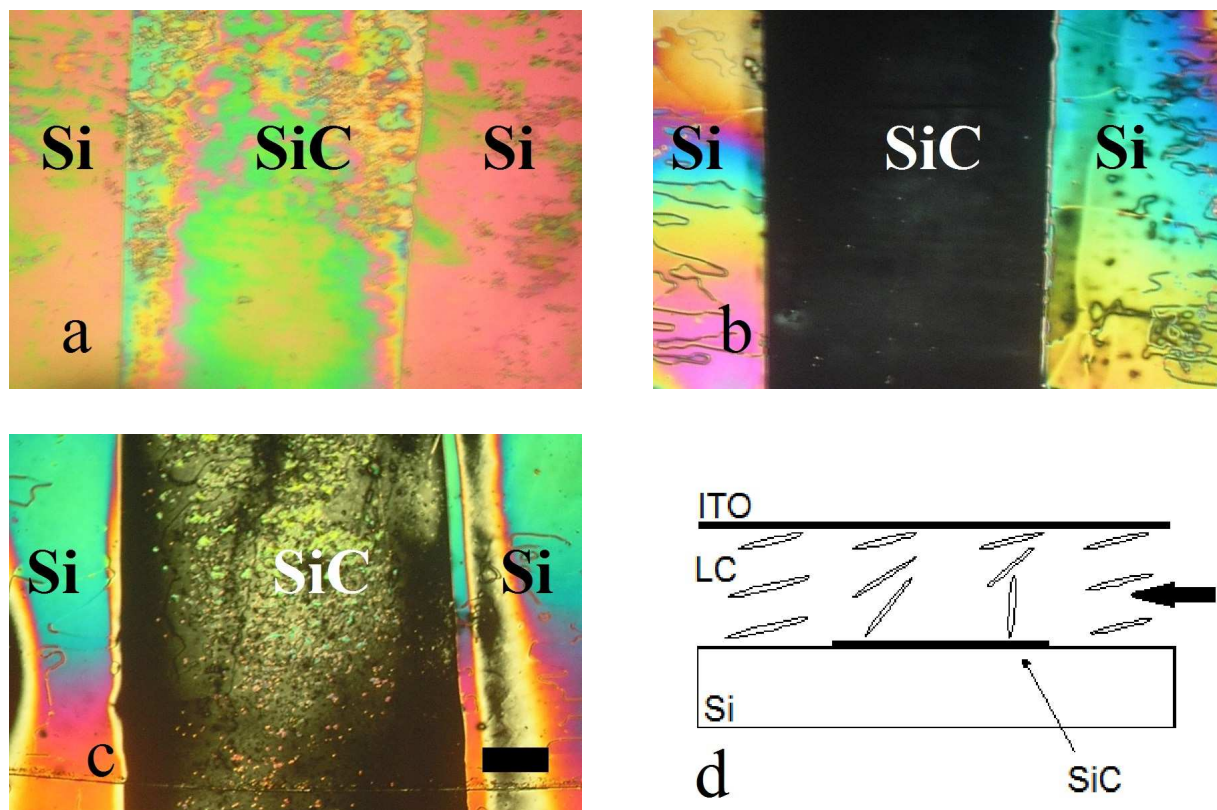


Рис. 1. Ориентация нематика в окрестности пленки SiC (Толщина 15-17 nm). а) структура Si/SiC/Д205/ИТО. Толщина жк слоя 5 мкм. б) , в) структура Si/SiC/Д205 (без покровного электрода ИТО) в окрестности ввода жк материала и на дистанции ~ 1,5 см соответственно. д) схематичное представление ориентации нематика в структуре. Стрелка указывает направление ввода жк материала. Масштаб 170 мкм.



В работе использовался нематический жидкий кристалл 4'-пентил-бифенил-карбонитрил без дополнительной очистки, который заправлялся в структуру в изотропной фазе капиллярным образом в одной точке ввода.

Поляризационные исследования ориентации нематика в структурах показали, что над пленкой SiC в сравнении с поверхностью Si имеет место изменение ориентации нематика. Эти изменения оптически регистрируются как в самой жк структуре, так и после удаления из неё стеклянного электрода ИТО. На рис. 1 представлены типичные поляризационные изображения фрагментов жк структур в окрестности пленки SiC. Хорошо видно (рис. 1а), что над пленкой SiC «оптическая» толщина жидкокристаллического слоя «тоньше», чем над поверхностью Si, что проявляется в более насыщенной цветами интерференционной картине. Удаление покровного стекла из структуры (рис. 1 б, с) подтверждает, что над пленкой SiC действительно имеет место изменение ориентации нематика и установившаяся ориентация является гомеотропной. Эта ориентация нематика более качественная в окрестности ввода жк в капилляр, но по мере удаления от точки ввода, гомеотропная ориентация ухудшается (рис. 1с).

Отметим, что на поверхности Si (рис. 1 б, с) ориентация нематика наклонная, и какой либо корреляции изменений ориентации с расстоянием от места ввода жк в капилляр не наблюдается.

Подчеркнем факт резкой границы (на дистанции менее 5 микрометров) перехода ориентации нематика от наклонной над Si к гомеотропной над SiC, что демонстрирует возможность использовать такие пленки в жидкокристаллических дифракционных приборах, принимая во внимание, что дифракция света на наноразмерных ступеньках пленок SiC отсутствует.

Формирование гомеотропной ориентации молекул жидкого кристалла на пленке SiC мы связываем с повышенной адсорбцией на её развитой поверхности [3] определённых компонент жидкокристаллического материала, природа которых пока не установлена, и которые эффективно ориентируют молекулы основного вещества.

Исследование порогов светочувствительности структур позволяет предположить, что определенная доля компонент жк материала, которые вызывают формирование гомеотропной ориентации нематика, возможно, являются ионами или имеют дипольный момент. Светочувствительность структуры, возникающая в случае обеднения поверхности Si, определялась по реакции ориентированного нематика при локальной засветке поверхности Si механически модулированным излучением He-Ne (0,6 мкм) лазера. Генерация неравновесных носителей заряда постоянным тестирующим светом минимизировалась или интенсивностью последнего или развязкой спектральных диапазонов фоточувствительности полупроводника и тестирующего излучения, заданного соответствующими светофильтрами [2].

На рис. 2 представлены типичные кривые (на примере двух структур, отмеченных как (1) и (2)) демонстрирующие зависимость порогового напряжения (постоянное смещение U_{dc} относительно Si подложки) светочувствительности структуры от её времени жизни, при тестировании её переменным напряжением. Измерение порогов проводилось в окрестности ввода жк в капилляр. По результатам экспериментов (включая другие



структуры) можно сделать вывод, что воспроизводимость пороговых напряжений U_{dc} для разных ячеек практически отсутствует. Однако можно выделить некоторые общие закономерности. Во-первых, пороги светочувствительности в одной и той же структуре в области SiC и в области открытой поверхности Si различаются, причем в большинстве случаев пороги над SiC выше, чем над Si (отмечено стрелками, рис. 2). И второе, после нескольких дней непредсказуемых, часто имеющих разнонаправленное (в сторону увеличения или уменьшения) изменение, порог U_{dc} в конечном итоге принимает некоторое постоянное значение.

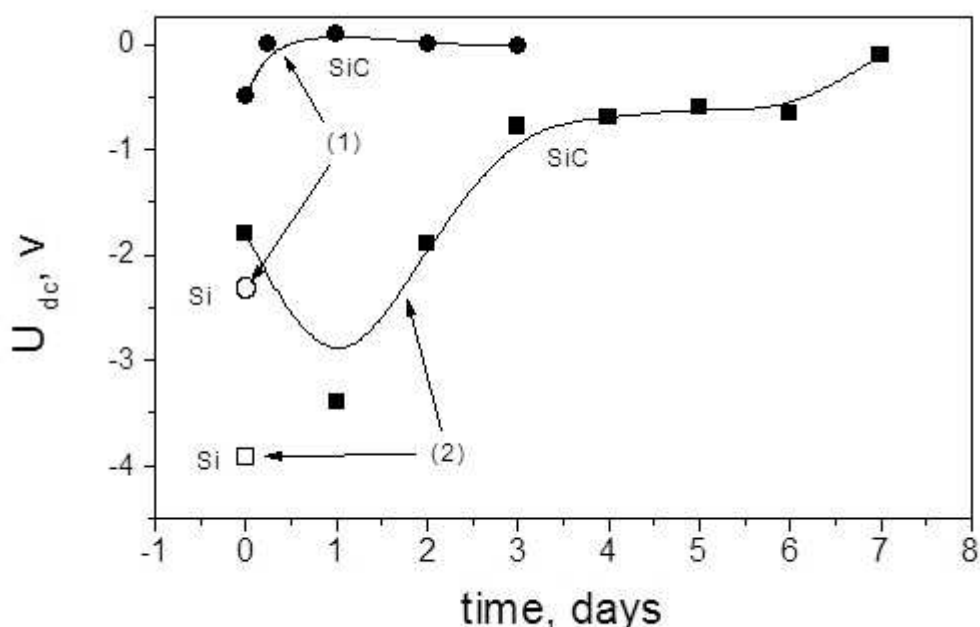


Рис. 2. Зависимость порога светочувствительности структур ((1) и (2)) над пленкой SiC и поверхностью Si соответственно от времени жизни структуры. Тестирующее напряжение 4В, частота 10^5 Гц. Толщина жк слоя 5 мкм.

Различие в порогах светочувствительности над SiC и Si, которое в свежеприготовленных структурах может достигать нескольких вольт, мы связываем с эффектом поля в Si, который индуцируется электрическим полем заряда, локализованным на пленке SiC. Именно обеднение поверхности Si играет основную роль в появлении этой разницы в порогах. Это подтверждается в экспериментах, когда обедненный слой в Si практически не формируется в случаях (1) интенсивной генерации электронно-дырочных пар (сильное внешнее освещение) или (2) значительного отрицательного смещения (~ -5 В) (относительно кремния). В обоих этих случаях светочувствительность структур не регистрируется, но при этом пороги эффекта Фредерикса, как над Si так и над пленкой SiC одинаковы.



Наличие электрического заряда локализованного на плёнке SiC, с одной стороны, мы можем объяснить встроенным зарядом, который формируется при напылении пленки. С другой стороны, явная временная нестабильность порога светочувствительности, особенно в первые дни жизни свежесобранных структур, позволяет предположить, что в дополнении к встроенному заряду имеет место ионная адсорбция из жидкокристаллического материала или адсорбция молекул с дипольными моментами, в результате чего суммарный электрический заряд на пленке «плавает» некоторый период времени.

