

№5 (60) 2009

Выпуск 16

НАУЧНЫЙ РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ ЖУРНАЛ

**НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Белгородского
государственного университета**

Математика Физика

Основан в 1995 г.

**Belgorod State University
Scientific bulletin
Mathematics Physics**

Учредитель:

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Белгородский государственный университет»

Издатель:

Белгородский государственный университет.
Издательство БелГУ

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охраны культурного наследия

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-21121 от 19 мая 2005 г.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
ЖУРНАЛА**

Главный редактор

Дятченко Л.Я.

ректор Белгородского государственного университета,
доктор социологических наук,
профессор

Зам. главного редактора

Давыденко Т.М.

проректор по научной работе Белгородского государственного университета,
доктор педагогических наук,
профессор

Ответственный секретарь

Московкин В.М.

заместитель по инновационной деятельности проректора по научной работе Белгородского государственного университета,
доктор географических наук,
профессор кафедры мировой экономики

СОДЕРЖАНИЕ

Ограничения на порог перколяции на треугольной решётке.
Е.С. Антонова 5

Конструирование многопараметрических полиномов на бикубическом элементе серендипова семейства.
И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко 15

Математическое моделирование фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями.
Э.Н. Береславский, Л.А. Александрова, Е.В. Пестерев 32

Одномерная задача радиационно-кондуктивного теплообмена. Флуктуационный подход.
Ю.П. Вирченко, М.А. Сапрыкин 47

К вопросу наработки 99mTc на нейтронном генераторе.
А.Н. Довбня, Э.Л. Кулеников, В.А. Цымбал, В.В. Красильников 68

О некоторых особенностях движения нагретых сферических частиц в вязких неизотермических газообразных средах.
Н.В. Малай, А.В. Глушак 74

Термо-, фото- и диффузиофорез твёрдой аэрозольной частицы сфероидальной формы.
Н.В. Малай, Н.Н. Миронова 101

Тепловые и транспортные особенности галоидных горных пород, возникающие вблизи размещённого в них радиоактивного источника.
О.А. Почепцова, З.Р. Маттис, А.Н. Никитин 111

Развитие время-пролётной системы для экспериментов по исследованию структуры лёгких ядер на Нуклотроне-М.
А.А. Терехин, И.Е. Внуков, В.П. Ладыгин, С.М. Пиядин, С.Г. Резников, А.Н. Хренов 124

Сведения об авторах 132

Информация для авторов 134

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
СЕРИИ ЖУРНАЛА**

Главный редактор

Вирченко Ю.П.

доктор физико-математических
наук (Белгородский
государственный университет)

Заместитель главного редактора

Малай Н.В

доктор физико-математических
наук (Белгородский
государственный университет)

Ответственный секретарь

Внуков И.Е.

доктор физико-математических
наук (Белгородский
государственный университет)

Члены редколлегии:

Насонов Н.Н.

доктор физико-математических
наук (Белгородский
государственный университет)

Красильников В.В.

доктор физико-математических
наук (Белгородский
государственный университет)

Сыщенко В.В.

доктор физико-математических
наук (Белгородский
государственный университет)

Чеканов Н.А.

доктор физико-математических
наук (Белгородский
государственный университет)

Редактор *Т.Г. Лагутина*
Компьютерная верстка
Ю.П. Вирченко, Н.А. Гапоненко
e-mail: virch@bsu.edu.ru

Подписано в печать 17.06.2009.
Формат 60×84/8.
Гарнитура Times New Roman
Усл. п. л. 15,81
Тираж 500 экз.
Заказ 228

Подписные индексы в каталоге агентства:
«Роспечать» – 81631,
в объединенном каталоге
«Пресса России» – 39723

Оригинал-макет тиражирован
в издательстве Белгородского
государственного университета.
Адрес: 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

№ 5 (60) 2009
Issue 16

SCIENTIFIC REVIEWING JOURNAL

Founded in 1995

Belgorod State University
Scientific bulletin
Mathematics Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Белгородского
государственного университета
Математика Физика

Founder

State educational establishment of higher professional education "Belgorod State University"

Publisher:

Belgorod State University
BSU Publishing house

The journal is registered in Federal service of control over law compliance in the sphere of mass media and protection of cultural heritage

Certificate of registration of mass media
ПИ № ФС 77-21121 May, 19 2008.

EDITORIAL BOARD OF JOURNAL

Chief editor:

L.J. Djatchenko

Rector of Belgorod State University, doctor of sociological sciences, professor

Deputy of chief editor:

T.M. Davydenko

Vice-rector for scientific research of Belgorod state university, doctor of pedagogical sciences, professor

Responsible secretary:

V.M. Moskovkin

Innovative assistant of vice-rector for scientific research of Belgorod state university, Doctor of geographical sciences, professor of world economy department

EDITORIAL BOARD OF JOURNAL SERIES

Chief editor:

Yu.P. Virchenko

Doctor of physico-mathematical sciences, Professor (Belgorod State University)

Deputies of chief editor:

N.V. Malay

Doctor of physico-mathematical sciences, Professor (Belgorod State University)

Responsible secretary:

I.E. Vnukov

Doctor of physico-mathematical sciences, Professor (Belgorod State University)

Members of editorial board:

N.N. Nasonov

Doctor of physico-mathematical sciences, Professor (Belgorod State University)

CONTENTS

Restrictions of percolation threshold on triangle lattice.

E.S. Antonova 5

Construction of the multiparameter polynomials by the bicubic element of the serendipity family.

I.A. Astionenko, Ye.I. Litvinenko, A.N. Khomchenko 15

Mathematical modeling of some filtration currents under hydraulic engineering constructions.

E.N. Bereslavskii, L.A. Aleksandrova, E.V. Pesterev 32

One-dimensional problem of heat radiative conductance. Fluctuation approach.

Yu. P. Virchenko, M.A. Saprykin 47

To the problem of ^{99m}Tc yield in reaction $^{98}\text{Mo}(\text{n}, \gamma)^{99m}\text{Tc}$.

A.N. Dovbnya, E.L. Kuplennikov, V.A. Tsymbal, V.V. Krasil'nikov 68

Some peculiar properties of heated spherical particles in viscous nonisothermic gaseous media at the neutron source.

N.V. Malai, A.V. Glushak 74

Termo-, photo- and diffusiophoresis of the solid aerosol particle of spheroidal form.

N.V. Malai, N.N. Mironova 101

Thermal and transport features of the rock haloid salt arising near to the radioactive source placed in them.

O.A. Pocheptsova, Z.R. Matthies, A.N. Nikitin 111

Development of the time-of-flight for experiments on the study of the light nuclei structure of Nuclotron-M.

A.A. Terekhin, I.E. Vnukov, V.P. Ladygin, S.M. Piyadin, S.G. Reznikov, A.N. Hrenov 124

Information about Authors 132

Information for Authors 134

V.V. Krasilnikov

Doctor of physico-mathematical sciences,
Professor (Belgorod State University)

V.V. Sushchenko

Doctor of physico-mathematical sciences,
Professor (Belgorod State University)

N.A. Chekanov

Doctor of physico-mathematical sciences,
Professor (Belgorod State University)

Editor *T.G. Lagutina*

Dummy layout by *Yu. P. Virchenko,*

N.A. Gaponenko

e-mail: virch@bsu.edu.ru

Passed for printing 17.06.2009

Format 60×84/8

Typeface Times New Roman

Printer's sheets 15,81

Circulation 500 copies

Order 228

Subscription reference in Rospechat'

agency catalogue – 81631,

In joint catalogue Pressa Rossii – 39723

Dummy layout is replicated at

Belgorod State University Publishing House

Address: 85, Pobedy str.,

Belgorod, Russia, 308015

ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПОРОГ ПЕРКОЛЯЦИИ НА ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЁТКЕ

Е.С.Антонова

Белгородский государственный университет,

ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: antonova_e_s@mail.ru

Рассматривается задача дискретной теории перколяции для набора независимых случайных величин $c(\mathbf{x}) \in \{0, 1\}$ на треугольной решётке Λ . На основе кластерного разложения вероятности перколяции, находится верхняя оценка порога перколяции c_* .

Ключевые слова: вероятность перколяции, треугольная решётка, конечный кластер, внешняя граница, кластерное разложение, порог перколяции.

1. Введение. Дискретная теория перколяции занимается проблемой существования с ненулевой вероятностью бесконечной связной компоненты у случайных подмножеств на кристаллических решётках $\Lambda = \langle V, \Phi \rangle$ в евклидовых пространствах, $V \subset \mathbb{R}^d$, на которых определено отношение связности $\Phi \subset V \times V$ [1]. В простейшем случае такие случайные множества порождаются *бернуллевскими случайными полями*. Более того, в самой простой ситуации рассматриваются так называемые двумерные ($d = 2$), плоские, однородные решётки (квадратная, треугольная, гексагональная). Однако, даже в этом случае, когда случайное бернуллевское поле $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$ определяется одним параметром – *концентрацией* $c = \text{Pr}\{\tilde{c}(\mathbf{x}) = 1\}$, задача вычисления вероятности перколяции $Q(c)$ представляет собой серьёзную математическую проблему, так как не существует никаких аналитических процедур последовательного вычисления аппроксимаций этой функции с гарантированной точностью. В настоящей работе, вычисляется верхняя оценка так называемого *порога перколяции* c_* на плоской, однородной решётке, которая называется *треугольной*. Эта оценка находится на основе известного подхода, называемого *кластерным разложением* [2], [3]. Мы находим верхнюю оценку для числа конечных кластеров на треугольной решётке, содержащих фиксированную вершину, которая позволяет получить верхнюю оценку для величины c_* .

2. Проблема теории перколяции на треугольной решётке. Бесконечное множество V в \mathbb{R}^2 назовём периодическим, если существует пара $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ неколлинеарных векторов в \mathbb{R}^2 , таких, что для любых $n_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, 2\}$ имеет место $V = V + n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2$. Кристаллической решёткой в \mathbb{R}^2 будем называть пару $\Lambda = \langle V, \Phi \rangle$, где V – периодическое множество в \mathbb{R}^2 ,

состоящее из изолированных точек, и Φ – множество связности, состоящее из пар точек решётки. Множество V допускает дизъюнктивное разложение $V = \bigcup_{\langle n_1, n_2 \rangle \in \mathbb{Z}^2} \{V_0 + n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2\}$, где конечное множество V_0 называется кристаллической ячейкой. Если число точек в V_0 является минимальным среди всех допустимых для V кристаллических ячеек, то такая ячейка называется *элементарной*. Множество связности Φ на кристаллической решётке также должно быть периодическим

$$\Phi + n_1 \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle + n_2 \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle = \Phi, \quad (1)$$

$\langle n_1, n_2 \rangle \in \mathbb{Z}^2$ и при этом множество $\Phi_0 = \{\phi \in \Phi : \phi = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \mathbf{x} \in V_0\}$ конечно. Его мы будем называть *множеством смежности*. С точки зрения кристаллографии, оно определяет "ближайших" соседей на кристаллической решётке для точек из фиксированной элементарной кристаллической ячейки V_0 . Далее, точки кристаллической решётки мы будем называть вершинами, а элементы множества Φ – связями или рёбрами. Пару вершин \mathbf{x}, \mathbf{y} из V , для которых имеется связь $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \Phi$, будем называть смежной и обозначать это отношение смежности посредством $\mathbf{x}\phi\mathbf{y}$. Очевидно, что множество связей допускает дизъюнктивное разложение

$$\Phi = \bigcup_{\langle n_1, n_2 \rangle \in \mathbb{Z}^2} \{\Phi_0 + n_1 \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle + n_2 \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle\}. \quad (2)$$

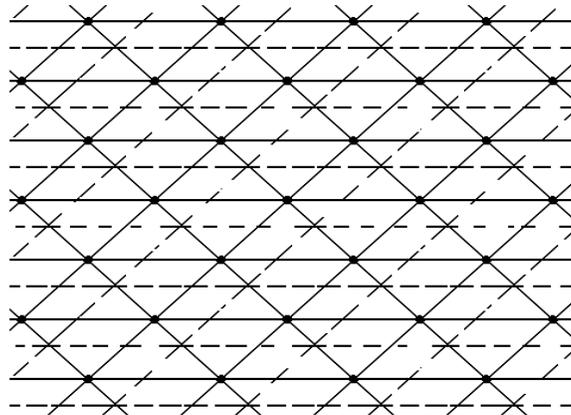


Рис. 1: Треугольная решётка.

Кристаллическая решётка $\Lambda = \langle V, \Phi \rangle$ размерности два называется треугольной (см. рис.1), если элементарная ячейка V_0 состоит из одной вершины $\mathbf{0}$ (на рисунке элементарные ячейки обозначены сеткой из пунктирных

линий), а множество смежности имеет вид

$$\Phi_0 = \left\{ \langle \mathbf{0}, \mathbf{a} \rangle : \mathbf{a} \in \left\{ \pm \mathbf{a}_1, \{(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \sqrt{3}); \alpha_i \in \{\pm 1\}, i = \{1, 2\}\} \right\} \right\},$$

где $\mathbf{e}_i, i \in \{1, 2\}$ – орты в \mathbb{R}^2 . При этом $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2 = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \sqrt{3})$.

Введём в рассмотрение на решётке Λ бернуллиевское случайное поле $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$ с концентрацией $c = \Pr\{\tilde{c}(\mathbf{x}) = 1\}$. Здесь и далее, знак тильда, поставленная над математическим объектом, обозначает его случайность. Каждая случайная реализация $\tilde{c}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in V$ этого поля определяет множество $\tilde{W} = \{\mathbf{x} : \tilde{c}(\mathbf{x}) = 1\}$, называемое *конфигурацией*. Соответственно, вся совокупность реализаций $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$ вместе с заданным на них распределением вероятностей определяет случайное множество на

$$V = 2\mathbb{Z}^2 \cup [2\mathbb{Z}^2 + (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \sqrt{3})],$$

распределение вероятностей для которого индуцируется распределением вероятностей поля $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$. А именно, для каждого конечного подмножества $M \subset V$ вершин решётки вероятность его заполнения случайной конфигурацией \tilde{W} определяется формулой $\Pr\{M \subset \tilde{W}\} = c^{|M|}$, где $|M|$ – число вершин в M .

Последовательность вершин $\langle \tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_n \rangle$, выбранных из конфигурации \tilde{W} , называется путём длины n на \tilde{W} , если $\tilde{\mathbf{x}}_i \phi \tilde{\mathbf{x}}_{i+1}, i = 0, 1, \dots, n - 1$. Путь называется простым, если в указанной последовательности $\tilde{\mathbf{x}}_i \neq \tilde{\mathbf{x}}_j$ при всех значениях индексов $i < j$ и, соответственно, – циклом, если совпадение вершин в последовательности $\langle \tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_n \rangle$ имеет место только при $i = 0, j = n$. Пара вершин $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ называется *связанной* на \tilde{W} , если $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \subset \tilde{W}$ и на этой конфигурации существует простой путь $\langle \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{n-1}, \mathbf{y} \rangle$. Отношение связности для пар вершин является отношением эквивалентности, порождаемым конфигурацией \tilde{W} . Поэтому всякая случайная конфигурация \tilde{W} распадается на непересекающиеся классы эквивалентности – *кластеры* $\mathfrak{M}[\tilde{W}] = \{\tilde{W}_j; j \in \mathbb{N}\}$, $\tilde{W} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{W}_j$, каждый из которых состоит из связанных между собой вершин, и никакие две вершины, взятые из различных кластеров, не являются связанными.

Обозначим посредством $\tilde{W}(\mathbf{x})$ тот кластер из набора $\mathfrak{M}[\tilde{W}]$, который содержит вершину $\mathbf{x} \in V$. Если вершина \mathbf{x} не содержится в конфигурации \tilde{W} , то будем считать, что $\tilde{W}(\mathbf{x}) = \emptyset$. Введём случайную функцию $\tilde{a}(\mathbf{x})$, описы-

вающую свойство просачивания случайного поля $\{\tilde{c}(\mathbf{z}); \mathbf{z} \in V\}$,

$$\tilde{a}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1; & |\tilde{W}(\mathbf{x})| = \infty, \\ 0; & |\tilde{W}(\mathbf{x})| < \infty. \end{cases}$$

Тогда вероятность перколяции $Q(c)$ поля $\tilde{c}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in V$ из фиксированной вершины $\mathbf{z} \in V$ определяется равенством $Q(c) = \Pr\{\tilde{a}(\mathbf{z}) = 1\}$. На треугольной решётке, ввиду её однородности, эта вероятность не зависит от точки \mathbf{z} . Далее, нас будет интересовать величина $c_* = \inf\{c : Q(c) > 0\}$, которую будем называть *порогом перколяции*.

3. Конечные кластеры на треугольной решётке. Введём, следуя [1], понятие внешней границы конечного кластера $\tilde{W}(\mathbf{x})$ на треугольной решётке.

Определение [4]. Пусть $W(\mathbf{x})$ является конечным кластером. Множество, обозначаемое нами посредством $\partial W(\mathbf{x})$, будем называть внешней границей этого кластера на конфигурации \tilde{W} , если $W(\mathbf{x}) \subset \tilde{W}$ и ∂W состоит из тех точек $\mathbf{z} \notin \tilde{W}$, для каждой из которых существует точка $\mathbf{y} \in W(\mathbf{x})$ такая, что $\mathbf{z}\phi\mathbf{y}$, и существует бесконечный путь α на решётке Λ , $\alpha \cap W(\mathbf{x}) = \emptyset$, начинающийся в точке \mathbf{z} , причём \mathbf{z} является единственной точкой этого пути, для которой имеет место $\mathbf{y}\phi\mathbf{z}$, $\mathbf{y} \in W(\mathbf{x})$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1 [4]. Пусть $W(\mathbf{x})$ – конечный кластер, содержащий вершину $\mathbf{x} \in V$. Тогда $W(\mathbf{x})$ имеет непустую конечную внешнюю границу ∂W , которая обладает следующими свойствами.

1. Множество ∂W является циклом на решётке Λ , то есть

$$\partial W = \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_0 \rangle$$

и $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1} \rangle$ является простым путём.

2. Цикл ∂W окружает точку \mathbf{x} .

Введём 6×6 -матрицу \mathcal{S} *соединения путей*, матричные элементы S_{ij} , $i, j = 1, \dots, 6$ которой равны либо нулю, либо единице так, что $S_{ij} = 0$, если во внешней границе какого-либо конечного кластера невозможна стыковка связей $\langle \mathbf{i}, \mathbf{0} \rangle$, $\langle \mathbf{0}, \mathbf{j} \rangle$, указанных на рис.2. В противном случае матричный элемент S_{ij} полагается равным 1.

Теорема 2. Матрица \mathcal{S} имеет следующий вид

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

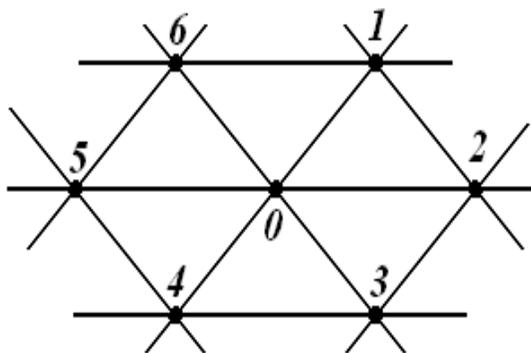


Рис. 2: Нумерация связей, смежных с вершиной $\mathbf{0}$.

Доказательство. Ввиду симметрии рис.2 относительно поворотов на углы, кратные $\pi/6$, достаточно доказать утверждение о виде первой строки матрицы \mathcal{S} вида (3). Далее, ввиду отражательной симметрии относительно оси, определяемой вершинами $\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{4}$, достаточно убедиться только, что $S_{12} = 0$, так как диагональные элементы матрицы \mathcal{S} , согласно её определению, равны нулю.

Если вершины $\mathbf{1}$ и $\mathbf{2}$ принадлежат внешней границе, то из них существует пара непересекающихся бесконечных путей γ_1, γ_2 , которые начинаются, соответственно, в точках $\mathbf{1}$ и $\mathbf{2}$. Построим путь, который состоит из последовательного прохождения пути γ_1 из бесконечности в точку $\mathbf{1}$, затем последовательно – связей $\langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$ и $\langle \mathbf{0}, \mathbf{2} \rangle$ и, наконец, – пути γ_2 из точки $\mathbf{2}$ на бесконечность. Построенный путь делит плоскость \mathbb{R}^2 на две части. Кластер, во внешнюю границу которого входит пара связей $\langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle, \langle \mathbf{0}, \mathbf{2} \rangle$, должен быть полностью расположен в одной из этих частей. Но он не может находиться в правой части плоскости, так как в противном случае у кластера нет вершины, которая была бы смежной с вершиной $\mathbf{0}$. Если же кластер находится в левой части плоскости, в этом случае существует бесконечный путь, который начинается из вершины $\mathbf{0}$. Тогда этот путь должен также полностью расположен в левой части плоскости и, следовательно, начинаться с одной из связей $\langle \mathbf{0}, \mathbf{j} \rangle, j \in \{3, 4, 5, 6\}$. Для любого пути такого типа либо вершина $\mathbf{1}$, либо вершина $\mathbf{2}$ не будут иметь смежной вершины в кластере, в границу которого входят связи $\langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle, \langle \mathbf{0}, \mathbf{2} \rangle$. Полученное противоречие доказывает, что $S_{12} = 0$. ■

Матрица \mathcal{S} с неотрицательными элементами, согласно теореме Фробениуса [5], обладает максимальным по модулю собственным числом λ_* , которое

является положительным. Согласно же теореме, доказанной в [6], для матриц, имеющих блочную структуру вида (3), это максимальное собственное число совпадает с максимальным по модулю (положительным) собственным числом матрицы $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. Из явного вида матриц \mathcal{A} и \mathcal{B} находим, что

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

, и следовательно, это собственное число равно $\lambda_* = 3$.

4. Нижняя оценка порога перколяции. Покажем, что для треугольной решётки существует нетривиальный порог перколяции $c_* > 0$ такой, что $Q(c) = 0$ при $c \in [0, c_*)$ и при этом выполняется оценка снизу $c_* > 1/3$.

Обозначим Γ_n класс простых путей $\gamma = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle$ длины n , которые обладают свойством: при $i = 0, 1, \dots, n-1$ и $j \geq i+1$ вершины \mathbf{x}_i и \mathbf{x}_j не являются смежными. (Если какие-то из указанных пар являются смежными, то путь γ можно сократить).

Очевидно, что

$$Q(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{\exists(\gamma \in \Gamma_n), \gamma \subset \tilde{W}\}. \quad (4)$$

Справедливы оценки

$$\Pr\{\exists(\gamma \in \Gamma_n), \gamma \subset \tilde{W}\} \leq \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \Pr\{\gamma \subset \tilde{W}\} \leq 2 \cdot 3^n c^{n+1}, \quad (5)$$

так как число всех путей длины n , начинающихся в вершине $\mathbf{0}$ и обладающих указанным свойством, не превосходит $6 \cdot 3^{n-1}$ и, кроме того, $\Pr\{\gamma \subset \tilde{W}\} = c^{n+1}$. Применяя неравенство (5) при оценивании вероятности (4), мы видим, что эта вероятность равна нулю при $3c < 1$. ■

5. Кластерное разложение на \mathbb{Z}^2 . Пусть \mathbf{A} семейство конечных кластеров W , содержащих вершину $\mathbf{0}$ на треугольной решётке. Определим для любого кластера $W \in \mathbf{A}$ случайное событие $A(W) = \{\tilde{W} : \mathbf{0} \in \tilde{W}, W \in \mathfrak{M}[\tilde{W}], \tilde{W}(\mathbf{0}) = W\}$. Вероятность этого события равна

$$\Pr\{A(W)\} = c^{|W|}(1-c)^{|\partial W|}. \quad (6)$$

Согласно утверждению предыдущего раздела каждому кластеру W из семейства \mathbf{A} , отвечает цикл γ такой, что $\gamma = \partial W$. В связи с этим введём в рассмотрение семейство \mathbf{B} всех циклов, окружающих точку $\mathbf{0}$. Для каждого цикла

$\gamma \in \mathbf{B}$ введем событие $B(\gamma) = \{\tilde{M} : \mathbf{0} \in \tilde{M}, \tilde{W}(\mathbf{0}) \in \mathfrak{M}[\tilde{W}], \partial\tilde{W}(\mathbf{0}) = \gamma\}$, которое представимо в виде конечного объединения попарно непересекающихся событий

$$B(\gamma) = \bigcup_{W \in \mathbf{A} : \partial W = \gamma} A(W). \tag{7}$$

Вводя вероятность $P(\gamma) = \Pr\{B(\gamma)\}$, которая, согласно (6), (7), равна

$$P(\gamma) = \sum_{W \in \mathbf{A} : \partial W = \gamma} \Pr\{A(W)\} = \sum_{W \in \mathbf{A} : \partial W = \gamma} c^{|W|}(1 - c)^{|\partial W|}.$$

Заметим, что $\{\tilde{a}(\mathbf{0}) = 0\} = \{\mathbf{0} \notin \tilde{W}\} \cup \bigcup_{W \in \mathbf{A}} A(W)$. Семейство \mathbf{A} разлагается

на непересекающиеся классы, состоящие из кластеров, объединяемых следующим признаком. К одному классу отнесём такие кластеры $W \in \mathbf{A}$, которые имеют одну и ту же внешнюю границу. Поэтому справедливо преобразование

$$\bigcup_{W \in \mathbf{A}} \dots = \bigcup_{\gamma \in \mathbf{B}} \left\{ \bigcup_{W \in \mathbf{A} : \partial W = \gamma} \dots \right\},$$

которое сопоставляет множеству кластеров W с общей внешней границей единый "заполненный кластер". Далее, на основании (7), получаем $\{\tilde{a}(\mathbf{0}) = 0\} = \{\mathbf{0} \notin \tilde{W}\} \cup \bigcup_{\gamma \in \mathbf{B}} B(\gamma)$. Таким образом, принимая во внимание, что $1 - Q(c) = \Pr\{\tilde{a}(\mathbf{0}) = 0\}$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. Вероятность $Q(c)$ определяется кластерным разложением

$$c - Q(c) = \sum_{\gamma \in \mathbf{B}} P(\gamma). \tag{8}$$

6. Основная теорема. Функция $Q(c)$ отлична от нуля только при $c > c^* > 0$, поэтому она не является аналитической. Основной результат работы формулируется следующим образом.

Теорема 4. Для бернуллиевского случайного поля $\{\tilde{c}(x); x \in V\}$ на треугольной решётке Λ справедливо неравенство $c^* \leq 2/3$.

Доказательство. Воспользуемся элементарной оценкой $P(\gamma) \leq (1 - c)^{|\gamma|}$, которая следует из (6) и выражения для $B(\gamma)$. Тогда имеет место неравенство

$$c - Q(c) = \sum_{\gamma \in \mathbf{B}} P(\gamma) \leq \sum_{\gamma \in \mathbf{B}} (1 - c)^{|\gamma|} = \sum_{n=6}^{\infty} (1 - c)^n r_n. \tag{9}$$

Найдем верхнюю оценку для величины r_n , $n \geq 6$. С этой целью введём множество \mathbf{B}_n всех простых циклов длины n на треугольной решётке Λ , которые могут быть внешними границами кластеров, содержащих точку $\mathbf{0}$. Введём далее множество $\mathbf{C}_n(\mathbf{x}_0)$ путей $\gamma = \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle$ длины n на решётке, которые обладают свойством $\mathbf{x}_j \neq \mathbf{x}_{j+2}$, $j = 0, 1, \dots, n-2$, и связанные с ним подмножества $\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ путей длины n , у которых зафиксированы первые две вершины, а каждые две следующие друг за другом связи обязательно являются частью какого-либо цикла из $\bigcup_{n=3}^{\infty} \mathbf{B}_n$. Ввиду однородности решётки, величина $|\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)|$ не зависит от точки \mathbf{x}_0 .

Очевидно, что имеет место неравенство

$$r_n < Cn|\mathbf{C}_{n-2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)| \quad (10)$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Здесь множитель n связан с тем, что начальная точка \mathbf{x}_0 построения цикла может быть выбрана на произвольном расстоянии l от вершины $\mathbf{0}$ вдоль направления \mathbf{e}_1 , $l \leq n$.

Для оценки величины $|\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)|$ введём следующую конструкцию. Охарактеризуем однозначно каждый путь из $\mathbf{C}_n(\mathbf{x}_0)$, $n \geq 2$ последовательностью $\langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1} \rangle$ векторов *сдвигов*, где $\mathbf{b}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ и каждый вектор \mathbf{b}_i , $i = 2, \dots, n$ представляет собой разность $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}$, повернутую в обратную сторону на угол, который образуется вектором $\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i-2}$ и ортом \mathbf{e}_1 на плоскости расположения решётки. В этой параметризации множеству $\mathbf{C}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ сопоставляется равномощное ему множество $\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1)$ всех последовательностей $\langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \rangle$ с фиксированным вектором \mathbf{b}_1 , у которых каждая входящая в их состав пара $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1} \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ является допустимой, то есть для каждой пары $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1} \rangle$ в множестве \mathbf{B} существует такой кластер, у которого в составе внешней границы, записанной в терминах векторов сдвига, имеется пара $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}' \rangle$ следующих друг за другом сдвигов, которая совпадает с $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1} \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Следовательно, $\mathbf{C}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \equiv g_n(\mathbf{b}_1) = |\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1)|$.

Разложим множество $\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1)$ на непересекающиеся друг с другом множества $\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_n)$ путей, у которых зафиксирован последний сдвиговый вектор \mathbf{b}_n , $\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1) = \bigcup_{\mathbf{b}_n} \mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_n)$. Тогда, $g_n(\mathbf{b}_1) = \sum_{\mathbf{b}_n} |\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_n)|$. Вводя нумерацию для возможных сдвиговых векторов, которая представлена на рис.2, мы можем считать, что величина $|\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_n)|$ при каждом значении $n \in \mathbb{N}$ является 6-мерным вектором $g_i(\mathbf{b}_1, n)$ так, что каждая его j -я компонента равна значению этой величины в том случае, когда \mathbf{b}_n имеет номер j в принятой нумерации, $j = 1 \div 6$.

Согласно определению вектора $g_i(\mathbf{b}_1; n)$, имеет место $g_i(\mathbf{b}_1; 1) = S_{ji}$, и для любого $n = 2, 3, \dots$ и вектора \mathbf{b}_1 имеет место рекуррентное соотношение

$$g_i(\mathbf{b}_1; n) = \sum_{k=1}^{12} g_k(\mathbf{b}_1; n-1) S_{ki}.$$

Тогда, индукцией по $n \in \mathbb{N}$, заключаем, что

$$g_i(\mathbf{b}_1; n) = (\mathcal{S}^n)_{ji}.$$

Так как у матрицы \mathcal{S} имеется единственное максимальное собственное число с максимальным абсолютным значением, то из полученного соотношения следует асимптотическая формула

$$g_i(\mathbf{b}_1, n) = D_{ij} \lambda_*^n (1 + o(1)), \tag{11}$$

где номер j соответствует сдвиговому вектору \mathbf{b}_1 и ненулевая матрица \mathcal{D} имеет неотрицательные матричные элементы D_{ij} .

Используя (9),(10), находим, что для вероятности $Q(c)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} c - Q(c) &\leq C \sum_{n=6}^{\infty} (1-c)^n r_n \leq n_* \sum_{n=6}^{\infty} n(1-c)^n |\mathbf{C}_{n-2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)| = \\ &= C \sum_{n=6}^{\infty} n(1-c)^n g_{n-2}(\mathbf{b}_1) = C \sum_{n=6}^{\infty} n(1-c)^n \sum_{i=1}^6 g_i(\mathbf{b}_1; n-1). \end{aligned}$$

Применяя асимптотическую формулу (11), получаем

$$c - Q(c) \leq CD \sum_{n=6}^{\infty} n[(1-c)\lambda_*]^n, \tag{12}$$

где положительная постоянная $D > \max_j \sum_{i=1}^6 D_{ij}$ выбрана так, чтобы имело место неравенство $g_i(\mathbf{b}_1, n) < D\lambda_*^n$.

Ряд в правой части неравенства (12) сходится при $(1-c)\lambda_* < 1$, то есть при $c > 1 - \lambda_*^{-1}$. Сходимость же этого ряда, применяя рассуждение, основанное на лемме Бореля-Кантелли (см., например, [7]), приводит к отличной от нуля вероятности перколяции при выполнении указанного ограничения на параметр c . Следовательно, $c_* \leq 1 - \lambda_*^{-1} = 2/3$. ■

Литература

1. Вирченко Ю.П. Перколяция // Энциклопедия. Математическая физика. – Москва: Российская энциклопедия. – 1998.
2. Virchenko Yu.P., Tolmacheva Yu.A. Method of Sequential Approximative Estimates in Discrete Percolation Theory // Studies in Mathematical Physics Research. ed. Charles V. Benton, New York: Nova Science Publishers. – 2004. – P.155-175.
3. Вирченко Ю.П., Толмачёва Ю.А. Мажорантные оценки порога перколяции бернуллиевского поля на квадратной решётке // Украинский математический журнал. – 2005. – 57. – 10. – С.1315-1326.
4. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians / H.Kesten. – Boston: Birkhauser, 1982.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р.Гантмахер. – М.: Наука. – 1966.
6. Антонова Е.С. Оценка мощности множества траекторий без самопересечений на квадратной решётке // Труды Воронежской зимней школы С.Г.Крейна 2008. – Воронеж, 2008. – С.15-30.
7. М.В. Меньшиков М.Ф., Молчанов С.А., Сидоренко А.Ф. Теория перколяции и некоторые приложения // Итоги науки и техники. – сер.теор. вер., мат. стат. и теор.кибер. – М.: ВИНТИ. – 1986. – 24. – С.53-110.

RESTRICTIONS OF PERCOLATION THRESHOLD ON TRIANGLE LATTICE

E.S.Antonova

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: antonova_e_s@mail.ru

The problem of discrete percolation theory for the collection of independent random variables $c(\mathbf{x}) \in \{0, 1\}$ on the triangle lattice Λ is considered. On the basis of the cluster decomposition of the percolation probability, the upper and lower estimates of the percolation threshold are found.

Key words: percolation probability, triangle lattice, finite cluster, external border, cluster decomposition, percolation threshold.

КОНСТРУИРОВАНИЕ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ НА БИКУБИЧЕСКОМ ЭЛЕМЕНТЕ СЕРЕНДИПОВА СЕМЕЙСТВА

И.А.Астионенко, Е.И.Литвиненко, А.Н.Хомченко

Херсонский национальный технический университет,

Бериславское шоссе, 24, г. Херсон, 73008, Украина e-mail: mmkntu@gmail.com.

В работе приведено конструктивное доказательство существования многопараметрических базисов конечного элемента серендипова семейства. На примере плоского элемента с 12 узлами (бикубическая интерполяция) впервые построено бесконечное множество интерполяционных полиномов, содержащих от 12 до 16 параметров.

Ключевые слова: конечный элемент серендипова семейства, полиномиальный базис типа Лагранжа, многопараметрическая интерполяция, линии нулевого уровня.

1. Введение. В начале 40-х годов прошлого века, когда Курант опубликовал идею метода конечных элементов (МКЭ), в среде инженеров и вычислителей безраздельно господствовал метод конечных разностей (МКР), основанный на идеях Бьёркнеса и развитый в работах Ричардсона, Саутвелла и Мотца. Курант предложил разделить прямоугольную ячейку ортогональной сетки МКР пополам на два треугольника, имея в виду возможность применения в треугольнике линейной интерполяции функции двух аргументов. Позже Тернер обобщил идею Куранта на произвольно ориентированные треугольники, а процедура триангуляции стала наиболее естественным и привычным способом дискретизации области в двумерных краевых задачах. После появления унитарного базиса билинейной интерполяции возродился интерес к прямоугольным (квадратным) ячейкам. Стало понятно, что при дискретизации плоской области произвольной конфигурации квадратные ячейки удобны внутри области, а треугольные – в приграничной полосе. Другая возможность аппроксимировать кривую границу области связана с введением криволинейных координат в четырехугольнике. Первая попытка использовать билинейные функции формы для введения неортогональных координат была предпринята Тайгом в 1961 г. [1, 2]. Он применил билинейный базис для деформирования прямоугольника в произвольный четырехугольник. В 1964 г. билинейные аппроксимации с той же целью успешно применяли Галлагер, Раттингер и Арчер [2]. В 1966 г. Айронс обобщил эту идею на другие конечные элементы [1].

Так появилась весьма удобная форма отображения конечного элемента - параметрическое отображение, когда зависимость между локальными координатами элемента (ξ, η) и глобальными координатами (x, y) записывается с использованием интерполяции того же вида, что и применяемая для аппроксимации полевой функции (изопараметрическое преобразование). В 1968 г. Эргатудис, Айронс, Зенкевич и Ахмад [3-5] рассмотрели семейство "изопараметрических" элементов с криволинейными границами. Изобретательным подбором полиномов с помощью заданных граничных точек эти авторы неожиданно открыли элементы, аппроксимирующие достаточно общие границы [1]. Зенкевич предложил удачное название - "serendipity" family, и этот термин сразу же прижился в научно-технической литературе. Слово "serendipity" ("дар неожиданных открытий") вошло в английский язык еще в 1754 г. с легкой руки Горация Уолпола – английского писателя, пересказавшего в частном письме персидскую сказку "Три принца из Серендипа" (Серендип – древнее название Цейлона). Приведенные в литературных источниках базисные функции серендиповых КЭ называют стандартными. Эти функции хорошо справляются с задачей изопараметрического отображения квадрата в произвольный четырехугольник, однако интерполяционные качества стандартных базисов не всегда безупречны. Все стандартные базисы серендиповых конечных элементов (СКЭ), кроме билинейного, имеют недостатки. К ним можно отнести наличие отрицательных нагрузок в поузловом распределении равномерной массовой силы, кратные нули в узлах. В рамках традиционного матричного анализа избавиться от этих недостатков не удается. Предложенная Тейлором в 1972 г. [6] процедура систематического генерирования базиса привела к тем же стандартным моделям. В конце 70-х годов благодаря работам Уачспресса [7] появился геометрический метод моделирования базисных функций. Однако этот метод не получил должного развития, а на серендиповом семействе вовсе не применялся. В начале 80-х годов был предложен вероятностно-геометрический метод построения базиса КЭ [8-10]. Преимущества этого метода особенно отчетливо проявились на серендиповых моделях [11,12]. Обратные задачи серендиповых аппроксимаций [13] потребовали создания комбинированного (алгебро-геометрического) метода решения. Объединение двух подходов в один эффективный метод является естественным следствием исторического развития алгебры и геометрии. Так же, как и метод Уачспресса ("products of planes"), наш метод произведений плоскостей и поверхностей второго порядка своими корнями уходит в эпоху Жирара и Декарта (17 в.), которые впервые высказали (без дока-

зательства) основную теорему алгебры (ОТА). Маклорен и Эйлер уточнили формулировку ОТА, придав ей современную форму: всякий многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение линейных и квадратичных множителей. В 1799 г. Гаусс получил докторскую степень за точное доказательство ОТА. Позже Гаусс привел еще два безупречных доказательства (1814 г., 1850г.). В этой теореме нетрудно усмотреть не только четкий геометрический смысл, но и способ геометрического конструирования интерполяционных полиномов со специальными условиями. Как известно [1, 14-18], серендиповы полиномы имеют действительные коэффициенты, поэтому базис СКЭ можно получить перемножением плоскостей и нелинейных поверхностей. Используя это свойство, в данной работе авторы попытались унифицировать процедуру построения многопараметрических интерполяционных полиномов с регулируемым количеством параметров на примере бикубического элемента серендипова семейства.