Таким образом, на развитой поверхности пленки SiC имеет место адсорбция неустановившейся природы компонент жидкокристаллического материала, которые вызывают формирование гомеотропной ориентации молекул нематика. Динамика светочувствительности структуры Si/SiC/D205/ITO позволяет предположить факт адсорбции ионов на пленке SiC из ЖК материала.

Литература

1. Сихарулидзе Д.Г., Чилая Г.С. Преобразователи изображений типа МДП – электрооптический материал / М.: Радио и связь, 1986. – 111 с.
2. Васильев А.А., Касасент Д., Компанец И.Н., Парфёнов А.В. Пространственные модуляторы света / М.: Радио и связь, 1987. – 320 с.
3. Blinov L.M., Chigrinov V.G. Electrooptic Effects in Liquid Crystal Materials / New York: Springer Science and Business Media, 1996. – 464 с.
4. Zakhvalinskii V., Piliuk E., Goncharov I., Simashkevich A., Sherban D., Bruc L., Curmei N., Rusu M. Silicon carbide nanolayers as a solar cell constituent // Phys. Status Solidi A. – 2015. – 1. – С.184-188.

ION ADSORPTION AND ALIGNMENT OF NEMATIC ON SILICON CARBIDE IN NEMATIC CELL

V. Zakhvalinskii, S.I. Kucheev, N.N. Mezhakov,
E.O. Perervenko, E.A. Piliuk

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: skucheev@yahoo.com

Abstract. It is proposed some experimental results on peculiarities of nematic (D205) alignment without additional purification on SiC films obtained by magnetron sputtering method on Si substrate and photosensitivity of Si/SiC/nematic/ITO structures through reorientation of nematic layer. Change of initial orientation of nematic on Si surface to the homeotropic one on SiC film is explained by adsorption of specific components from liquid crystal material which have aligning properties on developed surface of SiC film. Threshold of photosensitivity over SiC film is more than over Si surface in freshmade structures. It is supposed that the difference between thresholds is due to field effect in Si substrate induced by charge on SiC originated from ion adsorption.

Key words: silicon carbide, nematic, alignment, ion, photosensitivity.



УСИЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВБЛИЗИ ЗОЛОТОЙ ОПТИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ

Мехди Зохраби

Институт физики, Казанский Федеральный Университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, Россия

Аннотация. Разработана золотая оптическая антенна. Уравнения Максвелла были решались с использованием метода конечных разностей во временной области (метод FDTD). Смоделировано напряжение электрического поля вблизи с острием в двух ситуациях — при непосредственном его освещении и при решеточном выводе поверхностного плазмона. Моделируется изменение электрического поля возбуждения лазера с длиной волны 400 - 700 нм вокруг оптической антенны. Возбуждение и конверсия плазмона в локализованный плазмон происходит на кончике острия. В этом случае локализация электрического поля рядом с острием нарастает, а величина горячей точки рядом с кончиком понижается. В локальной оптической микроскопии ближнего поля (TENOM), практическим применением этой модели являются подавление сигнала заднего плана и усиление разрешения.

Ключевые слова: усиление поля, поверхностный плазмон, золотой наконечник, локализованный плазмон, локализация света, горячая точка, моделирование методом FDTD.

1. Введение. Оптическая спектроскопия уникальным образом обеспечивает неразрушающую интраскопию и характеризацию материалов и получила широкое применение в исследованиях колебательных и электронных свойств наноструктур. Информация, которую можно извлечь, в конечном счете, зависит от чувствительной способности и разрешения оптических систем. Стандартные оптические методы, однако, ограничиваются дифракцией, которая значительно расширяет размерность пространства изображения образцов нанодиапозона. Общая цель ближнепольной оптической микроскопии состоит в расширении пространственного разрешения до величины, выходящей за рамки дифракционного предела [1,2]. Обычно, чтобы расширить спектр зондируемых пространственных частот, в ближнепольной оптической спектроскопии используются зонды, расположенные близко к образцу, который может нести исчезающие волны. Введение апертурных зондов [3] позволило формировать оптические изображения с разрешением ниже дифракционного и вызвало интерес во многих дисциплинах, в особенности, в материаловедении и биологических науках [4]. В качестве альтернативы, Весселем [5] было предложено использование металлических игл с лазерным освещением для ближнепольного формирования изображений, что стало предметом дискуссии нескольких исследовательских групп [6–12]. Сильные электрические поля, локализованные окрестностью металлической иглы увеличивают, как скорость возбуждения, так и интенсивность излучения, обеспечивая формирование изображения с высоким пространственным разрешением, а также колоссальное усиление сигнала. Универсальность этих методик позволяет изучать самые разные спектроскопические сигналы поверхностей, включая композиционное рассеяние и флуоресценцию в нанодиапозоне.

Оптические антенны усиливают локальные взаимодействия света и вещества и повышают чувствительную способность оптического обнаружения и считывания [13–18]. На-



пример, антенная оптическая микроскопия, такая как локальная ближнепольная оптическая микроскопия (tip-enhanced near-field optical microscopy, TENOM), используется для улучшения чувствительности и пространственного разрешения одномолекулярных флуоресцентных измерений [16,19-23]. Эти методы были недавно применены для формирования изображений ДНК с высоким разрешением [19-24], локализованных выведений в углеродных нанотрубках [25] и одноканальных белков в биологических мембранах [26].

Серьезным вызовом в антенной микроскопии стало то, что внешнее лазерное поле, используемое для возбуждения антенны, также непосредственно облучает образец. Это непосредственное облучение образца ведет к образованию фонового сигнала и ограничивает отношение «сигнал-помеха» измерения. Что касается образцов с высокой пространственностью и образцов с сильными колебаниями напряженности, такими как биологические системы, слабый ближнепольный сигнал полностью исчезает на фоне и больше не может быть измерен. Выдвигались различные подходы с целью ограничения этой проблемы, например, возбуждение через ограниченные апертуры [16-19] или консульной модуляции расстояние между зондом и образцом [27].

Поверхностные плазмонно-поляритонные волны распространяются в направлении кончика острия. В результате этой эффективной передачи пространственного возбуждения уменьшается размер участка возбуждения. Значительное пространственное разнесение дальнепольного возбуждения от кончика и вытекающее из этого подавление фоновых сигналов делают этот новый локальный источник оптического излучения весьма многообещающим кандидатом на применение в ближнепольной оптической микроскопии и спектроскопии.

2. Результаты и их обсуждение. Подход на основе метода конечных разностей по времени представляет собой надежный метод решения уравнений Максвелла в комплексной геометрии [28]. Этот метод обеспечивает информацию о временной области, предлагая проникнуть в суть электродинамики системы [29]. В методе конечных разностей во временной области электромагнитное поле и интересующие нас конструкционные материалы описываются на дискретной сетке, состоящей из так называемых «ячеек Йи» (Yee cells).

Все рассчитанные и изложенные значения напряженности нормализуются с учетом напряженности падающего света. При боковом освещении свет линейно поляризуется вдоль оси острия. Была использована программа "LUMERICAL", обоснованная на методе конечных разностей во временной области. Метод конечных разностей во временной области быстро стал одним из важнейших вычислительных методов в исследовании электромагнетизма с того времени, как Йи предложил его в 1966 г. [18]. В этом подходе пространство и время делятся на дискретные сегменты. Пространство сегментируется на коробчатые ячейки с электрическими полями, расположенными по краям этих коробочек, и магнитными полями, расположенными на гранях. Каждый компонент окружен четырьмя другими компонентами, и каждый H-компонент окружен четырьмя E-компонентами. Такая ориентация полей известна как «ячейка Йи», которая лежит в основе всякого FDTD-моделирования. Время квантуется на небольшие шаги, каждый из которых отображает время, необходимое полю для перехода от



одной ячейки к другой. Метод конечных разностей во временной области включает дискретизацию уравнений Максвелла, как во временной, так и пространственной области, чтобы можно было определить поля E и H в разных положениях на различных временных шагах. Метод конечных разностей во временной области может быть легко использован для моделирования рассеяния электромагнитных волн и излучения целей сложной формы, а также неравномерных диэлектрических объектов путем простой установки числа, размера и свойств материала для ячейки Y_i [19].

Была построена ближнепольная локальная модель, включая конус. Трехмерная прямоугольная сетка моделирования размером $10 \times 10 \times 5 \text{ нм}^3$ была равномерно применена в неотражающих граничных условиях идеально согласованного слоя (PML). Точка падения лазерного луча установлена на острие. Лазерный луч рассматривается как плоская волна длиной в $400\text{--}700 \text{ нм}$. Только компонент электрического поля отбирается для оценки усиления. Интенсивность света представлена площадью напряженности электрического поля, которая обладает той же тенденцией, что интенсивность света.

Усиление поля рядом с металлическими структурами нанодиапозона играет центральную роль в таких оптических явлениях, как поверхностно усиленное рамановское рассеяние (surface-enhanced Raman scattering, SERS), генерация второй гармоники (second-harmonic, SH) и ближнепольная микроскопия. Усиление происходит благодаря комбинации (интеграции) эффекта электростатического стержневого молниеотвода в связи с геометрическими особенностями заостренных структур и локализованного поверхностного плазмонного резонанса, которые зависят от длины волны возбуждения. Падающий свет приводит свободные электроны в металле в движение в направлении поляризации. Пока плотность электрического заряда в металле равна нулю в каждый момент, заряды накапливаются на поверхности металла. Когда поляризация падения становится перпендикулярной оси острия, диаметрально противоположные точки на поверхности острия имеют противоположные заряды. В итоге, наиболее отдаленный конец острия остается незаряженным, и никакого усиления поля не происходит. С другой стороны, когда поляризация падения параллельна оси острия, плотность вынужденного поверхностного заряда (the induced surface charge density) становится почти осесимметричной и обладает наивысшей амплитудой на конце острия [17, 18, 19]. Усиленное поле локализуется (ограничивается) кончиком острия во всех трех измерениях. Таким образом, освещенное острие представляет источник света в нанодиапозоне. Чтобы установить значительное усиление поля на острие, электрическое поле возбуждающего лазерного луча нужно поляризовать по оси острия. Влияние формы острия и материала на усиление поля было рассмотрено в целой серии публикаций с целью найти оптимальный вариант острия [20, 21]. В этой работе мы рассмотрели влияние формы острия на усиление поля. Мы предположили, что золотое острие должно иметь радиус кончика 10 нм и угол конусности 30° , а также цену деления дифракционной решетки 300 нм . Мы также использовали непрерывный лазер с длиной волны в интервале от 400 до 700 нм и проводили моделирование в двух разных ситуациях.

Во-первых, мы рассмотрели электрическое поле вокруг простого золотого зонда радиусом 10 нм и углом в 30° .

Мы рассмотрели кончик острия прямого освещения без дифракционной решетки и



прямого освещения дифракционной решетки. На рис. 1 показано электрическое поле вокруг острия с кончиком без дифракционной решетки и соответственно экспоненциальное затухание напряженности электрического поля по направлению оси z . На этом графике мы показали наивысшее увеличение вокруг острия зонда, и по мере увеличения расстояния от острия зонда напряженность поля падает, а на графике (2) показано это экспоненциальное падение по мере увеличения вертикального расстояния от острия

30

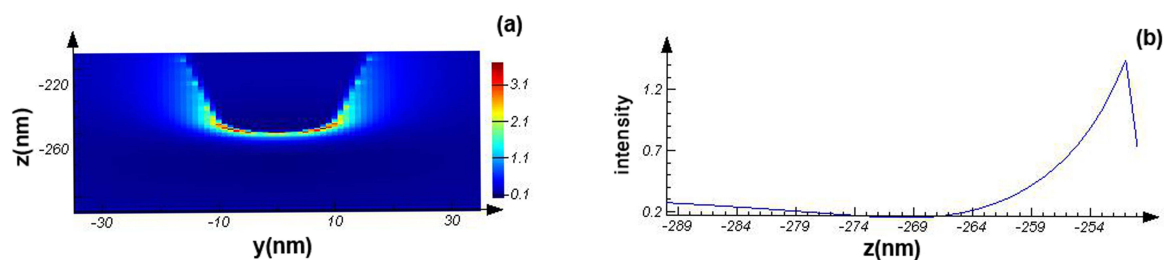


Рис. 1. (а) Усиление электрического поля рядом с золотым острием в плоскости y - z ; (б) экспоненциальное затухание напряженности электрического поля по оси z .

На следующем рисунке показано распределение усиливающегося поля в плоскости y - z . По мере увеличения расстояния от острия, повторного увеличения происходить не будет.

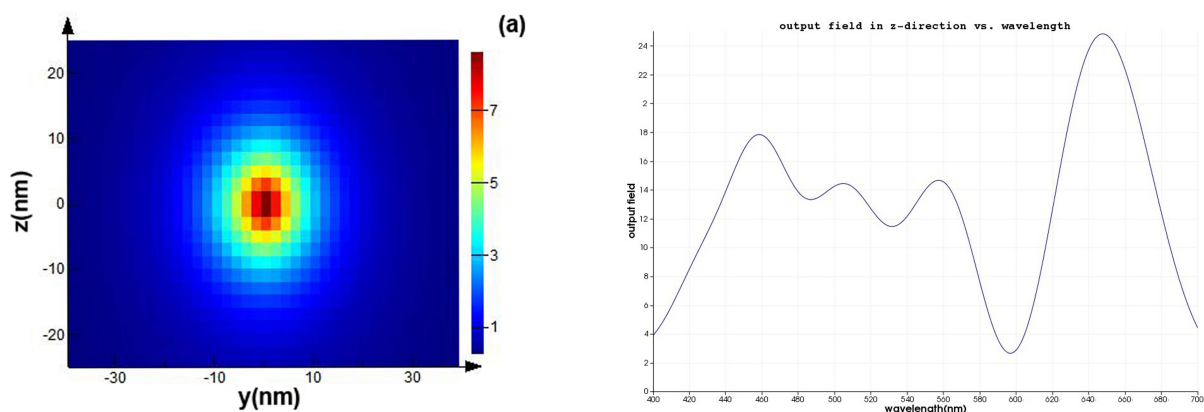


Рис. 2. (а) Усиление напряженности электрического поля в плоскости z - x , (б) по оси z для другой длины волны.

Как показано на рис. 3, напряженность электрического поля увеличивается. Причина состоит в возбуждении плазмона. В следующей ситуации мы разработали золотое острие с дифракционной решеткой, установленной на валу. Цена деления дифракционной решетки составляет 300 нм. В этом случае лазерное излучение освещает дифракционную решетку на валу острия. В этой ситуации мы смоделировали электрическое поле рядом с кончиком. Как показано на рис. 5, различные максимальные показатели связаны с возбуждениями поверхностного плазмона дифракционной решетки на валу.



В первую очередь, мы можем возбуждать поверхностный плазмон. Поверхностный плазмон перемещается к кончику и преобразуется на кончике в локализованный плазмон, так что могут быть отражены некоторые поверхностные плазмоны. Мы ожидаем, что в этой ситуации величина горячей точки рядом с кончиком будет уменьшаться. Возбуждение поверхностных плазмонов показано на рис. 4.

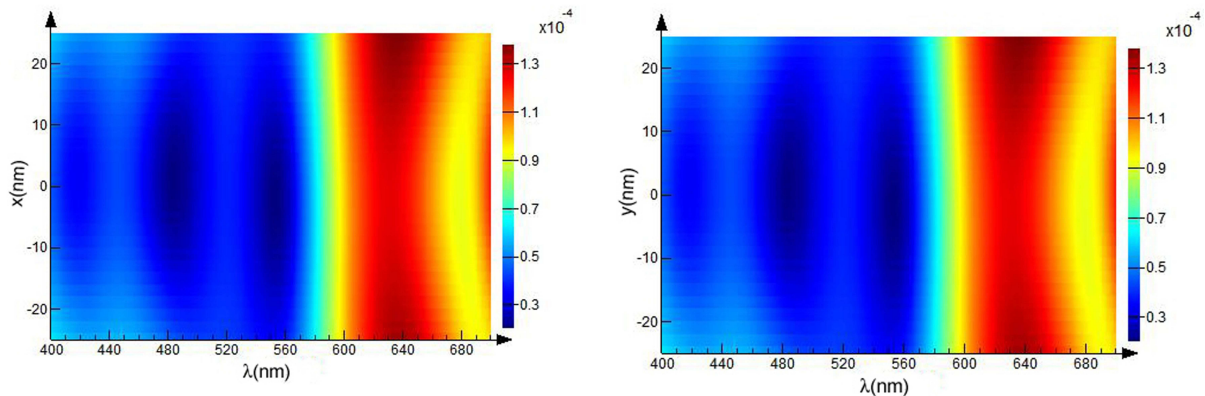


Рис. 3. Усиление электрического поля по оси x,y по отношению к длине волны.

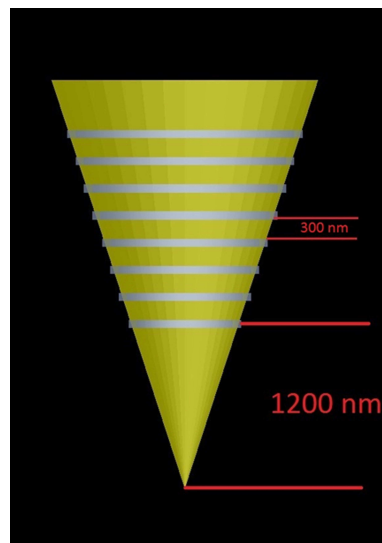


Рис. 4. Оптическая антенна.

На рис. 5 приведена зависимость длины волны от напряженности электрического поля на острие. В этом случае длина резонансной волны будет изменена из-за изменения цены деления дифракционной решетки. показано усиление электрического поля по отношению ко времени на направлении x и направлении y. На рис. 6 представлен график увеличения поля в плоскости x-y. В этом случае увеличение происходит на расстоянии, более близком к острию зонда, и может вызвать еще большую локализацию света в области ближе к кончику острия. Как показано на рис. 7, максимальное усиление электрического поля в плоскости x-y происходит при величине в $10 \cdot 10 \text{ nm}^2$. Одним



из путей применения этого подхода является увеличение разрешения в локально усиленной ближнепольной оптической микроскопии и уменьшение сигнала заднего фона.

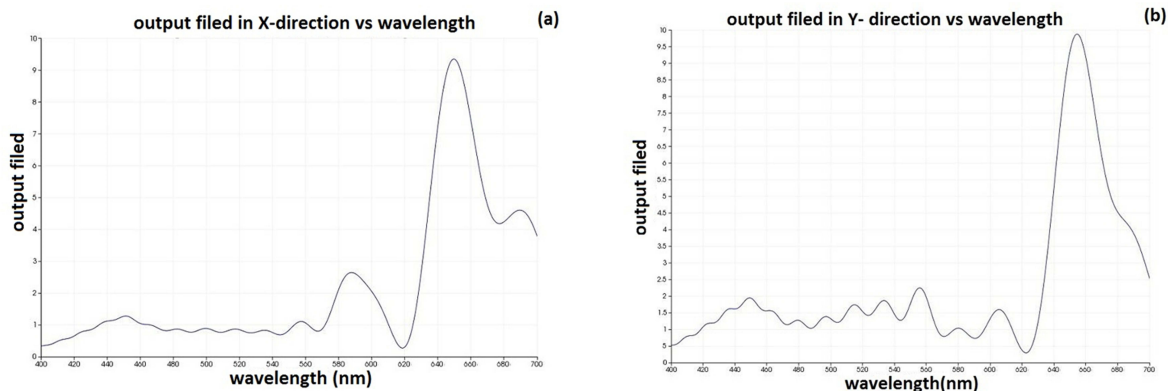


Рис. 5. Электрическое поле по отношению к длине волны (ν): (а) компоненте x электрического поля на кончике; (б) компоненте y электрического поля на кончике.