2. Стандартный интерполяционный полином СКЭ-12. Рассмотрим бикубический СКЭ: это квадрат размером 2×2 , на границе которого регулярно расположены 12 узлов (рис.1) и система базисных функций.

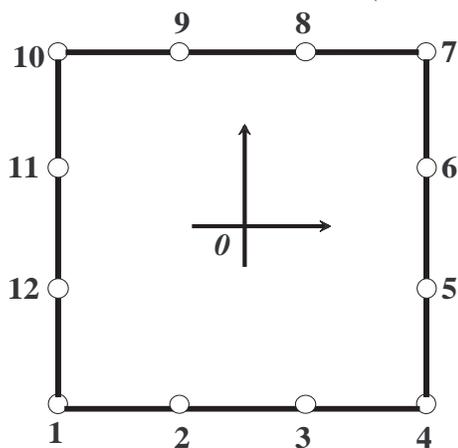


Рис.1. Бикубический СКЭ.

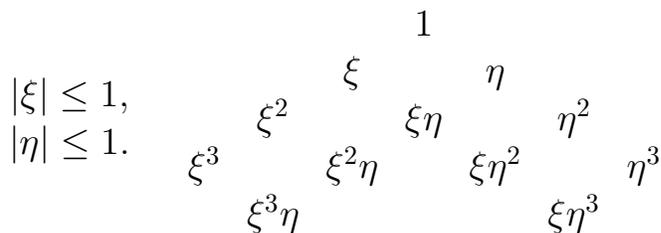


Рис.2. Элементы треугольника Паскаля для стандартного полинома СКЭ-12.

Стандартный интерполяционный полином этого элемента имеет 12 параметров:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta) = & \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \\ & + \alpha_7\xi^3 + \alpha_8\xi^2\eta + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3 + \alpha_{11}\xi^3\eta + \alpha_{12}\xi\eta^3. \end{aligned} \tag{1}$$

Это неполный полином четвертой степени, элементы которого симметрично

расположены в треугольнике Паскаля (рис. 2). Стандартные (изопараметрические) функции формы этого элемента можно найти, например, с помощью метода обратной матрицы [14]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10] , \quad i = 1, 4, 7, 10; \xi_i, \eta_i = \pm 1 , \quad (2)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1 + \eta_i\eta)(1 - \xi^2)(1 + 9\xi_i\xi) , \quad i = 2, 3, 8, 9; \xi_i = \pm \frac{1}{3}, \eta_i = \pm 1 , \quad (3)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1 + 9\eta_i\eta)(1 - \eta^2)(1 + \xi_i\xi) , \quad i = 5, 6, 11, 12; \xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm \frac{1}{3} . \quad (4)$$

В общем случае аппроксимирующий полином бикубического СКЭ имеет вид

$$\varphi = \sum_{i=1}^{12} N_i U_i ,$$

где N_i – базисная функция, отвечающая узлу i на КЭ ($i = \overline{1, 12}$), U_i – узловое значение искомой функции в узле i .

Базисные функции (как стандартные изопараметрические, так и альтернативные многопараметрические) должны обладать следующими свойствами (условия типа Лагранжа):

$$N_i(\xi_k, \eta_k) = \delta_{ik} , \quad (5)$$

где δ_{ik} – символ Кронекера, i – номер функции, k – номер узла. При этом выполняется условие весового баланса

$$\sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) = 1 . \quad (6)$$

Кроме того, функции формы $N_i(\xi, \eta)$ обеспечивают непрерывность на границе: если узел i принадлежит конкретной стороне квадрата, то функция $N_i(\xi, \eta)$ вдоль этой стороны изменяется по закону кубической параболы (4 узла).

Одна из характеристик базиса – поузловое распределение равномерной массовой силы. Узловая доля нагрузки определяется двойным интегралом

по области ω конечного элемента от соответствующей базисной функции, взвешенной с поверхностной плотностью γ

$$p_i = \int_{\omega} \int \gamma N_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad I = 1, 2, \dots, 12.$$

Для однородной пластинки $\gamma = 0, 25$.

В модели (2)-(4) угловое значение в поузловом распределении равномерной массовой силы $p = -\frac{1}{8}$. Избавиться от этого недостатка (и от избыточных кратных нулей в узлах) можно с помощью дополнительных, "внеузловых" параметров, добавив в полиноме (1) ещё одно или несколько слагаемых. Назовем такие интерполяционные полиномы "многопараметрическими". Для построения таких полиномов ранее было предложено несколько способов [9,11,12]. В данной работе предлагается метод получения бесчисленного множества функций формы для СКЭ-12 с количеством параметров от 12 до 16, что позволяет существенно менять свойства интерполяционного полинома.

3. Интерполяционный полином бикубического СКЭ с 13 параметрами. Применим комбинированный алгебро-геометрический метод, предложенный в [13]. Реализуется он в два этапа:

1) из геометрических соображений базисная функция а priori записывается как произведение линейных и нелинейных множителей с неизвестными коэффициентами;

2) в соответствии с гипотезой Лагранжа составляется система алгебраических уравнений, которая решается с помощью матричных методов.

Для получения 13-параметрического полинома, не нарушая условия изменения функции формы вдоль стороны квадрата по закону кубической параболы, можно представить $N_1(\xi, \eta)$ и $N_2(\xi, \eta)$ в виде

$$N_1 = K_1(1 - \xi)(1 - \eta) (A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 + D\xi + E\eta + 1) ; \quad (7)$$

$$N_2 = K_2(1 - \xi^2)(1 - \eta)(F\xi + G\eta + 1) . \quad (8)$$

Сомножители в скобках можно ассоциировать с плоскостями и поверхностями второго порядка, проходящими через соответствующие узлы и точку $(-1, -1, 1)$ для первого узла либо точку $(-1/3, -1, 1)$ для второго узла. Неизвестные коэффициенты найдем, решив систему, составленную с помощью (5) (k – номер узла):

$$\left\{ \begin{array}{ll} N_1(\xi_k, \eta_k) = 1, & k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k) = 0, & k = 2, 3, 11, 12; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) = 1, & k = 2; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) = 0, & k = 3; \\ \frac{1}{4} \int \int_{\omega} N_1 d\xi d\eta = p, \\ \frac{1}{4} \int \int_{\omega} N_2 d\xi d\eta = \frac{1}{8} - \frac{p}{2}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Обычно с помощью входящих в систему (9) двойных интегралов вычисляют долю соответствующего узла в поузловом распределении равномерной массовой силы, когда функции $N_1(\xi, \eta)$ и $N_2(\xi, \eta)$ уже известны. Приравнивая эти интегралы от неизвестных пока функций переменной p – узловому значению равномерной массовой силы в вершине СЭ (в последнем уравнении – зависимость p_2 от p , т.к. $4p + 8p_2 = 1$), мы ставим обратную задачу – получить функции формы $N_i(\xi, \eta)$ в виде выражений, зависящих от переменной p .

Система (9) имеет единственное решение, которое позволяет записать

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta) \times \\ \times [9(\xi^2 + \eta^2) + 9(8p + 1)(\xi_i\xi\eta_i\eta - \xi_i\xi - \eta_i\eta) + 72p - 1], \quad (10)$$

$$i = 1, 4, 7, 10; \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1,$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{64}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i\eta)[18\xi_i\xi + (8p + 1)\eta_i\eta + 1 - 8p], \quad (11)$$

$$i = 2, 3, 8, 9; \quad \xi_i = \pm \frac{1}{3}, \eta_i = \pm 1,$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{64}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i\xi)[18\eta_i\eta + (8p + 1)\xi_i\xi + 1 - 8p],$$

$$i = 5, 6, 11, 12; \xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm \frac{1}{3}.$$
(12)

Полученные базисные функции полностью соответствуют условиям (5), (6). Чтобы найти компоненты интерполяционного полинома типа (1), раскроем все скобки в $N_1(\xi, \eta)$ и перегруппируем слагаемые

$$N_1 = \left(\frac{9}{4}p - \frac{1}{32}\right) + \frac{5}{16}\xi + \frac{5}{16}\eta - \frac{9}{4}p\xi^2 - \frac{5}{16}\xi\eta - \frac{9}{4}p\eta^2 -$$

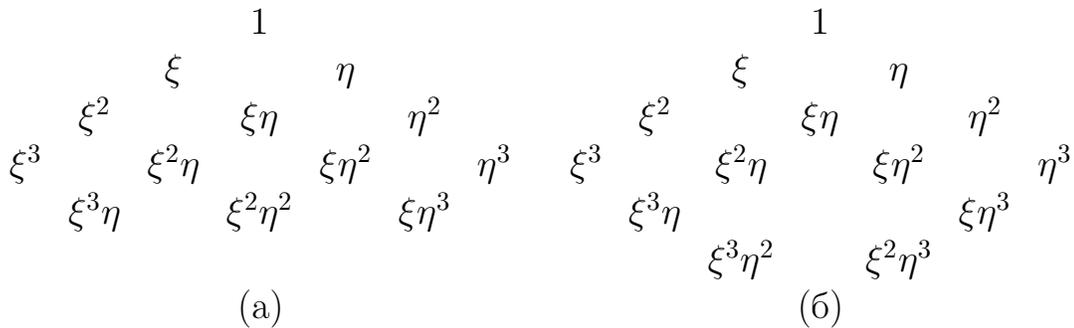
$$-\frac{9}{32}\xi^3 - \frac{9}{32}\xi^2\eta - \frac{9}{32}\xi\eta^2 - \frac{9}{32}\eta^3 + \frac{9}{32}\xi^3\eta + \frac{9}{32}\xi\eta^3 + \left(\frac{9}{32} + \frac{9}{4}p\right)\xi^2\eta^2.$$
(13)

Та же процедура для $N_2(\xi, \eta)$ позволяет определить, что эта функция не вносит дополнительных слагаемых в общий полином

$$N_2 = \left(\frac{9}{64} - \frac{9}{8}p\right) - \frac{27}{32}\xi - \frac{9}{32}\eta + \left(\frac{9}{8}p - \frac{9}{64}\right)\xi^2 + \frac{27}{32}\xi\eta + \left(\frac{9}{8}p + \frac{9}{64}\right)\eta^2 -$$

$$-\frac{27}{32}\xi^3\eta - \left(\frac{9}{8}p + \frac{9}{64}\right)\xi^2\eta^2.$$
(14)

При изменении переменной p получаем бесчисленное множество базисов (10)-(12), которые содержат 13-й параметр $\alpha_{13}\xi^2\eta^2$ (рис. 3а).



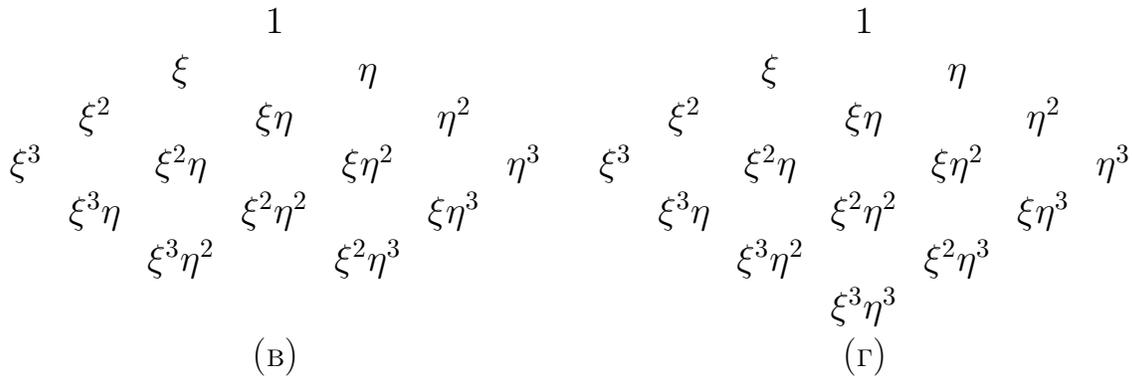


Рис. 3. Элементы треугольника Паскаля для многопараметрических полиномов СКЭ-12.

При $p = -1/8$ этот параметр исчезает, интерполяционный полином (13) становится стандартным (рис. 2), функции (10)-(12) переходят в (2)-(4).

Интересным представляется анализ и визуализация линий нулевого уровня – линий пересечения составляющих функцию поверхностей и плоскости элемента. В $N_1(\xi, \eta)$ первые две скобки – это стороны квадрата 4-7 и 7-10, противоположные первому узлу. Определить тип линии, представленной последней скобкой, можно с помощью стандартного метода исследования кривых второго порядка, составив и проанализировав определитель из коэффициентов при переменных. Результаты этого исследования изображены на рисунках 4-12. Как следует из этих рисунков, получены новые типы базисных функций (различные гиперболы – рис. 4, 10, 12; эллипс – рис.6), а известные ранее базисы получаются при частных значениях p (базис с параболой – рис.5, с окружностью – рис.7 (стандартный базис), с эллипсом – рис.8, с параллельными прямыми – рис.9, с пересекающимися прямыми – рис.11).

Пунктиром проведенная прямая на всех рисунках – это линия нулевого уровня для N_2 , задаваемая последней скобкой (первые скобки N_2 – это стороны квадрата 4-7, 7-10, 10-1).

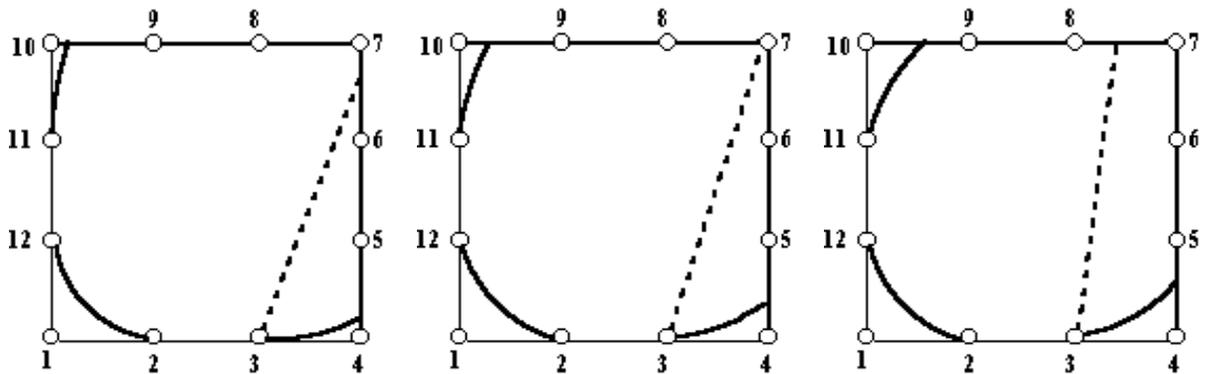


Рис.4. $p \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right)$.

Рис.5. $p = -\frac{3}{8}$.

Рис.6. $p \in \left(-\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)$.

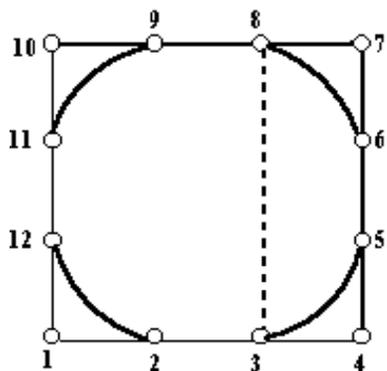


Рис.7. $p = -\frac{1}{8}$.

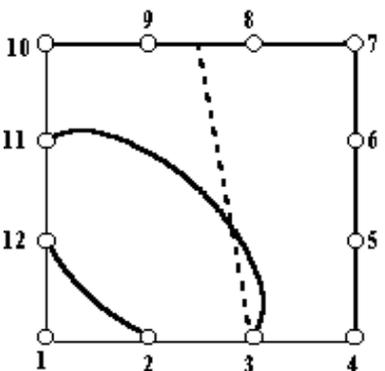


Рис.8. $p \in \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$.

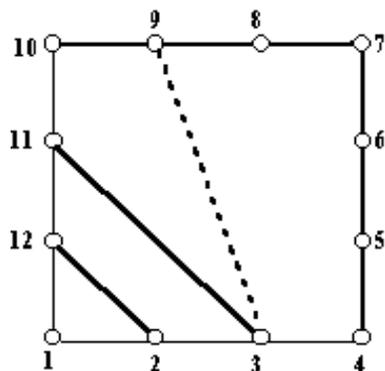


Рис.9. $p = \frac{1}{8}$.

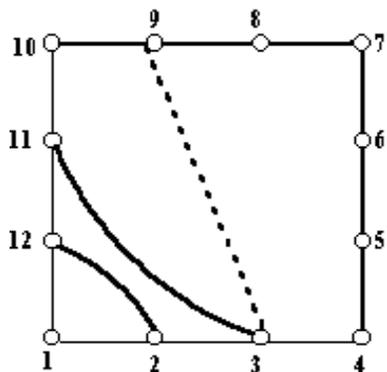


Рис.10. $p \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{16}\right)$.

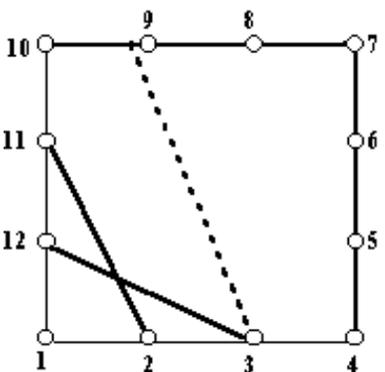


Рис.11. $p = \frac{3}{16}$.

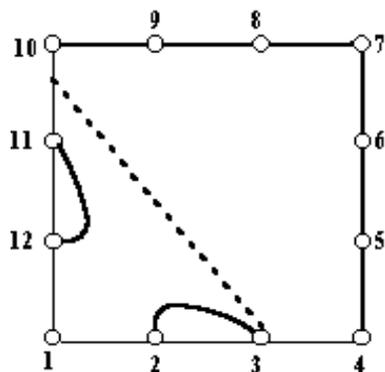
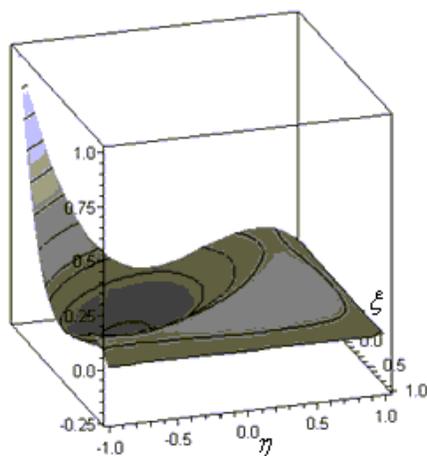
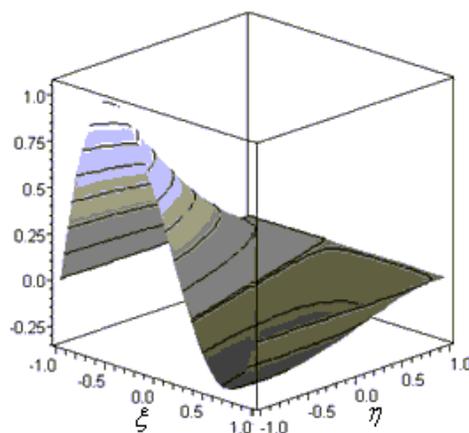


Рис.12. $p \in \left(\frac{3}{16}, \frac{1}{2}\right)$.

Визуализация $N_1(\xi, \eta)$ и $N_2(\xi, \eta)$ (рис.13) наглядно демонстрирует основные свойства базисных функций: в своем узле – единица, в остальных – нуль, по соответствующей границе СЭ – кубическая парабола.



а) $N_1(\xi, \eta)$



б) $N_2(\xi, \eta)$

Рис.13. Визуализация 13-параметрических базисных функций СКЭ-12 при $p = 0$.

4. Интерполяционный полином бикубического СКЭ с 14 и 15 параметрами. Несложно заметить, что, не нарушая условия изменения функции формы вдоль стороны квадрата по закону кубической параболы, $N_1(\xi, \eta)$ можно представить вместо (7) в виде

$$N_1 = K_1(1 - \xi)(1 - \eta)(A\xi\eta + B\xi + C\eta + 1)(D\xi + E\eta + 1). \quad (15)$$

При этом $N_2(\xi, \eta)$ остается таким же – (8). (Во всех случаях, рассматриваемых далее, $N_2(\xi, \eta)$ остается неизменным). При таком представлении $N_1(\xi, \eta)$ система (9) имеет четыре решения: два из них симметричны относительно диагонали квадрата 1-7, а два – с нарушением геометрической изотропии. Это легко объяснимо: в последней скобке в общем виде записано выражение, задающее прямую, проходящую через два узла: прямую 2-12 или 3-11 (симметричные случаи), либо прямую 3-12 или 2-11 (несимметричные случаи). Одно из симметричных решений для $N_1(\xi, \eta)$ имеет вид

$$N_1 = \frac{1}{128}(1 - \xi)(1 - \eta)[9(8p - 1)\xi\eta + 3(24p + 1)\xi + 3(24p + 1)\eta + (72p - 1)] \times \\ \times (3\xi + 3\eta + 4). \quad (16)$$

Раскрыв все скобки в (16), получим полином с 15 параметрами, указанными на рис.3в,

$$N_1 = \\ = \left(\frac{9}{4}p - \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{27}{16}p + \frac{13}{128}\right)\xi + \left(\frac{27}{13}p + \frac{13}{128}\right)\eta - \frac{9}{4}p\xi^2 - \frac{5}{16}\xi\eta - \frac{9}{4}p\eta^2 - \\ - \left(\frac{27}{16}p + \frac{9}{128}\right)\xi^3 - \left(\frac{27}{16}p + \frac{9}{128}\right)\xi^2\eta - \left(\frac{27}{16}p + \frac{9}{128}\right)\xi\eta^2 - \left(\frac{27}{16}p + \frac{9}{128}\right)\eta^3 + \\ + \frac{9}{32}\xi^3\eta + \frac{9}{32}\xi\eta^3 + \left(\frac{9}{4}p + \frac{9}{32}\right)\xi^2\eta^2 + \\ + \left(\frac{27}{16}p - \frac{27}{128}\right)\xi^3\eta^2 + \left(\frac{27}{16}p - \frac{27}{128}\right)\xi^2\eta^3. \quad (17)$$

Меняя значение p , получаем бесчисленное множество 15-параметрических базисов, которые соответствуют условиям (5), (6). Линии нулевого уровня

$N_1(\xi, \eta)$ и $N_2(\xi, \eta)$ изображены на рисунках 14-20. Визуализация функции $N_1(\xi, \eta)$ в точке вырождения гиперболы в две пересекающиеся прямые представлена на рис.21.

Все известные ранее 15-параметрические модели являются частными случаями (16) или других решений системы (9) при определенных значениях p (рис.18). Если $p = -1/8$ (рис.15), то полином содержит 14 параметров, указанных на рис.3б. То есть, как и в случае вырождения 13-параметрического базиса в 12-параметрический, в полиноме (17) исчезает слагаемое $\alpha_{13}\xi^2\eta^2$. Если $p = 1/8$ (рис.19), получим базис с 13 параметрами (рис. 3а) – частный случай (10), когда $p = 1/8$ (рис.9).

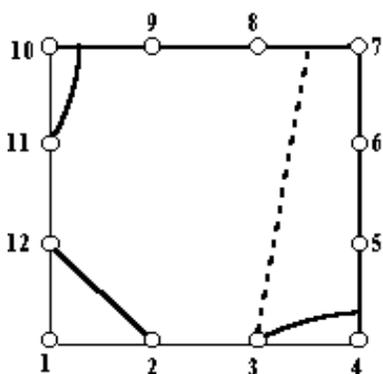


Рис.14. $p \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$.

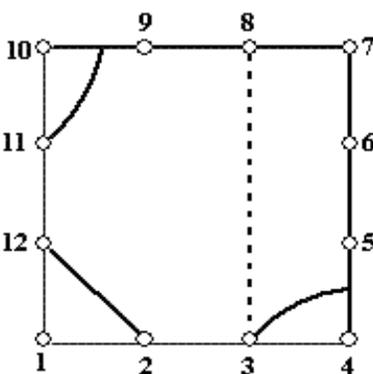


Рис.15. $p = -\frac{1}{8}$.

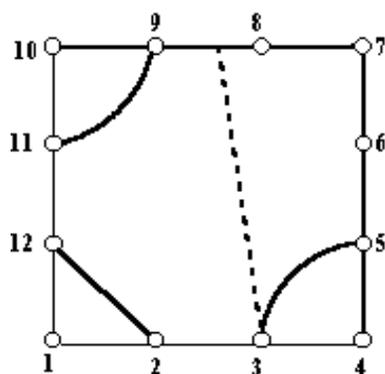


Рис.16. $p \in \left(-\frac{1}{8}, 0\right)$.

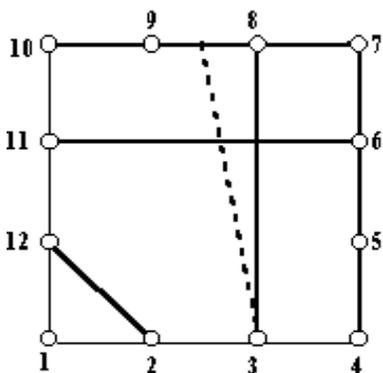


Рис.17. $p = 0$.

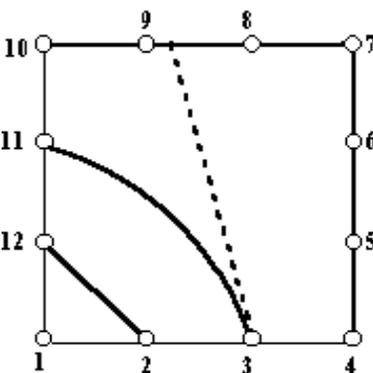


Рис.18. $p \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$.

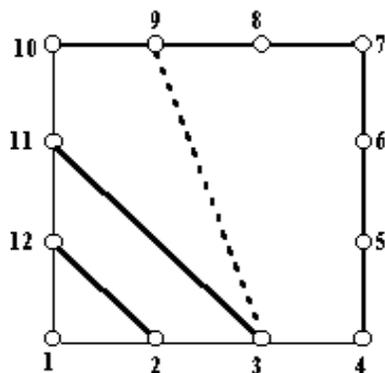


Рис.19. $p = \frac{1}{8}$.

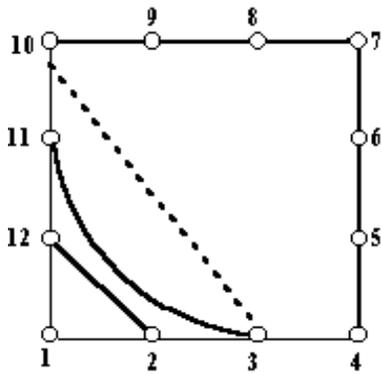


Рис.20. $p \in \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$.

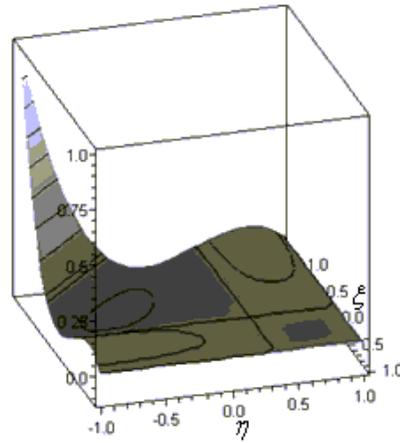


Рис.21. Визуализация 15-параметрической функции

$N_1(\xi, \eta)$ СКЭ-12 при $p = 0$.

Одно из решений с нарушением геометрической изотропии:

$$N_1 = \frac{1}{320}(1 - \xi)(1 - \eta)(3\xi + 6\eta + 5) \times$$

$$\times [9(16p - 3)\xi\eta + 3(48p + 1)\xi + 12(24p - 1)\eta + 2(72p - 1)]. \quad (18)$$

Линии нулевого уровня $N_1(\xi, \eta)$ и $N_2(\xi, \eta)$ этого базиса изображены на рисунках 22-28.

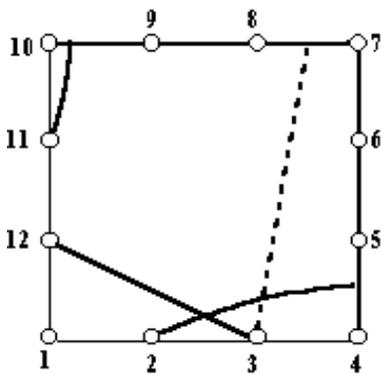


Рис.22. $p \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$.

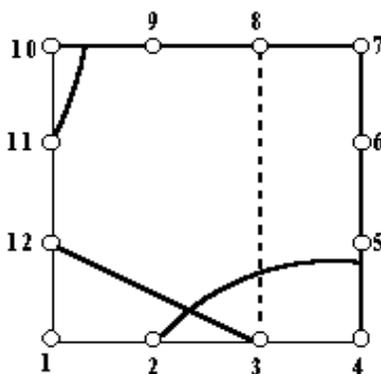


Рис.23. $p = -\frac{1}{8}$.

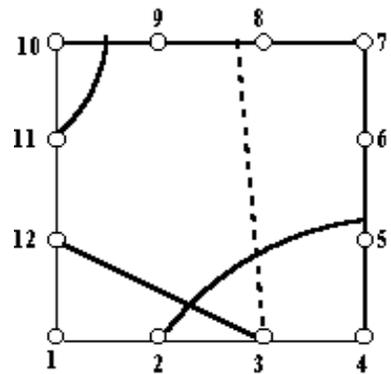


Рис.24. $p \in \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{32}\right)$.

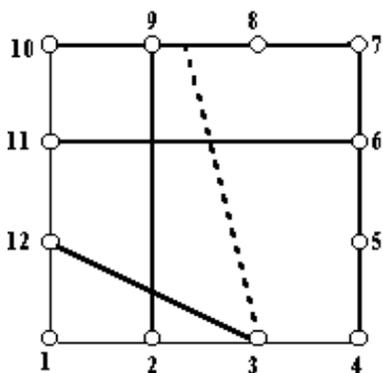


Рис.25. $p = \frac{1}{32}$.

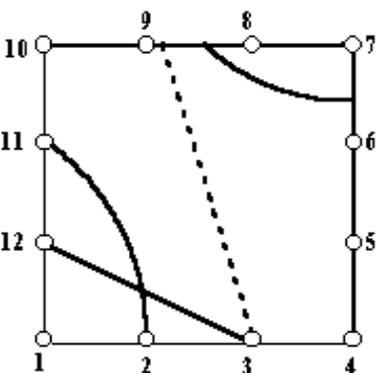


Рис.26. $p \in \left(\frac{1}{32}, \frac{3}{16}\right)$.

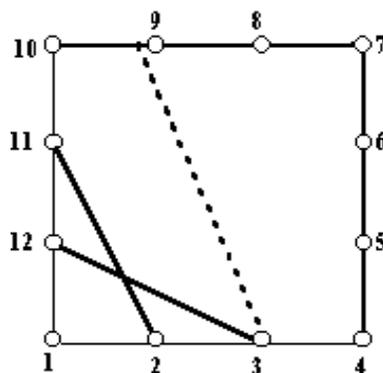


Рис.27. $p = \frac{3}{16}$.

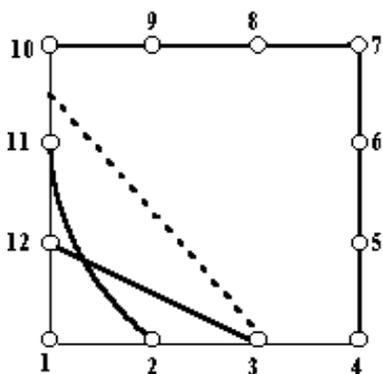


Рис.28. $p \in \left(\frac{3}{16}, \frac{1}{2}\right)$.

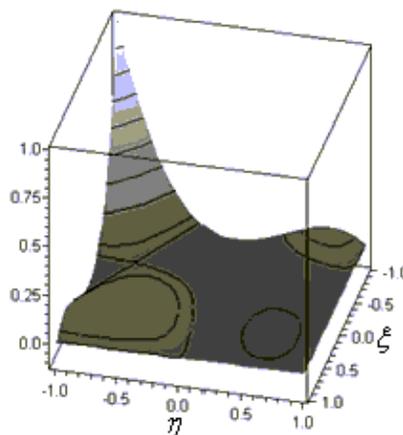


Рис.29. Визуализация 15-параметрической функции $N_1(\xi, \eta)$ с нарушением геометрической изотропии при $p = 0$.

При вырождении гиперболы в две пересекающиеся прямые (рис.17 и 25) полиномы (17) и (18) соответственно содержат 15 параметров (рис. 3в), если $p = -1/8$ (рис.23), то – 14 параметров (рис. 3б). Если же $p = 3/16$ (рис.27), получим базис с 13 параметрами (рис.3а).

5. Интерполяционный полином бикубического СКЭ с 16 параметрами. Не нарушая указанных ранее ограничений, $N_1(\xi, \eta)$ можно задать и таким образом:

$$N_1 = K_1(1 - \xi)(1 - \eta)(A\xi\eta + B\xi + B\eta + 1)(C\xi\eta + D\xi + E\eta + 1). \quad (19)$$

При этом система (9) имеет два решения, позволяющие представить $N_1(\xi, \eta)$

в двух вариантах:

$$\begin{aligned}
N_1 = \frac{1}{32(E-1)}(1-\xi)(1-\eta)[(72Ep-E-72p+3)\xi\eta + \\
+(72Ep-E-72p)(\xi+\eta) + \\
+(72p-1)(E-1)] \cdot [(3-4E)\xi\eta + E(\xi+\eta) + 1] \quad (20)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
N_1 = \frac{1}{32(E-1)}(1-\xi)(1-\eta)[(72Ep-E-72p-3)\xi\eta + \\
+(72Ep-E-72p)(\xi+\eta) + \\
+(72p-1)(E-1)] \cdot [(3-2E)\xi\eta + E(\xi+\eta) + 1]. \quad (21)
\end{aligned}$$

Полученные решения являются функциями переменной p и одного из неизвестных коэффициентов, например, E начального уравнения (19). Меняя значения этого коэффициента, мы можем конструировать бесчисленное множество базисов для одних и тех же значений p . Все эти базисы соответствуют условиям (5), (6) и позволяют записать 16-параметрический полином типа (13), элементы которого представлены на рис.3г. Рассмотрим частный случай (21) при $E = 2$,

$$\begin{aligned}
N_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)[(72p-5)\xi\eta + (72p-2)(\xi+\eta) + (72p-1)] \times \\
\times [-\xi\eta + 2(\xi+\eta) + 1]. \quad (22)
\end{aligned}$$

После раскрытия скобок и перегруппировки получим

$$\begin{aligned}
N_1 = \left(\frac{9}{4}p - \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{9}{2}p - \frac{3}{32}\right)\xi + \left(\frac{9}{2}p - \frac{3}{32}\right)\eta - \\
-\frac{9}{4}p\xi^2 - \left(\frac{9}{4}p + \frac{5}{32}\right)\xi\eta - \frac{9}{4}p\eta^2 + \\
+ \left(-\frac{9}{2}p + \frac{1}{8}\right)\xi^3 + \left(-\frac{9}{2}p + \frac{1}{8}\right)\xi^2\eta + \left(-\frac{9}{2}p + \frac{1}{8}\right)\xi\eta^2 + \left(-\frac{9}{2}p + \frac{1}{8}\right)\eta^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{9}{4}p + \frac{1}{8}\right) \frac{9}{32} \xi^3 \eta + \left(\frac{9}{4}p + \frac{1}{8}\right) \frac{9}{32} \xi \eta^3 + \left(\frac{9}{4}p + \frac{9}{32}\right) \xi^2 \eta^2 + \\
 & + \left(\frac{9}{2}p - \frac{13}{32}\right) \xi^3 \eta^2 + \left(\frac{9}{16}p - \frac{13}{32}\right) \xi^2 \eta^3 + \left(-\frac{9}{4}p + \frac{5}{32}\right) \xi^3 \eta^3.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Линии нулевого уровня $N_1(\xi, \eta)$ и $N_2(\xi, \eta)$ этого базиса изображены на рисунках 30-35.

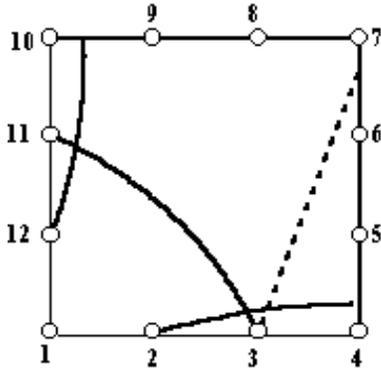


Рис.30. $p \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{144}\right)$.

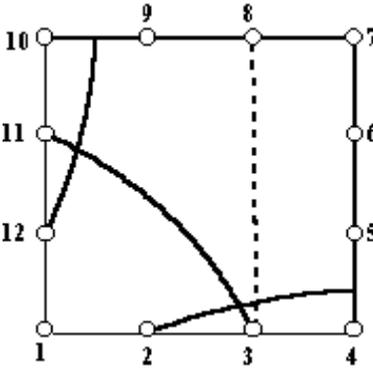


Рис.31. $p = -\frac{1}{8}$.

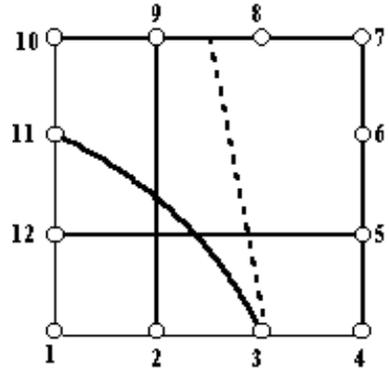


Рис.32. $p = \frac{1}{144}$.

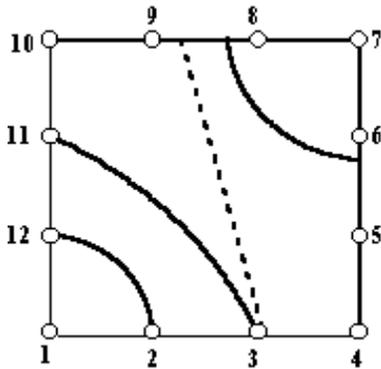


Рис.33. $p \in \left(\frac{1}{144}, \frac{5}{72}\right)$.

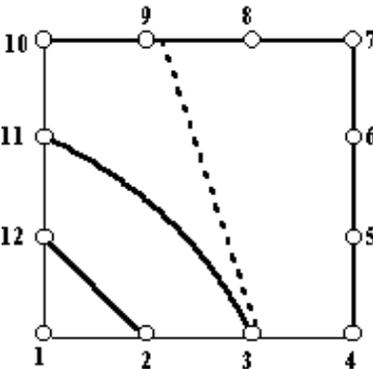


Рис.34. $p = \frac{5}{72}$.

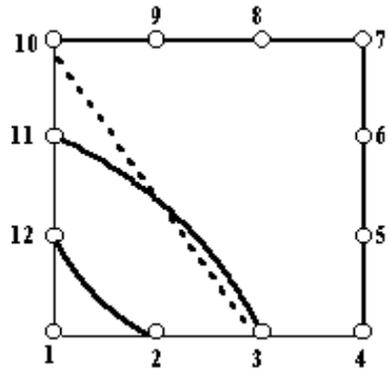


Рис.35. $p \in \left(\frac{5}{72}, \frac{1}{2}\right)$.

Как и в предыдущих случаях, при $p = -1/8$ (рис.31) количество параметров полинома (23) уменьшается, он становится 15-параметрическим – исчезает слагаемое $\alpha_{13}\xi^2\eta^2$. Полученный при этом полином отличается по составу от 15-параметрического (17), элементы которого приведены на рис. 3в. Полином с такими же компонентами, как в (17), образуется из (23) при $p = 5/72$, когда $\alpha_{16} = 0$ (рис.34). Кроме этого, при $p = 13/144$ исчезают слагаемые $\alpha_{14}\xi^2\eta^3$ и $\alpha_{15}\xi^2\eta^3$, в полиноме (23) остаётся 14 параметров (рис.35).

5. Выводы. Найденные модифицированные многопараметрические модели позволяют избавиться от "негативизма" в поузловом распределении рав-

номерной массовой силы, а также существенно уменьшить количество кратных нулей в узлах, что смягчает избыточную жесткость модели [19].

Литература

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О.Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541с.
2. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж.Оден. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
3. Ergatoudis I., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Curved isoparametric "quadrilateral" elements for finite element analysis // Internat. J. Solids Struct. – 1968. – 4. – P.31-42.
4. Ergatoudis I., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Three dimensional analysis of arch dams and their foundations // Proc. Symp. Arch, Dams, 1968. – P. 21-34.
5. Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axisymmetric problems // Proc. 2d Conf. Matrix Methods Struct. Mech, AFFDL-TR-68-150 (Oct. 15-17, 1968), Wright-Patterson AFB, Ohio. – P.539-572.
6. Taylor R.L. On the completeness of shape functions for finite element analysis // J. Num. Meth. Eng. – 1972. – 4;1. – P. 17-22.
7. Wachspress E.I. A rational finite element basis / E.I. Wachspress. – Academic Press: New York, 1975. - 216p.
8. Хомченко А.Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А.Н.Хомченко. – Ивано-Франк. ин-т нефти и газа: Ивано-Франковск, 1982. – 9с; деп. в ВИНТИ, №1213.
9. Хомченко А.Н. О базисных функциях МКЭ для уравнений в частных производных / А.Н. Хомченко. – III Респ. симпозиум по диффер. и интегр. уравнениям: тез. докл. – Одесса: ОГУ, 1982. – С. 257-258.
10. Хомченко А.Н. О модификации серендиповых элементов / А.Н. Хомченко. – Ивано-Франк. ин-т нефти и газа: Ивано-Франковск, 1983. - 4с; деп. в ВИНТИ, №3643.

11. Камаева Л.И., Хомченко А.Н. О моделировании конечных элементов серендипова семейства // Прикл. проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. – Горький: ГГУ. – 1985. – С.14-17.
12. Хомченко А.Н. Литвиненко Е.И., Гучек П.И. Геометрия серендиповых аппроксимаций // Прикл. геом. и инж. графика. – К.: Будівельник, 1996. – Вып.59. – С.40-42.
13. Хомченко А.Н., Астионенко И.А., Литвиненко Е.И. Обратные задачи об интегральных средних для серендиповых полиномов // Вестник Херсонского национ. техн. ун. – 2007. – 2(28). – С.383-389.
14. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1986. – 318с.
15. Коннор Дж. Метод конечных элементов в механике жидкости / Дж. Коннор, К. Бреббиа. – Л.: Судостроение, 1979. – 264с.
16. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р.Галлагер. – М.: Мир, 1984. – 428с.
17. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л.Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392с.
18. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов) / Ю.И. Немчинов. – К.: Будівельник, 1980. – 232с.
19. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г.Стренг, Дж.Фикс. – М.: Мир, 1977. – 350с.

CONSTRUCTION OF THE MULTIPARAMETER POLYNOMIALS BY THE BICUBIC ELEMENT OF SERENDIPITY FAMILY

I.A.Astionenko, Ye.I.Litvinenko, A.N.Khomchenko

Kherson National Technical University

Berislavskii Way, 24, Kherson, Ukraine, 73008, e-mail: mmkntu@gmail.com

The existence of multiparameter bases constructed by the serendipity family of finite elements is proved constructively. The infinite set of interpolation polynomials which contains from 12 to 16 parameters is built in the frame of 12-node flat element (bicubic interpolation).

Key words: finite element of serendipity family, multiparameter interpolation, Lagrange polynomial basis, zero-level lines of basis functions.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ПОД ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМИ СООРУЖЕНИЯМИ

Э.Н.Береславский, Л.А.Александрова, Е.В.Пестерев

Государственный университет гражданской авиации,
Санкт-Петербург, 197349, Россия, e-mail: eduber@mail.ru

В рамках двумерной стационарной фильтрации в однородном и изотропном грунте несжимаемой жидкости по закону Дарси исследуются некоторые фильтрационные течения под гидротехническим сооружением и под шпунтом Жуковского. Решение соответствующих многопараметрических смешанных краевых задач теории аналитических функций осуществляется с помощью метода конформных отображений областей специального вида. Приводятся результаты численных расчетов и дается подробный гидродинамический анализ влияния определяющих физических параметров моделей на картину течений.

Ключевые слова: фильтрация, грунтовые воды, плотина, шпунт, область комплексной скорости, конформные отображения.

1. Введение. В рамках плоской установившейся фильтрации в однородном и изотропном грунте несжимаемой жидкости (по закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации $\kappa = \text{const}$) рассматриваются математические модели некоторых течений под заглубленной плотиной и под шпунтом Жуковского. Для их изучения формулируются и с помощью метода конформных отображений областей специального вида решаются смешанные краевые задачи теории аналитических функций. На основе полученных точных аналитических зависимостей и численных расчетов анализируется влияние физических параметров моделей на фильтрационные характеристики, а также изучается характер и степень влияния на фильтрационные потоки таких важных факторов, как скорость обтекания, действующий на гидротехническое сооружение напор, мощность проницаемого слоя и интенсивность инфильтрации на свободную поверхность.

2. Построение подземного контура плотины с участками постоянной скорости обтекания. Рассматривается течение под водонепроницаемым подземным контуром заглубленной плотины $ABCC_1B_1A_1$ (рис. 1). Пусть контур основания плотины AA_1 состоит из двух вертикальных отрезков AB и A_1B_1 одинаковой длины d_1 , среднего горизонтального отрезка CC_1 и примыкающих к ним дуг кривых BC и B_1C_1 с постоянной величиной скорости их обтекания $|w| = v_0$. Снизу область течения ограничена

криволинейным водоупором FF_1 , на котором величина скорости фильтрации также постоянна $|w| = u_0 (0 < u_0 < v_0)$. Предполагается, что границы верхнего и нижнего бьефов горизонтальны, грунт однороден и движение подчиняется закону Дарси с извечным коэффициентом фильтрации $\alpha = \text{const}$. Действующий на сооружение напор H , скорость обтекания v_0 и фильтрационный расход Q считаются заданными.

Введем комплексный потенциал движения $\omega = \varphi + i\psi$, где φ – потенциал скорости, ψ – функция тока (область изменения переменной ω представлена на рис. 2) и комплексную координату $z = x + iy$, отнесенные соответственно к αH и H . Тогда $\vec{v} = \text{grad}\varphi = -\alpha \text{grad}h$, где напор $h = p/\gamma + y$, p – давление, γ – удельный вес фильтрующейся жидкости [1]. Задача состоит в определении положения кривых BC , B_1C_1 и FF_1 при краевых условиях

$$\begin{aligned} A_1F_1 : y = 0, \varphi = -0.5H; & \quad A_1B_1 : x = -l, \psi = Q; \\ C_1C : y = -d, \psi = Q; & \quad AB : x = l, \psi = Q; \\ AF : y = 0, \varphi = 0.5H; & \quad FEF_1 : \psi = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

таким образом, чтобы скорость фильтрации вдоль криволинейных участков подземного контура флютбета BC и B_1C_1 , а также водоупора FF_1 имела постоянные значения v_0 (заданное) и u_0 (искомое) соответственно.

Рассматриваемая задача в подобной постановке относится к так называемым смешанным обратным краевым задачам теории фильтрации, т.е. к задачам, в которых одни участки границы области известны, а другие подлежат определению. Отметим, что впервые обратный подход к фильтрационному расчету подземного контура плотин был применен в [2], когда известные участки контура прямолинейны, а на искомым скорость обтекания постоянна. Эта работа дала толчок к развитию целого направления – отысканию контуров гидротехнических сооружений по заданным их свойствам – и породила многочисленные исследования, посвященные течениям подобного рода, которые принадлежат главным образом казанской школе математиков и механиков [3].

В отличие от этих работ ниже рассматривается не только построение плавного контура плотины, но и определяется очертание подстилающего водопроницаемого основания криволинейного водоупора, также характеризуемого постоянством скорости фильтрации. Отметим, что введение подобных криволинейных участков позволяет избежать рассмотрения нереальных полубесконечных и бесконечных областей, что особенно важно при разработке приближенных и численных методов (конечных элементов, граничных интегральных уравнений и др.).

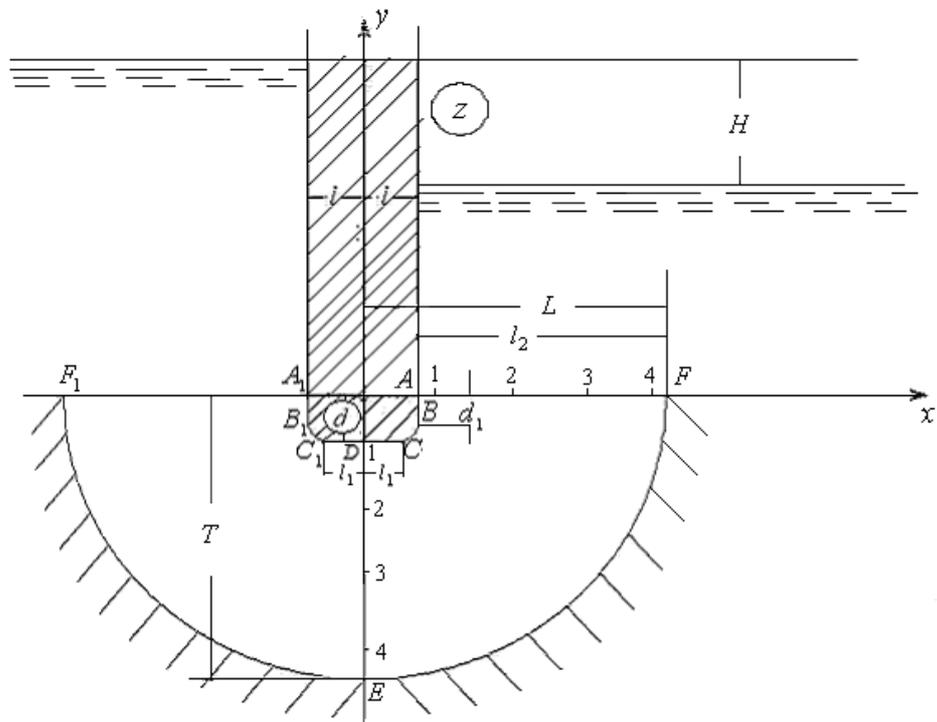


Рис.1. Картина течения, рассчитанная при $H = 2$, $v_0 = 1$, $Q = 1.14$, $\Delta l = 0.296$ и $\Delta d = 0.295$.

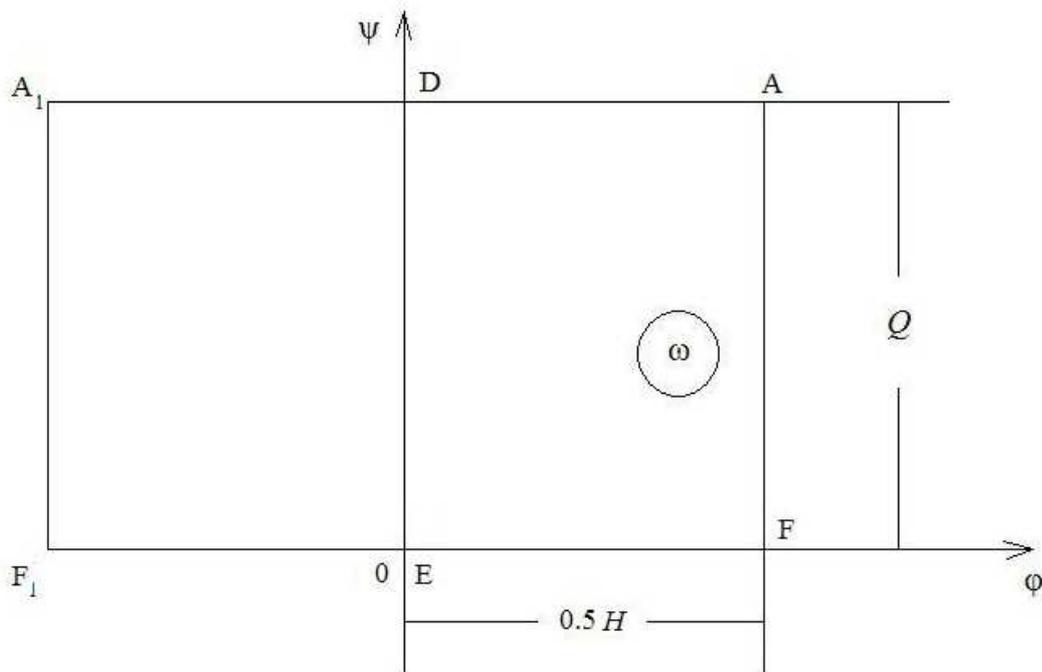


Рис.2. Область комплексного потенциала течения ω .

приближенных и численных методов (конечных элементов, граничных интегральных уравнений и др.).

На рис. 3 *a* изображена область комплексной скорости w , соответствующая краевым условиям (1), которая ограничена дугами концентрических окружностей и отрезками прямых, проходящих через начало координат. Ввиду полной симметрии на плоскостях z , ω и w ограничимся рассмотрением области движения $ABCDEF$ (рис. 1) и соответствующих ей одноименных областей на плоскостях ω и w (рис. 2 и 3, *a*).

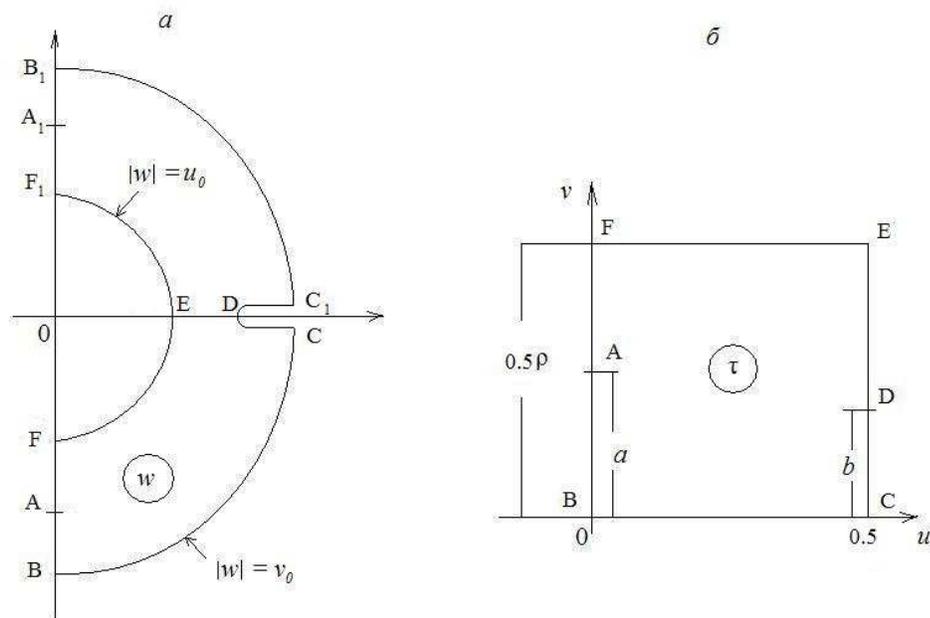


Рис. 3: Область комплексной скорости w (*a*) и вспомогательной параметрической переменной τ (*б*).

Учитывая обилие прямых углов в плоскости w , удобно при конформном отображении в качестве канонической области плоскости τ взять прямоугольник [4] (рис. 3, *б*) $0 < \text{Re } \tau < 0.5, 0 < \text{Im } \tau < 0.5, \rho(k) = K'/K, K' = K(k'), k' = \sqrt{1 - k^2}, K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода при модуле k . Тогда функция, совершающая конформное отображение этого прямоугольника на область w , выражается как

$$w(\tau) = v_0 \exp(\tau - 0.5)\pi i. \tag{1}$$

Конформно отобразим прямоугольник вспомогательной переменной τ на об-

ласть комплексного потенциала ω (рис. 2). В результате

$$\omega = \frac{0.5}{K(k)} F \left(\arcsin \frac{\lambda \operatorname{dn}(2K\tau, k)}{k \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)}}, m \right), \quad (2)$$

где $F(\varphi, m)$ – эллиптический интеграл первого рода при модуле

$$m = k \sqrt{(1 - k'^2 \alpha^2 \beta^2) / (1 - k'^2 \alpha^2)}, \quad \lambda = \sqrt{1 - k'^2 \beta^2},$$

$$\alpha = \operatorname{sn}(2Ka, k'), \quad \beta = \operatorname{sn}(2Kb, k'),$$

$\operatorname{sn}(\varphi, k)$, $\operatorname{cn}(\varphi, k)$ и $\operatorname{dn}(\varphi, k)$ – эллиптические функции Якоби (соответственно синус, косинус и дельта) при модуле k . При этом должно выполняться условие

$$\frac{K'(m)}{K(m)} \equiv \frac{2Q}{H}, \quad (3)$$

связывающее между собой физические параметры Q и H , которое служит для определения модуля k .

Принимая во внимание соотношения (2) и (3), учитывая, что $w = d\omega/dz/$ и поступая аналогично тому, как это сделано в [5, 6], приходим к зависимостям

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} &= \frac{M \operatorname{sn}(2K\tau, k) \operatorname{cn}(2K\tau, k)}{\Delta(\tau)}, \\ \frac{dz}{d\tau} &= \frac{M \operatorname{sn}(2K\tau, k) \operatorname{cn}(2K\tau, k) \exp((0.5 - \tau)\pi i)}{\nu_0 \Delta(\tau)}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Delta(\tau) = \sqrt{[1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)][\alpha^2 + (1 - \alpha^2) \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)]},$$

где $M > 0$ – масштабная постоянная моделирования. Можно проверить, что функции (5) удовлетворяют граничным условиям (1), сформулированным в терминах функций $d\omega/d\tau$ и $dz/d\tau$, и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи.

Основная вычислительная сложность дальнейшего решения задачи заключается в том, что в зависимости (5) входят четыре неизвестные постоянные конформного отображения – α , β , M и модуль k , для определения которых приходится исследовать и решать весьма сложную систему трансцендентных уравнений. Кроме того, подынтегральные выражения, входящие в эти уравнения, бесконечны на некоторых пределах интегрирования.

Интегрируя (5) вдоль контура области τ , получаем выражения для геометрических и фильтрационных характеристик:

$$\int_0^{0.5} X_{BC} dt = \Delta l, \quad \int_0^{0.5} Y_{BC} dt = \Delta d, \quad \int_0^{0.5} \Phi_{EF} dt = 0.5H, \quad (5)$$

которые используются для нахождения неизвестных параметров конформного отображения – α , β и M , координаты точек подземного контура плотины $x_{BC}(t)$, $y_{BC}(t)$, а также координаты криволинейной части водоупора $x_{EF}(t)$, $y_{EF}(t)$, $0 \leq t \leq 0.5$. Здесь $\Delta l = l - l_1$, $\Delta d = d - d_1$, X_{BC} , Y_{BC} , Φ_{EF} – выражения правых частей (5) на соответствующих участках контура плоскости τ . Полагая в уравнениях для координат $t = 0.5$, находим искомые размеры подземного контура плотины и криволинейного водоупора

$$l_1 = x_{BC}(0.5), \quad d_1 = y_{BC}(0.5), \quad L = l + l_2 = x_{EF}(0.5), \quad T = y_{EF}(0.5). \quad (6)$$

Рассмотрим предельные случаи. Если в плоскости течения вертикальный отрезок AB отсутствует, что соответствует слиянию точек A и B (параметры $a = \alpha = 0$, $d_1 = 0$), то интегрируя уравнения (6), получаем следующие выражения для фильтрационных характеристик

$$\Delta l = \frac{H(1 - \lambda')}{\pi v_0 \lambda}, \quad \Delta d = d = \frac{H[E(\lambda) - \lambda'^2 K(\lambda)]}{\pi v_0 \lambda},$$

$$l_1 = \frac{H[E(\lambda') - \lambda^2 K(\lambda') + \lambda']}{\pi v_0 \lambda}, \quad (7)$$

$$l = l_1 + \Delta l = \frac{H[E(\lambda') - \lambda^2 K(\lambda') + 1]}{\pi v_0 \lambda},$$

где $E(\lambda)$ – полный эллиптический интеграл второго рода при модуле $\lambda = \sqrt{1 - \beta^2}$. Если в плоскости течения z отсутствует горизонтальный отрезок CD , что отвечает слиянию точек C и D (параметры $b = \beta = 0$, $l_1 = 0$), то интегрирование уравнений (6) приводит к формулам (8) заменой в них параметров α на β , d на l и наоборот. Формулы (8) совпадают с формулами (10.9), (10.13), (10.16), (10.19), (10.22) и (10.24) [1, с. 197-200].

На рис. 1 изображена картина течения, рассчитанная при $v_0 = 1$, $H = 2$, $Q = 1.14$, $\Delta l = 0.296$ и $\Delta d = 0.295$ (базовый вариант). Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров v_0 , H , Q , Δl и Δd на размеры l , l_1 , d , d_1 , l_2 и T представлены на рис. 4-8 в виде зависимостей d_1 , l_2 и l_1 , T от указанных параметров. В каждом из этих рисунков варьируется

один из параметров v_0 , H , Q , Δl и Δd , а значения остальных фиксируются базовыми. Анализ графиков позволяет сделать следующие выводы.

Уменьшение скорости обтекания и увеличение действующего на сооружение напора приводят к росту всех размеров плотины l , l_1 , d и d_1 и, наоборот, к уменьшению размеров криволинейного водоупора l_2 и T . Величины l_1 и d_1 , а следовательно, ширина и толщина плотины могут быть весьма значительными: из графиков рис. 4 следует, что изменение скорости в 1.5 раза увеличивает ширину l_1 и толщину d_1 соответственно на 329 и 380.4%. Из графиков, приведенных на рис. 6-8, видно, что зависимости l_1 и d_1 от скорости обтекания и действующего напора, а также l_2 и T от всех определяющих параметров модели качественно подобны, причем при фиксированных значениях v_0 , H , Q , Δl и Δd глубина водоупора T всегда превосходит ширину l_2 в среднем на 10-20%.

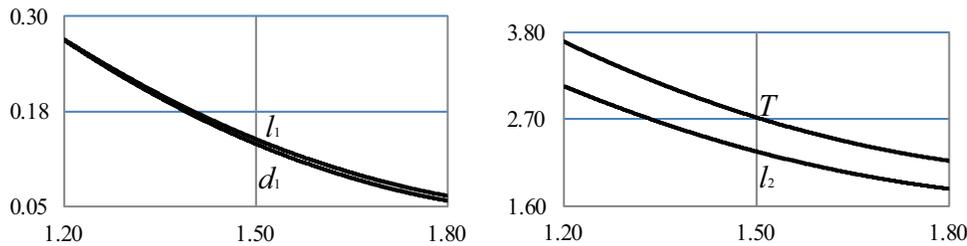


Рис. 4: Зависимости величин d_1 , l_1 (а) и T , l_2 (б) от v_0 .

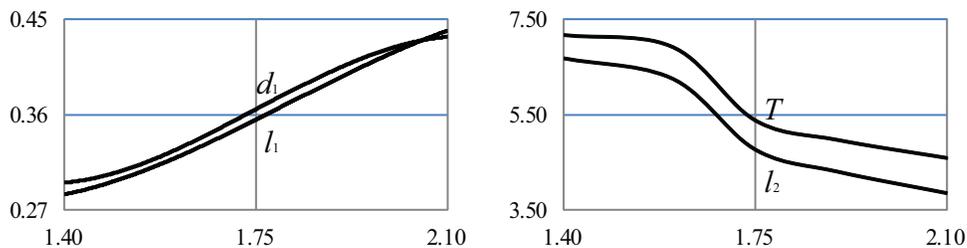


Рис. 5: Зависимости величин d_1 , l_1 (а) и T , l_2 (б) от H .

Обращает на себя внимание одинаковый качественный характер зависимостей величин l , l_1 , d и d_1 от параметров Q и Δl : увеличение фильтрационного расхода и разности Δl приводит к росту толщины плотины d (а также величины d_1) и уменьшению ширины плотины l (а также величины l_1). В то же время наблюдается совершенно противоположный характер изменения размеров плотины при варьировании величин Δl и Δd . Графики, приведенные на рисунках 7 и 8, которые относятся к этим параметрам, отражают законо-

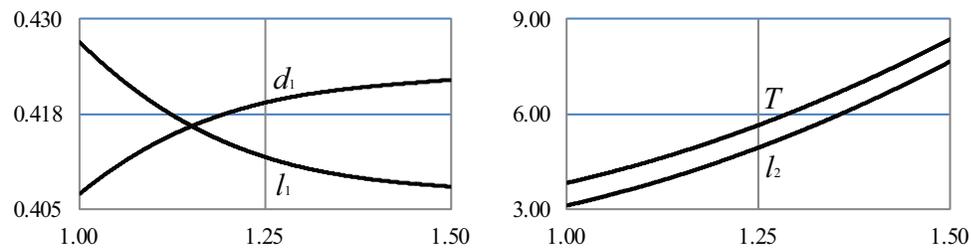


Рис. 6: Зависимости величин d_1, l_1 (а) и T, l_2 (б) от Q .

мерность, которая является естественной с физической точки зрения: увеличению разности $\Delta l(\Delta d)$ сопутствует убывание (или рост) ширины плотины l и рост (или убывание) её толщины d . Так, с изменением Δl на 50% ширина l_1 уменьшается в 4.1 раза, толщина d_1 увеличивается в 110.5 раз, подобное же изменение величины Δd приводит к увеличению ширины l_1 в 5.2 раза и уменьшению толщины d_1 в 14.7 раза.

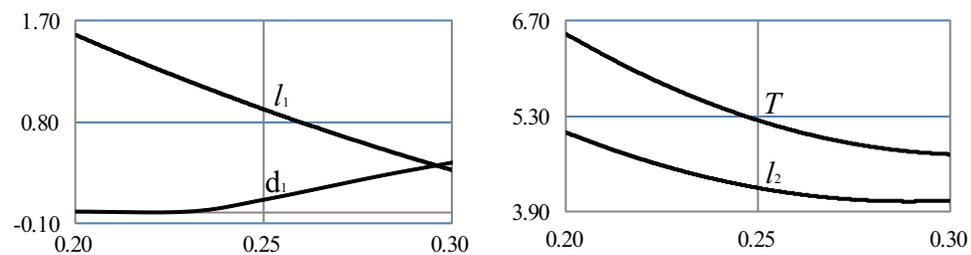


Рис. 7: Зависимости величин d_1, l_1 (а) и T, l_2 (б) от Δl .

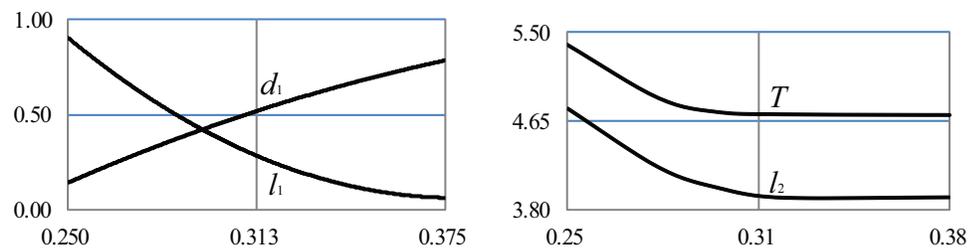


Рис. 8: Зависимости величин d_1, l_1 (а) и T, l_2 (б) от Δd .

С ростом параметров $v_0, H, \Delta l$ и Δd глубина водоупора T и ширина l_2 уменьшаются (хотя и незначительно, в пределах 1.1-1.7 раз) и увеличиваются с возрастанием фильтрационного расхода Q , причем существенно: на 147 и 119% соответственно. При этом величины T и l_2 могут быть весьма значительными и в рассматриваемых случаях превосходить не только параметры l_1 и d_1 , но и сами размеры плотины l и d соответственно. Так из графика

рис. 4 вытекает, что при $H = 1.4$ имеем $l_1 = 0.285$, $l = 0.581$, $l_2 = 6.678$, значит, $l_2/l = 11.5$, а из графика рис. 8 следует, что при $\Delta l = 0.2$ получаем $d_1 = 0.004$, $d = 0.299$, $T = 6.495$, следовательно, $T/d = 21.7$. Таким образом, размеры l_2 и T превосходят ширину плотины l и ее толщину d на 1049 и 2072% соответственно.

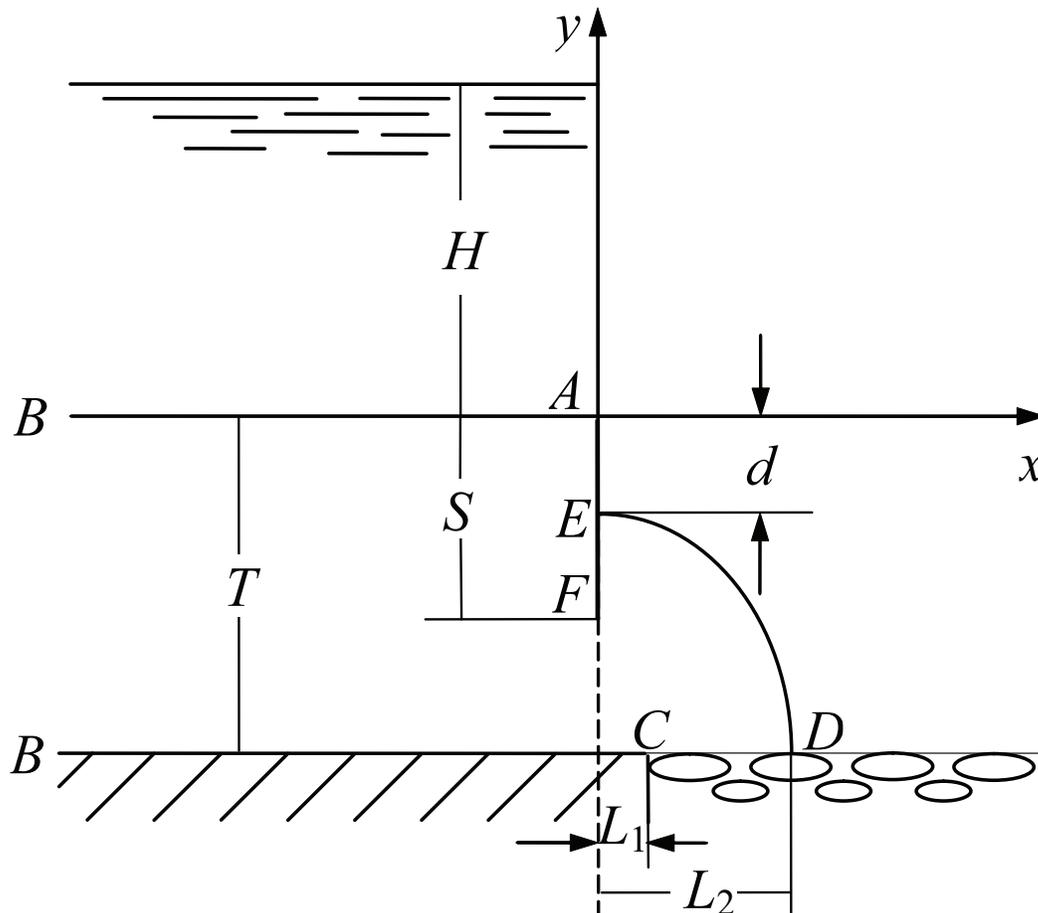


Рис. 9: Картина течения, рассчитанная при $V_F = 0.3$, $\varepsilon = 0.6$, $T = 5$, $H = 5$, $S = 3$.

3. Об одном случае обтекания шпунта Жуковского. Рассматривается течение жидкости под шпунтом AFE , когда на некоторой глубине T имеется горизонтальный пласт, состоящий из непроницаемого участка BC и хорошо проницаемого слоя CD , не содержащего напорных грунтовых вод (рис. 9). Грунтовые воды, обтекая шпунт с конечной скоростью V_F на его конце, поднимаются за ним на некоторую высоту FE и образуют свободную поверхность ED , на которую поступают инфильтрационные воды с интенсивностью ε ($0 < \varepsilon < 1$). Действующий напор H , глубина залегания пласта

T , длина шпунта S , а также скорость обтекания его на конце V_F ($0 < V_F < \varepsilon$) считаются заданными. Задача состоит в определении положения кривой депрессии ED и, стало быть, размеров d (высота поднятия воды за шпунтом), L_1 (длина отрезка непроницаемого участка слоя за шпунтом) и L_2 (проекция свободной поверхности) при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} AB : y = 0, \varphi = -H; \quad BC : y = -T, \psi = 0; \quad CD : y = -T, \varphi = 0; \\ DE : \varphi = -y - T, \psi = Q + \varepsilon x; \quad AFE : x = 0, \psi = Q, \end{aligned} \quad (8)$$

где Q – искомый фильтрационный расход.

Впервые задача об обтекании шпунта рассматривалась Н.Е. Жуковским [7], где видоизмененный им метод Кирхгофа в теории струй был использован для решения задач фильтрации со свободной поверхностью. Здесь была введена специальная аналитическая функция, впоследствии получившая весьма широкое применение в теории фильтрации, с помощью которой Н.Е. Жуковским дано исследование задачи об обтекании шпунта. С тех пор как сама функция, так и шпунт носят имя Жуковского [1]. Работа [7] открыла возможность математического моделирования задач со свободной поверхностью и положила начало исследованиям указанного класса фильтрационных течений [1,3,8].

В отличие от предыдущих исследований ниже дается решение задачи Жуковского об обтекании шпунта в том случае, когда на некоторой глубине под шпунтом залегает горизонтальный пласт, состоящий из непроницаемого и хорошо проницаемого участков и при наличии инфильтрации на свободную поверхность.