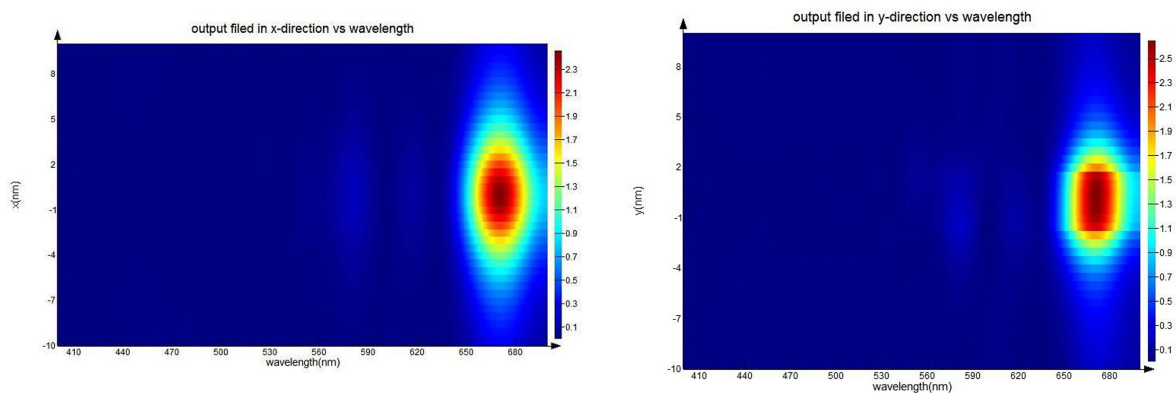


Рис. 6. Усиление электрического поля (ν): (а) – в направлении y ; (б) – в направлении x .

3. Заключение. В заключение, чтобы снизить воздействие непосредственного освещения кончика в локально усиленной ближнепольной оптической микроскопии, можно сочетать падающее излучение на рассеивающийся поверхностный плазмон с его конверсией в локализованный плазмон на кончике острия и уменьшить локализацию света на кончике острия. В результате, в ближнепольной оптической микроскопии будет увеличено разрешение, а сигнал заднего фона будет уменьшен.

Чтобы вычислить улучшение интенсивности электрического поля в близости – полевая область, в работе применен алгоритм FDTD. Таким образом, об улучшении почти области система исследования Apertureless свидетельствовали. У предложенного золотого наконечника оптическая антенна есть специальная геометрия.

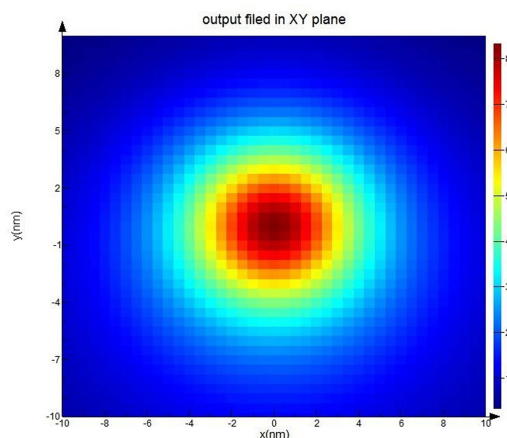


Рис. 7. Усиление электрического поля в плоскости x - y при $z=0$.

Литература

1. D.W. Pohl, W. Denk, and M. Lanz. Optical stethoscopy: Image recording with resolution $\lambda/20$. *Appl. Phys. Lett.*, 44:651–653, 1984.
2. A. Lewis, M. Isaacson, A. Harootunian, and A. Muray. Development of a 500Å resolution light microscope. *Ultramicroscopy*, 13:227–231, 1984.
3. E. Betzig and J. K. Trautman. Near-field optics: Microscopy, spectroscopy, and surface modification beyond the diffraction limit. *Science*, 257:189–195, 1992.
4. R.C. Dunn. Near-field scanning optical microscopy. *Chem. Rev.*, 99:2891–2928, 1999.
5. J. Wessel. Surface-enhanced optical microscopy. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2:1538, 1985.
6. B. Knoll and F. Keilmann. Near-field probing of vibrational absorption for chemical microscopy. *Nature*, 399:134, 1999.
7. E.J. S'anchez, L. Novotny, and X.S. Xie. Near-field fluorescence microscopy based on two-photon excitation with metal tips. *Phys. Rev. Lett.*, 82:4014, 1999.
8. S.M. Stöckle, Y.D. Suh, V. Deckert, and R. Zenobi. Nanoscale chemical analysis by tip-enhanced raman spectroscopy. *Chem. Phys. Lett.*, 318:131, 2000.
9. N. Hayazawa, Y. Inouye, Z. Sekkat, and S. Kawata. Near-field raman scattering enhanced by a metallized tip. *Chem. Phys. Lett.*, 335:369, 2001.
10. A. Hartschuh, E.J. S'anchez, X.S. Xie, and L. Novotny. High-resolution near-field raman microscopy of single-walled carbon nanotubes. *Phys. Rev. Lett.*, 90:095503–095506, 2003.
11. A. Hartschuh M.R. Beversluis, A. Bouhelier and L. Novotny. Tip-enhanced optical spectroscopy. *Philosophical Transactions: Mathematical, physical and engineering science*, pages 807–819, 2004.
12. Kawata S. and Shalaev V.M., editor. Tip enhancement. *Advances in Nano-Optics and Nano-Photonics*. Elsevier, Amsterdam, 2007.
13. Crozier K.B., Sundaramurthy A., Kino G.S., Quate C.F. *J. Appl Phys.* 2003;94:4632–4642.
14. Mühschlegel P., Eisler H.J., Martin O.J.F., Hecht B., Pohl D.W. *Science*. 2005; 308:1607. [PubMed]
15. Schuck P., Fromm D.P., Sundaramurthy A., Kino G.S., Moerner W.E. *Phys Rev Lett.* 2005; 94:017402. [PubMed]
16. Taminiau T.H., et al. *Nano Lett.* 2007;7:28. [PubMed]
17. Ghenuche P., Cherukulappurath S, Taminiau TH, van Hulst NF, Quidant R. *Phys Rev Lett.* 2008;101:116805.[PubMed]
18. Novotny L. *Nature*. 2008;455:879. [PubMed]
19. Frey H.G., Witt S., Felderer K., Guckenberger R. *Phys Rev Lett.* 2004;93:200801. [PubMed]



20. Gerton J.M., Wade L.A., Lessard G.A, Ma Z., Quake S.R. Phys Rev Lett. 2004; 93: 180801. [PubMed]
21. Anger P., Bharadwaj P., Novotny L. Phys Rev Lett. 2006;96:113002. [PubMed]
22. Bharadwaj P., Novotny L. Opt. Expr. 2007;15:14266–14274. [PubMed]
23. Ma Z., Gerton J.M., Wade L.A., Quake S.R. Phys Rev Lett. 2006;97:260801. [PubMed]
24. Anderson N., Bouhelier A., Hartschuh A., Novotny L.J. Opt. A: Pure Appl Opt. 2006; 8: S227–S233.
25. Hoepfener C., Novotny L. Nano Lett. 2008;8:642–646. [PubMed]
26. Mangum B.D., Mu C., Gerton J.M. Opt. Expr. 2008;16:6183–6193. [PubMed]
27. A. Taflove and S.C. Hagness, in Computational Electrodynamics: the Finite - Difference Time - Domain Method (Artech House, 2000).
28. B.C. Galarreta, I. Rugar, A. Young, and F. Lagugn'e-Labarthe, "Mapping hot-spots in hexagonal arrays of metallic nanotriangles with azobenzene polymer thin films", J. Phys. Chem. C 115(31), 15318–15323 (2011).

STRENGTHENING OF ELECTRIC FIELD NEAR GOLD OPTIC ANTENNA

Mekhdi Zokhrabi

Institute of Physics, Kazan Federal University, Kremlevskaya St., 18, Kazan, Russia

Abstract. Gold optic antenna is developed. Maxwell's equations have been solved by means of finite difference method along time axe (FDTD-method). It has been modeled the electric field stress near tip at two cases: at its straight illumination and at lattice withdrawal of surface plazmon. It is model the variation of electric field of laser disturbance with the wavelength 400 - 700nm round the optic antenna.

Key words: strengthening of field, surface plazmon, gold tip, localized plazmon, localization of light, hot point, FDTD-method.



УДК 537.874.7 + 538.97

МИКРОВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА МЕТАЛЛОУГЛЕРОДНЫХ НАНОКОМПОЗИТОВ С ФЕРРОМАГНИТНЫМИ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

*Л.В. Кожитов, **А.П. Кузьменко, *Д.Г. Муратов, **В.В. Родионов,
*А.В. Попкова, *Е.В. Якушко

* Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»,
Ленинский пр., 4, Москва, Россия

** Региональный центр нанотехнологий, Юго-Западный государственный университет,
ул. 50 лет Октября, 94, Курск, Россия

Аннотация. Металлоуглеродные наноконкомпозиты на основе полиакрилонитрила и соединений металлов (Fe, Ni, Co), синтезированные под действием ИК-нагревания и исследованные методами СЭМ, РФА, КРС, ИК-Фурье спектроскопии, характеризуются углеродной наноструктурированной аморфной графитовой матрицей с равномерно распределенными наночастицами металлов (10-30 нм), их оксидов и соединений — $FeNi_3$ и $FeCo$, многослойных углеродных нанотрубок (~7-22 нм), а в составе наноконкомпозита Fe-Co/C фуллероподобных образований — C_{60} . Для всех наноконкомпозитов отмечается высокий уровень поглощения ЭМ-волн в диапазоне частот 20-40 ГГц. Предложены два механизма поглощения: диэлектрические потери в аморфной углеродной матрице и рассеивание электрической и магнитной составляющей ферромагнитными включениями.

Ключевые слова: полиакрилонитрил, ИК-нагрев, металлоуглеродные наноконкомпозиты, наночастицы металлов, КР-спектроскопия, углеродные нанотрубки, ферромагнитные наночастицы, радиопоглощающие материалы, коэффициент передачи, коэффициент отражения.

Введение. Расширение частотного диапазона (до десятков ГГц), уровень развития беспроводной связи и микропроцессорной техники обострили проблему защиты информационных систем от электромагнитных помех и несанкционированного доступа. Исследования и разработки широкополосных поглотителей электромагнитных волн в СВЧ-диапазоне сосредоточены преимущественно на явлениях отражения и затухания, обусловленных комплексностью диэлектрической и магнитной проницаемостей и изменением импеданса сред [1], а также на создании поглощающих покрытий, обладающих четко выраженной наноструктурой [2–6] или состоящих из наночастиц с высоким порогом насыщения намагниченности и магнитной проницаемости [7]. Однако металлические магнитные наночастицы и поглощающие наноструктурированные покрытия не обеспечивают в широком гигагерцовом диапазоне достаточно стабильного коэффициента поглощения, так как он оказывается резонансно-зависящим от толщины покрытия и/или размеров, образующих наноструктуры. Широко исследуются нанокапсулированные материалы, состоящие из диэлектрических оболочек и магнитных ядер, которые характеризуются эффективным электромагнитным поглощением [8–13].