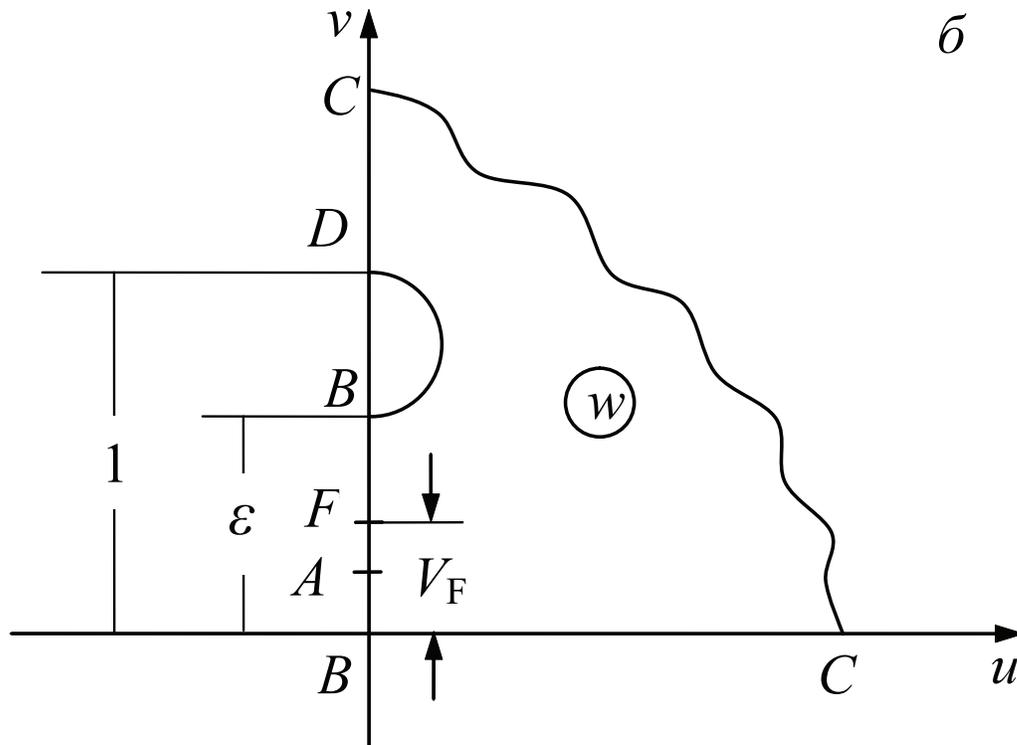
Область комплексной скорости w , которая соответствует краевым условиям (9) (рис. 10), имеет только прямые углы и в этом смысле подобна области предыдущей задачи (рис. 3 а). Поэтому принимая в качестве вспомогательной параметрической переменной τ (рис. 3 б) и применяя разработанную [4] методику построения отображающих функций для подобных многоугольников, найдем

$$w(\tau) = \sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg} \pi \tau. \quad (9)$$

Принимая во внимание соотношение (10) и поступая аналогично [9,10], решение краевой задачи найдем в следующем параметрическом виде

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \sqrt{\varepsilon} M \frac{\sin \pi \tau}{\operatorname{sn}(2K\tau, k) \Delta(\tau)}, \quad \frac{dz}{d\tau} = M \frac{\cos \pi \tau}{\operatorname{sn}(2K\tau, k) \Delta(\tau)}, \quad (10)$$

здесь $\Delta(\tau) = \sqrt{B_1^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k) + B^2}$, $\beta_1 = \sqrt{1 - \beta^2}$, $a = \operatorname{arth}(V_F/\sqrt{\varepsilon})/\pi$, $b = \tau_0$ (ордината точки O в плоскости τ), и модуль k определяется на сей раз

Рис. 10: Область комплексной скорости w .

из уравнения

$$\rho = K'/K = 2\operatorname{arth}\sqrt{\varepsilon}/\pi. \quad (11)$$

В данном случае неизвестные параметры отображения B и M определяются в результате решения следующей системы уравнений

$$\int_a^b Y_{OF} dt = S, \quad \int_0^{0.5} \Phi_{CD} = H, \quad (12)$$

после чего вычисляются координаты точек свободной поверхности $x_{AB}(t)$ и $y_{AB}(t)$, $0 \leq t \leq 0.5$. Полагая в уравнениях $t = 0.5$, находим искомые размеры

$$L_2 = x_{AB}(0.5), \quad d = T - y_{AB}(0.5), \quad (13)$$

а также

$$L_1 = L_2 - \int_0^{0.5} \psi_{AD} dt, \quad Q = \int_0^b \psi_{OC} dt, \quad (14)$$

где Y_{OF} , Φ_{CD} , ψ_{AD} и ψ_{OC} – выражения правых частей (11) на соответствующих участках контура плоскости τ .

На рис. 9 изображена картина течения, рассчитанная при $V_F = 0.3$, $\varepsilon = 0.6$, $T = 5$, $H = 5$, $S = 3$ (базовый вариант). Результаты расчетов влияния

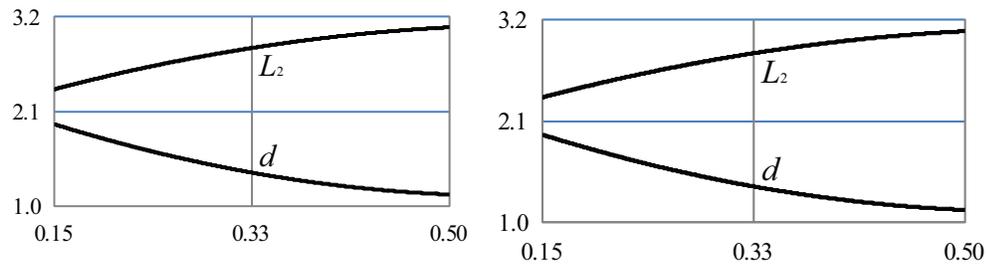


Рис. 11: Зависимости величин L_2 и d (а), Q и L_1 (б) от V_F .

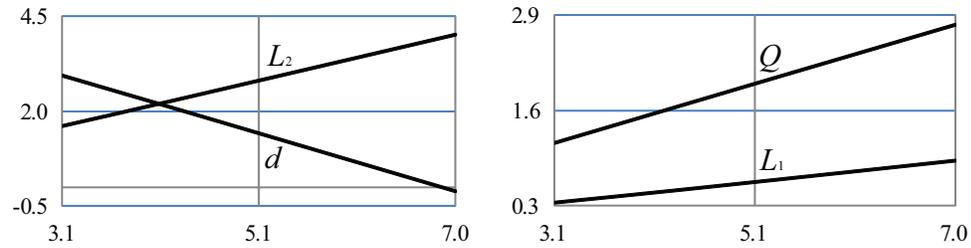


Рис. 12: Зависимости величин L_2 и d (а), Q и L_1 (б) от H .

определяющих физических параметров V_F , H , S , и ε на фильтрационные характеристики представлены на рис. 11-15 в виде зависимостей Q , d и L_1 , L_2 от указанных параметров. Анализ данных графиков позволяет сделать следующие выводы.

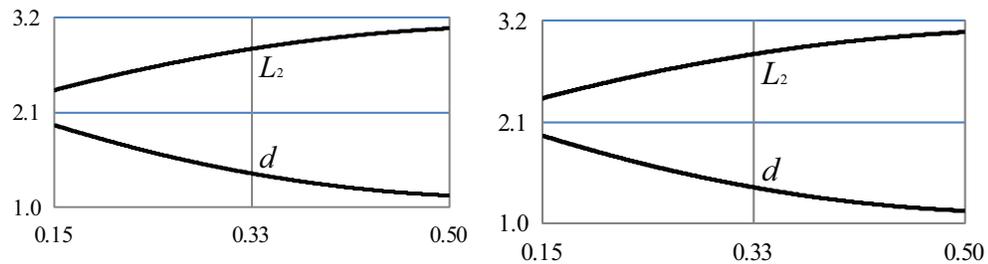
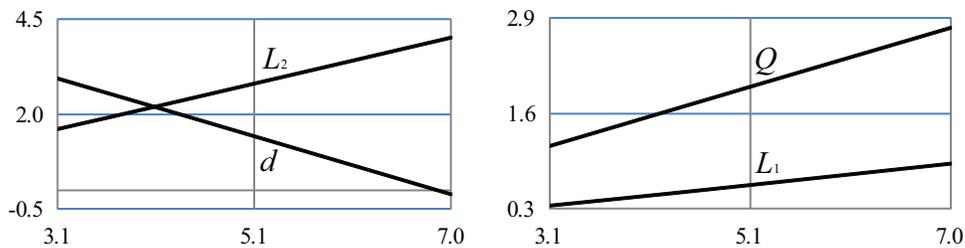
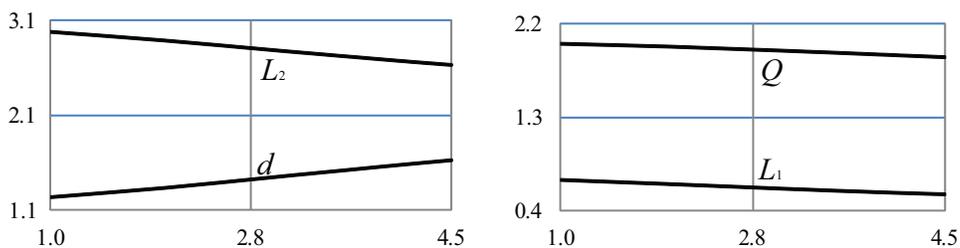
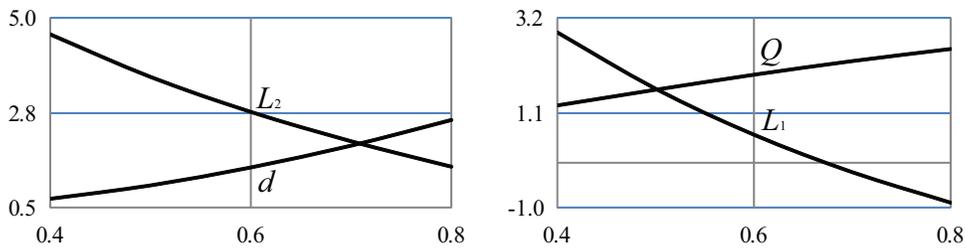
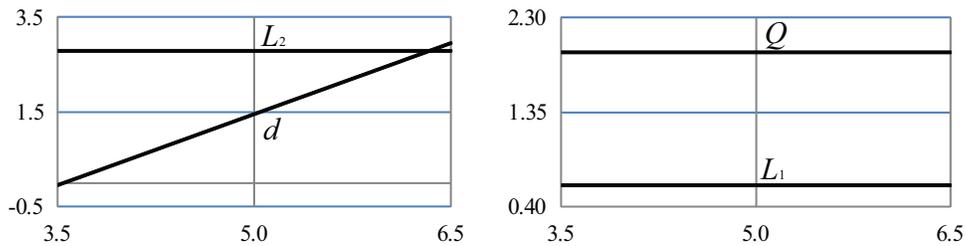


Рис. 13: Зависимости величин L_2 и d (а), Q и L_1 (б) от V_F .

Возрастание скорости V_F и напора H увеличивают размеры L_1 , L_2 и расход Q и, наоборот, уменьшают высоту поднятия воды за шпунтом d . В то же время наблюдается совершенно противоположный характер изменения размеров L_1 , L_2 и d при варьировании параметров S и ε : при уменьшении интенсивности ε всего в 2 раза размеры L_1 и L_2 возрастают на 1744 и 312% соответственно. Наиболее существенное влияние на глубину d оказывает напор H и мощность пласта T .

Рис. 14: Зависимости величин L_2 и d (а), Q и L_1 (б) от H .Рис. 15: Зависимости величин L_2 и d (а), Q и L_1 (б) от S .Рис. 16: Зависимости величин L_2 и d (а), Q и L_1 (б) от ε .Рис. 17: Зависимости величин L_2 и d (а), Q и L_1 (б) от T .

Литература

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я.Полубаринова-Кочина. – М.: Гостехиздат,1952.; 2-е изд. – М.:Наука,1977.
2. Кочина И.Н., Полубаринова-Кочина П.Я. О применении плавных контуров основания гидротехнических сооружений // ПММ. – 1952. – 16. – С.57-66.
3. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). – М.: Наука,1969. – 545с.
4. Береславский Э.Н. О конформном отображении некоторых круговых многоугольников на прямоугольник // Изв. вузов. Математика. – 1980. – №5. – С.3-7.
5. Береславский Э.Н. Построение контура постоянной скорости основания гидросооружения при фильтрации двух жидкостей разной плотности // ПММ. – 1990. – 54. – 2. – С.342-346.
6. Береславский Э.Н. Определение подземного контура заглубленного флюэтбета с участком постоянной скорости при наличии соленых подпорных вод // ПММ. – 1998. – 62; 1. – С.169-175.
7. Жуковский Н.Е. Просачивание воды через плотины // Опытно-мелиоративная часть НКЗ. – 1993. – 30. – С.30-32; собр. соч. М.: Гостехиздат,1950. – 7. – С.297-332.
8. Ведерников В.В. Теория фильтрации и её применение в области ирригации и дренажа/ В.В.Ведерников. – М.-Л.: Госстройиздат,1939. – 248с.
9. Береславский Э.Н. Гидродинамическая модель отжима пресными фильтрационными водами покоящихся соленых при обтекании шпунта Жуковского // Докл. АН СССР. – 1998. – 303;4. – С.479-482.
10. Береславский Э.Н. К задаче Жуковского об обтекании шпунта // ПММ. – 1999. – 63;4. – С.603-610.

MATHEMATICAL MODELING OF SOME FILTRATION CURRENTS UNDER HYDRAULIC ENGINEERING CONSTRUCTIONS

Bereslavskiy E.N., Aleksandrova L.A., Pesterev E.V.

State University of Civil Aviation,

Sankt-Peterburg, 197349, Russia, e-mail: eduber@mail.ru

Within the framework of two-dimensional stationary filtering in uniform soil of the incondensable liquid under the law Darsi are researched some filtration currents under hydrotechnical building and under groove Zhukovskogo. The Decision corresponding to multivariable mixed marginal problems to theories analytical function is realized by means of method conformal mappings of the areas of the special type. Happen to the results numerical calculation and is given detailed hydrodynamic analysis of the influence defining physical parameter of the models on picture of the currents.

Key words: filtering, groundwater, dam, groove, velocity hodograph, conformal mappings.

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА. ФЛУКТУАЦИОННЫЙ ПОДХОД

Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А.

Белгородский государственный университет,

Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Рассматривается одномерная задача радиационно-кондуктивного теплообмена в диэлектрической среде с ковалентной химической связью. На основе представления об обмене теплом посредством электромагнитного поля, которое порождается тепловыми флуктуациями электрической поляризации среды, вычисляется поток энергии флуктуационного поля в виде функционала от её локальной температуры, что позволяет сформулировать замкнутое эволюционное уравнение переноса тепла в среде.

Ключевые слова: радиационно-кондуктивный теплообмен, электрическая поляризация, флуктуации, гауссовское случайное поле, уравнения Максвелла, закон Стефана-Больцмана, поток энергии, распределение температуры.

1. Введение. Перенос тепла в твердотельной среде осуществляется двумя механизмами – посредством теплопроводности и электромагнитным излучением, порождаемым возбуждениями состояния среды. В соответствии с этим эволюционное уравнение для распределения температуры $T(\mathbf{r}, t)$ в момент времени t записывается в виде [1]

$$\rho\lambda\dot{T}(\mathbf{r}, t) = \kappa\Delta T(\mathbf{r}, t) - (\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)), \quad (1)$$

где $\kappa > 0$ – коэффициент теплопроводности среды, ρ – плотность среды и λ – её теплоёмкость. Далее, для простоты мы будем считать эти величины постоянными, не зависящими от температуры. Первое слагаемое в правой части (1) связано с теплопроводностью, а векторное поле $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ представляет собой поток энергии электромагнитного излучения, переносящего тепло. Дивергенция $-(\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{r}, t))$ умноженная на малый объём ΔV пространственной области среды, сосредоточенной около точки \mathbf{r} , равна части этого потока, которая тратится на нагрев области в момент времени t . Центральным для постановки задач радиационно-кондуктивного теплообмена является вычисление поля $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ в виде функционала $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{S}[T(\mathbf{r}, t)]$ от распределения температуры, при наличии которого уравнение (1) для $T(\mathbf{r}, t)$ становится самосогласованным. Обычно, поток энергии $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ находится на основе феноменологических соображений об интенсивности переноса энергии излучения [1], [2]. В

такого рода рассуждениях не используется само электромагнитное поле, осуществляющее перенос тепла. Это положение является неудовлетворительным с теоретической точки зрения. Оно связано с отсутствием последовательной микроскопической теории радиационно-кондуктивного теплообмена, которая должна быть основана на квантовой теории излучения и поглощения атомами среды электромагнитного излучения (фотонов) и, следовательно, носить статистический характер.

Для выявления сложностей, с которыми сталкивается построение микроскопической теории радиационно-кондуктивного теплообмена, рассмотрим это явление с качественной точки зрения. Наше рассмотрение мы ограничим тем случаем, когда среда является диэлектрической и её электромагнитные свойства характеризуются динамической диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, зависящей от частоты излучения ω и постоянной магнитной проницаемостью μ . Будем считать, что среда имеет решёточную кристаллическую структуру, хотя приводимые ниже рассуждения вполне применимы и для аморфной упругой среды. Для определённости мы будем считать, что она состоит из электрически нейтральных атомов. В то же время качественная физическая картина переноса тепла излучением не претерпевает существенных изменений, если в узлах решётки находятся молекулы с ковалентной связью либо ионы, связанные между собой электровалентным образом.

При достаточно большой температуре, то есть при достаточно большой амплитуде неупорядоченных колебаний решётки, последние приводят к деформации электронных оболочек каждого из атомов. Это означает, что атомы могут переходить в энергетически возбуждённые состояния. Релаксация каждого из возбуждённых состояний в исходное приводит к излучению фотона с частотой, пропорциональной разности соответствующих энергетических уровней. При этом атом получает импульс отдачи, который изменяет его динамическое состояние. Излученный фотон распространяется в среде вплоть до поглощения его другим атомом среды, который, таким образом, становится возбуждённым. При этом фотон передаёт атому свой импульс, который может приводить к его раскачке или торможению так же, как и при излучении фотона. Через некоторое время возбуждённый атом переизлучает поглощённый фотон, хотя, возможно, с меньшей частотой. После чего процесс распространения излучения продолжается. В связи с наличием событий отдачи при излучении и поглощении фотонов можно говорить, что существует механизм перекачки энергии как из фотонной подсистемы в фононную, так и обратно.

При наличии градиента температуры в среде переизлучение фотонов атомами в различных областях пространства среды должно носить нескомпенсированный характер. Атомы в областях с меньшей температурой поглощают больше энергии фотонов и, соответственно, меньше её излучают по сравнению с областями, где температура выше. Это положение является, как будет разъяснено ниже, следствием сильной связанности атомов решётки друг с другом. Энергия, равная разности между энергиями поглощённых и излучённых фотонов, переходит в кинетическую энергию неупорядоченных колебаний атомов решётки около их положения равновесия. Среднее же значение этой энергии представляет собой температуру той части среды, которая сосредоточена в рассматриваемом элементе объёма.

Таким образом, перекачка энергии электромагнитного поля в кинетическую энергию колебаний решётки связана с наличием в гамильтониане системы атомов решётки эффективного электроупругого взаимодействия. Причём, оно обязано присутствовать даже в том случае, когда атомы электронейтральны. При наличии такого взаимодействия последовательное вычисление величины $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ сводится к составлению и исследованию кинетического уравнения для фотон-фононной системы. Такой подход к описанию радиационно-кондуктивного теплообмена уже на первоначальном шаге, то есть при составлении эффективного гамильтониана взаимодействия, обладающего указанными выше свойствами, оказывается сложным для реализации. Это связано с тем, что система атомов должна быть сильно связанной. В противном случае, как это имеет место в газовой среде, поглощение фотона любым из атомов с последующим его излучением можно рассматривать как упругое взаимодействие с этим атомом. Такое взаимодействие не приводит к преимущественной перекачке энергии фотонов в тепловую энергию решётки. Неупругость же взаимодействия происходит вследствие того, что все атомы сильно связаны в единую систему. Так как между поглощением и излучением каждого фотона проходит некоторое время задержки, то за счёт наличия сильной связи часть поглощённой атомом энергии фотона успевает перераспределиться между другими атомами из ближайшего его окружения. Поэтому атом после переизлучения фотона не возвращается в исходное энергетическое состояние. Указанный механизм перекачки энергии излучения в тепловые колебания решётки, благодаря которому в твёрдых телах возможен радиационно-кондуктивный теплообмен, довольно сложно описать на языке эффективного гамильтониана. Заметим также, что явный вид такого гамильтониана должен зависеть от природы среды, так как в случае отсут-

ствия электронейтральности атомов решётки либо наличия у них собственного магнитного момента процессы их взаимодействия с электромагнитным излучением усложняются.

В связи со сложностями построения микроскопической теории радиационно-кондуктивного теплообмена естественно попробовать развить более простой полуфеноменологический подход к теоретическому описанию этого процесса. В рамках такого подхода желательно преодолеть главный недостаток существующей теории – ввести в описание радиационно-кондуктивного теплообмена электромагнитное поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла, но при этом не конкретизировать микроскопический механизм превращения его энергии в тепловую энергию неупорядоченных колебаний решётки. В рамках такой теории желательно отказаться от квантового описания излучения вследствие возникновения излишних усложнений, так как само явление радиационно-кондуктивного теплообмена не является квантовым эффектом. В настоящей статье даётся пример такого построения. Предлагаемая нами математическая модель формулируется в приближении сплошной среды и основана на представлении о флуктуациях $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ дипольного электрического момента совокупности атомов среды в элементе объёма, сосредоточенного около пространственной точки \mathbf{r} в момент времени t при поглощении и испускании ими фотонов. При этом квантовая природа излучения электромагнитного поля атомами среды в модели проявляется только лишь в том, что эти флуктуации носят случайный характер, то есть $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ представляет собой с математической точки зрения случайный процесс. При конкретном вычислении потока энергии мы для простоты ограничимся рассмотрением одномерной задачи, что позволит нам провести все вычисления явно.

2. Конструкция модели. Мы исходим из уравнений Максвелла для электромагнитного поля в *сплошной* среде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + [\nabla, \mathbf{E}] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - [\nabla, \mathbf{H}] = 0, \quad (3)$$

$$(\nabla, \mathbf{D}) = 0, \quad (\nabla, \mathbf{B}) = 0, \quad (4)$$

в которых, по основному замыслу нашей теории радиационно-кондуктивного теплообмена, должны быть учтены случайные флуктуации электродинамических свойств среды, связанные с процессами излучения и поглощения переносящего тепло электромагнитного поля. Поле магнитной индукции \mathbf{B} в

уравнениях (1),(3) имеет вид $\mathbf{V} = \mu\mathbf{H}$, где \mathbf{H} – напряжённость магнитного поля, распространяющегося в разогретой среде, наведенного излучением составляющих её атомов. Так как среда представляет собой диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, и атомы электронейтральны (то же самое имеет место, если в узлах решётки находятся электронейтральные молекулы с ковалентной химической связью), то в уравнения (2-4) не включены флуктуации макроскопических электрических токов и зарядов. При построении связи между полем электрической индукции \mathbf{D} в среде и напряжённостью электрического поля \mathbf{E} мы учтём наличие флуктуаций свойств среды. Мы считаем, что в результате процессов излучения и поглощения флуктуационным образом в каждой пространственно-временной точке (\mathbf{r}, t) изменяется электрическая поляризация среды. Мы запишем её в виде суммы двух слагаемых $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$. Первое слагаемое представляет собой поляризацию, индуцированную электрической напряжённостью $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, распространяющегося в среде излучения. Если представить напряжённость $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и поляризацию $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ в виде разложений в интегралы Фурье

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (5)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6)$$

то функции $\bar{\mathbf{P}}$ и $\bar{\mathbf{E}}$ связаны соотношением $\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \chi(\omega)\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$, где $\chi(\omega) = (\varepsilon(\omega) - 1)/4\pi$ – динамическая электрическая восприимчивость среды. Второе слагаемое $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ связано с существованием "спонтанных", не зависящих от $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ случайных флуктуаций поляризации среды, возникающих вследствие процессов поглощения и излучения фотонов каждым из атомов. Это слагаемое представляет собой случайное поле, неоднородное по пространству и статистически независимое в каждой пространственной точке \mathbf{r} . Его неоднородность связана с зависимостью средней амплитуды флуктуаций от температуры и с наличием пространственного распределения температуры в среде. Оно описывает независимые акты поглощения и излучения фотонов каждым из атомов. Поле $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ будем считать гауссовским ввиду малости флуктуаций. Кроме того, не ограничивая общности, среднее значение флуктуаций будем считать равным нулю. Поэтому $\langle \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$, где угловые скобки здесь и далее обозначают математическое ожидание по случайным реализациям

соответствующей случайной функции. Тогда статистические свойства этого поля полностью определяются парным коррелятором $\langle \tilde{P}_j(\mathbf{r}, t) \tilde{P}_{j'}(\mathbf{r}', t') \rangle$, $j, j' = 1, 2, 3$ для каждой пары пространственно-временных точек (\mathbf{r}, t) и (\mathbf{r}', t') . Ввиду пространственной независимости и изотропии флуктуаций этот коррелятор пропорционален $\delta_{jj'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, $j, j' = 1, 2, 3$. Будем считать, что зависимость поля $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ от пространственной координаты полностью определяется мгновенным распределением температуры $T(\mathbf{r}, t)$ в среде. Зависимость же этого поля от времени будем считать "почти" стационарной, где понятие стационарности понимается в смысле математической теории случайных процессов. Медленные отклонения от "точной" стационарности определяются зависимостью температуры $T(\mathbf{r}, t)$ от пространственной точки \mathbf{r} и от времени t , так как распределение $T(\mathbf{r}, t)$ температуры удовлетворяет уравнению (1). Для задания поля $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ в каждой отдельной пространственной точке \mathbf{r} с учётом указанных свойств представим его, по аналогии с (5),(6), в виде разложения в интеграл Фурье

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) d\omega. \quad (7)$$

Если считать случайную функцию $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$ гауссовской с нулевым средним $\langle \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) \rangle = 0$, то линейность преобразования (7) гарантирует (см., например, [4]) гауссовость случайного поля $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$, а статистическая независимость функции $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$ при изменении пространственной точки \mathbf{r} влечёт аналогичное свойство у поля $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$. Кроме того, равенство $\langle \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) \rangle = 0$ влечёт равенство $\langle \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$. Таким образом, случайное поле $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ ввиду линейности преобразования (7) полностью определяется корреляционными свойствами случайной функции $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$. Определим эту функцию следующим образом. Будем считать, что случайные реализации функции $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$ медленно зависят от времени в связи с изменением температуры $T(\mathbf{r}, t)$ в пространственно-временной точке (\mathbf{r}, t) , и положим

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = U(T(\mathbf{r}, t), \omega) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, \omega), \quad (8)$$

где *амплитуда* $U(T, \omega)$ является неслучайной функцией температуры T и частоты ω . Сейчас мы не будем конкретизировать эту функцию. Существенно только то, что она при каждом фиксированном значении T обладает свой-

СТВОМ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |U(T, \omega)|^2 d\omega < \infty, \quad (9)$$

что означает конечность спектральной плотности излучаемой энергии. Положим случайную вектор-функцию $\varphi(\mathbf{r}, \omega)$ гауссовской с нулевым средним

$$\langle \varphi(\mathbf{r}, \omega) \rangle = 0$$

и статистически независимой по \mathbf{r} и по ω , со статистически независимыми компонентами $\varphi_j(\mathbf{r}, \omega)$, $j = 1, 2, 3$, что ввиду линейности преобразования (8) влечёт гауссовость случайной функции $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$ и равенство нулю её среднего значения. Свойство же независимости значений случайной функции $\varphi_j(\mathbf{r}, \omega)$ в различных точках (\mathbf{r}, ω) для компонент с различными номерами $j = 1, 2, 3$ выражается формулой для парного коррелятора

$$\langle \varphi_j(\mathbf{r}, \omega) \varphi_{j'}^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle = \frac{1}{2\pi} \delta_{jj'} \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (10)$$

который показывает, что случайный процесс

$$\phi_j(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \varphi_j(\mathbf{r}, \omega) d\omega, \quad j = 1, 2, 3 \quad (11)$$

в каждой пространственной точке \mathbf{r} представляет собой белый шум с единичной интенсивностью по временной переменной t , и все элементы этого набора шумов, занумерованные переменными \mathbf{r} и j , являются статистически независимыми, то есть имеют место соотношения

$$\langle \phi_j(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad \langle \phi_j(\mathbf{r}, t) \phi_{j'}(\mathbf{r}', t') \rangle = \delta_{jj'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad j, j' = 1, 2, 3.$$

Заметим, что ввиду выбора случайного процесса $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ в форме (7), (8) вместе со свойством (9), его зависимость от времени носит двоякий характер. Она складывается из медленной зависимости, связанной с изменением распределения температуры в среде, и быстрой зависимости, связанной с процессами поглощения и излучения электромагнитного поля элементом объёма среды в каждой пространственной точке \mathbf{r} . Зависимость от ω функции $U(T, \omega)$, в частности свойство (9), приводит к тому, что временной коррелятор случайного процесса $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ не пропорционален $\delta(t - t')$. Это отражает тот факт, что в нашей модели существенен учёт корреляций на коротких временах, а

на длинных – электромагнитные волны практически не принимают участия в переносе тепла. Посредством разложения в интеграл Фурье

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

введём спектральную плотность $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega)$ электрической индукции. Используя известную (см., например, [5]) связь между этой спектральной плотностью и спектральными плотностями напряжённости $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ и электрической поляризации, равной в нашем случае $\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$, запишем

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + 4\pi(\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)) = \varepsilon(\omega)\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + 4\pi U(T, \omega)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, \omega). \quad (12)$$

Вид спектральной плотности $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega)$ электрической индукции, даваемый формулой (12) совместно с уравнениями (2 - 4), составляет основу нашей теории.

Так как в определении стохастического возмущения $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ явным образом введено два масштаба времени, то мы будем решать уравнения (2 - 4), считая, что зависимость от времени t функций \mathbf{E} , \mathbf{H} также двухмасштабна в указанном смысле. Она состоит из быстрой зависимости, связанной с изменением фазы электромагнитного поля, переносящего излучение, и медленной зависимости его амплитуды от \mathbf{r} и t , связанной с её функциональной зависимостью от значения распределения температуры в данной пространственно-временной точке (\mathbf{r}, t) . Нашей целью является вычисление плотности потока энергии

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}], \quad (13)$$

усреднённой по случайным реализациям процесса $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ и по быстрой временной зависимости.

Ввиду двухмасштабности временной зависимости процесса $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$, решение системы уравнений (2 - 4), (11) – поля \mathbf{E} и \mathbf{H} , как и флуктуации поляризации $\tilde{\mathbf{P}}$, будем искать в виде следующих разложений в "интегралы Фурье"

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) d\omega, \quad (14)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) d\omega, \quad (15)$$

где спектральные плотности $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ и $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)$ полей являются функционалами распределения температуры $T(\mathbf{r}, t)$ и, следовательно, медленно изменяющимися функциями от t через посредство зависимости от времени этого распределения.

Подставляя разложения (7), (14), (15) в исследуемую систему уравнений, получаем для медленно зависящих от времени амплитуд $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$, $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)$, $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$ систему уравнений:

$$\frac{i\mu\omega}{c} \bar{\mathbf{H}} + [\nabla, \bar{\mathbf{E}}] = 0, \quad (16)$$

$$\frac{i\omega}{c} (\varepsilon(\omega)\bar{\mathbf{E}} + 4\pi U(T, \omega)\boldsymbol{\varphi}) - [\nabla, \bar{\mathbf{H}}] = 0, \quad (17)$$

$$(\nabla, \varepsilon(\omega)\bar{\mathbf{E}} + 4\pi U(T, \omega)\boldsymbol{\varphi}) = 0, \quad (\nabla, \bar{\mathbf{H}}) = 0. \quad (18)$$

Заметим, что первое из уравнений (17) указывает на возможность появления продольной составляющей напряжённости электрического поля, малой в меру малости флуктуаций поляризации. Второе же уравнение (18) выполняется тождественно вследствие (16).

Исключая из уравнений (16), (17) магнитную составляющую

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{ic}{\mu\omega} [\nabla, \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)], \quad (19)$$

получим уравнение для электрической составляющей в виде

$$\bar{k}^2(\omega)\bar{\mathbf{E}} + \Delta\bar{\mathbf{E}} = -C\omega^2 U\boldsymbol{\varphi} - \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)} U(T, \omega)\nabla(\nabla, \boldsymbol{\varphi}), \quad (20)$$

где введены обозначения

$$\bar{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu\varepsilon(\omega), \quad C = \frac{4\pi\mu}{c^2}. \quad (21)$$

В дальнейшем нас будет интересовать только асимптотика решения $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$. По этой причине при решении уравнения (20) ввиду наличия у первого слагаемого в правой части множителя ω^2 вторым слагаемым в правой части можно пренебречь.

Заметим теперь, что динамическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ должна быть комплексной, чтобы имело место затухание электрической составляющей $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ электромагнитной волны при изменении t в отсутствие возмущения в правой

части (20). Так как $\varepsilon(\omega) \rightarrow \varepsilon$ при $\omega \rightarrow \infty$ с $\varepsilon > 0$, то, ограничившись первыми двумя членами разложения

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon - i\frac{\nu}{\omega} + o(\omega^{-1})$$

с положительным коэффициентом затухания $\nu > 0$, преобразуем уравнение (20) к виду

$$\Delta \bar{\mathbf{E}} + (k_*^2 - ik_*\gamma)\bar{\mathbf{E}} = -C\omega^2 U\varphi, \quad (22)$$

где

$$k_* = \frac{\omega}{c}(\varepsilon\mu)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{\nu}{c} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2}. \quad (23)$$

Введём в рассмотрение спектральную плотность $\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \omega)$ потока энергии $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ так, что

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \omega) d\omega. \quad (24)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] dt = \\ &= \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega'), \bar{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}, \omega' - \omega)] d\omega'. \end{aligned}$$

В этой формуле величины $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$, $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)$ и, следовательно, плотность потока энергии являются случайными, так как они представляют собой решения стохастического дифференциального уравнения. Физически наблюдаемой величиной, которая должна определять радиационно-кондуктивный теплообмен, является математическое ожидание

$$\langle \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \omega) \rangle = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle [\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega'), \bar{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}, \omega' - \omega)] \rangle d\omega'. \quad (25)$$

3. Одномерная задача. Будем далее интересоваться одномерной задачей, когда поля \mathbf{E} и \mathbf{H} являются только функциями одной координаты x и времени t . В этом случае поле $\mathbf{E}(x, t)$ можно сделать поперечным, выбрав

зависящую от x и t случайную функцию $\varphi(x, t)$ так, чтобы у неё отсутствовала первая компонента. Тогда тождественно $(\nabla, \varphi) = 0$. При этом из условия $(\nabla, \bar{\mathbf{E}}) = 0$ следует, что $d\bar{E}_1/dx = 0$, и можно, не ограничивая общности, положить $\bar{E}_1 = 0$. Уравнение (22) в одномерном случае превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \bar{\mathbf{E}}}{dx^2} + \bar{k}^2 \bar{\mathbf{E}} = -C\omega^2 U \varphi \quad (26)$$

для вектор-функции, у которой отличны от нуля только компоненты \bar{E}_2 и \bar{E}_3 .

Будем решать задачу радиационно-кондуктивного теплообмена на отрезке $[-L/2, L/2]$ длиной L , заполненном средой. Вне отрезка находится вакуум, для которого $\varepsilon(\omega) = \mu = 1$, $U \equiv 0$, поэтому уравнение (26) переходит в однородное:

$$\frac{d^2 \bar{\mathbf{E}}}{dx^2} + k^2 \bar{\mathbf{E}} = 0, \quad (27)$$

где $k = \omega/c$.

Уравнения (26) и (27) нужно решать совместно с граничными условиями непрерывности решения $\bar{\mathbf{E}}(x, \omega)$ и его производной по x на границах отрезка. Последнее гарантирует выполнимость физического требования непрерывности на границах магнитного поля $\bar{\mathbf{H}}(x, \omega)$, так как $\bar{\mathbf{H}}(x, \omega) = (i/k)d\bar{\mathbf{E}}/dx$. При этом вне среды нужно выбрать решение в виде расходящихся монохроматических волн с частотой ω , уходящих от отрезка $[-L/2, L/2]$ среды. Таким образом, вне среды решение имеет вид $\bar{\mathbf{E}}(x, \omega) = \mathbf{E}_{+,0} e^{-ik(x-L/2)}$ справа от отрезка при $x > L/2$, и слева от него $-\bar{\mathbf{E}}(x, \omega) = \mathbf{E}_{-,0} e^{ik(x+L/2)}$ при $x < -L/2$, где $\mathbf{E}_{\pm,0}$ – постоянные двухкомпонентные векторы, перпендикулярные 1 -й оси. Тогда решение $\bar{\mathbf{E}}(x, \omega)$ внутри отрезка $[-L/2, L/2]$ должно удовлетворять условиям

$$\bar{\mathbf{E}}(\pm L/2, \omega) = \mathbf{E}_{\pm,0}, \quad \bar{\mathbf{E}}'(\pm L/2, \omega) = \mp ik \mathbf{E}_{\pm,0}, \quad (28)$$

где штрихом обозначена производная по x . Условия (28) приводят к следующим смешанным условиям краевой задачи для уравнения (22):

$$\bar{\mathbf{E}}'(\pm L/2, \omega) = \mp ik \bar{\mathbf{E}}(\pm L/2, \omega).$$

Так как $E_1 = H_1 = 0$, то в одномерной задаче отлична от нуля только первая компонента $S_1 \equiv S$ плотности потока энергии, для которой средняя спектральная плотность определяется интегралом

$$\langle \bar{S}(x, \omega) \rangle = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle [\bar{\mathbf{E}}(x, \omega'), \bar{\mathbf{H}}^*(x, \omega' - \omega)]_1 \rangle d\omega'. \quad (29)$$

4. Решение стохастической краевой задачи. Введём функцию Грина одномерной краевой задачи на отрезке $[-L/2, L/2]$ для уравнения

$$G''(x, y, \omega) + \bar{k}^2 G(x, y, \omega) = \delta(x - y) \quad (30)$$

с граничными условиями

$$G'(\pm L/2, y, \omega) = \mp ikG(\pm L/2, y, \omega). \quad (31)$$

Решение этой краевой задачи имеет вид

$$G(x, y, \omega) = \frac{i}{2\bar{k}} \left(1 - \varkappa^2 e^{-2i\bar{k}L}\right)^{-1} \times \\ \times \left[e^{-i\bar{k}|x-y|} + 2\varkappa e^{-i\bar{k}L} \cos[\bar{k}(x+y)] + \varkappa^2 e^{-2i\bar{k}L} e^{i\bar{k}|y-x|} \right], \quad (32)$$

где введён коэффициент отражения

$$\varkappa = \frac{\bar{k} - k}{\bar{k} + k}.$$

На основании функции Грина (32) получается выражение для фурье-компонент электрического и магнитного полей

$$\bar{\mathbf{E}}(x, \omega) = -C\omega^2 \int_{-L/2}^{L/2} G(x, y, \omega) U(T(y, t), \omega) \boldsymbol{\varphi}(y, \omega) dy, \quad (33)$$

$$\bar{H}_j(x, \omega) = -\frac{ic}{\mu\omega} \epsilon_{1jl} \bar{E}'_l(x, \omega), \quad j = 2, 3, \quad (34)$$

где ϵ_{jlm} – полностью антисимметричный символ Леви-Чивита и штрихом обозначена производная по x .