Работа была выполнена при финансовой поддержке стипендии Президента Российской Федерации для молодых ученых и аспирантов № СП-4341.2013.1.



В настоящей работе изучены углерод-ферромагнитные [14, 15] системы, обладающие как высокой электропроводностью, определяемой степенью упорядоченности углеродных структур и фаз, включая углеродные нанотрубки (УНТ), так и большими значениями намагниченности насыщения ферромагнитных фаз, комплексная проницаемость которых слабо зависит от частоты вследствие потерь на вихревые токи, индуцируемые электромагнитной волной.

Методика эксперимента. Образцами для исследования служили металлоуглеродные наноконпозиты Fe-Ni/C — (1), Fe/C — (2), Ni/C — (3) и Fe-Co/C — (4) на основе полиакрилонитрила (ПАН) [14, 15]. Прекурсоры для образцов 1÷3 готовились путем совместного растворения ПАН и гидрата хлорида соответствующего металла в диметилформамиде (ДМФА) с последующим удалением растворителя. Концентрация ПАН в растворе ДМФА составляла 5 вес.%, металла 20 вес.% от массы полимера. В образец 4 железо вводилось в виде ацетилацетоната ($\text{Fe}(\text{CH}_3\text{COCH}=\text{C}(\text{CH}_3)\text{O})_3$), кобальт-ацетата ($\text{Co}(\text{COOH})_2$). Пиролиз проводился в камере ИК-нагрева установки «MILA-5000». ИК-нагрев осуществлялся в двухстадийном режиме: предварительный отжиг на воздухе при 150 и 200°C по 15 мин. на каждой температурной стадии. В процессе нагрева удалялись остатки комплексно связанного с полимером растворителя и происходила первоначальная циклизация и структурирование ПАН. Основной этап ИК-нагрева производился в вакууме ($\sim 10^{-3}$ мм. рт. ст.) при температурах 500-800°C. Продолжительность основной стадии составляла 15 мин (См. таб. №1) [14].

Таблица 1: Исходные параметры прекурсоров синтеза наноконпозитов

п/п	Наноконпозит	Исходный состав	Концентрация металлов, вес.%	Соотношение металлов	Температура синтеза, °C
1	Fe-Ni/C	FeCl ₃ (гидр.)-NiCl ₂ (гидр.)/ ПАН	20	1÷1	500
2	Fe/C	FeCl ₃ (гидр.)/ ПАН	20	-	600
3	Ni/C	NiCl ₂ (гидр.)/ ПАН	20	-	500
4	FeCo/C	Fe(ац.ац.)-Co(ац.)/ ПАН	20	1÷1	800

Морфологические особенности и изменения структуры поверхностей в исследуемых материалах изучались на растровом электронном микроскопе (РЭМ) JEOL JSM-6610LV (SEM, 20кВ, до 200000×). Распределение химических элементов определялось энергодисперсионным анализатором (ЭДА) Oxford Instruments X-Max Silicon Drift Detector 20мм² с разрешающей способностью 0.1мкм. Фазовый анализ (РФА) образцов прово-



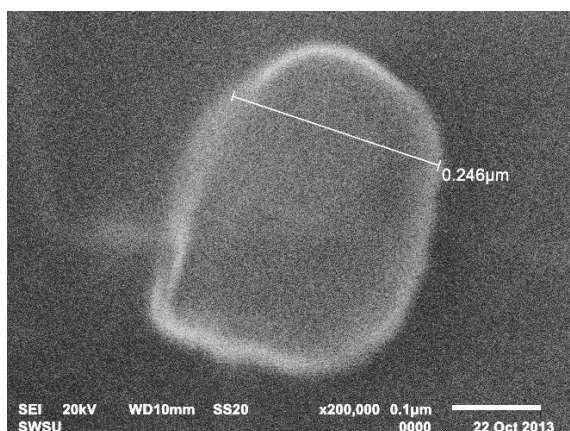
дился на порошковом дифрактометре ЕММА (60 кВ, 80 мА, Cu K_{α} , 1.54 Å). Проводимость образцов в форме пресованной таблетки (250 атм, $1.1 \div 1.6 \times 20$ мм) определялась с помощью LCR-метра Instek LCR-7821 при переменном сигнале $U=1$ В на частоте $f = 1$ кГц. Комплексный коэффициент отражения — S_{11} и комплексный коэффициент передачи — S_{21} для всех образцов были измерены с помощью векторного анализатора цепей Anritsu Wiltron 37369A в объемном резонаторе (28WCAK, КСВН=1.30), который обеспечивал выделение и детектирование уровней падающей и отраженной волн электромагнитного излучения, прошедших и отраженных от образца. Перед началом измерений экранирующих характеристик производилась калибровка Anritsu Wiltron 37369A по стандартной методике. Исследуемые пакетированные в полиэтилен порошки плотно заполняли резонатор. В диапазоне частот 20–40 ГГц были получены абсолютные величины частотных зависимостей S_{21} (RL) и S_{11} как коэффициента отражения стоячей волны по напряжению (КСВН).

Результаты и обсуждения. По данным растровой электронной микроскопии (РЭМ) и энерго дисперсионного анализа (ЭДА) углеродные частицы обладают преимущественно вытянутой формой размерами 0.5 – 1.0 мкм, тогда как образования со сфероподобной формой, в соответствии с данными ЭДА являющиеся металлическими включениями, имеют размеры от 50 до 200 нм (Рис. 1 а – г). По данным элементного состава (в атомных массах) исследуемых образцов 1 и 4 (Табл. 2) после термической обработки атомное содержание всех порошковых образцов Fe–Ni, Ni, Fe и Fe–Co понижается с 20 % в исходном состоянии до 16.4, 3.6, 5.5 и 3.1%, соответственно.

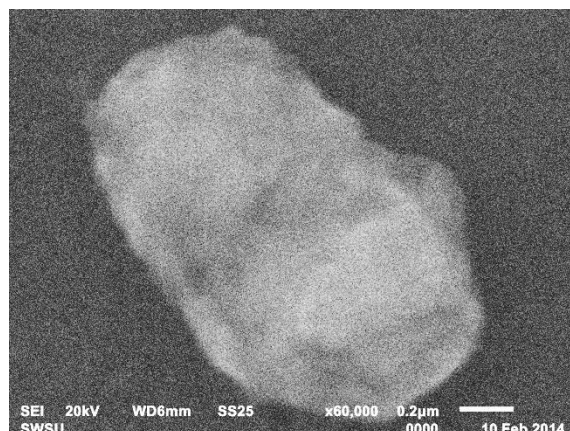
Таблица 2: Данные энергодисперсионного анализа

Номер образца	Распределение элементов, в атомных массах					
	C	N	O	Fe	Co	Ni
1	50.2	19.9	13.6	8.6	0	7.8
2	63.9	20.4	12.1	3.6	0	0
3	65.3	22.3	7.0	0	0	5.5
4	96.9	0	0	1.5	1.6	0

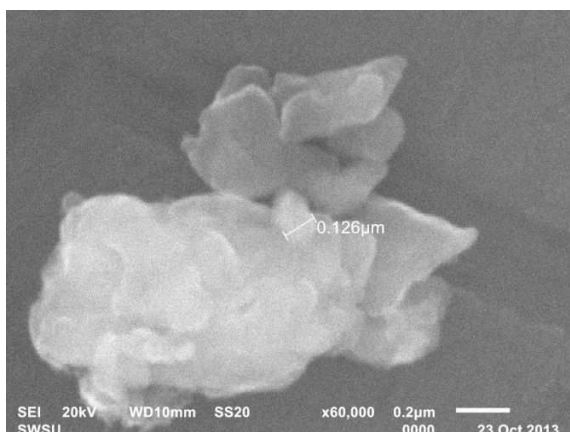
Результаты РФА представлены в виде дифрактограмм (Рис. 2 а – г). Для образцов 1 и 4 отмечается формирование дифракционных максимумов на углах $2\Theta = 26.6$ и 26.2° , характерных для гексагональной структуры графита с межслоевым расстоянием d равным 3.40Å и 3.35Å от плоскостей (002) и (004), соответственно, тогда как для образца 3 в диапазоне $15 - 30^\circ$ можно говорить о формировании аморфного гало. Рефлексы $2\Theta = 43.32$ и $2\Theta=44.76^\circ$ в образцах 2 и 3 соответствуют кубическим решеткам железа ($d=2.01\text{Å}$) и никеля ($d=1.95\text{Å}$), а рефлексы $2\Theta = 33.0^\circ, 35.7^\circ, 37.1^\circ$ и $44.9^\circ, 45.0^\circ$ – соединениям железа — Fe_2O_3 и FeC , а $2\Theta = 37.0^\circ, 43.1^\circ$ и $44.9^\circ, 45.1^\circ$ – никеля – NiO и Ni_3C , соответственно, что согласуется с данными [2, 8]. Максимумы $2\Theta=25.9^\circ, 43.0^\circ$ (рис. 2, в) соответствуют плоскостям (002) и (100) гексагональной структуры с



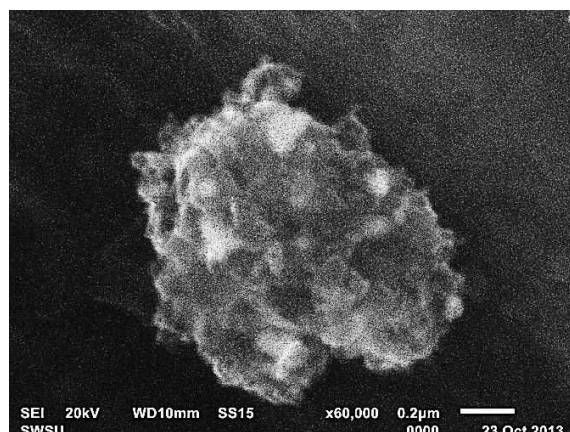
а)



б)



в)



г)

Рис. 1: РЭМ изображения углеродных композитов с вclusions металлических частиц: а) Fe-Ni; б) Fe; в) Ni; г) Fe-Co (60000× – 200000×).

параметрами 3.53Å и 2.26Å , что характерно для материалов, содержащих углеродные нанотрубки и, вероятно, обусловлено наличием значительного количества свободных атомов Ni в реакционной камере при ИК-нагреве, способных вызывать рост углеродных нанотрубок из газообразных углеродсодержащих компонентов [10]. Особо выделяется дифрактограмма для образца 4, на которой, помимо гало углеродной матрицы с максимумом $2\Theta = 26.6^\circ$, содержатся линии $2\Theta = 44.8^\circ$ и меньшей интенсивности $2\Theta = 65.5^\circ$ (Рис 2, г), отвечающие ОЦК-решетке соединения «железо–кобальт» с межплоскостными расстояниями 2.01Å и 1.42Å от плоскостей (110) и (200) [2, 3]. Возникновение на дифрактограммах образцов 1÷3 рентгенофазового гало указывает на высокую степень аморфности матрицы. В то же время, для образца 4 наблюдается более четкий максимум, а также гало отличается меньшей степенью размытости, что указывает на более упорядоченную структуру углеродной матрицы нанокompозита. С ростом температуры синтеза нанокompозитов (800°C) сохраняется четкая кристаллическая структура для

сплава Fe–Co, при этом увеличивается интенсивность линии, отвечающей углеродной графитоподобной матрице.

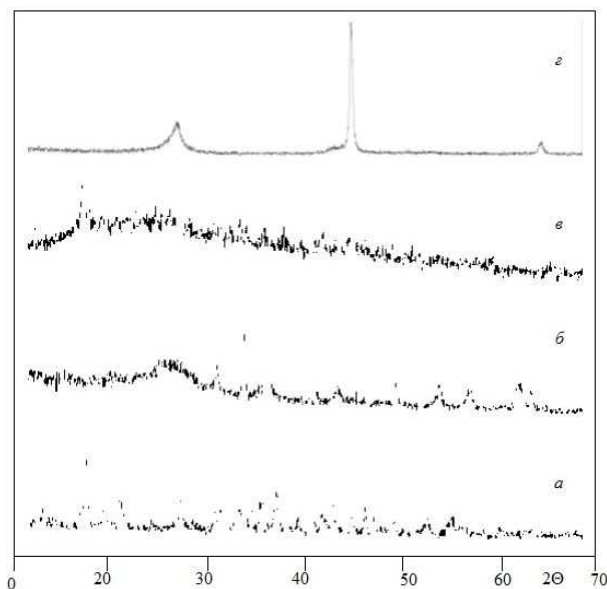


Рис. 2. РФА углеродных композитов (образцы 1–4), с включениями металлических частиц: а) Fe – Ni; б) Fe; в) Ni; г) Fe – Co.

На основании результатов РФА и СЭМ+ЭДА можно утверждать, что металлоуглеродные нанокompозиты представляют собой наночастицы металлов (сплавов) либо оксидов, распределенных в углеродной матрице с различной степенью аморфности, что определяется как условиями процесса синтеза, так и химическим составом металлической составляющей нанокompозита.

Особенности химической структуры углеродной матрицы, составляющей наибольшую часть массы нанокompозита, изученные методом комбинационного (Рамановского) рассеяния света (КРС) представлены на рис. 3. Во всех образцах отмечалось возбуждение тангенциальных колебаний атомов углерода в плоскости графитового слоя G-полоса в области $1500 \div 1600 \text{ см}^{-1}$, что в ряде публикаций относят к наличию углеродных нанотрубок (УНТ) или аналогичных углеродных образований, характеризующихся сильным искривлением графеновых плоскостей [9, 10]. Степень упорядоченности структуры графита определяется четкостью формы и интенсивностью G-полосы, что характерно только для образца 4. Интенсивность возбуждений в D-полосе в диапазоне $1300 \div 1400 \text{ см}^{-1}$ в 1–3 образцах доминировала, что свидетельствует о высокой дефектности плоскостных образований, т. е. степени аморфизации графитового слоя, обусловленной нерегулярным смещением или искривлением углеродных плоскостей, состоящих из sp^2 -гибридизованных атомов углерода. Это согласуется с данными РЭМ (Рис. 1). Для характеристики степени упорядоченности углеродных структур используется отношение интенсивностей полос I_D/I_G . Сравнение полученных таким образом величин демонстрируют данные таб. 3. Наибольшим упорядочением отличается образец 4 (Fe–Co). Для образцов с 1 по 3 отмечается расширение G-полосы за счет возбуждения



близких по частоте колебаний. К примеру, для образца 3 — 1487, 1509, 1530 и 1576 см^{-1} , по разнице между которыми можно оценить диаметры УНТ: $1/\Delta\omega \sim$ от 6.6 до 22 нм. Такое вырождение в форме G-полосы говорит о многостенной форме УНТ и металлической электропроводности. Для всех исследованных образцов в области низких частот обнаруживаются радиальные колебания УНТ (RBM-полоса на вставке к рис. 3), что указывает на существование одностенных УНТ, так как радиальные колебания соседних атомов углерода в многостенных УНТ невозможны. Диаметр УНТ обратно пропорционален частотам в RBM-полосе [10]. Для всех образцов в RBM-полосе возбуждается ряд линий (три и более) в диапазоне $480 \div 672 \text{ см}^{-1}$. Приняв во внимание, определенный по расширению в G-полосе для образца 3 наименьший диаметр УНТ — 6.6 нм, и выводы [10] ($\omega_{RBM} \sim A/d + B$, где A и B — эмпирические постоянные, а d — диаметр УНТ) можно ожидать образование УНТ с d более 10 нм (вставка на рис. 3).

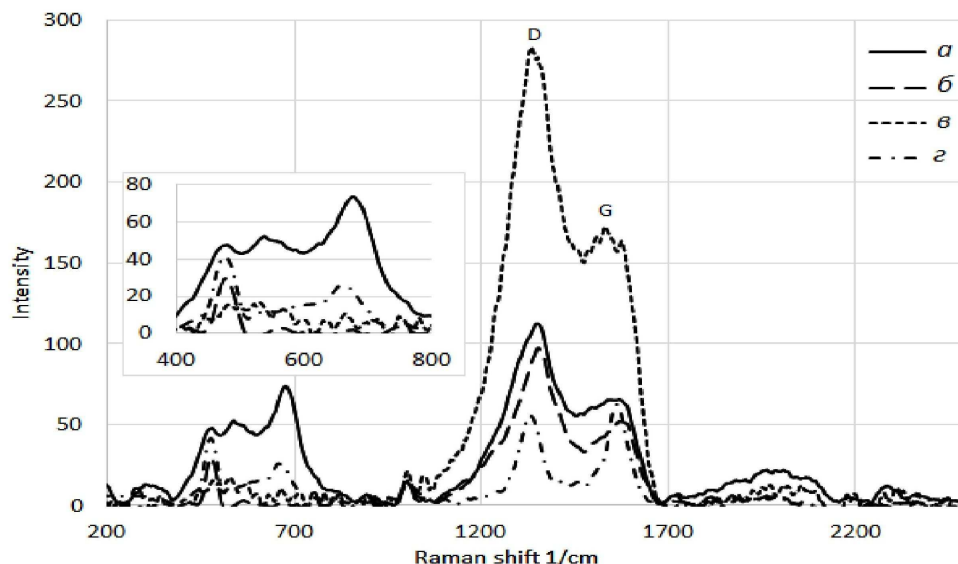


Рис. 3. КРС углеродных композитов 1–4, с включениями металлических ферромагнитных частиц: а) Fe – Ni; б) Fe; в) Ni; г) Fe – Co.

Таблица 3: Аморфизация образцов, рассчитанная по G- и D- полосам

Образцы	G		D		Степень аморфизации
	Волновое число, см^{-1}	Интенсивность, отн. ед.	Волновое число, см^{-1}	Интенсивность, отн. ед.	
1	1571.4	280.9	1356.6	323.1	1.15
2	1559.3	156.5	1359.6	203.7	1.30
3	1529.6	441.5	1344.4	538.8	1.22
4	1561.1	154.5	1329.9	146.5	0.95



Электрические характеристики исследуемых образцов (сопротивление, индуктивность, емкость, тангенс угла потерь и добротность) были изучены LCR-метром Instek LCR-819. Проводимость порошковых образцов 1÷3 оказалась порядка 1×10^{-6} См/м, то есть была близкой по значениям к диэлектрической, тогда как для образца 4–2 См/м — была близкой к металлической. Столь существенная разница определяется как степенью упорядоченности углеродной матрицы нанокompозита, так и отсутствием окисных форм металла. Комплексность диэлектрической и магнитной проницаемости среды: $\varepsilon^* = \varepsilon' - i\varepsilon''$ и $\mu^* = \mu' - i\mu''$ определяет как эффективность СВЧ-поглощения по величине мнимых составляющих ε'' и μ'' , так и передачи электромагнитной энергии по действительным — ε' и μ' . В режиме согласованного импеданса: свободное пространство Z_0 (вакуум, воздух) и внешний слой поглотителя $Z_{\text{пог}}$ имеет место слабое отражение электромагнитных волн от поверхности материала диэлектрическая и магнитная проницаемости совпадают $\varepsilon^* = \mu^*$ и по величине приближаются к единице. Таким условиям вполне могут удовлетворять пористые или композитные материалы. Коэффициент отражения RL в СВЧ-диапазоне для них: $RL = 20 \log |(Z_{\text{пог}} - Z_0)/(Z_{\text{пог}} + Z_0)|$ [11], что делает возможным создание из них экранирующих покрытий с высокой электропроводностью. Релаксационные потери $P_{\text{рлп}}$, очевидно, будут обусловлены дипольной поляризацией диэлектрика, что происходит потому, что скорость поляризации P заведомо отстает от скорости изменения электрического поля E излучения: $k_l a = ka(\varepsilon\mu)^{-1/2}$, где k_l и k — волновые векторы, a — радиус сферической поверхности, ε и μ — проницаемости среды. Величина потерь характеризуется работой $W_{\text{рлп}}$, затрачиваемой переменным электрическим полем на поляризацию единицы объема диэлектрика: $P = \int (r - R)d^3r$, здесь — электронная плотность, R — радиус частицы. Величина P , к примеру, для одного атома Ni мала и составляет 1.11×10^{-30} Кл×м [12]. Однако ситуация изменяется, при переходе к наноразмерам и еще более сильно к кластерным образованиям, которые возникают в исследуемых образцах (Рис. 1). С учетом реально наблюдаемых размеров кластеров — до нескольких мкм, величина P для агломератов металлических частиц может на несколько порядков возрасти. Существенной становится ферромагнитная природа используемых частиц металлов (Fe, Ni и Co), которым свойственно возбуждение вихревых поверхностных токов Фуко, тем более в СВЧ-диапазоне за счет скин-эффекта. Глубина проникновения СВЧ-излучения: $\delta = (\pi f \xi \sigma)^{-1/2}$ [6], где f — частота СВЧ, $\xi = \mu_0 \mu^*$, σ — электропроводность, может быть рассчитана с учетом размеров капсулированных в углеродной оболочке ферромагнитных наночастиц [9], которые по данным просвечивающей электронной микроскопии, составляют ~ 10 -50 нм, так и области ими занимаемой по Результатам РЭМ — несколько сотен нм (рис. 1, а и б). Исходя из данных предпосылок δ была оценена по значениям магнитной проницаемости μ^* для углеродной оболочки равной 1, а для ферромагнитных частиц 10^3 , электропроводности σ для углерода и частиц составили 1 и 10^7 См/см. В исследованном диапазоне частот $f = 2 \times \div 4 \times 10^{10}$ Гц, δ для углеродной оболочки — 1 см, а для ядра — 100 нм. Таким образом, рассеяние микроволновой энергии носит объемный характер.