5. Вычисление потока энергии. Так как $\epsilon_{1jl}\epsilon_{1lm} = \delta_{1m}\delta_{1j} - 1$ и $\bar{E}_1(x, \omega') = \bar{E}_1(x, \omega' - \omega) = 0$, то, используя (34),

$$[\bar{\mathbf{E}}(x, \omega'), \bar{\mathbf{H}}^*(x, \omega' - \omega)]_1 = -\frac{ic}{\mu(\omega' - \omega)} \bar{E}_j(x, \omega') \bar{E}^*{}'_j(x, \omega' - \omega).$$

Подставив результат этого вычисления в (25), находим

$$\langle \bar{S}(x, \omega) \rangle = \frac{c^2}{4i\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \bar{E}_j(x, \omega') \bar{E}^*{}'_j(x, \omega' - \omega) \rangle \frac{d\omega'}{\omega' - \omega}$$

или, используя найденное выражение (33) для компонент электрического поля:

$$\langle \bar{S}(x, \omega) \rangle = C^2 \frac{c^2}{4i\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^2 (\omega' - \omega) \int_{-L/2}^{L/2} G(x, y, \omega') U(T(y, t), \omega') \times \\ \times \int_{-L/2}^{L/2} G^{*'}(x, y', \omega' - \omega) U^*(T(y', t), \omega' - \omega) \langle \varphi_j(y, \omega') \varphi_j^*(x, \omega' - \omega) \rangle dy' dy d\omega' .$$

На основании формулы (10) для коррелятора в подынтегральном выражении и формулы для постоянной C в (21) произведём преобразования

$$\langle \bar{S}(x, \omega) \rangle = -\delta(\omega) \frac{4i\mu}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^3 \int_{-L/2}^{L/2} G(x, y, \omega') G^{*'}(x, y', \omega') |U(T(y, t), \omega')|^2 dy d\omega' . \quad (35)$$

Так как поле $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ вещественное, то его фурье-образ обладает свойством $\bar{\mathbf{S}}^*(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, -\omega)$. Принимая это во внимание, а также чётность относительно ω полученного выражения (35), заключаем, что функция $\langle \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \omega) \rangle$ вещественна. Тогда, применяя к правой части (35) операцию $\text{Re}(\cdot)$, получаем следующую формулу для среднего значения фурье-образа потока энергии

$$\langle \bar{S}(x, \omega) \rangle = \delta(\omega) \frac{4\mu}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^3 \int_{-L/2}^{L/2} |U(T(y, t), \omega')|^2 \text{Im}[G(x, y, \omega') G^{*'}(x, y, \omega')] dy d\omega' . \quad (36)$$

Воспользуемся общим свойством функции Грина $G(x, y, \omega)$ и найдём формулу для дивергенции (в данном случае производной по x) этого потока. Так как на основании (30) функция $G^*(x, y, \omega)$ удовлетворяет уравнению

$$G^{*''}(x, y, \omega) + \bar{k}^{*2} G^*(x, y, \omega) = \delta(x - y) , \quad (37)$$

то, умножив его на $G(x, y, \omega)$ и вычтя из него уравнение (30), умноженное на $G^*(x, y, \omega)$, получим

$$\frac{d}{dx} \text{Im}[G(x, y, \omega) G^{*'}(x, y, \omega)] = \text{Im}[\bar{k}^2] |G(x, y, \omega)|^2 + \delta(x - y) \text{Im}G(x, x, \omega) . \quad (38)$$

Продифференцировав по x обе части формулы (36) и применив формулу (38), находим выражение для дивергенции фурье-образа потока энергии

$$\langle (\nabla, \bar{\mathbf{S}}(x, \omega)) \rangle = -\delta(\omega) \frac{4\mu}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^3 \left[\frac{\gamma n}{c} \omega' \int_{-L/2}^{L/2} |U(T(y, t), \omega')|^2 |G(x, y, \omega')|^2 dy - \right. \\ \left. - |U(T(x, t), \omega')|^2 \text{Im}G(x, x, \omega') \right] d\omega',$$

где мы воспользовались тем, что $\text{Im}[\bar{k}^2] = -\gamma k_*$ с величиной $k_* = \omega'(n/c)$, определяемой, согласно (23), частотой ω' и оптическим показателем среды $n = (\varepsilon\mu)^{1/2}$. Тот факт, что полученное выражение пропорционально $\delta(\omega)$, указывает на то, что дивергенция потока энергии, вычисляемая согласно (24), уже не содержит быстрой зависимости от времени,

$$\langle (\nabla, \mathbf{S}(x, t)) \rangle = -\frac{4\mu}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^3 \left[\frac{\gamma n}{c} \omega' \int_{-L/2}^{L/2} |U(T(y, t), \omega')|^2 |G(x, y, \omega')|^2 dy - \right. \\ \left. - |U(T(x, t), \omega')|^2 \text{Im}G(x, x, \omega') \right] d\omega'. \quad (39)$$

Так как $\bar{k}^2 \equiv \bar{k}^2(\omega) = k_*^2 - i\gamma k_*$ обладает свойством $\bar{k}^{2*}(\omega) = \bar{k}^2(-\omega)$, то уравнение (37) записывается в виде

$$G^{**}(x, y, \omega) + \bar{k}^2(-\omega)G^*(x, y, \omega) = \delta(x - y).$$

Кроме того, так как функция $k(\omega) = \omega/c \equiv k(\omega)$ обладает свойством $k(\omega) = -k(-\omega)$, то граничные условия, однозначно определяющие вместе с этим уравнением функцию $G^*(x, y, \omega)$, записываются как

$$G'^*(\pm L/2, y, \omega) = \mp k(-\omega)G^*(\pm L/2, y, \omega).$$

Сравнивая, соответственно, с уравнением (30) и с граничными условиями (31), находим, что $G^*(x, y, \omega) = G(x, y - \omega)$. Точно так же, так как случайные поля $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$, $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}, t)$ вещественны, соответствующие фурье-образы $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, \omega)$ удовлетворяют соотношениям $\tilde{\mathbf{P}}^*(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, -\omega)$, $\boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{r}, \omega) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, -\omega)$.

Тогда из формулы (8) следует, что функция $U(T, \omega)$ также обладает аналогичным свойством $U^*(T, \omega) = U(T, -\omega)$. Исходя из этого и аналогичного свойства функции Грина, можно утверждать, что подынтегральное выражение в (39) чётно относительно ω , поэтому

$$\langle (\nabla, \mathbf{S}(x, t)) \rangle = -\frac{8\mu}{c^2} \int_0^\infty \omega^3 \left[\frac{\gamma n}{c} \omega \int_{-L/2}^{L/2} |U(T(y, t), \omega)|^2 |G(x, y, \omega)|^2 dy - |U(T(x, t), \omega)|^2 \text{Im}G(x, x, \omega) \right] d\omega. \quad (40)$$

6. Случай высоких температур. Нашей следующей задачей является вывод из (40) более простой формулы для дивергенции потока энергии при радиационно-кондуктивном теплообмене в более конкретной физической ситуации. Механизм радиационно-кондуктивного теплообмена вносит существенный вклад в изменение распределения температуры в полупрозрачном диэлектрике в том случае, когда его характерная температура достаточно высока. В этом случае характерные частоты излучаемых атомами фотонов должны быть такими, чтобы соответствующие им энергии были порядка этой температуры, выраженной в энергетических единицах. Температура, равная средней энергии, которая соответствует этой частоте $\approx 2 \cdot 10^{14} \text{с}^{-1}$, имеет порядок 10^3К , т.е. сравнима с температурой плавления вещества диэлектрика.

Естественно связать величину $|U(T, \omega)|^2$ со средней энергией излучаемых фотонов частотой ω . Так как физическая размерность фурье-образа $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$ электрической поляризации равна эрг/см^{3/2}·с, а размерность величины $\varphi(\mathbf{r}, \omega)$ равна с^{1/2}/см^{3/2}, то физическая размерность величины $|U(T, \omega)|^2$ имеет размерность действия эрг·с. В связи с этим, введя феноменологическую среднюю частоту τ^{-1} внутриатомных энергетических переходов, которые приводят к излучению фотонов, положим, что

$$|U(T, \omega)|^2 = \tau \hbar \omega W(\hbar \omega / T), \quad (41)$$

где $W(\cdot)$ – плотность распределения числа фотонов по энергиям. Мы считаем, эта плотность зависит только от отношения энергии фотона $\hbar \omega$ частотой ω к температуре T фотонного газа, которая измеряется в энергетических единицах. В частности, в случае модели абсолютно чёрного тела, плотность $W(\cdot)$

имеет форму планковской функции распределения $W(\zeta) = (e^\zeta - 1)^{-1}$. При этом интеграл (9) пропорционален средней энергии газа фотонов. В рассматриваемом случае формула (40) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle (\nabla, \mathbf{S}(x, t)) \rangle = & -\frac{8\mu\tau c^2}{(nT_0L)^4} \left[\frac{\gamma}{T_0L} \int_{-L/2}^{L/2} T^6(y, t) \int_0^\infty \zeta^5 W(\zeta) |G(x, y, \omega_y)|^2 d\zeta dy - \right. \\ & \left. - T^5(x, t) \int_0^\infty \zeta^4 W(\zeta) \text{Im}G(x, x, \omega_x) d\zeta \right], \end{aligned} \quad (42)$$

где $\omega_y = T(y, t)\zeta/\hbar$ в интеграле по безразмерной переменной ζ и введена характерная температура $T_0 = \hbar c/nL$.

Оценим численное значение температуры T_0 . Будем исходить из величины $n = 1, 5$ и $L = 1\text{см}$. Тогда, принимая $\hbar \approx 10^{-27}\text{эрг}\cdot\text{с}$, $c/n \approx 2 \cdot 10^{10}\text{см}/\text{с}$, находим, что $T_0 = 2 \cdot 10^{-17}\text{эрг}\cdot 1, 4 \cdot 10^{-16}\text{К}/\text{эрг} = 1, 5 \cdot 10^{-1}\text{К}$. Следовательно, отношение типичной температуры $T(y, t) \approx 10^2 \div 10^3\text{К}$ к T_0 в рассматриваемой нами физической ситуации представляет собой большой параметр $\approx 10^4$, что мы примем во внимание при вычислении интеграла в (42).

Оценим теперь величину $\bar{k}L$ в формуле (32) в области интегрирования по ζ , где отношение $T(y, t)\zeta/T_0$ представляет собой большую величину:

$$\bar{k}L = \frac{T(y, t)\zeta}{T_0} \left(1 - i\gamma L \frac{T_0}{T(y, t)\zeta} \right)^{1/2} \approx \frac{T(y, t)\zeta}{T_0} - \delta,$$

и отношение $\delta = \gamma L/2$ характеризует оптическую длину затухания электромагнитного поля в среде. Его типичное значение в рассматриваемом нами случае изменяется в пределах $\delta = 0, 1 \div 10$, поэтому второе слагаемое в скобках очень мало по сравнению с первым.

Используя полученное приближённое выражение для $\bar{k}L$, находим для коэффициента отражения

$$\varkappa = \frac{\bar{k} - k}{\bar{k} + k} \approx \frac{T(y, t)\zeta(1 - n^{-1})/T_0 - i\delta}{T(y, t)\zeta(1 + n^{-1})/T_0 - i\delta} \approx \frac{n - 1}{n + 1},$$

где поправочное слагаемое имеет порядок $\delta T_0/T(y, t)\zeta$ и представляет, таким образом, очень малую величину в допустимом диапазоне изменения δ . Поэтому при вычислении интеграла в (40) можно положить коэффициент \varkappa

чисто вещественным и не зависящем от распределения температуры и переменной интегрирования ζ . По той же причине можно положить величину \bar{k}^{-1} в выражении для $|G(x, y, \omega)|^2$ равной $\bar{k}^{-1} \approx T_0 L / T(y, t) \zeta$.

Таким образом, в рассматриваемом нами случае величина $G(x, y, \omega_y)$ в подынтегральном выражении в (42) даётся приближённой формулой:

$$|G(x, y, \omega_y)|^2 = \left(\frac{T_0 L}{2T(y, t)\zeta} \right)^2 |R(x, y, \zeta; T)|^2,$$

$$\text{Im}G(x, x, \omega_x) = \left(\frac{T_0 L}{2T(y, t)\zeta} \right) \text{Re}R(x, x, \zeta; T),$$

где ядро $R(z, y, \zeta; T)$ функционально зависит от распределения температуры и имеет вид

$$R(x, y, \zeta; T) = (1 - (\kappa e^{-\delta})z_-)^{-1} \times$$

$$\times (u_- P_- + (\kappa e^{-\delta})^2 u_+ P_+ z_-^2 + (\kappa e^{-\delta})z_- [v_+ Q_+ + v_- Q_-]) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z_-^n (\kappa e^{-\delta})^n (u_- P_- + (\kappa e^{-\delta})^2 u_+ P_+ z_-^2 + (\kappa e^{-\delta})z_- [v_+ Q_+ + v_- Q_-]) ;$$

$$z_{\pm} = e^{\pm i T \zeta / T_0}, \quad z_+ z_- = 1 ;$$

$$u_{\pm} = \exp \left(\pm i \frac{T \zeta}{T_0 L} |x - y| \right), \quad u_+ u_- = 1 ;$$

$$v_{\pm} = \exp \left(\pm i \frac{T \zeta}{T_0 L} (x + y) \right), \quad v_+ v_- = 1 ;$$

$$P_{\pm} = e^{\pm \delta |x - y| / L}, \quad P_+ P_- = 1 ; \quad Q_{\pm} = e^{\pm \delta (x + y) / L}, \quad Q_+ Q_- = 1 ,$$

где мы для краткости записи опустили аргументы в распределении температуры $T(y, t)$.

На основании (32) и (42) поток энергии можно представить в виде

$$\langle (\nabla, \mathbf{S}(x, t)) \rangle = -\frac{2\mu\tau c^2}{n^4 (T_0 L)^3} \left[\gamma \int_{-L/2}^{L/2} T^4(y, t) K(x, y; T) dy - 2I(x; T) T^4(x, t) \right], \quad (43)$$

где введены обозначения

$$K(x, y; T) = \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) |R(x, y, \zeta; T)|^2 d\zeta, \quad (44)$$

$$I(x; T) = \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) \operatorname{Re} R(x, x, \zeta; T) d\zeta. \quad (45)$$

Ввиду большой величины отношения T/T_0 внутренний интеграл в (42) представляет собой быстро осциллирующую функцию. Мы вычислим главный член асимптотики этого интеграла при $T/T_0 \rightarrow \infty$.

Подставляя разложение для $|R(x, y, \zeta; T)|^2$ в формулу (44), находим

$$\begin{aligned} K(x, y; T) = & \sum_{n_+, n_- = 0}^{\infty} (\kappa e^{-\delta})^{2(n_+ + n_-)} \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) z_+^{n_+} z_-^{n_-} \left[P_-^2 + (\kappa e^{-\delta})^4 P_+^2 + \right. \\ & + (\kappa e^{-\delta})^2 (Q_+^2 + Q_-^2) + (\kappa e^{-\delta})^2 (z_-^2 u_+^2 + z_+^2 u_-^2 + v_+^2 + v_-^2) + \\ & + (\kappa e^{-\delta}) z_- P_- u_+ [Q_+ v_+ + Q_- v_-] + (\kappa e^{-\delta}) z_+ P_- u_- [Q_+ v_- + Q_- v_+] + \\ & \left. + (\kappa e^{-\delta})^3 z_- P_+ u_+ [Q_+ v_- + Q_- v_+] + (\kappa e^{-\delta})^3 z_+ P_+ u_- [Q_+ v_+ + Q_- v_-] \right] d\zeta. \end{aligned} \quad (46)$$

Асимптотику ядра $K(x, y; T)$ найдём посредством вычисления асимптотики каждого отдельного слагаемого в (46), что допустимо, так как ряд мажорируется рядом по степеням $(\kappa e^{-\delta})^{2(n_+ + n_-)}$. Так как $W(0) < \infty$, то каждый член ряда

$$\int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) z_+^{n_+ + m_-} z_-^{n_- + m_+} u_+^{l_+} u_-^{l_-} v_+^{m_+} v_-^{m_-} d\zeta = \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) e^{i\Lambda\zeta} d\zeta,$$

определяемый набором показателей $n_{\pm} = 0, 1, 2, \dots$; $l_{\pm} = 0, 1, 2$; $m_{\pm} = 0, 1, 2$, где $l_+ l_- = 0$, $m_+ m_- = 0$, $l_+ + l_- + m_+ + m_- = 0, 2$;

$$\Lambda = \frac{T}{T_0} \left(n_+ + m_- - n_- - m_+ + \frac{l_+ - l_-}{L} |x - y| + \frac{m_+ - m_-}{L} (x + y) \right),$$

оценивается посредством трёхкратного интегрирования по частям,

$$\int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) e^{i\Lambda\zeta} d\zeta = i\Lambda^{-3} \int_0^{\infty} e^{i\Lambda\zeta} \frac{d^3}{d\zeta^3} [\zeta^3 W(\zeta)] d\zeta = O(\Lambda^{-3}),$$

если $\Lambda \neq 0$. При этом величина Λ пропорциональна большому параметру T/T_0 . В связи с этим главные значения ядра $K(x, y; T)$ дают члены ряда,

у которых $\Lambda = 0$. Это равенство имеет место, только если по отдельности выполняются равенства

$$n_+ + m_- = n_- + m_+, \quad |l_+ - l_-||x - y| = |m_+ - m_-||x + y| = L.$$

Второе равенство при любых допустимых не равных нулю значениях чисел l_{\pm}, m_{\pm} возможно только в том случае, когда $x = y, x = -y$. Тогда, $l_+ = l_- = m_+ = m_- = 0$, что на основании первого из выписанных условий приводит к равенству $n_+ = n_-$. Таким образом, оставляя в сумме (46) только слагаемые, удовлетворяющие этим условиям, которые уже не зависят от ζ , получим

$$\begin{aligned} K(x, y; T) &= E \sum_{n=0}^{\infty} (\kappa e^{-\delta})^{4n} \left[P_-^2 + (\kappa e^{-\delta})^4 P_+^2 + (\kappa e^{-\delta})^2 (Q_+^2 + Q_-^2) \right] = \\ &= \frac{E}{1 - (\kappa e^{-\delta})^4} \left[P_-^2 + (\kappa e^{-\delta})^4 P_+^2 + (\kappa e^{-\delta})^2 (Q_+^2 + Q_-^2) \right], \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$E = \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) d\zeta.$$

Аналогичным методом вычислим асимптотику величины $I(x; T)$. Подставляя в (45) разложение в ряд функции $\text{Re}R(x, x, \zeta; T)$, находим

$$\begin{aligned} I(x; T) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\kappa e^{-\delta})^{2n} \times \\ &\times \text{Re} \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) z_-^n \left[1 + z_-^2 (\kappa e^{-\delta})^2 + z_- (\kappa e^{-\delta}) (v_x^2 P_x^2 + v_x^{-2} Q_x^{-2}) \right] d\zeta, \end{aligned}$$

где $v_x = \exp(ixT(x, t)/LT_0)$, $P_x = \exp(\delta x/L)$. Асимптотика каждого члена этого ряда

$$\text{Re} \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) z_-^{n+|m|} v_x^{2m} d\zeta = \text{Re} \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) e^{-i\Gamma\zeta} d\zeta = O(\Gamma^{-3}),$$

$$\Gamma = \frac{T(x, t)}{T_0} \left[n + |m| - \frac{2mx}{L} \right], \quad m = 0, \pm 1$$

не является малой только в том случае, когда $\Gamma = 0$, то есть при $n + |m| = 2mx/L$ при произвольном значении $x \in [-L/2, L/2]$. Это возможно только

при $n = m = 0$. Тогда $I(x; T) = E + O(\Gamma^{-3})$. Это соотношение вместе с (43), (48) дают окончательное выражение для искомой плотности потока энергии:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla, \mathbf{S}(x, t)) \rangle = & -\frac{2\alpha\gamma}{1 - (\kappa e^{-\delta})^4} \int_{-L/2}^{L/2} T^4(y, t) \times \\ & \times \left[\exp(-2\delta|x - y|/L) + (\kappa e^{-\delta})^4 \exp(2\delta|x - y|/L) + \right. \\ & \left. + 2(\kappa e^{-\delta})^2 \operatorname{ch}[2\delta(x + y)/L] \right] dy + 4\alpha T^4(x, t), \end{aligned} \quad (49)$$

где введён коэффициент α , который в терминах универсальных констант имеет вид

$$\alpha = \frac{\mu\tau c^2 E}{n^4 (T_0 L)^3} = \tau \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \frac{q^4}{\hbar^3 c} E$$

в том случае, если температура выражается в градусах, $q = 1, 4 \cdot 10^{-16}$ эрг/К – постоянная Больцмана.

В выражении (49) интегральное ядро универсально. Оно не зависит от функции распределения $W(\cdot)$ фотонов. В частности, при большой величине $\delta \gg 1$ последними двумя слагаемыми в подынтегральном выражении можно пренебречь, а оставшееся ядро $e^{-2\delta|x-y|/L}$ превращается в δ -функцию $2\gamma^{-1}\delta(x-y)$. Тогда интегральное слагаемое в (49) при $\delta \rightarrow \infty$ стремится к $(-4\alpha T^4(x, t))$, поэтому в указанном пределе второе слагаемое в правой части эволюционного уравнения (1) обращается в нуль $(\nabla, \mathbf{S}(x, t)) = 0$, то есть в случае сильного поглощения весь теплообмен определяется теплопроводностью.

В случае слабого поглощения $\gamma \rightarrow 0$ первое слагаемое в потоке энергии равно нулю, в то время как последнее слагаемое в (49) не исчезает при $\gamma = 0$, и в этом случае $\langle (\nabla, \mathbf{S}(x, t)) \rangle = -4\alpha T^4(x, t)$ и среда остывает благодаря радиационно-кондуктивному теплообмену, что естественно с физической точки зрения. Оценим в этом случае вклад радиационно-кондуктивного теплообмена в виде (50) в эволюцию распределения температуры согласно уравнению (1). При $\varepsilon \approx 1$, $\mu \approx 1$, $E \approx 1$, положив $\tau \approx 10^{-14}$ с, получим, что величина (50) в том случае, когда $T = 10^3$ К, равна

$$\left(\frac{10^{-14} \cdot (10^{-16})^4}{3 \cdot 10^{10} \cdot (10^{-27})^3} \right) (10^3)^4 = 10^5 \text{ эрг/см} \cdot \text{с} \cdot \text{К}.$$

Слагаемое же в уравнении (1), ответственное за теплопроводность, имеет порядок 10^7 эрг/см³·с при $L \approx 1$ см и при коэффициенте теплопроводности

$\kappa \approx 10^4$ эрг/см·с·К и той же температуре $T = 10^3$ К. Таким образом, при слабом поглощении радиационно-кондуктивный теплообмен даёт лишь малую относительную поправку $\sim 10^{-2}$.

Литература

1. Спэрроу Э.М. Теплообмен излучением / Э.М.Спэрроу, Р.Д.Сесс. – Л.: Энергия, Ленинградское отд.,1972. – 295 с.
2. Рубцов Н.А. Теплообмен излучением в сплошных средах / Н.А.Рубцов – Новосибирск: Наука, Сибирское отд.,1984. – 278 с.
3. Петров В.А.Перенос энергии в частично прозрачных твёрдых материалах / В.А.Петров, Н.В.Марченко. - Москва: Наука,1985. – 190 с.
4. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. т.II. Случайные поля. – Изд.2-е / С.М.Рытов, Ю.А.Кравцов, В.И.Татарский. – М.: Наука,1978. – 464 с.
5. Тамм И.Е. Основы теории электричества / И.Е.Тамм. – М.: Наука, 1988.
6. Оцисик М.Н. Сложный теплообмен / М.Н. Оцисик. – Москва: Мир,1976. – 616 с.
7. Зигель Р. Теплообмен излучением / Р.Зигель, Дж.Хауэлл. – М.: Мир,1975. – 934 с.

ONE-DIMENSIONAL PROBLEM OF HEAT RADIATIVE CONDUCTANCE. FLUCTUATION APPROACH

Yu.P.Virchenko, M.A.Saprykin

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

One-dimensional problem of the heat radiative conductance in the dielectric medium with homopolar chemical bond is considered. On the basis of presentation that the heat exchange is done by means of electromagnetic field generated thermal fluctuations of the medium electrical polarization, it is calculated the energy flux of the fluctuative field in the form of the functional on local temperature. It permits to formulate the complete evolution of the heat transfer in the medium.

Key words: radiative conductance of heat, electrical polarization, fluctuations, gaussian random field, Maxwell equations, Stefan-Boltzmann law, energy flux, temparture distribution.

К ВОПРОСУ НАРАБОТКИ ^{99m}Tc НА НЕЙТРОННОМ ГЕНЕРАТОРЕ

А.Н. Довбня¹⁾, Э.Л. Купленников¹⁾, В.А.Цымбал¹⁾,
В.В.Красильников²⁾

¹⁾ННЦ ХФТИ, Харьков, 61108, Украина, e-mail: kupl@kipt.kharkov.ua

²⁾Белгородский государственный университет, ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия

Рассмотрена возможность применения нейтронного генератора (НГ) с потоком тепловых нейтронов интенсивности $10^{12}\text{н}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{с}^{-1}$ для получения изотопа ^{99m}Tc на основе ядерной реакции $^{98}\text{Mo}(n\gamma)^{99}\text{Mo}\rightarrow^{99m}\text{Tc}$.

Ключевые слова: генератор нейтронов, тепловые нейтроны, поперечное сечение, молибден, технеций, ядерная медицина.

1. Введение

Среди изотопов, применяемых в ядерной медицине, большая роль отводится генераторным нуклидам. Генераторные нуклиды – это система двух связанных между собой радионуклидов (РН), один из которых – более короткоживущий (дочерний) – постоянно образуется в результате распада другого (материнского), имеющего существенно больший период полураспада ($T_{1/2}$). Среди радиоизотопных генераторов наибольшее применение в ядерной медицине имеет генератор $^{99}\text{Mo}\rightarrow^{99m}\text{Tc}$.

Одним из возможных путей получения ^{99}Mo является ядерная реакция $^{98}\text{Mo}(n\gamma)^{99}\text{Mo}$. Образующийся при облучении изотоп ^{99}Mo испускает β -частицы (100%) с максимальной энергией 1210 кэВ и основные γ -кванты с энергией 181.1 и 739.4 кэВ (интенсивность γ -линии $I_\gamma = 6.08\%$, 12.1% соответственно). В результате β -распада ^{99}Mo ($t_{1/2} = 65.9$ ч.) превращается в ^{99m}Tc ($t_{1/2} = 6.02$ ч.), который испускает фотоны, основная энергия которого равна 140.5 кэВ ($I_\gamma = 87.7\%$).

Настоящая работа посвящена количественной оценке наработки ^{99m}Tc на создаваемом в ННЦ ХФТИ малогабаритном НГ с интенсивностью потока тепловых нейтронов $10^{12}\text{н}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{с}^{-1}$.

2. Нароботка ^{99}Mo В(n, γ) реакции

Одним из важных параметров, характеризующих прохождение нейтронов через реальные образцы, является макроскопическое сечение [1] $\Sigma = \rho \cdot \sigma_{eff} \text{см}^{-1}$, где ρ – плотность ядер элемента, σ_{eff} – эффективное сечение взаимодействия. Величина Σ аналогична линейному коэффициенту ослабления γ -квантов и может быть использована для оценки ослабления потока нейтронов при взаимодействии с ядерной средой образца.

Интенсивность потока нейтронов, прошедших слой вещества x без учета вклада многократного рассеяния, равна

$$I(x) = I_0 e^{-\Sigma_t x}, \quad (1)$$

где I_0 – интенсивность первоначального пучка нейтронов, Σ_t – полное макроскопическое сечение, характеризующее всю совокупность процессов взаимодействия нейтронов с веществом.

Толщина мишени, полученная согласно (1), оказалась равной $x = 0.216$ см. Расчет выполнен со следующими параметрами: плотность молибдена естественного изотопного состава (^{Nat}Mo) 10.2 г/см^3 ; полное сечение взаимодействия $\sigma_t = 7.22$ барна, что соответствует среднему значению энергии тепловых нейтронов 0.038 эВ при температуре $T=300^\circ\text{K}$; $\Sigma_t = 0.462 \text{ см}^{-1}$; уменьшение потока нейтронов на задней стенке образца 10% .

Количество ядер ^{98}Mo , содержащихся в мишени, рассчитано согласно выражению

$$N = \beta m \frac{6.02 \cdot 10^{23}}{A}, \quad (2)$$

где $\beta = 24.13\%$ – содержание изотопа ^{98}Mo в натуральном молибдене; $m = 43.25 \text{ г}$ – вес мишени (диаметр образца 5 см выбран исходя из среднего размера пробы, которая обычно используется в активационном анализе на тепловых нейтронах); $A = 98$ – массовое число. В данном случае N равно $6.41 \cdot 10^{22}$ ядер.

Для вычисления активности A_M изотопа ^{99}Mo , накопившегося в пробе за время облучения t_{irr} , использовалась формула [2]

$$A_M = \sigma I_0 N (1 - e^{-\lambda_M t_{irr}}), \quad (3)$$

где $I_0 = 0.95 \cdot 10^{12} \text{ н/см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ – средняя величина потока нейтронов в облучаемой пробе; $\lambda_M = 0.693/T_{1/2} = 2.92 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ – постоянная радиоактивного распада ^{99}Mo ; $\sigma = 0.13$ барн – сечение реакции на тепловых нейтронах. В [2]

подчеркивается, что поскольку сечение реакции зависит от энергии, в формулу (3) нужно подставлять среднее значение сечения реакции в изучаемом энергетическом интервале.

Оценки проведены для двух времен облучения $t_{irr}^{(24)} = 24$ и $t_{irr}^{(66)} = 66$ часов. При указанных выше параметрах облучения активность наработанного ^{99}Mo равна $A_M^{(24)} = 17.6 \cdot 10^8$ Бк и $A_M^{(66)} = 0.4 \cdot 10^{10}$ Бк, а удельная активность $4.07 \cdot 10^7$ Бк/г и $9.2 \cdot 10^7$ Бк/г соответственно.

В работе [3] отмечено, что в случае облучения образца эпитеpmальными нейтронами реактора с энергией более 0.4 эВ сечение увеличивается до 11.6 барн. Вследствие этого выбор места облучения в активной зоне реактора может существенно повысить активацию ^{98}Mo . В большинстве случаев эффективное сечение составляет около 0.5 барн. В некоторых реакторах удается реализовать эффективное сечение, равное 0.8 барн. По-видимому, облучение образцов нейтронами энергией более 0.4 эВ можно технически осуществить и на НГ.

Интересно сравнить этот результат с данными других авторов, например, [3,4]. В работе [3] показано, что при облучении молибдена в потоке реакторных нейтронов $10^{15} \text{ n} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ в течение 5 суток удельная активность ^{99}Mo может достигать 14.5 Ки/г для природного Mo. Проведенные нами расчеты удельной активности данных [3] по вышеописанной методике с эффективным сечением 0.5 барн [3] дали практически ту же величину. Полученный результат указывает на то, что методика оценки выхода ^{99}Mo достаточно корректна и может быть использована для прогнозирования выхода других РН.

В [4] представлены результаты вычислений активности ^{99}Mo в $^{100}\text{Mo}(n\gamma)^{99}\text{Mo}$ реакции. По оценкам авторов: "приемлемая толщина образцов из ^{Nat}Mo может составлять до 15 г/см² (≤ 1.47 см), а мощность электронного пучка до 20 кВт. В этом случае наработка ^{99}Mo на мишени толщиной 15 г/см², за время 66 часов будет составлять 0.8 Ки". Наши оценки активности ^{99}Mo в реакции $^{98}\text{Mo}(n\gamma)^{99}\text{Mo}$ при той же экспозиции ~ 0.1 Ки.

3. Выход ^{99m}Tc . Обсуждение результатов

Максимальная активность дочернего изотопа, равная активности материнского РН может быть достигнута по истечении времени t_{max} [5]

$$t_{max} = \frac{1}{\lambda_D - \lambda_M} \ln \left(\frac{\lambda_D}{\lambda_M} \right). \quad (4)$$

Подставляя в (4) соответствующие параметры: $\lambda_D = 3.19 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, $\lambda_M = 2.92 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$, получаем $t_{max} = 22.9$ ч. Подчеркнем, что извлечение ^{99m}Tc из

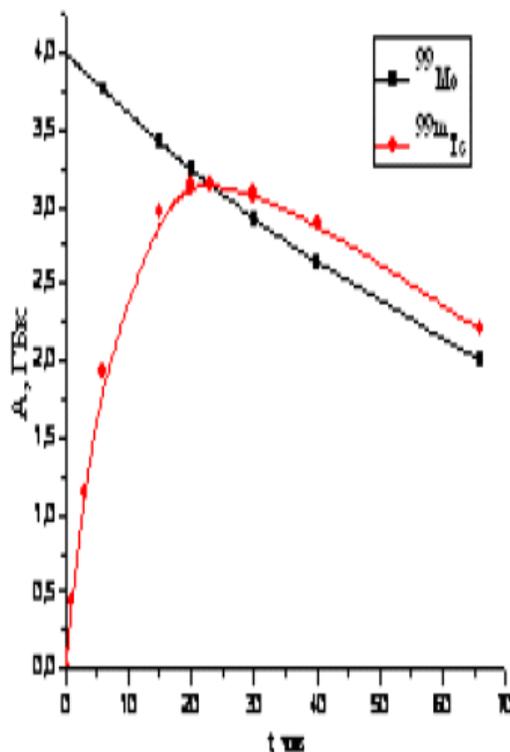


Рис. 1: Зависимость активности.

генератора технеция можно проводить несколько раз в день, не дожидаясь максимального накопления РН, поскольку уже через 6 часов достигается 50% от максимальной активности.

Для любого момента времени t активность дочернего изотопа может быть выражена через активность материнского РН (на тот же момент времени) [5]

$$A_D = A_M \frac{\lambda_D}{\lambda_D - \lambda_M} (1 - e^{-(\lambda_D - \lambda_M)t}), \quad (5)$$

где A_D – активность дочернего вещества в смеси с материнским изотопом или в генераторе в момент времени t , где t – время, прошедшее с начала отсчета до настоящего момента; A_M – начальная активность материнского нуклида в момент зарядки генератора или в момент начала отсчета времени.

Отметим, что при условии $\lambda_D \gg \lambda_M$ выражение (5) несколько упрощается [6]

$$A_D = A_M (1 - e^{-\lambda_D t}). \quad (6)$$

В данном случае $\lambda_D/\lambda_M \sim 10.9$, т.е. условие $\lambda_D \gg \lambda_M$ выполняется не в полной мере, что в итоге отражается на конечном результате дочерней активно-

сти. В связи со сказанным для оценки величины A_D использована формула (5).

Распад материнского вещества и нарастание дочерней активности в первоначально чистой материнской фракции в зависимости от времени приведены на рис.1. Увеличение активности дочернего изотопа с течением времени при начальной активности его равной нулю рассчитывалось по формуле [5]

$$A_D = A_M \frac{\lambda_D}{\lambda_D - \lambda_M} [e^{-\lambda_M t} - e^{-\lambda_D t}]. \quad (7)$$

Подставляя в (5) следующие параметры: $t = 24$ часа, $A_M^{(24)} = 17.6 \cdot 10^8$ и $t = 66$ часов, $A_M^{(66)} \sim 0.4 \cdot 10^{10}$ Бк – и учитывая, что только 82.4% ^{99}Mo трансформируется в ^{99m}Tc [5], а интенсивность γ линии ^{99m}Tc , которая соответствует излучению фотона энергией 140.5 кэВ – 87.7%, получаем $A_D^{(24)} = 12.84 \cdot 10^8$ и $A_D^{(66)} = 31.80 \cdot 10^8$ Бк соответственно.

Ясно, что в реальных условиях получения ^{99m}Tc его активность будет несколько меньше, чем в нашем идеальном случае, поскольку эффективность выделения радиоизотопа в генераторе технеция меньше единицы.

Для однократной диагностики систем жизнедеятельности человека требуется определенная активность радиоизотопа ^{99m}Tc [7]. Например, для исследования сердечно-сосудистой системы нужна активность ~ 55 МБк, для диагностики центральной нервной системы ~ 240 МБк, для скенограммы опухоли головного мозга ~ 370 МБк и т. д. (Кстати, по оценкам экспертов МАГАТЭ, средняя диагностическая доза 10 мКи). Таким образом, наработанная за 24 и 66 часов активность ^{99m}Tc достаточна при обследовании сердечно-сосудистой системы (скенограммы опухоли головного мозга) для $A_D^{(24)}$ в среднем у 23 и 4 пациентов и для $A_D^{(66)}$ у 58 и 9 больных соответственно.

Увеличить выход ^{99}Mo , генерирующего ^{99m}Tc , можно: 1) максимум в 4.1 раза при использовании обогащенной мишени, содержащей только изотоп ^{98}Mo ; 2) почти в 2 раза при возрастании толщины мишени до 4.8 мм, что соответствует 20% уменьшению потока нейтронов на задней стенке образца; 3) путем увеличения экспозиции $t_{irr} \geq T_{1/2}$; 4) в случае одновременного облучения более одной мишени, что предусмотрено конструкцией НГ.