На рис. 4 показаны амплитудно-частотные характеристики (АЧХ S_{21} для всех изученных образцов, полученные на Anritsu Wiltron 37369A. Видно, что величина S_{21} для образцов с диэлектрической проводимостью является довольно низкой с пиковыми зна-



чениями – 8.68 для образца 1, 12.93 – 2 и 7.07 дБ – 3 в частотном диапазоне 20–40 ГГц. Отметим, что при величине поглощения 20 дБ значения микроволновой энергии уменьшаются на 99% [6]. Таким образом, обнаруженные в образцах 1–3 величины S_{21} можно считать вполне приемлемыми. Образец 4, показавший хорошую проводимость, обладает СВЧ-поглощением со значением, характерным для металлов: более 40 дБ во всём исследуемом диапазоне [1]. То есть S_{21} резко отличается. Качественное объяснение наблюдаемых особенностей в спектрах СВЧ-поглощения (Рис. 4) применительно к образцам 1–3 и 4, видимо, обусловлено разными механизмами.

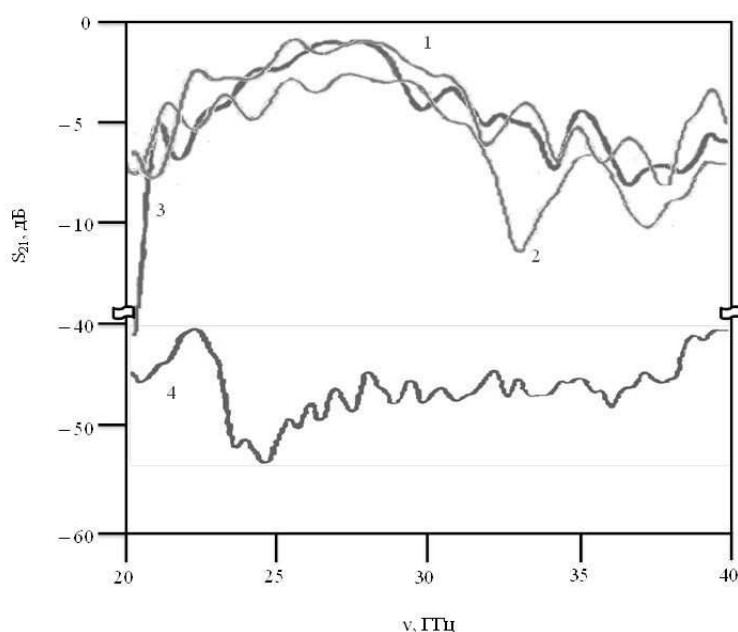


Рис. 4. АЧХ коэффициента передачи для углеродных композитов №1–4, с включениями металлических частиц: 1–Fe/Ni; 2–Fe; 3–Ni; 4–Fe/Co.

Для образцов первой группы (образцы 1–3) СВЧ-поглощение вызывается вкладом как диэлектрических потерь в сильно аморфной углеродной матрице, содержащей продукты пиролиза ПАН, обладающей низким значением электропроводности, так и рассеянием электрической и магнитной составляющей падающей электромагнитной волны ферромагнитными включениями. Собственное поглощение твердофазными полярными комплексами в углеродной матрице нанокompозитов, содержащей продукты пиролиза ПАН, при прохождении СВЧ-излучения, когда исключались ионизация (энергия меньше $E_{\text{ион}}$) и электронная поляризация (частота меньше 10^{13} ГГц), может быть вызвано только резонансными явлениями в исследуемом диапазоне частот (20–40 ГГц), что подтверждается видом спектра СВЧ-поглощения (Рис. 4). По данными ИК-спектроскопии, полученным на ИК-Фурье спектрометре iS50 в среднем диапазоне, в образцах 1–3 наблюдалось поглощение на близких частотах в интервалах: $500 \div 800$, $840 \div 1600$, $1700 \div 2400$ и $2900 \div 3600$ см^{-1} , которые соответствуют колебаниям УНТ и различных комплексов с ними связанных [11]. Очевидно, что интенсивность



возбуждаемых вихревых токов (плотностью j) возрастает с ростом проводимости, также как и величина пондеромоторной силы в переменном магнитном поле (Н) СВЧ-излучения: $F = \mu_0 \mu j H$, которая приводит к упругим колебаниям в системе «нанолуглеродные структуры-ферромагнитные наночастицы», в частности, на УНТ, наличие которых предположительно установлено по результатам КРС (Рис. 3). Таким образом, поглощение в образцах 1-3 может быть обусловлено резонансным поглощением комплексов [9] «углеродные структуры – ферромагнитные частицы» при совпадении частоты их собственных колебаний ω_0 с частотами СВЧ-излучения: $\omega_0 = (1/2\pi)(\gamma/m)$, где γ – жесткость, а m – масса УНТ, оценка которых указывает на их совпадение с СВЧ-частотами.

СВЧ-поглощение для образца 4 оказалось наибольшим при f – частоте СВЧ 24.27 ГГц и достигло 52.83дБ. Отметим, что этот композит обладает значениями электропроводности, характерной для полупроводников (2 См/м). ИК-Фурье спектр этого образца во многом согласуется со спектром C_{60} [9], в нем возникает самая интенсивная линия поглощения: 530 см^{-1} . Также образование фуллеренов либо подобных им структур при 800°C подтверждается и наличием соответствующей линии в спектре КРС (Рис. 4) – 1460 см^{-1} . Таким образом, комплекс «углеродные структуры – ферромагнитные частицы» в образце 4 может приводить к экранированию для СВЧ-излучения. Учитывая, что удельная намагниченность насыщения системы наночастиц FeCo на 80% выше, чем у FeNi: 210 и 120 Гс/г [4], соответственно, потери на вихревые токи должны быть дополнены гистерезисными магнитными потерями из-за перемагничивания в ферромагнитных включениях.

Заключение. Таким образом, показано, что металлоуглеродные наноконкомпозиты с ферромагнитными металлическими включениями, полученные под действием ИК-нагрева, являются эффективными поглотителями ЭМ-излучения. Установлено, что введение ферромагнитных наночастиц в углеродные наноструктурированные матрицы увеличивает коэффициент СВЧ-поглощения во всех исследуемых образцах. Экспериментально установлено, что СВЧ-поглощение в практически значимом динамическом диапазоне может быть обусловлено, как составом и структурой углеродной матрицы, так и включениями ферромагнитных наночастиц.

Литература

1. Островский О.С., Одаренко Е.Н., Шматько А.А. Защитные экраны и поглотители электромагнитных волн // Физическая инженерия поверхности. – 2003. – №2. – С.161–173.
2. Lu Wei, Ping Huang, Chenchong He, Biao Yan XRD, SEM and XAS Studies of FeCo Films Electrodeposited at Different Current Density // Int. J. Electrochem. – 2013. – 8. – P.914–923.
3. Lee G.H., Lee G.H., Huh S.H., Jeong J.W. Structural and magnetic properties of bimetallic FeCo nanoclusters // Journal of the Korean Physical Society. – 2003. – 42. – P.367–370.
4. Meshcheryakov V.F., Fetisov Y.K. et al. Magnetic and microwave properties of nanocomposite films on the basis of Fe–Co–Ni particles of various shapes // Journal of applied physics. – 2008. – 104. – P.063910–1 – 063910–8.
5. Bayrakdar H. Electromagnetic propagation and absorbing property of ferrite-polymer nanocomposite structure // Progress In Electromagnetics Research. – 2012. – 25. – P.269–281.



6. Jingbo Guo, Yuping Duan, Lidong et al. Electromagnetic and Microwave Absorption Properties of Carbonyl–Iron/Fe₉₁Si₉ Composites in Gigahertz Range // *Journal of Electromagnetic Analysis and Applications*. – 2011. – 3. – P.140 – 146.
7. Yan S.J., Yan S.J., Zhen L., Xu C.Y. Synthesis, characterization and electromagnetic properties of Fe_{1-x}Co_x alloy flower-like microparticles // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. – 2011. – 323. – P.515–520.
8. Jingjing Jiang, Han Wang, Huaihong Guo et al. Microwave absorption properties of Ni/(C, silicides) nanocapsules // *Nanoscale Research Letters*. – 2012. – 238. – P.1–7.
9. Dong X.L., Dong X.L., Zhang Z.D., Jin S.P., Kim B.K. Carbon-coated Fe–CoC nanocapsules prepared by arc discharge in methane // *Journal of Applied Physics*. – 1999. – 86. – P.6701–6706.
10. Удовичкий В.Г. Методы оценки чистоты и характеристики свойств углеродных нанотрубок // *Физическая инженерия поверхности*. – 2009. – №4. – С.351–373.
11. Kim U.J., Liu X.M., Furtado C.A. et al. Infrared-Active Vibrational Modes of Single-Walled Carbon Nanotubes // *PRL*. – 2005. – 95. – 157402–1–157402–4.
12. Han Z., Li D., Wang H. et al. Broadband electromagnetic-wave absorption by FeCo/C nanocapsules // *Applied physics letters*. – 2009. – 95. – P.023114–1 – 023114–3.
13. Astakhov M.V., Muratov V.A., Frantsuzov A.A. Natural frequencies of vibration of fine particles and interaction of the particles with electromagnetic radiation // *J. Phys.: Condens. Matter*. – 1995. – 7. – P.4565–4571.
14. Кожитов Л.В., Козлов В.В., Костикова А.В., Попкова А.В. и др. Новые металлоуглеродные наноконпозиты и углеродный нанокристаллический материал с перспективными свойствами для развития электроники // *Известия Вузов. Материалы электронной техники*. – 2012. – №3. – С.60–68.
15. Kozhitov L.V., Kuzmenko A.P., Kozhitov S.L. Influence of the ratio of metal composed nanocomposites Fe–Co/C on phase composition // *Journal of Nano- and Electronic Physics*. – 2013. – 5, №4. – P.040007–1 – 040007–4.