3. Выводы

Рассмотрена возможность применения малогабаритного нейтронного генератора, обладающего интенсивностью потока тепловых нейтронов 10^{12} н·

$\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$ для получения ^{99m}Tc на основе ядерной реакции $^{98}\text{Mo}(n\gamma)^{99}\text{Mo}$. Показано, что НГ может, в принципе, производить радиоизотоп ^{99m}Tc с активностью, 353 достаточной для применения в ядерной медицине.

Работа поддержана грантом УНТЦ № Р333.

Литература

1. Блан Д. Ядра, частицы, ядерные реакторы / Д.Блан – М.: Мир,1989. – 335 с.
2. Немец О.Ф. Справочник по ядерной физике / О.Ф.Немец, Ю.В.Гофман Ю.В. – Киев: Наукова Думка,1975. – 415 с.
3. Веревкин А.А., Стервоедов Н.Г., Ковтун Г.П. // Вестник ХНУ. Серия: Ядра, частицы, поля. – 2006. - 745; 4(32). – С.54-64.
4. Довбня А.Н., Пугачев Г.Д., Пугачев Д.Г. и др., Получение мощных фотонных пучков для наработки медицинских радионуклидов // ВАНТ. Серия: яд.-физ. исследования. – 1997. – 4,5(31,32). – С.154-156.
5. Соколов В.А., Генераторы короткоживущих радиоактивных изотопов / В.А.Соколов. – М.: Атомиздат,1975. – 113 с.
6. Баранов В.Ю., Изотопы II / В.Ю. Баранов. – М.:Физматлит, 2005. – 727 с.
7. П.А. Демченко П.А., Воронко В.А., Мигаленя В.Я. и др. // ВАНТ. Серия: яд.-физ.исследования. – 1997. – 4,5(31,32). – С.168-170.

TO THE PROBLEM OF ^{99m}Tc YIELD IN REACTION



A.N. Dovbnya¹⁾, E.L. Kuplennikov¹⁾, V.A. Tsymbal¹⁾, V.V. Krasil'nikov²⁾

¹⁾National Science Center "Kharkov Institute of Physics and Technology",
Akademicheskaya st., Kharkov, 61108, Ukraine, e-mail: kupl@kipt.kharkov.ua

²⁾Belgorod State University, Belgorod, Russia

Possibility of the neutron generator with intensity flow of thermal neutrons $10^{12}\text{n}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ application for ^{99m}Tc production on the base of $^{98}\text{Mo}(n\gamma)^{99}\text{Mo} \rightarrow ^{99m}\text{Tc}$ nuclear reaction is considered.

Key words: neutron generator, thermal neutrons, cross-section, molybdenum, technetium, nuclear medicine.

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДВИЖЕНИЯ НАГРЕТЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В ВЯЗКИХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ГАЗООБРАЗНЫХ СРЕДАХ

Н.В. Малай¹⁾, А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: malay@mail.ru

Разработан математический метод решения линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса с учетом зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. Используя найденное решение, рассмотрена задача о влиянии нагрева поверхности частицы на силу и скорость ее гравитационного движения. При рассмотрении движения предполагалось, что средняя температура поверхности частицы может существенно отличаться от температуры окружающей ее среды. Численные оценки показали, что нагрев поверхности частицы существенно влияет на силу сопротивления и скорость гравитационного падения. Проведено сравнение с известными данными эксперимента, которое показало расхождение не более 15%, что указывает на правомерность разработанного математического метода.

Ключевые слова: линеаризованное по скорости уравнение Навье-Стокса, гравитационное движение, движение нагретой частицы в поле силы тяжести.

I. Решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса с учётом зависимости коэффициентов переноса от температуры

1. Введение. Вследствие общей нелинейной природы получить точные решения уравнений гидродинамики не представляется возможным [1-3]. До настоящего времени не увенчались успехом усилия, направленные на разрешение принципиальных вопросов, таких как, например, имеют ли уравнения гидродинамики при дополнительных граничных и начальных условиях единственное решение, насколько удовлетворительно описывают получаемые решения реальные течения и др.

Как показано в [1-3], богатейший теоретический и экспериментальный материал, накопленный в гидродинамике, по-видимому, недостаточен для строгого математического анализа происходящих в жидкости и газе явлений.

Многочисленные парадоксы гидродинамики указывают на то, что до окончательной теории здесь еще далеко. Поэтому исследование линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса позволяет найти пути решения общего уравнения движения вязкой неизотермической газообразной среды.

При рассмотрении многих прикладных задач, связанных с описанием движения отдельных частиц в вязких неизотермических газообразных средах возникает, как правило, вопрос о нахождении полей скорости, температуры, давления и т.д., которые определяются путем решения общего уравнения движения вязкой неизотермической среды. Эти поля необходимы для нахождения действующих на частицы сил, скоростей их упорядоченного движения, определения элементов тепло- и массопереноса.

В произвольной ортогональной криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) общая система гидродинамических уравнений для квазистационарного случая включает в себя [3 – 6]:

— уравнение Навье-Стокса ($i = 1, 2, 3$)

$$\rho \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{U_{x^k}}{H_k} \frac{\partial U_{x^i}}{\partial x^k} - \sum_{k=1}^3 \frac{U_{x^k}^2}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^3 \frac{U_{x^k} U_{x^i}}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} \right\} =$$

$$= \rho F_{x^i} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial P}{\partial x^i} + \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{H_1 H_2 H_3 H_i}{H_k} \sigma_{ik} \right) - \frac{\sigma_{kk}}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} \right\}, \quad (1)$$

— уравнение непрерывности

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} \rho U_{x^i} \right) = 0, \quad (2)$$

— уравнение конвективной теплопроводности ($i = 1, 2, 3$)

$$\rho c_p \left(\sum_{k=1}^3 U_{x^k} \right) \frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} \lambda(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial x^i} \right), \quad (3)$$

где через U_{x^i} , F_{x^i} и σ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) обозначены физические составляющие массовой скорости \mathbf{U} , силы \mathbf{F} и тензора полных напряжений

$$\sigma_{ik} = \mu \left\{ \frac{1}{H_k} \frac{\partial U_{x^i}}{\partial x^k} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial U_{x^k}}{\partial x^i} - \frac{1}{H_i H_k} \left(U_{x^i} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} + U_{x^k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} \right) + \right.$$

$$\left. + 2\delta_k^i \sum_{n=1}^3 \frac{U_{x^n}}{H_n H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x^n} - \frac{2}{3} \delta_k^i \sum_{n=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^n} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_n} U_{x^n} \right) \right\}, \quad (4)$$

$H_i(x)$ — коэффициенты Ламэ; P , T и ρ — соответственно давление, температура и плотность вязкой среды; c_p , n , m , μ и λ — соответственно, удельная теплоемкость при постоянном давлении, концентрация, масса, коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности газообразной среды.

Уравнения (1) – (3) вместе с зависимостями коэффициента теплопроводности $\lambda = \lambda(\rho, T)$, плотности $\rho = \rho(T)$ и динамической вязкости $\mu = \mu(\rho, T)$ от температуры, а также определяемые конкретной задачей граничными условиями позволяют полностью описать состояние вязкой среды (газа или жидкости), т.е. позволяют определить давление, плотность, компоненты массовой скорости и температуру при неизотермическом течении вязкой среды. Здесь и далее индексы "e" и "i" будем относить к газообразной среде и частице. Индексом "S" будем обозначать значения физических величин, взятых при средней относительной температуре частицы, равной T_{iS} , а индексом " ∞ " — значения физических величин, характеризующих газообразную среду на далёком расстоянии от частицы.

Как отмечалось выше, вследствие общей нелинейной природы получить точные решения системы гидродинамических уравнений не представляется возможным, т.е. общего метода построения решений для вязкой неизотермической среды не существует. В гидродинамике были разработаны приближенные методы, позволяющие в той или иной мере упростить систему гидродинамических уравнений и приспособить ее к характеру отдельных типов конкретных физических задач. Большинство конкретных задач о движении вязкой неизотермической среды, имеющих тот или иной практический интерес, решены именно на основании приближенных уравнений движения вязкой неизотермической среды. Они получаются из полных уравнений с помощью некоторых упрощений путем отбрасывания (полностью или частично) некоторых членов в уравнениях и граничных условиях. Эти методы основаны обычно на использовании малых параметров, называемых в научной литературе безразмерными комбинациями (числами Рейнольдса, Пекле, Эйлера и т.д.), которые подходящим способом определяются из исходных уравнений, граничных и начальных условий. Малость этих безразмерных комбинаций позволяет упростить полную систему гидродинамических уравнений.

Для решения системы уравнений (1) – (3) сделаем следующие физические допущения.

1. Движение частицы в газообразной среде рассматривается при значительных (больших) относительных перепадах температуры. Под относительным перепадом температуры понимают отношение разности температуры на

поверхности частицы и температуры области, далёкой от этой частицы. Относительный перепад температуры считается малым, если выполняется неравенство $(T_{is} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \ll 1$. При выполнении этого неравенства коэффициенты молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) и плотность можно считать постоянными величинами. Если $(T_{is} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \sim O(1)$, то относительный перепад температуры считается значительным. В этом случае уже нельзя считать эти величины постоянными. В работе при описании свойств газообразной среды и частицы рассматривается степенной вид зависимости динамической вязкости и теплопроводности от температуры [7, 8], таким образом

$$\begin{aligned} \mu_e &= \mu_{e\infty} t_e^\beta, \quad \lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha, \quad \rho_e = \rho_{e\infty} t_e, \quad \lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^\omega, \\ \mu_{e\infty} &= \mu_e(T_{e\infty}), \quad \rho_{e\infty} = \rho_e(T_{e\infty}), \quad \lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty}), \quad \lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_{e\infty}), \\ t_k &= T_k/T_{e\infty}, \quad k = e, i, \quad 0,5 \leq \alpha, \beta \leq 1, \quad -1 \leq \omega \leq 1. \end{aligned}$$

2. Определяющими параметрами задачи являются коэффициенты $c_p, \rho_{e\infty}, \mu_{e\infty}, \lambda_{e\infty}$ и сохраняющиеся в процессе движения частицы величины $R, T_{e\infty}, U_\infty$. Из этих параметров можно составить две безразмерные комбинации: число Рейнольдса $\text{Re}_\infty = (\rho_{e\infty} U_\infty R) / \mu_{e\infty} \ll 1$ и тепловое число Пекле $\text{Pe}_\infty = (c_p U_\infty R \rho_{e\infty}) / \lambda_{e\infty} \ll 1$, где R — радиус частицы, $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$ — характерная скорость задачи.

3. Коэффициент теплопроводности частицы по величине намного больше коэффициента теплопроводности газа. Это допущение приводит к тому, что в коэффициенте вязкости можно пренебречь зависимостью от угла θ в системе "частица-газ" (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры) и считать, что вязкость связана только с температурой $t_{e0}(r)$, т.е. $\mu_e(t_e(r, \theta)) \approx \mu_e(t_{e0}(r))$. При этом $t_e(r, \theta) = t_{e0}(r) + \delta t_e(r, \theta)$, где $\delta t_e(r, \theta) \ll t_{e0}(r)$, а $\delta t_e(r, \theta), t_{e0}(r)$ определяются из решения тепловой задачи. Это допущение позволяет рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется через граничные условия.

4. Частица образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом.

В рамках сформулированных выше допущений, в работе рассматривается следующая система гидродинамических уравнений, описывающая распределения полей скорости \mathbf{U}_e , давления P_e и температуры T вне и внутри нагретой частицы:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} P_e = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu_e \left(\frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^e}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_k^j \frac{\partial U_n^e}{\partial x_n} \right) \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_e U_k^e) = 0, \quad (5)$$

$$\rho_e c_{pe} (U_e \cdot \nabla) T_e = \operatorname{div} (\lambda_e \nabla T_e), \quad (6)$$

$$\operatorname{div} (\lambda_i \nabla T_i) = q_i, \quad (7)$$

где x_k — декартовы координаты, q_i — плотность тепловых источников, неоднородно распределенные в объеме частицы, за счет которых и происходит её нагрев.

При математическом описании равномерного движения нагретой частицы в вязкой неизотермической газообразной среде природа сил, вызывающих это движение, нас интересовать не будет. Она может быть гравитационной, магнитной, термофоретической, электрофоретической и т.д., что позволяет распространить разработанный математический метод решения линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса на очень широкий класс физических задач. Этот вопрос мы подробно рассмотрим во второй части статьи на конкретной физической задаче. Поскольку частица движется равномерно, то мы можем перейти в систему координат, связанную с её центром масс. В качестве системы координат выбираем сферическую систему координат (r, θ, φ) . В этом случае задача сводится к определению обтекания нагретой неподвижной частицы плоскопараллельным потоком газа со скоростью U_∞ ($U_\infty \parallel Oz$). Все неизвестные функции зависят только от координат r и θ .

В сферической системе координат линеаризованное по скорости уравнение Навье-Стокса, описывающее распределение скорости и давления вне частицы равенством (5), имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial y} + \frac{2}{y} \sigma_{rr} + \frac{1}{y} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{y} \sigma_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{y}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{y} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial y} + \frac{3}{y} \sigma_{r\theta} + \frac{1}{y} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{y} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}), \quad (9)$$

где $y = r/R$, σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ — компоненты тензора напряжений в сферической системе координат, определяемые равенствами

$$\sigma_{rr} = \mu_e \left(2 \frac{\partial U_r^e}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_e \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \mu_e \left(\frac{2}{y} \frac{\partial U_\theta^e}{\partial \theta} + \frac{2}{y} U_r^e - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_e \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \mu_e \left(\frac{2}{y} U_r^e + \frac{2}{y} \operatorname{ctg} \theta U_\theta^e - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_e \right), \quad \sigma_{r\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{y} \right).$$

Компоненты массовой скорости и давления будем искать в виде разложения по полиномам Лежандра и Гегенбауэра. Они нужны нам для нахождения общей силы, действующей на частицу. Сила определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы и равна [3]

$$F_z = \int_S (-P_e \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (10)$$

Используя свойство полиномов Лежандра и Гегенбауэра, легко показать, что эта сила определяется только первыми членами разложений [2]. Поэтому мы можем записать

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty G(y) \cos \theta, \quad U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty g(y) \sin \theta, \quad (11)$$

где $G(y)$ и $g(y)$ — произвольные функции, зависящие от радиальной координаты.

Связь между функциями $G(y)$ и $g(y)$ может быть найдена из уравнения непрерывности (2) с учетом зависимости плотности газообразной среды от температуры (уравнение состояния). Эта связь имеет вид

$$g(y) = G(y) + \frac{y}{2} (G'(y) - f(y) G(y)), \quad (12)$$

где $f(y) = \frac{1}{t_{e0}(y)} \frac{dt_{e0}(y)}{dy}$.

Тепловая задача решается методом сращиваемых асимптотических разложений [9, 10]. Нулевое приближение для внутреннего разложения поля температуры с учетом третьего допущения равно

$$t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (13)$$

где $\Gamma_0 > 0$ — постоянная, определяемая из граничных условий на поверхности нагретой частицы.

С учетом (13) зависимость динамической вязкости от температуры (см. допущение 3) принимает вид

$$\mu_e(y, \theta) \approx \mu_{e\infty} t_{e0}^\beta(y) = \mu_{e\infty} \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{\beta(1+\alpha)}. \quad (14)$$

2. Решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в виде обобщенных степенных рядов. Подставляя (11) в (8), (9) и учитывая (12) и (3), освобождаясь от давления, предварительно продифференцировав (8) по переменной θ , а (9) – по y , в конечном итоге, было получено следующее однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка для функции $G(y)$:

$$y^4 \frac{d^4 G(y)}{dy^4} + y^3 (8 + \alpha_1 \ell(y)) \frac{d^3 G(y)}{dy^3} + y^2 (8 + \alpha_2 \ell(y) + \alpha_3 \ell^2(y)) \frac{d^2 G(y)}{dy^2} + y (\alpha_4 \ell(y) + \alpha_5 \ell^2(y) + \alpha_6 \ell^3(y) - 8) \frac{dG(y)}{dy} + (\alpha_7 \ell^2(y) + \alpha_8 \ell^3(y) + \alpha_6 \ell^4(y)) G(y) = 0, \quad (15)$$

в котором

$$\ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}, \quad \alpha_1 = \frac{1 - 2\beta}{1 + \alpha}, \quad \alpha_2 = -\frac{8\beta}{1 + \alpha},$$

$$\alpha_3 = \frac{\beta^2 - 3\beta - \alpha\beta + 3 + 3\alpha}{(1 + \alpha)^2}, \quad \alpha_4 = 2\frac{\beta - 1}{\alpha + 1},$$

$$\alpha_5 = 2\frac{\beta^2 + \beta - \alpha\beta - 3\alpha - 3}{(1 + \alpha)^2}, \quad \alpha_6 = \frac{6 + 12\alpha + 6\alpha^2 + \beta^2 - 5\beta - 5\alpha\beta}{(1 + \alpha)^3},$$

$$\alpha_7 = 2\frac{2 + 2\alpha - \beta}{(1 + \alpha)^2}, \quad \alpha_8 = -2\alpha_6$$

с краевыми условиями

$$G(1) = F_1, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} G(y) = 1, \quad g(1) = F_2, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = 1, \quad (16)$$

где F_1 и F_2 – постоянные, вид которых определяется конкретной физической задачей. Например, в случае классической задачи Стокса имеем $F_1 = F_2 = 0$, что соответствует условию прилипания на поверхности сферы радиуса R .

Точка $y = 0$ для уравнения (15) является регулярной особой точкой [11, 12]. Поэтому будем искать его решение в виде функционального ряда

$$G(y) = y^\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n \ell^n(y), \quad C_0 \neq 0. \quad (17)$$

Вычисляя производные, получим

$$G'(y) = -y^{\rho-1} \sum_{n=0}^{\infty} [(n - \rho) C_n - (n - 1) C_{n-1}] \ell^n(y),$$

$$G''(y) = y^{\rho-2} \sum_{n=0}^{\infty} [(n - \rho)(n - \rho + 1) C_n - 2(n - \rho)(n - 1) C_{n-1} + (n - 1)(n - 2) C_{n-2}] \ell^n(y),$$

$$G'''(y) = -y^{\rho-3} \sum_{n=0}^{\infty} [(n - \rho)(n - \rho + 1)(n - \rho + 2) C_n - 3(n - \rho)(n - \rho + 1)(n - 1) C_{n-1} + 3(n - \rho)(n - 1)(n - 2) C_{n-2} + (n - 1)(n - 2)(n - 3) C_{n-3}] \ell^n(y),$$

$$G^{IV}(y) = y^{\rho-4} \sum_{n=0}^{\infty} [(n - \rho)(n - \rho + 1)(n - \rho + 2)(n - \rho + 3) C_n - 4(n - \rho)(n - \rho + 1)(n - \rho + 2)(n - 1) C_{n-1} + 6(n - \rho)(n - \rho + 1)(n - 1)(n - 2) C_{n-2} - 4(n - \rho)(n - 1)(n - 2)(n - 3) C_{n-3} + (n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4) C_{n-4}] \ell^n(y).$$

Подставляя ряд (17) в (15) и приравнивая коэффициенты при y^ρ , получаем определяющее уравнение

$$\rho(\rho + 3)(\rho + 1)(\rho - 2) = 0,$$

имеющее корни $\rho_1 = -3$, $\rho_2 = -1$, $\rho_3 = 0$, $\rho_4 = 2$. Заметим, что разность корней равна целому числу. Следовательно, согласно общей теории решения дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов (метод Фробениуса) во всех остальных решениях, кроме первого, соответствующего $\rho_1 = -3$, появляется дополнительное слагаемое, содержащее множитель $\ln y$, умноженный на первое решение (см. [11, 12]).

Большому (по модулю) из корней отвечает решение

$$G_1(y) = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (15), получим рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов $C_{n,1}$

$$\begin{aligned}
 C_{0,1} = 1, \quad C_{n,1} = [n(n+2)(n+3)(n+5)]^{-1} \times \\
 \times \{ (n+2) [4(n-1)(n^2+4n+1) + \\
 + \alpha_1(n+3)(n+4) + \alpha_4 - \alpha_2(n+3)] C_{n-1,1} - \\
 - [2(n-1)(n-2)(3n^2+9n+4) + \\
 + 3\alpha_1(n-2)(n+2)(n+3) - \\
 - 2\alpha_2(n+2)(n-2) + \alpha_3(n+1)(n+2) + \\
 + \alpha_4(n-2) - \alpha_5(n+1) + \alpha_7] C_{n-2,1} + \\
 + [4(n+1)(n-1)(n-2)(n-3) + \\
 + 3\alpha_1(n-2)(n+2)(n-3) - \alpha_2(n-3)(n-2) + \\
 + 2\alpha_3(n+1)(n-3) - \alpha_5(n-3) + \alpha_6n - \alpha_8] C_{n-3,1} - \\
 - (n-3) [(n-1)(n-2)(n-4) + \\
 + \alpha_1(n-2)(n-4) + \alpha_3(n-4) + \alpha_6] C_{n-4,1} \},
 \end{aligned}$$

здесь и в дальнейшем мы считаем, что $C_{n,k} = 0$, если $n < 0$.

Второе решение уравнения (15), линейно независимое с решением $G_1(y)$ и соответствующее корню $\rho_2 = -1$, будем искать в виде

$$G_2(y) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2} \ell^n(y) + \frac{\omega_1 \ln y}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (15), получаем рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов $C_{n,2}$

$$\begin{aligned}
 C_{0,2} = 1, \quad C_{1,2} = -\frac{1}{8} (6\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_4), \quad C_{2,2} = 1, \\
 C_{n,2} = [n(n-2)(n+3)(n+1)]^{-1} \times \\
 \times \{ n [4(n-1)(n^2-3) + \alpha_1(n+1)(n+2) + \alpha_4 - \alpha_2(n+1)] C_{n-1,2} - \\
 - [2(n-1)(n-2)(3n^2-3n-2) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +3\alpha_1 n(n-2)(n+1) - 2\alpha_2 n(n-2) + \\
 & \quad + \alpha_3 n(n-1) + \alpha_4(n-2) - \alpha_5(n-1) + \alpha_7] C_{n-2,2} + \\
 & + [4(n-1)^2(n-2)(n-3) + 3\alpha_1 n(n-2)(n-3) - \\
 & \quad - \alpha_2(n-3)(n-2) + 2\alpha_3(n-1)(n-3) - \\
 & \quad - \alpha_5(n-3) - \alpha_8 + \alpha_6(n-2)] C_{n-3,2} - \\
 & - (n-3)[(n-1)(n-2)(n-4) + \\
 & \quad + \alpha_1(n-2)(n-4) + \alpha_3(n-4) + \alpha_6] C_{n-4,2} + \\
 & \quad + \frac{\omega_1}{\Gamma_0^2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) \Delta_k \} ,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega_1}{\Gamma_0^2} &= \frac{1}{30} [2\alpha_3 - \alpha_5 + \alpha_7 - 2(4 + 12\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_4) C_{1,2}] , \\
 \Delta_k &= (4k^3 + 30k^2 + 62k + 30) C_{k,1} - \\
 & \quad - [12(k^2 - 1)(k + 3) + \alpha_4 + \\
 & \quad + \alpha_1(3k^2 + 18k + 26) - \alpha_2(2k + 5)] C_{k-1,1} + \\
 & + [6(k-1)(k-2)(2k+3) - 2\alpha_2(k-2) - \\
 & \quad - \alpha_5 + \alpha_3(2k+3) + 3\alpha_1(k-2)(2k+5)] C_{k-2,1} - \\
 & - [4(k-1)(k-2)(k-3) + 3\alpha_1(k-2)(k-3) + \alpha_6 + 2\alpha_3(k-3)] C_{k-3,1} .
 \end{aligned}$$

Третье решение уравнения (15), линейно независимое с решениями $G_1(y)$, $G_2(y)$ и соответствующее корню $\rho_3 = 0$, будем искать в виде

$$G_3(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,3} \ell^n + \frac{\omega_2 \ln y}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n + \frac{\omega_0 \ln y}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2} \ell^n. \quad (20)$$

Аналогично предыдущему получаем рекуррентную формулу для определения коэффициентов $C_n^{(3)}$, ($n \geq 4$)

$$\begin{aligned}
 C_{0,3} &= 1, \quad C_{1,3} = 0, \quad C_{2,3} = \frac{\alpha_7}{8}, \quad C_{3,3} = 1, \quad \omega_0 = 0, \\
 C_{n,3} &= [n(n+2)(n-3)(n-1)]^{-1} \times \\
 &\times \{ (n-1) [4(n-1)(n^2-2n-2) + \alpha_1 n(n+1) + \alpha_4 - \alpha_2 n] C_{n-1,3} - \\
 &- [2(n-1)(n-2)(3n^2-9n+4) + 3\alpha_1 n(n-2)(n-1) + \\
 &\quad (n-1)(n-2)(\alpha_3 - 2\alpha_2) + (n-2)(\alpha_4 - \alpha_5) + \alpha_7] C_{n-2,3} + \\
 &+ [4(n-1)(n-2)^2(n-3) + 3\alpha_1(n-1)(n-2)(n-3) + \\
 &\quad + (n-3)(n-2)(2\alpha_3 - \alpha_2) + (n-3)(\alpha_6 - \alpha_5) + \alpha_7] C_{n-3,3} - \\
 &- (n-3) [(n-1)(n-2)(n-4) + \\
 &\quad + \alpha_1(n-2)(n-4) + \alpha_3(n-4) + \alpha_6] C_{n-4,3} + \\
 &+ \frac{1}{60} [\alpha_8 - \alpha_7(8 + 12\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_4) / 4] \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(n-k-1) \Delta_k \}.
 \end{aligned}$$

Четвертое решение $G_0(y)$ уравнения (15), отвечающее корню $\rho_4 = 2$, согласно методу Фробениуса, следует искать в виде

$$\begin{aligned}
 G_0(y) &= y^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,4} \ell^n + \frac{s_0}{y^3} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n + \\
 &+ \frac{s_1}{y} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2} \ell^n + s_2 \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,3} \ell^n, \quad C_{0,4} = 1.
 \end{aligned}$$

Поскольку это решение не удовлетворяет краевому условию

$$\lim_{y \rightarrow \infty} G(y) = 1,$$

то его явный вид мы не приводим.

Заметим, что выбор постоянных $C_{0,1}$, $C_{0,2}$ и $C_{0,3}$ осуществляется таким образом, чтобы функции $G_1(y)$, $G_2(y)$ и $G_3(y)$ стремились к соответствующим функциям для сферы при малых относительных перепадах температуры [2, 3], т.е. чтобы при $\Gamma_0 \rightarrow 0$

$$G_1(y) \rightarrow \frac{1}{y^3}, \quad G_2(y) \rightarrow \frac{1}{y}, \quad G_3(y) = 1.$$

Учитывая неравенство

$$\ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0} \leq \frac{\Gamma_0}{1 + \Gamma_0} < 1,$$

можно показать, что ряды, определяющие функции $G_i(y)$, $i = 1, 2, 3$, равномерно сходятся при $y \geq 1$ и определяют ограниченные функции, которые можно дифференцировать нужное число раз. В дальнейшем нам потребуются производные до третьего порядка. Производя необходимые вычисления, получим

$$G_1'(y) = -\frac{1}{y^4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3) C_n^{(1)} - (n-1) C_{n-1,1} \right] \ell^n(y),$$

$$G_1''(y) = \frac{1}{y^5} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)(n+4) C_n^{(1)} - \right. \\ \left. - 2(n+3)(n-1) C_{n-1,1} + \right. \\ \left. + (n-1)(n-2) C_{n-2,1} \right] \ell^n(y),$$

$$G_1'''(y) = -\frac{1}{y^6} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)(n+4)(n+5) C_{n,1} - \right. \\ \left. - 3(n+3)(n+4)(n-1) C_{n-1,1} + \right. \\ \left. + 3(n+3)(n-1)(n-2) C_{n-2,1} + \right. \\ \left. + (n-1)(n-2)(n-3) C_{n-3,1} \right] \ell^n(y),$$

$$G_2'(y) = -\frac{1}{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) C_{n,2} - (n-1) C_{n-1,2} \right] \ell^n(y) +$$

$$+ \frac{\omega_1}{y^4} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y) + \omega_1 \ln y C_1^I(y),$$

$$\begin{aligned} G_2'''(y) = & \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) C_{n,2} - \\ & - 2(n+1)(n-1) C_{n-1,2} + \\ & + (n-1)(n-2) C_{n-2,2}] \ell^n(y) - \\ & - \frac{\omega_1}{y^5} \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+7) C_{n,1} - 2(n-1) C_{n-1,1}] + \omega_1 \ln y G_1''(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2''''(y) = & -\frac{1}{y^4} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)(n+3) C_{n,2} - \\ & - 3(n+1)(n+2)(n-1) C_{n-1,2} + \\ & + 3(n+1)(n-1)(n-2) C_{n-2,2} + \\ & + (n-1)(n-2)(n-3) C_{n-3,2}] \ell^n(y) + \\ & + \frac{\omega_1}{y^6} \sum_{n=0}^{\infty} [(3n^2 + 24n + 47) C_{n,1} - 3(n-1)(2n+7) C_{n-1,1} + \\ & + 3(n-1)(n-2) C_{n-2,1}] \ell^n(y) + \omega_1 \ln y G_1''(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_3'(y) = & -\frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} [nC_{n,3} - (n-1) C_{n-1,3}] \ell^n(y) + \\ & + \frac{\omega_2}{y^4} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y) + \omega_2 \ln y G_1'(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_3''(y) = & \frac{1}{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} [n(n+1) C_{n,3} - \\ & - 2n(n-1) C_{n-1,3} + \\ & + (n-1)(n-2) C_{n-2,3}] \ell^n(y) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\omega_2}{y^5} \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+7)C_{n,1} - 2(n-1)C_{n-1,1}] + \omega_2 \ln y G_1''(y), \\
 G_3'''(y) = & -\frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} [n(n+1)(n+2)C_{n,3} - \\
 & -3n(n+1)(n-1)C_{n-1,3} + \\
 & +3n(n-1)(n-2)C_{n-2,3} + \\
 & + (n-1)(n-2)(n-3)C_{n-3,3}] \ell^n(y) + \\
 & + \frac{\omega_2}{y^6} \sum_{n=0}^{\infty} [(3n^2 + 24n + 47)C_{n,1} - \\
 & -3(n-1)(2n+7)C_{n-1,1} + \\
 & +3(n-1)(n-2)C_{n-2,1}] \ell^n(y) + \omega_2 \ln y G_1''(y).
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили общее решение уравнения (15)

$$G(y) = A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + A_3 G_3(y) + A_0 G_0(y), \quad (21)$$

где A_1, A_2, A_3 и A_0 – произвольные постоянные.

Постоянные A_1, A_2, A_3 и A_0 однозначно определяются из краевых условий (16). Очевидно, $A_0 = 0, A_3 = 1$. Для определения постоянных A_1 и A_2 имеем линейную систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 G_1(1) + A_2 G_2(1) = F_1 - G_3(1), \\ A_1 G_4(1) + A_2 G_5(1) = F_2 - G_6(1). \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение, поскольку ее главный определитель отличен от нуля в силу линейной независимости решений $G_1(y), G_2(y), G_3(y)$. Таким образом, имеем

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_1 - G_3(1) & G_2(1) \\ F_2 - G_6(1) & G_5(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1(1) & G_2(1) \\ G_4(1) & G_5(1) \end{vmatrix}}, \quad A_2 = \frac{\begin{vmatrix} G_1(1) & F_1 - G_3(1) \\ G_4(1) & F_2 - G_6(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1(1) & G_2(1) \\ G_4(1) & G_5(1) \end{vmatrix}}. \quad (22)$$

В результате проведенного исследования доказана следующая теорема.

Теорема. Функция $G(y) = A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + G_3(y)$ с коэффициентами, определяемыми формулой (22), является единственным решением уравнения (15), удовлетворяющим краевым условиям (16).

Перейдем теперь к определению компонентов массовой скорости $U_e(y, \theta)$ и давления $P_e(y, \theta)$, которые необходимы для нахождения общей силы (10), действующей на нагретую частицу, движущуюся равномерно в неизотермической газообразной среде. Учитывая, что

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty G(y) \cos \theta, \quad U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty g(y) \sin \theta,$$

получаем

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos \theta [A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + G_3(y)], \quad (23)$$

$$U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta [A_1 G_4(y) + A_2 G_5(y) + G_6(y)], \quad (24)$$

где

$$G_k(y) = \left(1 + \frac{\ell(y)}{2(1+\alpha)}\right) G_{k-3}(y) + \frac{y}{2} G'_{k-3}(y), \quad k = 4, 5, 6. \quad (25)$$

Поскольку явный вид функций $U_r^e(y, \theta)$ и $U_\theta^e(y, \theta)$ нам известен, то мы можем легко получить выражения для поля давления

$$\begin{aligned} P_e = P_{e\infty} + \frac{\mu_{e\infty} U_\infty}{R} t_{e0}^\beta \left\{ \frac{y^2}{2} G'(y) + y \left[3 + \frac{\beta-1}{2} y f(y) \right] G''(y) - \right. \\ \left. - \left[2 - y^2 f'(y) - \frac{\beta}{2} y^2 f^2(y) + (\beta-2) y f(y) \right] G'(y) + \right. \\ \left. + 2 \left[y^2 f''(y) + y f'(y) (4 + \beta y f(y)) - \frac{2}{3} f(y) \right] G(y) \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

$$f(y) = -\frac{\ell(y)}{(1+\alpha)y}.$$

Общая сила, действующая на частицу, интегрированием тензора напряжений по её поверхности в сферической системе координат, определяется по формуле (10). Производя необходимые вычисления, получаем

$$F_z = -4\pi R \mu_{e\infty} U_\infty A_2 n_z, \quad (27)$$

где n_z — единичный вектор в направлении оси Oz , A_2 — постоянная, которая определяется равенством (22) из граничных условий на поверхности нагретой частицы.

Проведем анализ выражения (27). Различным значениям постоянной A_2 соответствуют различные качественные картины движения частицы в неизотермической газообразной среде. Отметим, что сила (27) вычислена в предположении равномерности движения, которое возможно только в случае, если полная сила, действующая на частицу, равна нулю. Поскольку сила (27) пропорциональна скорости и обращается в нуль вместе с ней, то для реализации случая равномерного движения частицы следует предположить наличие некоторой сторонней силы, уравнивающей силу (27).

В зависимости от параметров задачи сила (27) может быть как силой сопротивления (в этом случае для поддержания движения необходима сила, действующая в направлении скорости, например, сила тяжести), так и силой тяги (тогда для поддержания движения должна существовать сила, действующая в направлении, противоположном скорости).

Возможна и другая интерпретация полученных результатов, когда заданной считается действующая на частицу внешняя сила, например, термофоретическая сила, фотофоретическая сила, диффузиофоретическая и т.д. В этом случае из равенства силы (27) внешней силе может быть найдена, например, скорость термофореза, скорость фотофореза нагретой частицы и т.д.

Заключение. В данном разделе исследовалось линеаризованное по скорости уравнение Навье-Стокса в сферической системе координат в предположении, что коэффициент теплопроводности частицы намного больше коэффициента теплопроводности газа (слабая угловая асимметрия распределения температуры). Рассматриваемое уравнение может быть сведено к однородному дифференциальному уравнению четвертого порядка, учитывающему зависимость динамической вязкости и плотности газообразной среды от температуры.

В каждой конкретной физической задаче, задавая явный вид зависимости вязкости среды от температуры, мы можем исследовать полученные уравнения, что, несомненно, представляет как теоретический, так и практический интерес для поиска аналитического решения полного уравнения Навье-Стокса (1).

В частном случае, когда

$$t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{1/(1+\alpha)}, \quad \mu_e(y, \theta) \approx \mu_{e\infty} t_{e0}^\beta(y)$$

, получено однородное дифференциальное уравнение (15) четвертого порядка для функции $G(y)$ с краевыми условиями (16), для решения которого

был применен известный в научной литературе метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов (метод Фробениуса). Доказана теорема существования и единственности полученного решения.

II. Гравитационное движение неравномерно нагретой твёрдой частицы сферической формы.

Введение. На входящие в состав аэродисперсных систем аэрозольные частицы могут действовать силы различной природы. Самым распространенным видом движения является гравитационное, т.е. движение аэрозольных частиц в поле силы тяжести, происходящее за счёт отличия их удельных весов и от удельного веса окружающей среды [2, 3]. На гравитационном движении основаны такие технологические процессы, как флотация, определение гранулометрического состава аэродисперсных систем, тонкая очистка газов и т.п. В частности, при очистке газов от загрязняющих их частиц и обогащении полезных ископаемых важно ускорить процесс выпадения осадка. Этого добиваются различными способами в зависимости от рода частиц и окружающей среды. Основу седиментометрии составляет взаимосвязь между скоростью движения аэрозольных частиц в газообразной среде и их размерами. Скорость движения частиц можно существенно корректировать за счет нагрева их поверхности (например, с помощью лазера), поскольку коэффициенты молекулярного переноса газообразной среды (вязкость, теплопроводность и плотность) существенно зависят от температуры. В связи с этим представляет как теоретический, так и практический интерес описание гравитационного движения неравномерно нагретых частиц в вязких неизотермических средах.

Среднее расстояние между частицами у значительной части, встречающихся на практике аэродисперсных систем намного больше характерного размера частиц. В таких условиях учет влияния аэрозоля на развитие физического процесса можно проводить, основываясь на знании законов динамики движения, тепло- и массообмена с бесконечной окружающей средой отдельных частиц. Поэтому изучение закономерностей движения отдельных частиц в вязких средах является важной актуальной задачей. Кроме того, важно отметить, что исследование движения отдельных частиц в неподвижной среде является составной частью изучения их поведения в произвольном потоке.

Постановка задачи. Рассмотрим движение нагретой твердой частицы сферической формы в вязкой газообразной среде в поле силы тяжести. В рамках сформулированных в части I допущений уравнения для скорости, давления и температур вне и внутри частицы запишутся в виде

$$\frac{\partial P_e}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_e \left[\frac{\partial U_j^e}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial U_m^e}{\partial x_m} \right] \right) + F_k, \quad m, k, j = 1, 2, 3; \quad (28)$$

$$\operatorname{div}(\rho_e \mathbf{U}_e) = 0, \quad (29)$$

$$\rho_e c_p (\mathbf{U}_e \cdot \nabla) T_e = \operatorname{div}(\lambda_e \nabla T_e), \quad (30)$$

$$\operatorname{div}(\lambda_i \nabla T_i) = -q_i, \quad (31)$$

где (x_1, x_2, x_3) декартовы координаты, $q_i(r, \theta)$ – плотность тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы, за счет которых и происходит нагрев частицы. Наличие источников тепла внутри частицы можно связать, например, с протеканием объемной химической реакции, с процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т.д. Наличие источников тепла внутри частицы приводит к тому, что средняя температура ее поверхности может существенно отличаться от температуры окружающей газообразной среды на большом расстоянии от этой частицы. Возникающее при этом повышение температуры поверхности частицы оказывает влияние на теплофизические характеристики газообразной среды (вязкость, теплопроводность, плотность) и тем самым может существенно повлиять на распределение полей скорости и давления в ее окрестности и, в конечном итоге, на силу и скорость ее гравитационного движения.

Целесообразно, как и в первой части, ввести систему координат, связанную с центром масс движущейся частицы. В этом случае задача сводится к анализу обтекания частицы радиуса R бесконечным плоскопараллельным потоком газа со скоростью \mathbf{U}_∞ ($\mathbf{U}_\infty \parallel Oz$), которая подлежит определению из условий задачи.

Описывать движение будем в сферической системе координат r, θ, φ , полярную ось $z = r \cos \theta$ направим по вектору ускорения свободного падения \mathbf{g} . Картина набегающего потока и направления координатных осей приведены на рис. 1.

Угол θ будем отсчитывать против часовой стрелки от точки, где поток набегаёт на сферу. Распределения скорости, давления и температуры обладают аксиальной симметрией относительно оси Oz . В такой системе отсчета нагретая частица неподвижна, а внешняя среда (газ) — движется (как целое)

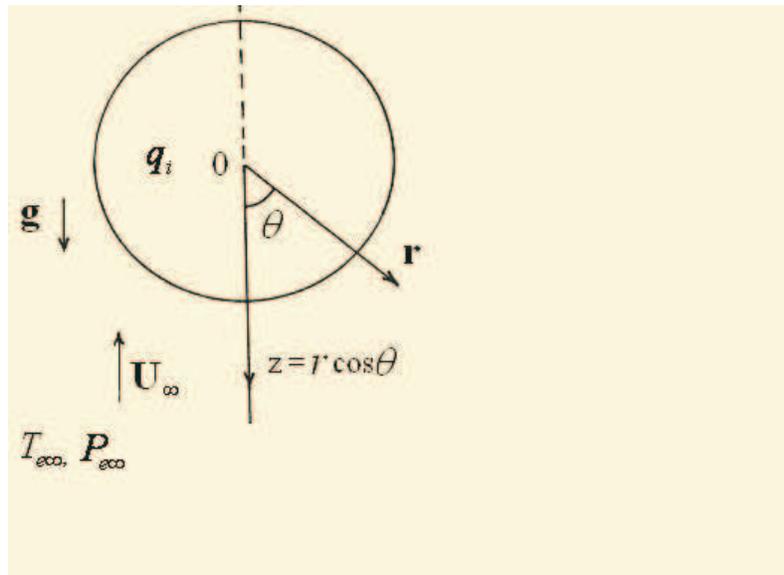


Рис. 1: Обтекание сферы.

в сторону, противоположную направлению фактического движения частицы, со скоростью $U_\infty = -U_p$ (U_p – скорость дрейфа нагретой частицы относительно лабораторной системы координат).

Эта система гидродинамических уравнений решается в сферической системе координат (r, θ, φ) со следующими граничными условиями:

$$U_r^e(y, \theta)|_{r=R} = U_\theta^e(y, \theta)|_{r=R} = 0, \quad T_e|_{r=R} = T_i|_{r=R}, \quad (32)$$

$$\left(\lambda_e T_e \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = \left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \sigma_0 \sigma_1 (T_i^4 - T_{e\infty}^4) \right) \Big|_{r=R}, \quad (33)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U_e = U_\infty \cos \theta e_r - U_\infty \sin \theta e_\theta, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} P_e = P_{e\infty}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} T_e = T_{e\infty}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} T_i \neq \infty, \quad (34)$$

т.е. мы считаем, что на поверхности частицы ($r = R$) выполнено условие прилипания для нормальной и касательной компонент массовой скорости U_e , имеют место равенство температур и непрерывность радиальных потоков тепла с учетом излучения на поверхности частицы (σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана, σ – интегральная степень черноты тела [13]), а также стандартные краевые условия при $r \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$.

Наличие больших относительных перепадов температуры между поверхностью частицы и далёкой от неё областью приводит к необходимости учитывать зависимость от температуры динамической вязкости μ_e , теплопроводности λ_e и плотности ρ_e :

$$\mu_e = \mu_{e\infty} t_e^\beta, \quad \lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha, \quad \lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^\omega, \quad \rho_e = \rho_{e\infty} t_e,$$

где $\mu_{e\infty} = \mu_e(T_{e\infty})$, $\lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty})$, $\lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_{e\infty})$, $\rho_{e\infty} = \rho_e(T_{e\infty})$, $t_k = T_k/T_{e\infty}$ ($k = e, i$) – безразмерная температура. Здесь и далее индекс e указывает на газообразную среду, индекс i – на принадлежность частице, а индекс ∞ означает параметры газообразной среды на бесконечности, т.е. на большом расстоянии от частицы.

Выражения для силы и скорости гравитационного движения нагретой твердой частицы сферической формы. При нахождении силы, действующей на нагретую твердую аэрозольную частицу, и скорости ее движения в гравитационном поле необходимо знать распределение температуры как вне частицы, так и внутри неё.

Интегрируя уравнения теплопереноса и учитывая степенной вид зависимости коэффициентов теплопроводности, получаем

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (35)$$

$$t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) = \left(B_0 + \frac{D_0}{y} + \frac{1}{y} \int_y^1 \psi_0(y) dy - \int_y^1 \frac{\psi_0(y)}{y} dy\right)^{1/(1+\omega)}, \quad (36)$$

где постоянные Γ_0 , B_0 и D_0 определяются из граничных условий (31), (32) на поверхности частицы:

$$\psi_0(y) = -\frac{R^2}{2\lambda_{i\infty}} \frac{1+\omega}{T_{e\infty}} y^2 \int_{-1}^1 q_i dx, \quad x = \cos \theta.$$

Среднее значение температуры поверхности частицы T_{iS} определяется из решения системы уравнений

$$\begin{cases} t_{iS} = t_{eS}, \\ \frac{\ell(1)}{1+\alpha} \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} t_{eS} = \frac{R^2}{3\lambda_{iS}T_{e\infty}} J_0 - \sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{iS}} (t_{iS}^4 - 1), \end{cases} \quad (37)$$

в которой

$$\lambda_{eS} = \lambda_{e\infty} t_{eS}^\alpha, \quad \lambda_{iS} = \lambda_{i\infty} t_{iS}^\omega, \quad t_{iS} = t_{i0}|_{y=1}, \quad t_{eS} = t_{e0}|_{y=1}, \\ T_{iS} = t_{iS} T_{e\infty}, \quad T_{eS} = t_{eS} T_{e\infty},$$

$$\ell(1) = \frac{\Gamma_0}{1+\Gamma_0}, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad J_0 = \frac{1}{V} \int_V q_i(r, \theta) dV,$$

а интегрирование ведется по всему объему частицы.

Из формулы (35) следует, что температура окружающего частицу газа изменяется с расстоянием от поверхности частицы, поэтому и динамическая вязкость также является функцией расстояния $\mu_e = \mu_e(y)$.

Подставляя (35) в выражение для динамической вязкости, имеем

$$\mu_e = \mu_{e\infty} t_{e0}^\beta. \quad (38)$$

Выражение (38) для динамической вязкости совпадает с формулой (14) первой части, и, следовательно, полученное аналитическое решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса применимо в нашем случае, т.е.

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos \theta (A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + G_3(y)), \quad (39)$$

$$U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta (A_1 G_4(y) + A_2 G_5(y) + G_6(y)), \quad (40)$$

где функции $G_1 - G_6$ определены равенствами (18)–(20), (25).

Подставляя (39), (40) в граничные условия (32) – (34), можем определить постоянные A_1 и A_2 . В частности, для коэффициента A_2 , имеем

$$A_2 = \frac{N_2}{N_1}, \quad (41)$$

где $N_1 = G_1(1)G_2'(1) - G_2(1)G_1'(1)$, $N_2 = G_1(1)G_3'(1) - G_3(1)G_1'(1)$.

Общая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы и в сферической системе координат находится по формуле (27)

$$\mathbf{F}_z = -4\pi R \mu_{e\infty} U_\infty A_2 \mathbf{n}_z, \quad (42)$$

где \mathbf{n}_z — единичный вектор в направлении оси Oz .

Подставляя в (42) определяемый равенством (41) коэффициент A_2 , получаем выражение для силы сопротивления неравномерно нагретой сферы

$$\mathbf{F}_z = 6\pi R \mu_{e\infty} U_\infty f_\mu \mathbf{n}_z, \quad f_\mu = \frac{2N_2}{3N_1}. \quad (43)$$

Сферическая частица, падающая под действием силы тяжести, приобретает постоянную скорость \mathbf{U}_p , как только действие силы тяжести уравновешивается гидродинамическими силами.

Сила тяжести, действующая на частицу, с учетом выталкивающей силы равна

$$\mathbf{F}_g = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_{iS} - \rho_{eS}) \mathbf{g}, \quad (44)$$

где \mathbf{g} — направленный вниз вектор ускорения свободного падения, ρ_{iS}, ρ_{eS} — плотность частицы и газообразной среды, взятые при средней температуре поверхности частицы, равной T_{iS} .

Приравнивая (43) к (44), учитывая, что $\mathbf{U}_\infty = -\mathbf{U}_p$, получаем выражение для скорости установившегося падения твердой неравномерно нагретой частицы сферической формы в поле силы тяжести

$$\mathbf{U}_p = h_\mu \mathbf{n}_z, \quad h_\mu = \frac{2(\rho_{iS} - \rho_{eS})}{9 \mu_{e\infty} f_\mu} R^2 g. \quad (45)$$

Таким образом, формулы (43) и (45) позволяют оценивать силу, действующую на неравномерно нагретую сферу, и скорость ее гравитационного падения с учетом зависимости плотности газообразной среды и коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) от температуры при произвольных относительных её перепадах между поверхностью частицы и далёкой от неё областью.

В случае, когда величина нагрева поверхности частицы достаточно мала, т.е. средняя её температура незначительно отличается от температуры окружающей среды на большом расстоянии от неё ($\Gamma_0 = 0$), зависимостью плотности и коэффициентов молекулярного переноса от температуры можно пренебречь, и тогда

$$G_1(1) = 1, \quad G'_1(1) = -3, \quad G_2(1) = 1, \quad G'_2(1) = -1, \quad G_3(1) = 1, \quad G'_3(1) = 0, \\ N_1 = 2, \quad N_2 = 3.$$

В этом случае формулы (42) и (44) переходят в известные выражения для сферы, полученные Стоксом [1, 2],

$$\mathbf{F}_S = 6\pi R \mu_{e\infty} \mathbf{U}_\infty, \quad \mathbf{U} = \frac{2(\rho_{i\infty} - \rho_{e\infty})}{9 \mu_{e\infty}} R^2 \mathbf{g}. \quad (46)$$

Здесь следует отметить, что коэффициенты молекулярного переноса и плотность берутся при температуре поверхности частицы, равной температуре окружающей среды (в нашем случае $T_{e\infty}$), т.е. эти формулы справедливы при малых относительных перепадах температуры.

Однако, из (35) видно, что константа Γ_0 зависит от средней относительной температуры t_{eS} , которая в случае неравномерного нагрева поверхности определяется из системы уравнений (37) и, следовательно, зависит от плотности тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы.

Отсюда следует, что и функции G_1 , G_2 и т.д. также зависят от плотности тепловых источников, поскольку в эти функции входит величина $\ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}$.

Чтобы оценить, какой вклад внутренние источники тепла (нагрев поверхности) оказывают на скорость гравитационного движения аэрозольной частицы сферической формы, можно рассмотреть наиболее простой случай, когда частица поглощает излучение как черное тело [13]. В этом случае поглощение происходит в тонком слое толщиной $\delta R \ll R$, прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной δR определяется равенством

$$q_i(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{I_0}{\delta R} \cos \theta, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \\ 0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad R - \delta R \leq r \leq R,$$

где I_0 — интенсивность падающего излучения.

В этом случае, вычисляя интеграл $\int_V q_i dV$, получим $\int_V q_i dV \approx \pi R^2 I_0$.

Таким образом, задавая интенсивность падающего излучения, мы можем оценить среднюю температуру поверхности частицы:

$$T_{iS} \approx T_{e\infty} \left(1 + \frac{1 + \alpha}{4\lambda_{e\infty} T_{e\infty}} R I_0 \right)^{1/(1+\alpha)}. \quad (47)$$

Из этой формулы следует, что средняя температура поверхности твердой частицы сферической формы зависит от ее радиуса и интенсивности падающего излучения. На рис.2 приведены значения функции f_μ в зависимости от интенсивности падающего излучения I_0 . Численные оценки проводились для частиц меди радиусом 100 мкм, взвешенных в воздухе при нормальных условиях.

Представляет также интерес сравнение полученных формул для силы сопротивления твердой нагретой частицы сферической формы с экспериментом, приведенным, например, в [14]. В экспериментальной работе [14] исследовалось влияние температуры газовой среды и температуры горящих угольных частиц (разогретых антрацитовых частиц) на коэффициент аэродинамического сопротивления с погрешностью не более 20%. Температура частиц, взвешенных в нейтральной (азотной) и в окислительной (воздушной и кислородной) газовых средах, изменялась от 20⁰C до 800⁰C. Размеры угольных частиц в опыте менялись в пределах от 0,1 мм до 1,0 мм.

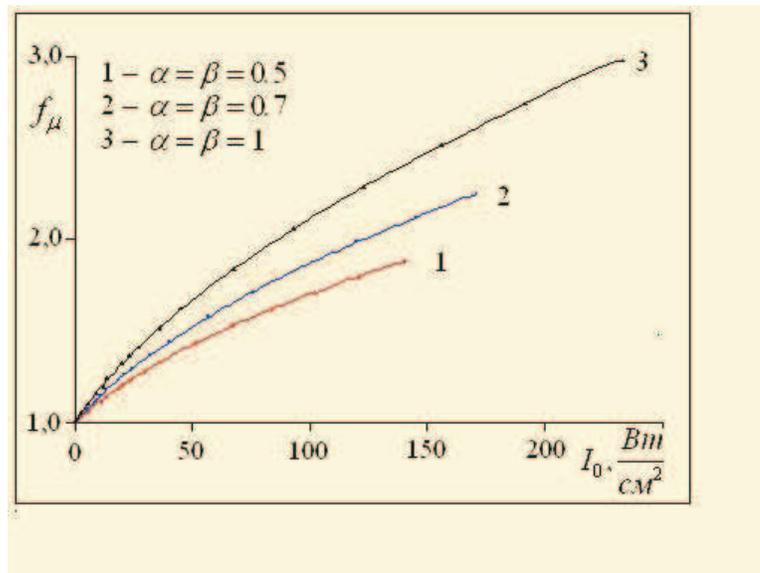


Рис. 2: График зависимости функции f_μ от интенсивности падающего излучения I_0 .

В частности, если на частицу падает поток монохроматического излучения (длина волны λ_0) интенсивностью I_0 , то поглощаемая ею энергия равна $\pi R^2 I_0 K_D$, где R – радиус частицы, K_D – фактор поглощения [13, 15], и эта энергия распределяется по объему сферы равномерно. Сферу можно считать равномерно нагретой. Это допущение справедливо в том случае, если коэффициент теплопроводности частицы намного больше коэффициента теплопроводности внешней среды и $\lambda_0 \gg R$. В экспериментальной работе [14] была предложена формула расчета коэффициента аэродинамического сопротивления частицы в неизотермических условиях

$$C_F^* = \frac{52}{\text{Re}} \left(\frac{T_0}{T_{e\infty}} \right)^m = \frac{\phi_F^*}{\text{Re}}, \quad \phi_F^* = 52 \left(\frac{T_0}{T_{e\infty}} \right)^m,$$

где $m = 1, 7$, T_0 – температура поверхности частицы.

Если привести формулу (43) к аналогичному виду, то она примет вид

$$C_F = \frac{\phi_F}{\text{Re}}, \quad \phi_F = 52 f_\mu t_{eS}.$$

На рис. 3 проведено сравнение коэффициентов ϕ_F и ϕ_F^* в интервале температур от 273^0K до 1273^0K . В диапазоне температур от 273^0K до 873^0K значения коэффициентов практически совпадают, а в диапазоне от 873^0K до 1273^0K различие с экспериментальными данными составляет до 15%.

Заключение. Получены аналитические выражения для силы, действующей на нагретую твердую частицу сферической формы, а также и для скорости ее движения в поле силы тяжести при произвольных относительных

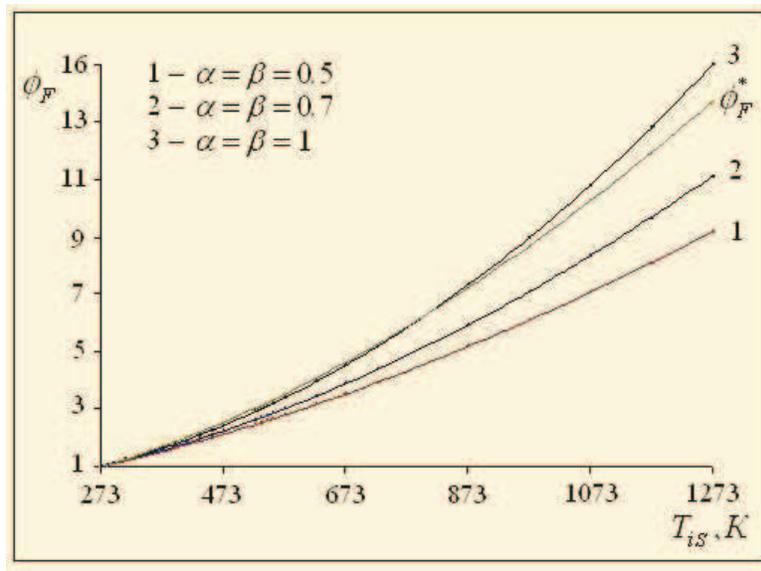


Рис. 3: График зависимости функции ϕ_F от средней температуры поверхности частицы T_{iS} .

перепадах температуры. Указанные выражения являются аналогом формул Стокса.

Проведенный с помощью полученных формул численный анализ показал, что сила и скорость гравитационного движения существенно зависит от средней температуры поверхности частицы и показателей вязкости α и теплопроводности β . Сравнение полученных результатов с экспериментом показало, что различие с экспериментальными данными (относительная погрешность) составляет не более 15%.

Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ, проект № 07 – 01 – 00131.

Литература

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой жидкости / О.А.Ладыженская. – М.: Наука, 1970.
2. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г.Бреннер – Москва: Мир, 1960.

3. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. – М.: Наука, 1986.
4. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е.Кочин. – М.: ОНТИ, 1965.
5. Петкевич В.В. Основы механики сплошных сред / В.В.Петкевич. – М.: УРСС, 2001.
6. Победря Б.Е. Основы механики сплошных сред. Курс лекций / Б.Е.Победря, Д.В.Георгиевский. – М.: Физматлит, 2006.
7. Бретшнайдер С., Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета / С.Бретшнайдер. – М.: Химия, 1966.
8. Варгафтик Н.Б., Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н.Б.Варгафтик. – М.: Наука, 1977.
9. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М.Ван-Дейк. – М.: Мир, 1967.
10. Найфе А. Введение в методы возмущений / А.Найфе. – М.: Мир, 1984.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э.Камке. – М.: Наука, 1976.
12. Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А.Коддингтон, Н.Левинсон. – М.: Иностран. лит-ра, 1958.
13. Борен К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К.Борен, Д.Хафмен. – М.: Мир, 1986.
14. Бабий В.И. Аэродинамическое сопротивление частицы в неизотермических условиях / В.И.Бабий, И.П.Иванова. – М.: Теплоэнергетика, 1965.
15. Береснев С.А., Кочнева Л.Б., Суетин П.Е. // Оптика атмосферы и океана. – 2002. – 15. – С.5-6.

SOME PECULIAR PROPERTIES OF HEATED SPHERICAL PARTICLES IN VISCOUS NONISOTHERMIC GASEOUS MEDIA

N.V. Malay¹⁾, A.V. Glushak

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: malay@mail.ru

The mathematical method of the velocity linearized Navier-Stokes equation solution with the account of molecular transfer coefficients (viscosity, thermal conductivity) and gaseous medium density on the temperature is developed. Using the obtained solution, the problem of the particle surface heating influence on the medium strength force and on the velocity of gravitational motion is studied. It is supposed that the average temperature of particle surface may be essentially differ from the surrounding temperature. Numerical estimates have shown that the heating of particle surface influences essentially on the the medium strength force and on the velocity of gravitational fall. The comparison with known experimental data is done which has shown the divergence being no more than 15%. It points out on the correctness of the developed mathematical method.

Key words: velocity linearized Navier-Stokes equation, gravitational motion, motion of the heated weight particle.

ТЕРМО-, ФОТО- И ДИФФУЗИОФОРЕЗ ТВЁРДОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Н.В. Малай, Н.Н. Миронова

Белгородский государственный университет,
Белгород, ул. Студенческая 14, Белгород, 308007, Россия
e-mail: malay@bsu.edu.ru; e-mail: mironovanadya@mail.ru

В приближении Стокса проведено теоретическое описание термо-, фото- и диффузиофоретического движения аэрозольной частицы сфероидальной формы, внутри которой действуют неравномерно распределенные источники тепла. При рассмотрении движения предполагалось, что средняя температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры окружающей её газообразной среды. На основе решения газодинамических уравнений получено аналитическое выражение для силы и скорости термо-, фото- и диффузиофореза.

Ключевые слова: термофорез, фотофорез, диффузиофорез, аэрозольная частица, сфероид.

Введение. В современной науке и технике, в областях химических технологий, гидрометеорологии, охраны окружающей среды и т.д. широко применяют многофазные смеси. Наибольший интерес представляют дисперсные смеси, состоящие из двух фаз, одна из которых есть частицы, а вторая – вязкая среда (газ или жидкость). Газ (жидкость), со взвешенными в ней частицами называют аэрозолями (гидрозолями), а сами частицы – аэрозольными (гидрозольными). Гидро- и аэрозольные частицы могут оказать значительное влияние на протекание физических и физико-химических процессов различного вида в дисперсных системах (например, процессов массо- и теплообмена). Размер частиц дисперсной фазы находится в очень широких пределах: от макроскопических ($\sim 500\mu\text{м}$) до молекулярных ($\sim 10\text{нм}$) значений; варьирует соответственно и концентрация частиц – от одной частицы до высококонцентрированных систем ($> 10^{10}\text{ см}^{-3}$). В настоящее время с учетом развития нанотехнологий и наноматериалов большую перспективу представляет применение ультрадисперсных (нано-) частиц, например, в наноэлектронике, наномеханике и т.д. На входящие в состав дисперсных систем частицы могут действовать силы различной природы, вызывающие их упорядоченное движение относительно центра инерции вязкой среды. Так, например, седиментация происходит в поле гравитационной силы. В газообразных средах с неоднородным распределением температуры может возникнуть

упорядоченное движение частиц, обусловленное действием сил молекулярного происхождения. Их появление вызвано передачей некомпенсированного импульса частицам молекулами газообразной среды. При этом движение частиц, обусловленное, например, внешним заданным градиентом температуры и концентрации, называют термофорезом и диффузиофорезом. Если движение обусловлено за счет внутренних источников тепла, неоднородно распределенных в объеме частицы, то такое движение называется фотофоретическим.

Существенный вклад в изучение и применение аэрозольных систем внесли ряд отечественных и зарубежных исследователей: Г.С. Эпштейн, Ж.Р. Брок, Н.А. Фукс, В.М. Волощук, Б.В. Дерягин, П.Е. Суетин, О.А. Волковицкий, Ю.И. Яламов и др.

Среднее расстояние между аэрозольными частицами у значительной части встречающихся на практике аэродисперсных систем намного больше характерного размера частиц. В таких системах учет влияния аэрозоля на развитие физического процесса можно проводить, основываясь на знании законов динамики движения, а также тепло- и массообмена с бесконечной окружающей средой отдельных аэрозольных частиц. Без знания закономерностей этого поведения невозможно математическое моделирование эволюции аэрозольных систем и решение такого важного вопроса, как целенаправленное воздействие на аэрозоли.

Многие частицы, встречающиеся в промышленных установках и в природе, имеют форму поверхности отличную от сферической, например, сфероидальную (эллипсоид вращения). Поэтому изучение закономерностей движения отдельных частиц в газообразных (жидких) как однородных, так и неоднородных средах является актуальной задачей, представляющей значительный теоретический и практический интерес.

Постановка задачи. Рассматривается крупная твердая частица сфероидальной формы, взвешенная в бинарной газовой смеси с температурой T_∞ , плотностью ρ_g и вязкостью μ_g . Пусть в этой бинарной газовой смеси с помощью внешних источников поддерживается малый градиент температуры ∇T и концентрации ∇C . Здесь $C_1 + C_2 = 1$, $C_1 = n_1/n_g$, $C_2 = n_2/n_g$, $n_g = n_1 + n_2$, $\rho_g = \rho_1 + \rho_2$, $\rho_1 = m_1 n_1$, $\rho_2 = m_2 n_2$, m_1, n_1 и m_2, n_2 – масса и концентрация первого и второго компонентов бинарной газовой смеси. В настоящей работе учтем одновременное влияние на поведение твердой аэрозольной частицы сфероидальной формы трех перечисленных во введении факторов. При теоретическом описании процесса термо-, фото- и диффузиофоретического движения частицы будем предполагать, что в силу малости времени тепло-

вой релаксации процесс теплопереноса в системе частица-газообразная среда протекает квазистационарно. Движение частицы происходит при малых числах Пекле и Рейнольдса и при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности, т. е. когда $(T_s - T_\infty)/T_\infty \ll 1$. При выполнении этого условия коэффициенты теплопроводности, динамической и кинематической вязкости можно считать постоянными величинами [1]. Тогда используется гидродинамический метод, т. е. решаются уравнения гидродинамики с соответствующими граничными условиями и считается, что фазовый переход отсутствует, и частица однородна по своему составу.

Предположим также, что в некоторый момент времени на частицу падает плоская монохроматическая волна интенсивностью I_0 . Энергия электромагнитного излучения, поглощаясь в объеме частицы, преобразуется в тепловую энергию. Тепло неоднородно распределяется в объеме за счет теплопроводности, и локальное распределение возникших таким образом источников тепла может быть описано некоторой функцией q_p , называемой объемной плотностью внутренних источников тепла.

Описание термо-, фото- и диффузиофоретического движения частицы будем проводить в сфероидальной системе координат $(\varepsilon, \eta, \varphi)$ с началом в центре сфероида. Криволинейные координаты $\varepsilon, \eta, \varphi$ связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$x = c \operatorname{ch} \varepsilon \sin \eta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{ch} \varepsilon \sin \eta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{sh} \varepsilon \cos \eta, \quad (1)$$

$$x = c \operatorname{sh} \varepsilon \sin \eta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{sh} \varepsilon \sin \eta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{ch} \varepsilon \cos \eta, \quad (2)$$

где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – в случае сплюснутого сфероида ($a > b$, формула (1)) и $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ – в случае вытянутого сфероида ($a < b$, формула (2)); и b – полуоси сфероида. При этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно частицы таким образом, чтобы начало координат располагалось в центре сфероида, а ось OZ совпадала с осью симметрии сфероида.

В рамках сформулированных допущений распределение скорости U_g , давления P_g , температур T_g, T_p и концентрации первого компонента бинарной газовой смеси C_1 описываются системой уравнений [2]

$$\begin{aligned} \nabla P_g &= \mu_g \Delta \mathbf{U}_g, \quad \operatorname{div} \mathbf{U}_g = 0, \\ \Delta T_g &= 0, \quad \Delta T_p = -\frac{q_p}{\lambda_p}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Delta C_1 = 0.$$

Система уравнений (3) решалась со следующими граничными условиями в системе координат, связанной с центром масс сплюснутого сфероида [3]:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon = 0, \quad U_\eta = K_{TS} \frac{\nu_g}{T_g} (\nabla T_g \cdot \mathbf{e}_\eta) + K_{DS} D_{12} (\nabla C_1 \cdot \mathbf{e}_\eta), \\ \varepsilon = \varepsilon_0 : \\ T_g = T_p, \quad \lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial \varepsilon} = \lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial C_1}{\partial \varepsilon} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \rightarrow \infty : \\ T_g \rightarrow T_\infty + |\nabla T_g|_\infty c \operatorname{sh} \varepsilon \cos \eta, \\ C_1 \rightarrow C_\infty + |\nabla C_1|_\infty c \operatorname{sh} \varepsilon \cos \eta, \\ P_g \rightarrow P_\infty; \quad U_\varepsilon = U_\infty \cos \eta; \quad U_\eta = -U_\infty \sin \eta. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 : \quad T_p \neq \infty. \quad (6)$$

Здесь \mathbf{e}_η , \mathbf{e}_ε – единичные векторы сфероидальной системы координат; λ_g , λ_p – коэффициенты теплопроводности газа и частицы соответственно; ν_g , μ_g – кинематическая и динамическая вязкости; $H_\varepsilon = c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \varepsilon - \sin^2 \eta}$ – коэффициент Ламе; K_{TS} и K_{DS} – коэффициенты теплового и диффузионного скольжения, которые определяются методами кинетической теории газов. Например, при коэффициентах аккомодации тангенциального импульса и энергии, равных единице, газокинетический коэффициент (в случае сферической частицы) $K_{TS} \approx 1,152$.

В граничных условиях (4) на поверхности частицы учтены условие непроницаемости для нормальной компоненты, тепловое и диффузионное скольжения для касательной компонент массовой скорости, равенство температур и непрерывность потоков тепла. Поверхности частицы соответствует координатная поверхность $\varepsilon = \varepsilon_0$. На большом расстоянии от частицы справедливы граничные условия (5), а конечность физических величин, характеризующих частицу при $\varepsilon \rightarrow 0$, учтена в (6).

Распределение температуры и концентрации вне и внутри частицы. Обезразмерим уравнения (3) и граничные условия (4)-(6), введя

безразмерные давление, температуру и скорость следующим образом: $p = P/P_\infty, t = T/T_\infty, V = U/U_\infty$.

В задаче кроме безразмерных чисел Рейнольдса и Пекле имеется еще два контролируемых малых параметра $\xi_1 = a|\nabla T_g|_\infty/T_\infty \ll 1$, характеризующее относительный перепад температуры на размере частицы и $\xi_2 = a|\nabla C_1|_\infty$. Поэтому решение краевой задачи (3)-(6) будем искать в виде разложения по степеням ξ_1, ξ_2

$$V_g = V_{g0} + \xi_1 V_{g1} + \dots, \quad p_g = p_{g0} + \xi_1 p_{g1} + \dots,$$

$$t = t_0 + \xi_1 t_1 + \dots, \quad C_1 = C_{10} + \xi_2 C_{11} + \dots \quad (7)$$

При нахождении силы и скорости термо-, фото- и диффузиофореза мы ограничимся поправками первого порядка малости по ξ_1, ξ_2 . Чтобы их найти, необходимо знать распределение скорости, давления, температуры и концентрации в окрестности сфероида. Подставляя (7) в (3), оставляя члены порядка ξ_1, ξ_2 , решая полученные системы уравнений методом разделения переменных, в конечном итоге, получаем для нулевых приближений $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$

$$t_{g0}(\lambda) = 1 + \gamma \lambda_0 \operatorname{arctg} \lambda, \quad (8)$$

$$t_{p0}(\lambda) = D + \delta \gamma \lambda_0 \operatorname{arctg} \lambda + \int_{\lambda_0}^{\lambda} f_0 \operatorname{arctg} \lambda d\lambda - \operatorname{arctg} \lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda} f_0 d\lambda, \quad (9)$$

$$C_{10} = C_{1\infty} \quad (10),$$

где $\lambda = \operatorname{sh} \varepsilon, \lambda_0 = \operatorname{sh} \varepsilon_0, \delta = \lambda_g/\lambda_p, \gamma = t_s - 1$ – безразмерный параметр, характеризующий нагрев поверхности сфероида; $t_s = T_s/T_\infty, T_s$ – средняя температура поверхности сфероида, определяемая формулой

$$\frac{T_s}{T_\infty} = 1 + \frac{1}{4\pi c \lambda_0 \lambda_g T_\infty} \int_V q_p dV, \quad (11)$$

$$D = 1 + (1 - \delta) \gamma \lambda_0 \operatorname{arctg} \lambda_0, \quad f_n = -\frac{2n + 1}{2\lambda_p T_\infty} \int_{-1}^1 c^2 q_p (\lambda^2 + x^2) P_n(x) dx,$$

$x = \cos \eta, P_n(x)$ – полиномы Лежандра [4].

В формуле (11) интегрирование ведется по всему объему частицы, а для первых приближений имеем

$$t_{g1} = \cos \eta \left(\frac{c\lambda}{a} + \Gamma(\lambda \operatorname{arcctg} \lambda - 1) \right), \quad (12)$$

$$t_{p1} = \cos \eta \left\{ B\lambda + \frac{3(1 - \lambda \operatorname{arcctg} \lambda)}{4\pi c^2 \lambda_p T_\infty} \int_V q_p z dV - \right. \\ \left. - \lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda} f_1(\lambda \operatorname{arcctg} \lambda - 1) d\lambda + \right. \\ \left. + (\lambda \operatorname{arcctg} \lambda - 1) \int_{\lambda_0}^{\lambda} f_1 \lambda d\lambda \right\}, \quad (13)$$

$$C_{11} = \cos \eta \left\{ \frac{c\lambda}{a} - \frac{c(1 + \lambda_0^2)}{((1 + \lambda_0^2) \operatorname{arcctg} \lambda_0 - \lambda_0)a} (\lambda \operatorname{arcctg} \lambda - 1) \right\}. \quad (14)$$

Константы В и Г, входящие в выражения для полей температур вне и внутри частицы (12), (13), определяются из соответствующих граничных условий на поверхности сфероида. Учитывая, что в дальнейшем нам потребуется выражение для коэффициента Г, приведем его явный вид

$$\Gamma = -\frac{c(1 - \delta)}{a\Delta} + \frac{3}{4\pi c^2 \lambda_p \lambda_0 T_\infty (1 + \lambda_0^2) \Delta} \int_V q_p z dV, \quad (15) \\ \Delta = (1 - \delta) \operatorname{arcctg} \lambda_0 + \frac{\delta \lambda_0}{1 + \lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_0}.$$

Определение силы и скорости термо-, фото- и диффузиофореза. Общее решение уравнений гидродинамики в сфероидальной системе координат, удовлетворяющих конечности при $\varepsilon \rightarrow \infty$ имеет вид

$$U_\varepsilon(\varepsilon, \eta) = \frac{U_\infty}{c \operatorname{ch} \varepsilon H_\varepsilon} \cos \eta \{ \lambda A_2 + [\lambda - (1 + \lambda^2) \operatorname{arcctg} \lambda] A_1 + c^2(1 + \lambda^2) \}, \\ U_\eta(\varepsilon, \eta) = -\frac{U_\infty}{c H_\varepsilon} \sin \eta \left\{ \frac{A_2}{\lambda} + [1 - \lambda \operatorname{arcctg} \lambda] A_1 + c^2 \lambda \right\}, \quad (16) \\ P_g(\varepsilon, \eta) = P_\infty + c \frac{\mu_g U_\infty}{H_\varepsilon^4} x(x^2 + \lambda^2) A_2.$$

Постоянные интегрирования A_1, A_2 определяются из граничных условий на поверхности сфероида, в частности,

$$\begin{aligned}
 A_2 = & -\frac{2c^2}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0} + \\
 & + 2K_{TS} \frac{c\nu_g}{U_\infty t_s} \cdot \frac{|\nabla T_g|_\infty}{T_\infty} \cdot \frac{\lambda_0 - (1 + \lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0} \times \\
 & \times \left(\frac{3a(1 - \lambda_0 \text{arcctg } \lambda_0)}{4\pi c^2 \lambda_0 \lambda_p T_\infty (1 + \lambda_0^2) \Delta} \int_V q_p z dV + c\delta \right) + \\
 & + 2K_{DS} D_{12} \frac{c^2 |\nabla C_1|_\infty}{U_\infty (\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0)}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Общая сила, действующая на сфероид, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности аэрозольной частицы [2] и имеет вид

$$F_z = -4\pi \frac{\mu_g U_\infty}{c} A_2. \quad (18)$$

С учетом коэффициента A_2 видим, что общая сила, действующая на твердую крупную аэрозольную частицу сфероидальной формы при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности, будет аддитивно складываться из силы вязкого сопротивления среды F_μ , термо-, фотофоретической силы F_{ph} , пропорциональной дипольному моменту плотности тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы, и диффузиофоретической силы F_{dh}

$$F = F_\mu + F_{ph} + F_{dh}, \quad (19)$$

$$F_\mu = 8\pi \mu_g U_\infty \frac{c}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0},$$

$$\begin{aligned}
 F_{ph} = & -8\pi K_{TS} \frac{\mu_g \nu_g}{t_s} \cdot \frac{|\nabla T_g|_\infty}{T_\infty} \cdot \frac{\lambda_0 - (1 + \lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0} \cdot \frac{c\delta}{(1 + \lambda_0^2)\Delta} \times \\
 & \times \left(1 - \frac{3a(\lambda_0 \text{arcctg } \lambda_0 - 1)}{4\pi c^3 \lambda_0 \lambda_g T_\infty} \int_V q_p z dV \right),
 \end{aligned}$$

$$F_{dh} = -8\pi K_{DS} D_{12} \mu_g \frac{c |\nabla C_1|_\infty}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2) \operatorname{arccctg} \lambda_0}. \quad (20)$$

Приравнивая общую силу к нулю, получаем выражение для величины скорости упорядоченного движения сфероидальной частицы

$$U = -\frac{b}{a} K_{TS} \frac{\nu_g}{t_s} \cdot \frac{|\nabla T_g|_\infty}{T_\infty} \cdot \frac{\delta(1 - (\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) \operatorname{arccctg} \lambda_0)}{\Delta \sqrt{1 + \lambda_0^2}} \times \\ \times \left(1 - \frac{3a(\lambda_0 \operatorname{arccctg} \lambda_0 - 1)}{4\pi c^3 \lambda_0 \lambda_g T_\infty} \int_V q_p z dV \right) - K_{DS} D_{12} |\nabla C_1|_\infty. \quad (21)$$

Чтобы получить силу и скорость термо-, фото- и диффузиофореза для вытянутого сфероида, необходимо заменить в (20), (21) λ на $i\lambda$, c – на $-ic$ (i – мнимая единица).