MICROWAVE PROPERTIES OF METAL-CARBON NANOCOMPOSITES WITH FERROMAGNETIC METALLIC INCLUSIONS

*L.V. Kozhitov, **A.P. Kuzmenko, *D.G. Muratov, **V.V. Rodionov, *A.V. Popkov
*E.V. Yakushko

*National University of Science and Technology "MISIS
Leninsky Av., 4, Moscow, Russia

**Regional Nanotechnology Center of Southwest State University,
October St., 50, Kursk, Russia

Abstract. Metalcarbon nanocomposites based on polyacrylonitrile and metal compounds (Fe, Ni, Co), synthesized under the influence of infrared heating and investigated by SEM, XRD, Raman, IR spectroscopy are characterized by carbon graphite nanostructured amorphous matrix with homogeneously distributed metal nanoparticles - FeNi₃ and FeCo (10-30 nm), MWCNT (~7-22 nm), and C₆₀. It is shown high absorption of EM waves in the frequency range 20-40 GHz. Two mechanisms of absorption: dielectric losses in the amorphous carbon matrix and dispersion of the electric and magnetic component of ferromagnetic inclusions are proposed.

Keywords: polyacrylonitrile, infrared heating, metalcarbon nanocomposites, metal nanoparticles, Raman spectroscopy, carbon nanotubes, ferromagnetic nanoparticles, absorbing materials, the gain, the reflection coefficient.



ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика» выходит четыре раза в год. В журнале печатаются статьи по всем направлениям чистой и прикладной математики (за исключением текстов, имеющих чисто компьютерное содержание и вычислительной эмпирики).

Редколлегия журнала принимает от авторов рукописи статей, написанные на русском или на английском языках. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора(ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором(ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности и с таким расчетом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором(ами) направлению исследований, но более широкому кругу математиков. Ни в коем случае рукопись не должна представлять собой краткий отчет о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи. В связи с этим, рукопись должна быть структурирована — разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае, рукопись должна содержать введение и заключение. Разделы должны быть пронумерованы и иметь заголовки.

Во введении должны быть описаны: проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объеме физико-математического знания, представлены краткая история вопроса и полученный автором(ами) результат. В заключении работы должна быть дана характеристика полученного результата с указанием его значения для дальнейшего развития темы исследования.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются и для обзорной статьи, с той лишь разницей, что их содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Возможна также публикация статьи, носящей методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается редколлегией отдельно.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в чисто математических текстах должны быть четко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объем рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата А4. Она должна быть написана шрифтом 12pt через два интервала. Объем обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлегией журнала.

После подготовки одним из членов редколлегии заключения о соответствии рукописи нормам журнала «Научные ведомости» она рассматривается на общем собрании редколлегии. В отдельных случаях редколлегией может быть принято решение о более тщательном изучении рукописи внешним (не входящим в состав редколлегии журнала) рецензентом. Редколлегия оставляет за собой право на мелкие стилистические исправления текста рукописи после принятия решения о её публикации.

В редакцию присылается следующая информация:

1) основная содержательная часть статьи, представляемая на русском или английском языках. При этом название статьи должно состоять не более чем из 20 слов.

2) индекс MSC (см. Mathematical Subject Classification) того научного направления, которому посвящена статья;



- 3) список авторов с указанием порядка их размещения при публикации статьи;
- 4) аннотация на русском языке; её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;
- 5) список ключевых слов (не более 10-12);
- 6) текст перевода заголовка статьи, аннотации и ключевых слов на английском языке;
- 7) список литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;
- 8) данные об авторах статьи с указанием места их работы, точного почтового адреса предприятия. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить также на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;
- 9) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи.

Порядок оформления этой информации в электронном файле указан в приложении в конце настоящих правил (см. п.5) требований к электронному набору).

В редакцию присылается электронный файл работы. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). **Файлы, приготовленные в другом редакторе, рассматриваться редколлегией не будут.** При этом нужно присылать файл работы с расширением «tex» и pdf-копию файла с расширением «dvi» работы, для того, чтобы редакция имела возможность сравнения его с авторским оригиналом при редактировании и верстке журнала. Присылать сам dvi-файл при этом не нужно.

Особые требования к электронному набору в редакторе LaTeX (и тому подобным редакторам) следующие.

- 1) Нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды.
- 2) «Выключные» формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерации соответствующих номеров формул в тексте. Допускается применение для меток формул цифр, снабженных штрихами (или цифр совместно с буквами латинского алфавита). Однако этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста.
- 3) В случае, если в статье имеются разделы в виде *приложений* в конце основного текста работы, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть независимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложения. Каждый из разделов-приложений начинается словом ПРИЛОЖЕНИЕ с порядковым номером этого приложения. Это слово должно быть выровнено по правому полю страницы. Затем следует заголовок этого приложения.
- 4) Литературные источники в ссылках на основе команд cite (или непосредственно) в электронном тексте рукописи нужно обозначать цифрами, соответствующими их порядковому номеру появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.
- 5) Ниже прилагается шаблон, согласно которому должен оформляться файл статьи. Для авторов **следование этому шаблону обязательно.**



Шаблон для приготовления файла с рукописью

```

\setcounter{figure}{0}
\setcounter{equation}{0}
MSC XXX (по индекс научного направления Mathematical Subject Classification)
\vskip 0.3cm

\begin{center}
{\bf НАЗВАНИЕ СТАТЬИ}
\medskip
{\bf И.О. Автор1, И.О. Автор2, ... }
\medskip
{\small {\sf Учреждение, \\
ул. Название улицы (пр. Название проспекта, пл. Название площади и т.д.),
Номер дома, Город, Индекс, Страна, e-mail: \underline{имя@адрес}}}}
\end{center}

{\small {\bf Аннотация.} Текст аннотации.}
\medskip
{\bf Ключевые слова:} слово1, слово2, ... \ .}
\vskip 1 cm

Текст статьи
\vskip 1 cm

\renewcommand\baselinestretch{0.6}

{\small
\centerline{{\bf Литература}}}

\def\sk{\vskip - 0.25cm}

\begin{enumerate}
\bibitem{1}      Источник 1
\bibitem{2} \sk Источник 2
...
\end{enumerate}
\vskip 0.5cm

\begin{center}
{\bf TITLE 1st line \\
\vskip 0.1cm

2d line \\
\vskip 0.1cm and so on }\medskip

```



```
{\bf N.N. Author1, N.N. Author2, ...}
\medskip
{\small {\sf Enterprize, \\
Street St. (Avenue Av., Square Sq. and so on), Number, City, Index, Country,
e-mail: \underline{name@address}}}}
\end{center}

{\small {\bf Abstract.} Text of abstract. {\bf Key words:} word1, word2, ... \ .}}
\newpage

\renewcommand\baselinestretch{1.0}
```

Рисунки

Особое внимание при подготовке рукописи к печати должно быть уделено рисункам, если они имеются в тексте работы. Они должны быть качественно выполнены и представлены в редакцию в электронной форме в виде отдельных файлов в формате «ps». Файлы рисунков необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам. При этом в название каждого из файлов рисунков, чтобы избежать путаницы при верстке выпуска журнала, должна входить фамилия одного из авторов, записанная латиницей (например, Ivanov1.ps, Petrov2.ps и т.д.).

На представляемых в электронном формате рисунках **не следует** наносить те комментирующие их подписи, которые присылаются в редколлегию отдельным списком.

Внимание! В случае присылки в редакцию работы с некачественно выполненными рисунками, она **будет возвращена автору(ам) на доработку**.

Таблицы

Если в тексте работы есть таблицы, то их следует формировать на основе программы LaTeX и ни в коем случае не оформлять в виде рисунков.

Список литературных источников

Обращаем внимание авторов на требование к качественному оформлению списка используемых в работе литературных источников. В связи с тем, что требования, предъявляемые ГОСТом, при оформлении такого списка весьма сложны и ориентированы на решение задач, связанных с централизованным поиском и хранением научной информации, которые не специфичны для научно-исследовательской практики, в журнале используется собственная система его оформления. Типы литературных источников качественно довольно разнообразны. Поэтому редакция не предлагает универсальный рецепт их оформления. Единственным общим принципом, которым должен руководствоваться автор, состоит в том, литературная ссылка должна оформляться так, чтобы читатель имел максимально точную информацию о том, как найти и ознакомиться с научным результатом, на который опирается его работа.

Несмотря на отсутствие общего рецепта оформления списка, редакция требует соблюдение строгих правил оформления ссылок на литературные источники двух типов, которые являются наиболее распространенными. Это касается статей в регулярных периодических изданиях



(в журналах) и книг (монографий и учебников). Принятые в журнале правила оформления литературных источников указанных двух типов демонстрируются следующими примерами:

Журнальные статьи –

\item Цегельник В.В. Гамильтонианы, ассоциированные с третьим и пятым уравнениями Пенлеве // Теоретическая и математическая физика. -- 2010. -- 162;1. -- С.69-74.

\item Demidov A.S., Kochurov A.S., Popov A.Yu. To the problem of the recovery of non-linearities in equations of mathematical physics // Journal of Mathematical Sciences. -- 2009. -- 163;1. -- P.46-77.

Книги (в частности, многотомные издания) –

Рытов С.М., Кляцкин Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику / Случайные поля, т.2 / М.: Наука, 1978. -- 464 с.

(если издание однетомное, то позиция между двумя слэш-черточками становится ненужной и, поэтому исчезает).

Обращаем внимание на то, что:

1) должны быть указаны полные названия журнальных статей, а также указаны не только начальные страницы этих статей, но обязательно также и конечные;

2) при указании журнальных статей после года издания стоит номер (обязательно арабскими цифрами) тома журнала (если он имеется) и через точку с запятой стоит дополнительная информация (номер внутри тома, в частности, номер выпуска и т.д.); при этом номер тома может иметь сложное начертание и не выражаться только одним числом;

3) название журнала нужно давать полностью без сокращений;

4) каждая из книг в списке цитируемой литературы обязательно должна быть дана с указанием полного числа страниц.

При несоблюдении описанных правил оформления литературных источников **работа будет возвращена автору(ам) на доработку.**