Анализ полученных результатов. Если не учитывать влияние внутренних источников тепла, (21) примет вид

$$U = -\frac{b}{a} K_{TS} \frac{\nu_g}{t_s} \cdot \frac{|\nabla T_g|_\infty}{T_\infty} \cdot \frac{\delta(1 - (\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) \operatorname{arccctg} \lambda_0)}{\Delta \sqrt{1 + \lambda_0^2}} - K_{DS} D_{12} |\nabla C_1|_\infty,$$

что совпадает с результатами, приведенными в [5].

В случае сферы формула (21) переходит в выражение для термо-, фото- и диффузиофоретической скорости твердой сферической частицы радиусом R , учитывающее влияние внутренних источников тепла [2, 3]:

$$U(a = b = R) = -K_{TS} \frac{\nu_g}{t_s} \cdot \frac{|\nabla T_g|_\infty}{T_\infty} \cdot \frac{2\delta}{1 + 2\delta} \left(1 + \frac{1}{4\pi R^2 \lambda_g T_\infty} \int_V q_p z dV \right) - \\ - K_{DS} D_{12} |\nabla C_1|_\infty. \quad (22)$$

Чтобы оценить, каков вклад внутреннего тепловыделения (неоднородного распределения плотности тепловых источников в объеме частицы) в скорость термо-, фото- и диффузиофореза твердой крупной аэрозольной частицы сфероидальной формы, необходимо конкретизировать природу тепловых источников. В качестве примера рассмотрим наиболее простой случай, когда частица поглощает излучение как черное тело, т.е. нагрев частицы происходит

в тонком слое толщиной $\delta\varepsilon \ll \varepsilon_0$. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной $\delta\varepsilon$ определяется с помощью формулы [6]

$$q_p = \begin{cases} -\frac{\operatorname{ch} \varepsilon \cos \eta}{c(\operatorname{ch}^2 \varepsilon - \sin^2 \eta)\delta\varepsilon} I_0, & \frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \pi, \quad \varepsilon_0 - \delta\varepsilon \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, \\ 0, & 0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (23)$$

где I_0 – интенсивность падающего излучения.

В выражение для скорости входит интеграл $\int_V q_p z dV$. Подставляя в него (23) и учитывая, что $\delta\varepsilon \ll \varepsilon_0$ после интегрирования, получим

$$\int_V q_p z dV = -\frac{2}{3} \pi c^3 I_0 \lambda_0^3 \left(1 + \frac{1}{\lambda_0^2}\right). \quad (24)$$

С учетом (24), выражение (21) примет вид

$$U = -\frac{b}{a} K_{TS} \frac{\nu_g}{t_s} \cdot \frac{|\nabla T_g|_\infty}{T_\infty} \cdot \frac{\delta(1 - (\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) \operatorname{arccctg} \lambda_0)}{\sqrt{1 + \lambda_0^2} \Delta} \times \\ \times \left(1 + \frac{a I_0 (1 + \lambda_0^2) (\lambda_0 \operatorname{arccctg} \lambda_0 - 1)}{2 \lambda_g T_\infty}\right) - K_{DS} D_{12} |\nabla C_1|_\infty. \quad (25)$$

В случае сферы выражение (25) примет вид

$$U(a = b = R) = -K_{TS} \frac{\nu_g}{t_s} \cdot \frac{|\nabla T_g|_\infty}{T_\infty} \cdot \frac{2\delta}{1 + 2\delta} \left(1 - \frac{I_0 R}{6 \lambda_g T_\infty}\right) - K_{DS} D_{12} |\nabla C_1|_\infty.$$

Литература

1. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета / С.Бретшнайдер. – М.: Химия, 1966.
2. Хашпель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж.Хашпель, Г.Бреннер. – М.: Мир, 1960.
3. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986.

4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э.Камке. – М.: Наука,1976.
5. Leong K.H. Thermophoresis and diffusiophoresis of large aerosol particles of different shapes // Journal of Aerosol Science. – 1984. – 15;4. – P.511-517.
6. Борен К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К.Борен, Д.Хафмен. – М.: Мир,1986.
7. Яламов Ю.И., Метелкин Е.В. О движении аэрозольной частицы в неоднородно нагретой бинарной газовой смеси в гидродинамическом режиме // Журнал физической химии. – 1972. – XLVI;10. – С. 2639-2643.

TERMO-, PHOTO- AND DIFFUSIOPHORESIS OF THE SOLID AEROSOL PARTICLE OF SPHEROIDAL FORM

N.V.Malai , N.N.Mironova

Belgorod State University,

Studencheskaya St.,14, Belgorod, 308007, Russia e-mail: malay@bsu.edu.ru

At the Stokes approach, theoretical description of termo-, photo- and diffusiophoresis motions of spheroidal aerosol particle which has the distributed heat source in it. It is supposed that the average temperature of the particle surface slightly differs from the temperature of its gaseous environment. On the basis of the solution of gas dynamics equations, analytic expressions of the acting force and also the velocity of termo-, photo- and diffusiophoresis are obtained.

Key words: photophoresis, diffusiophoresis, termophoresis, aerosol particle, spheroid.

ТЕПЛОВЫЕ И ТРАНСПОРТНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ГАЛОИДНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД, ВОЗНИКАЮЩИЕ ВБЛИЗИ РАЗМЕЩЕННОГО В НИХ РАДИОАКТИВНОГО ИСТОЧНИКА

О.А. Почепцова¹⁾, З.Р. Маттис²⁾, А.Н. Никитин²⁾

¹⁾Белгородский государственный университет, Студенческая,14, Белгород, 308007, Россия

²⁾Объединенный институт ядерных исследований, лаборатория нейтронной физики им. И.М. Франка, Жолио-Кюри, 6, Дубна, Московская обл., 141980, Россия

В работе приведены результаты исследования свойств природной каменной соли (NaCl). Актуальность обусловлена тем, что данная порода по ряду свойств является одной из предпочтительных для строительства подземных хранилищ радиоактивных отходов и резервуаров природного газа. Однако в солях при определенных условиях повышается проницаемость, что связано с их высокой растворимостью. Жидкие включения, почти всегда присутствующие в галоидных толщах, способны приходить в направленное движение при наличии градиентной силы (температура, механические напряжения). Это резко ухудшает барьерные свойства хранилища. В связи с этим проведены экспериментальные нейтронографические исследования текстуры и температурной зависимости внутренних напряжений в образцах каменной соли. Рассмотрен способ определения значений температур и тепловых градиентов, возникающих в соли в окрестности теплоизлучающего источника (захоронение РАО). Также предложен вариант вычисления максимально возможных скоростей движения включений в указанных условиях.

Ключевые слова: барьерные свойства хранилищ, жидкие включения, радиоактивные отходы, растворы солей, тепловыделяющий источник.

1. Введение

В представленной работе отражены результаты исследования некоторых свойств природной каменной соли. Данная порода представляет большой практический интерес, поскольку по ряду причин она является одной из предпочтительных для сооружения подземных хранилищ радиоактивных отходов, а также для создания резервуаров природного газа. Эти задачи являются актуальными помимо использования солей в традиционных целях – химической и пищевой отраслях.

Соль обладает высокой теплопроводностью, что позволит при её использовании быстро отводить тепло от разогретого захоронения. Кроме того, соль – высокопластичный материал, способствующий залечиванию возникающих

под действием высоких температур и давлений различных трещин и нарушений. И, наконец, это одна из наиболее доступных для использования геологических пород.

Важнейшей характеристикой соли, которую необходимо учитывать при планировании сооружения подземных захоронений РАО и хранилищ газа, является ее жидкостная проницаемость. Несмотря на отсутствие воды в крупных масштабах, в соляных пластах почти всегда присутствуют мелкие включения (размером $10^{-6} - 10^{-2}$ м), содержащие соленасыщенный водный раствор [7]. Эти включения могут двигаться по трещинам и порам, неизбежно возникающим в области повышенных температур и давлений. Направления перемещений в этих случаях определяются текстурой формы (т.е. преимущественно направленными по форме трещин и вытянутых пор). Кроме того, при наличии градиентной силы в солях появляется дополнительный механизм эффективной проницаемости, обусловленный зависимостью растворимости соли в водном растворе от температуры (в случае градиента температур), а также стремлением к понижению упругой энергии системы (в случае градиента механических напряжений). В случае, когда включений будет много, они могут со временем сконцентрироваться в местах расположения контейнеров с отходами и способствовать обрушению стенок захоронения.

Таким образом, чтобы оценить значение проницаемости соляной породы, необходимо рассматривать оба возможных механизма. С этой целью был выполнен ряд экспериментальных и теоретических исследований.

1. На ядерном реакторе ИБР-2 с помощью дифрактометров СКАТ и ФДВР проведены структурные и текстурные измерения образца каменной соли, а также температурные зависимости внутренних решеточных напряжений.

2. Рассчитаны значения температур и тепловых градиентов, возникающих в соли в окрестности теплоизлучающего источника (захоронение РАО).

3. Вычислены максимально возможные скорости движения жидких включений в солях под действием градиента температуры.

2. Структурные и текстурные исследования образца каменной соли (NaCl) [5,6]

В качестве образца использовался порошок, изготовленный из природной каменной соли. С помощью дифрактометров СКАТ и ФДВР были определены параметры решетки при различной температуре и оценен порядок соответствующих внутренних напряжений (табл.1).

Таблица 1. Коэффициенты теплового линейного расширения α и вызываемые тепловым расширением решеточные напряжения σ .

T, °C	$\alpha \cdot 10^{-5}, 1/^\circ\text{C}$	$\sigma, \text{МПа}$
100	3,73231	107
150	3,90209	112
200	4,19786	116
250	4,45661	119
300	4,61178	119

Эти напряжения в свою очередь могут создавать градиентные поля напряжений, инициирующие перемещение водных включений. А также была измерена текстура данного образца (рис.1), определяющая анизотропию проницаемости. Эти факторы, наряду с другими, могут влиять на направление и величину скорости перемещения жидких включений в соли.



Рис. 1: Полюсная фигура (001) соли.

3. Расчет температурных характеристик соляного массива в окрестности тепловыделяющего источника [5,6]

Захоронение радиоактивных отходов можно представить в виде сферического тепловыделяющего контейнера радиусом $R[\text{м}]$ и мощностью теплового излучения $W[\text{Вт}]$, внутри и вне которого находится природная каменная соль. Используя уравнение теплопроводности, имеющее вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + f,$$

было получено в явном виде выражение для функции температуры $T(r, t)$, определяющей температуру соли на расстоянии r м от центра хранилища через время t [с]: $T(r, t) = T_0 + T(a, R, r, t)$, где $a^2 = \frac{k}{C\rho}$ – коэффициент температуропроводности ($\rho = 2180$ кг/м³ – плотность; $k = 9.923$ Вт/м°C – коэффициент теплопроводности; $C = 869.1$ Дж/кг°C – теплоемкость соли).

Расчеты проводились при начальной температуре соли $T_0 = 20^\circ\text{C}$, радиусе контейнера $R = 5$ м, интенсивностях излучения до $f = 100$ Вт/м³ и времени хранения до 100 лет (что соответствует условиям хранения низко- и среднеактивных отходов в отсутствии искусственного охлаждения). Результаты представлены в виде графика (рис.2).

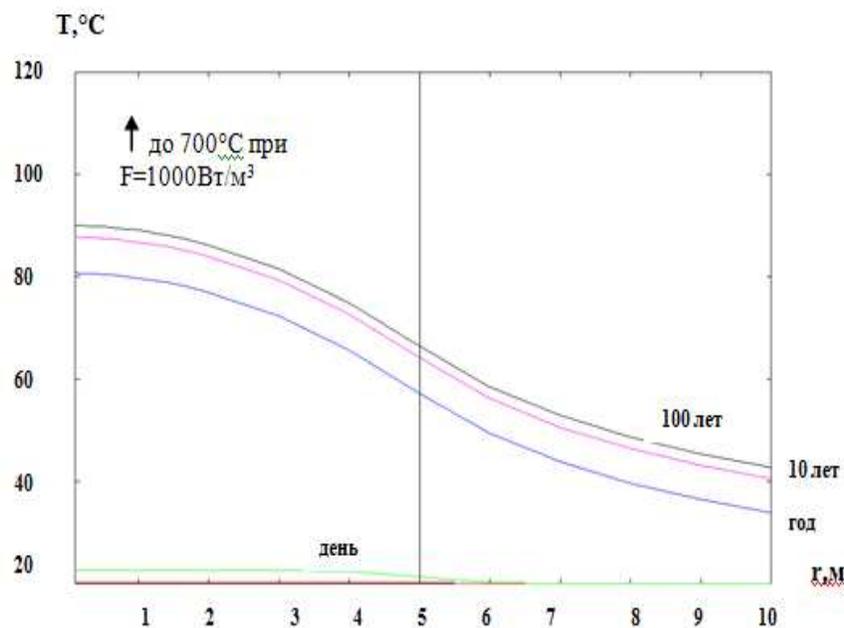


Рис. 2: Распределение температуры в радиусе 10 м от источника тепла (каверна радиусом 5 м) интенсивностью 100 Вт/м³ (через час, день, год, 10 лет и 100 лет хранения).

Как видно, возникающие температуры при этом не превышают 90°C , а максимальный градиент составляет 0.1°C на 1 см.

4. Определение верхней оценки скорости движения капли рассола в кристаллической соли под действием заданного температурного градиента

Механизм движения жидкого включения в поле градиента температуры заключается в следующем [1-4, 8]. В результате повышения растворимости

соли с увеличением температуры у горячей стороны включения возникает недосыщение раствора, а у холодной – пересыщение. Вследствие этого на разогретой стенке включения соль растворяется, посредством диффузии перемещается в растворе вдоль включения и на холодной стенке кристаллизуется. Основным условием стационарного движения включения является равенство последовательных потоков: растворения, диффузии и кристаллизации.

Рассмотрим каплю рассола, находящуюся в бесконечной кристаллической среде соли с заданным постоянным тепловым градиентом. Пусть раствор капли всюду имеет температуру T_0 и концентрацию соли, равную ее концентрации насыщения $C^n(T_0)$, т.е. будем считать, что капля "частично" теплоизолирована и не чувствует градиент температуры окружающей ее соли.

Начальные условия. В момент времени $t = 0$ снимаем теплоизоляцию и предполагаем, что в капле, "вокруг" T_0 , мгновенно устанавливается температурное распределение, соответствующее внешнему тепловому градиенту соли.

Будем рассматривать модель "одномерной капли", под которой понимается капля в форме параллелепипеда, длиной L , с фронтальной и тыльной поверхностями, площадью S . Боковые грани считаем нейтральными по отношению к процессам растворения и кристаллизации (т.е. растворение и кристаллизация разрешены только на фронтальной и тыльной поверхностях капли). Очевидно, что в этом случае процессы диффузии, определяющие изменение концентрации соли вдоль капли со временем, будут описываться одномерным уравнением. Этот факт оправдывает название модели – *одномерная капля*.

Разделим каплю на N клеток размером $\Delta x = L/N$. Согласно заданному постоянному тепловому градиенту соли $dT/dx = (T_1 - T_2)/L > 0$, температура первой клетки (фронтальной стенки) капли будет равна $T_1 > T_0$ и соответствующая концентрация насыщения $C^n(1) = C^n(T_1) > C^n(T_0)$. В последней клетке температура имеет значение $T_2 < T_0$, а концентрация насыщения $C^n(N) = C^n(T_2) < C^n(T_0)$.

Поскольку, согласно начальному распределению концентрации соли в капле в непосредственной близости фронтальной её части, появляется некоторое недосыщение, то считаем, что возможен поток растворения соли, пропорциональный величине этого недосыщения, т.е. $ПОТОК_r = K_r[C^n(1) - C^n(T_0)]$. Коэффициент K_r называется скоростью растворения. Он характеризует максимальное количество соли, которое может раствориться на передней стенке капли при данном недосыщении раствора за единицу времени, и определяет, на сколько может, в принципе, сдвигаться граница растворяющейся соли при

имеющимся недосыщением раствора капли за единицу времени [см/с].

Как известно, для растворения (разрушения кристаллической решетки) требуется определенное количество энергии. То есть при растворении граничный слой рассола, отдавая энергию, охлаждается. Будем считать, что это снижение температуры компенсируется мгновенным притоком тепловой энергии из окружающей каплю кристаллической матрицы соли. Таким образом, зависимость концентрации насыщения рассола от положения в капле $C^n(x)$ определяется заданным постоянным во времени температурным распределением $T(x)$.

На тыльной поверхности капли из-за наличия пересыщения в стартовый момент времени возможен поток кристаллизации соли, пропорциональный величине этого пересыщения, т.е. $ПОТОК_k = K_{kr}[C(N) - C^n(N)]$. Коэффициент K_{kr} называется скоростью кристаллизации. Он характеризует максимальное количество соли, которое может кристаллизоваться на задней стенке капли при данном пересыщении раствора за единицу времени, и определяет перемещение кристаллизующейся поверхности при указанном пересыщении за единицу времени [см/с]. Физически ясно, что скорость кристаллизации всегда будет меньше скорости растворения, $K_r > K_{rk}$. Как растворение, так и кристаллизация являются хаотическими процессами. Очевидно (при одинаковых теплоэнергетических условиях), что процессы разрушения упорядоченной кристаллической решетки NaCl на фронтальной поверхности будут происходить легче, чем создание упорядоченных элементов этой решетки из неупорядоченных молекул соли рассола на тыльной стенке капли.

В процессе кристаллизации выделяется энергия, и граничный слой рассола нагревается (его пересыщение падает). Однако по аналогии с процессом растворения мы считаем, что освобождаемая энергия (тепло) мгновенно передается от новообразованного слоя соли в окружающую среду, и температура тыльной поверхности капли остается равной T_2 .

Эти модельные упрощающие предположения, пренебрегающие наличием связи между динамикой растворения и кристаллизации и тепловыми характеристиками сложной системы "капля - кристаллическая матрица", допустимы для верхних оценок скорости движения капель. Любой учет пространственно-временного распределения тепловой энергии системы может привести только к замедлению процессов, определяющих это движение.

Другим упрощающим моментом, также оправданным для верхних оценок скоростей, является пренебрежение пороговыми эффектами движения капель, связанными с существованием "критических" концентраций недосы-

щения C_r^{kr} для процесса растворения и пересыщения C_k^{kr} (кристаллизации).

Рассматривая процесс растворения частей кристаллической стенки микроскопически, становится ясно, что из-за существования эффекта насыщения объем (длина) пограничного слоя рассола, в котором растворяется часть кристаллической стенки, должен быть намного больше объема (длины) этой растворяемой области. В то же время, растворенный материал должен немедленно уноситься в глубину пограничного слоя, поскольку в противном случае следующий слой стенки уже не сможет раствориться. Скорость переноса будет зависеть от степени недосыщения в пограничном слое рассола. Это в свою очередь определяется интенсивностью диффузии молекул рассола из пограничного слоя в глубину капли, а следовательно, и диффузией внутри капли, которая будет зависеть в том числе и от ее размера. Поэтому должно существовать некоторое критическое значение недосыщения, при котором в результате диффузии растворенной части соли не освобождается объем рассола у края капли, необходимый для растворения очередного слоя кристаллической стенки. При этом процесс растворения соли становится невозможным. Аналогичную картину можно рассмотреть и для процесса кристаллизации на противоположном крае капли. Таким образом, поскольку степени перенасыщения или недосыщения в пограничных слоях зависят, в конце концов, от градиента температуры, диффузионных характеристик рассола и размера капли, то рассмотренные критические значения приведут к пороговым явлениям, т.е. капли слишком маленького размера будут вообще неподвижны. И опять же, пренебрежение этими эффектами не влияет на верхнюю оценку скоростей движения капель.

Все кинематические процессы будем описывать с помощью дискретного аппарата. Так, численный расчет возникающих в капле потоков осуществляется через равные промежутки времени Δt . Выбор величины Δt поясним позже.

Первый временной шаг. За первый временной период Δt концентрация соли в первой клетке увеличится и станет равной

$$C_{нов}(1) = C_{стар}(1) + ПОТОК_r * \Delta t / \Delta x ,$$

а в последней клетке уменьшится:

$$C_{нов}(N) = C_{стар}(N) - ПОТОК_k * \Delta t / \Delta x .$$

Второй временной шаг. Поскольку возникает неравномерное распределение содержания соли в клетках капли, то за следующий промежуток времени ($t = 2\Delta t$) будет происходить диффузия молекул раствора от первой

к последней клетке капли. В нашем случае диффузия описывается одномерным уравнением $dC/dT = Dd^2C/dx^2$. Из этого уравнения для функции $C(n)$, представляющей собой концентрацию соли в n -ой клетке капли, в простейшем приближении для производных можно получить соотношения

$$C_{t+1}(1 < n < N) = C_t(n) + (D\Delta t/\Delta x^2)[C_t(n+1) - 2C_t(n) + C_t(n-1)],$$

$$C_{t+1}(1) = C_t(1) + (D\Delta t/\Delta x^2)[C_t(n+1) - C_t(n)],$$

$$C_{t+1}(N) = C_t(N) + (D\Delta t/\Delta x^2)[C_t(n-1) - C_t(n)].$$

Диффузионный поток будет пропорционален разнице между содержанием соли в соседних клетках капли. Так, например, срединный диффузионный поток равен

$$ПОТОК_d = (D/\Delta x)[C(n_s - 1) - C(n_s)].$$

За этот же промежуток времени снова возможны процесс растворения в первой клетке и кристаллизация соли в последней клетке капли.

В последующие временные шаги будем вычислять потоки всех трех происходящих процессов до тех пор, пока они не станут с указанной точностью равными между собой. Это соответствует установлению стационарного режима движения капли.

Таким образом, нам известно постоянное количество соли, растворяющееся, диффундирующее и кристаллизующееся в капле за единицу времени. Если разделить эту величину на плотность чистой соли, то получится искомое значение скорости движения капли.

Теперь поясним выбор введенных постоянных, а именно K_r , K_{kr} , Δx , Δt . Значение для скорости растворения мы взяли из статьи, посвященной кинетике растворения монокристаллов хлорида натрия в воде [10]. Она составила порядка $6 \cdot 10^{-3}$ см/с. Как уже было отмечено выше, $K_{kr} < K_r$, поэтому при расчетах рассматривались три случая: $K_{kr} = K_r$ (предельный), $K_{kr} = K_r/5$, $K_{kr} = K_r/10$. Ясно, что чем меньше величина K_{kr} , тем большее пересыщение остается на тыльной поверхности капли, и тем медленнее она движется.

Выбор величины Δx зависит от количества клеток N ($\Delta x = L/N$). Пусть, например, $N = 100$ клеток. Тогда $\Delta x = L/100$.

Приведенные выше диффузионные соотношения будут приводить к разумным результатам только в том случае, если выполняется условие $D\Delta t/\Delta x^2 \leq 1/4$ (условие устойчивости указанных соотношений). Таким образом, принимаем, что $\Delta t = \Delta x^2/4D$.

В табл. 2 представлены результаты расчетов скоростей движения включений, находящихся на расстоянии 1 м от сферического теплового источника интенсивностью 100 Вт/м^3 . Начальная температура $T_0=58.45^\circ\text{C}$, $\text{grad } T = 8 \cdot 10^{-2}^\circ\text{C}$ на 1 см, размеры включений 0.05-2 мм. По приведенным данным был построен график зависимости скорости движения капель от их размера (рис.3). Полученная зависимость хорошо согласуется с литературными данными и демонстрирует тот факт, что большие по величине включения движутся быстрее.

Табл. 2. Скорости "одномерного" включения, находящегося в соли на расстоянии 1 м от края ($R=5\text{м}$) сферического теплового источника интенсивностью 100 Вт/м^3 .

Размер включения (L), см	Скорости (см/с) в зависимости от соотношения K_1 и K_2		Путь S (см), пройденный включением за время t				
			час	день	год	10 лет	100 лет
0.01	$K_1=K_2$	$0.420151 \cdot 10^{-10}$	$1.51 \cdot 10^{-7}$	$3.63 \cdot 10^{-6}$	$1.32 \cdot 10^{-3}$	$1.32 \cdot 10^{-2}$	0.132
	$K_1=K_2$	$0.280777 \cdot 10^{-10}$	$1.01 \cdot 10^{-7}$	$2.42 \cdot 10^{-6}$	$8.85 \cdot 10^{-4}$	$8.85 \cdot 10^{-3}$	0.088
	$K_1=10K_2$	$0.198477 \cdot 10^{-10}$	$0.71 \cdot 10^{-7}$	$1.71 \cdot 10^{-6}$	$6.26 \cdot 10^{-4}$	$6.26 \cdot 10^{-3}$	0.063
0.05	$K_1=K_2$	$0.524252 \cdot 10^{-10}$	$1.89 \cdot 10^{-7}$	$4.53 \cdot 10^{-6}$	$1.65 \cdot 10^{-3}$	$1.65 \cdot 10^{-2}$	0.165
	$K_1=5K_2$	$0.466466 \cdot 10^{-10}$	$1.68 \cdot 10^{-7}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$	$1.47 \cdot 10^{-3}$	$1.47 \cdot 10^{-2}$	0.147
	$K_1=10K_2$	$0.409980 \cdot 10^{-10}$	$1.48 \cdot 10^{-7}$	$3.54 \cdot 10^{-6}$	$1.29 \cdot 10^{-3}$	$1.29 \cdot 10^{-2}$	0.129
0.1	$K_1=K_2$	$0.541007 \cdot 10^{-10}$	$1.95 \cdot 10^{-7}$	$4.67 \cdot 10^{-6}$	$1.71 \cdot 10^{-3}$	$1.71 \cdot 10^{-2}$	0.171
	$K_1=5K_2$	$0.508504 \cdot 10^{-10}$	$1.83 \cdot 10^{-7}$	$4.39 \cdot 10^{-6}$	$1.60 \cdot 10^{-3}$	$1.60 \cdot 10^{-2}$	0.160
	$K_1=10K_2$	$0.472983 \cdot 10^{-10}$	$1.70 \cdot 10^{-7}$	$4.07 \cdot 10^{-6}$	$1.49 \cdot 10^{-3}$	$1.49 \cdot 10^{-2}$	0.149
0.15	$K_1=K_2$	$0.546833 \cdot 10^{-10}$	$1.97 \cdot 10^{-7}$	$4.72 \cdot 10^{-6}$	$1.72 \cdot 10^{-3}$	$1.72 \cdot 10^{-2}$	0.172
	$K_1=5K_2$	$0.524252 \cdot 10^{-10}$	$1.89 \cdot 10^{-7}$	$4.53 \cdot 10^{-6}$	$1.65 \cdot 10^{-3}$	$1.65 \cdot 10^{-2}$	0.165
	$K_1=10K_2$	$0.498520 \cdot 10^{-10}$	$1.79 \cdot 10^{-7}$	$4.31 \cdot 10^{-6}$	$1.57 \cdot 10^{-3}$	$1.57 \cdot 10^{-2}$	0.157
0.2	$K_1=K_2$	$0.549793 \cdot 10^{-10}$	$1.98 \cdot 10^{-7}$	$4.75 \cdot 10^{-6}$	$1.73 \cdot 10^{-3}$	$1.73 \cdot 10^{-2}$	0.173
	$K_1=5K_2$	$0.532498 \cdot 10^{-10}$	$1.92 \cdot 10^{-7}$	$4.60 \cdot 10^{-6}$	$1.68 \cdot 10^{-3}$	$1.68 \cdot 10^{-2}$	0.168
	$K_1=10K_2$	$0.512352 \cdot 10^{-10}$	$1.84 \cdot 10^{-7}$	$4.43 \cdot 10^{-6}$	$1.62 \cdot 10^{-3}$	$1.62 \cdot 10^{-2}$	0.162

Ранее уже проводились эксперименты по наблюдению движения капельки водного раствора в соли под действием градиента температуры [4]. При этом были выявлены некоторые закономерности, в частности: а) движущаяся капля деформируется в направлении, перпендикулярном тепловому градиенту (сплющивается); б) после достижения некоторой степени деформации

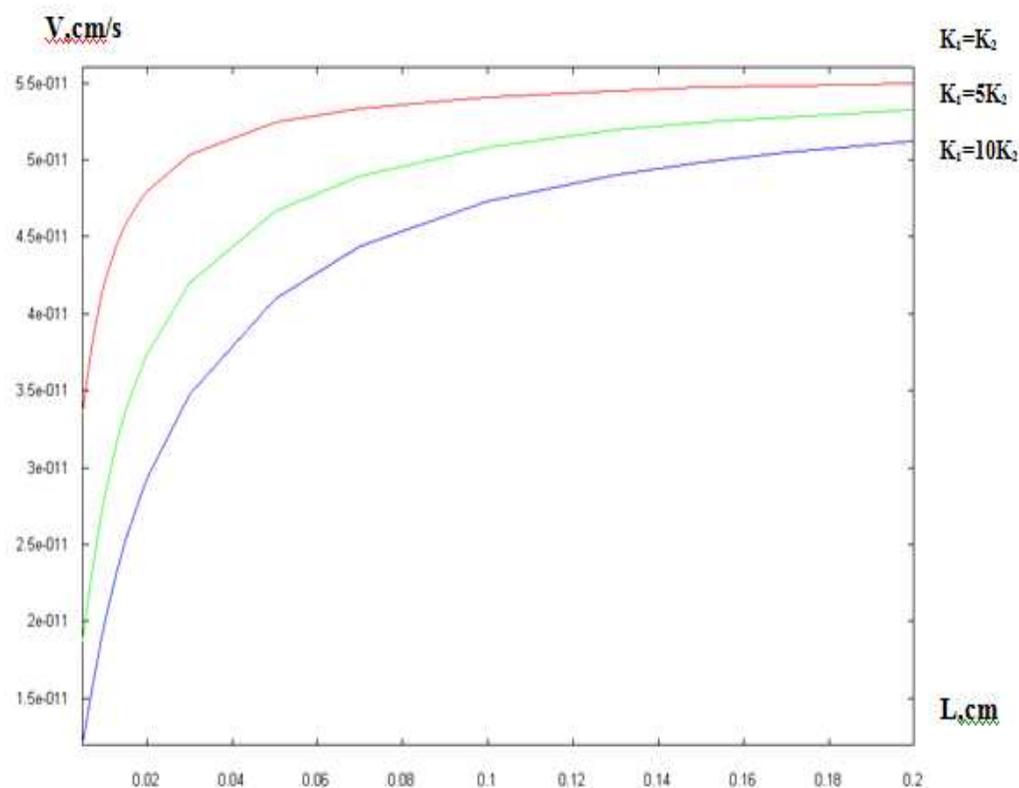


Рис. 3: Зависимость скорости движения включений от их размера при различных соотношениях между скоростью растворения (K_1) и кристаллизации (K_2).

края капли начинают отставать от движения ее средней части; и другие. Для систематического изучения и понимания этих интересных явлений потребовалось бы множество весьма тонких и трудоемких экспериментов. Однако, чтобы показать природу этих эффектов уже достаточным будет рассмотреть модель двумерной капли. Она представляет собой (аналогично одномерному случаю) параллелепипед, у которого процессы растворения и кристаллизации разрешены не только на фронтальной и тыльной, но и на двух взаимно противоположных боковых поверхностях. В этом случае при описании диффузии соли вдоль капли появляется система двумерных уравнений [9]. Опять, рассматривая происходящие процессы дискретно и внося некоторые допущения, можно её, в принципе, разрешить и в результате получить представление о поведении и характере движения двумерной капли. Усложняющим моментом по сравнению с одномерным случаем является то обстоятельство, что сильно упрощающий подход рассмотрения потоков и их выравнивания в стационарном режиме больше нельзя применять. Движение капли и ее деформацию необходимо описать в реальном пространстве, соблюдая при этом сохранение

объема воды рассматриваемой капли. Попыткам продемонстрировать эффекты, наблюдающиеся в экспериментах, посвящены текущие работы, о результатах которых будет сообщено отдельно.

Заключение

Таким образом, по проделанной работе можно сделать следующие выводы.

1. Проведены структурные в диапазоне температур 100-300°C исследования порошкового образца каменной соли. Определена температурная зависимость решеточных напряжений.

2. Измерены полюсные фигуры (ПФ) образца природной каменной соли, которые характеризуют достаточно слабую кристаллографическую текстуру породы.

3. Вычислено температурное распределение, возникающее в соляной породе вблизи размещенного в ней теплоизлучающего источника.

4. Получена теоретическая оценка максимальных скоростей движения включений в монокристалле NaCl под действием градиента температур, создаваемого радиоактивным источником интенсивностью излучения порядка 100Вт/м³.

Литература

1. Anthony T.R., Cline H.E. Thermal Migration of Liquid Droplets through Solids // Journal of Applied Physics. – 1971. – 42;9. – P.3380-3387.
2. Гегузин Я.Е., Кружанов В.С. Движение жидкого включения в монокристалле в поле градиента напряжений // Кристаллография. – 1979. – 24;4. – С.886-888.
3. Гегузин Я.Е., Дзюба А.С., Кружанов В.С. Движение газожидких включений в кристалле в поле температурного градиента // Кристаллография. – 1978. – 23;4 – С.880-882.

4. Гегузин Я.Е., Дзюба А.С., Кружанов В.С. Исследование поведения жидких включений в кристалле в поле температурного градиента // Кристаллография. – 1975.– 20;2.– С.383-391.
5. Никитин А.Н., Родкин М.В., Юрченко О.А., Иванкина Т.И., Васин Р.Н. К вопросу об экологической безопасности захоронений ВАО // Физико-химические и петрофизические исследования в науках о Земле. Материалы седьмой международ. конф. Борок, 25-26 сентября 2006.– ГЕОХИ, ИФЗ: М., 2006.– С.53-55.
6. Никитин А.Н., Кулаковский А.Л., Родкин М.В., Юрченко О.А., Иванкина Т.И., Васин Р.Н. О некоторых механизмах проницаемости горных пород в связи с геоэкологической безопасностью хранилищ ВАО // Геофизические исследования. – 2006. – 6. – С.85-95.
7. Никифоров А.С., Полуэктов П.П., Поляков А.С. О миграции включений рассола в хранилище радиоактивных отходов высокого уровня активности // ДАН СССР. – 1987.– 294;4.– С.860-864.
8. Pigford T.H. Migration of brine inclusions in salt // Nucl. Technology. – 1982.– 56;1.– P.93-101.
9. Тарасевич Ю.Ю., Константинов В.О., Аюпова А.К. Моделирование дендритного роста кристаллов соли в биологических жидкостях // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. серия Естественные науки. – 2001. – Спецвыпуск.
10. Товбин М., Барам О. Кинетика растворения монокристаллов хлорида натрия // Журнал физической химии. – 1949.– XXIII.– С.406-412.

THERMAL AND TRANSPORT FEATURES OF THE ROCK HALOID SALT ARISING NEAR TO THE RADIOACTIVE SOURCE PLACED IN THEM

O.A.Pocheptsova¹⁾, Z. Matthies²⁾, A.N. Nikitin²⁾

¹⁾Belgorod State University, Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia

e-mail: yurchenko_olga@mail.ru

²⁾Joint Institute for Nuclear Research, Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russia

The results of the study of natural rock salt (NaCl) properties are given in the work. Urgency is connected with that the given sort of rock is the preferred one on some its characteristics for the construction of underground vaults of nuclear waste and reservoirs of the natural gas. However, under some definite conditions, the permeability increases in salts that is connected with their high dissolutions. Some liquid inclusions nearly always being present in the rock salt may begin the directed motion at presence of the gradient force (caused by temperature or mechanical tensions). This sharply worsens the barrier properties of the vault. In this connection, the experimental neutronographic study of the texture and the temperature dependency of internal tensions are fulfilled in rock salt samples. The method of the determination of temperature value and heat gradient in salts near the heat radiating source is considered. Besides, the calculation method for possible maximal velocities of inclusion motions is proposed at the specified conditions.

Key words: barrier properties of vaults, liquid inclusions, nuclear waste, salt solutions, heat extracted source.

РАЗВИТИЕ ВРЕМЯ-ПРОЛЕТНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ СТРУКТУРЫ ЛЕГКИХ ЯДЕР НА НУКЛОТРОНЕ-М

А.А. Терехин^{1,2)}, И.Е. Внуков¹⁾, В.П. Ладыгин¹⁾, С.М. Пиядин²⁾,
С.Г. Резников²⁾, А.Н. Хренов²⁾

¹⁾Белгородский государственный университет, Студенческая,14, Белгород, 308007, Россия

²⁾Объединенный институт ядерных исследований, Жолио-Кюри, 6, Дубна, 141980, Россия

Приведены результаты тестирования прототипа элемента сцинтилляционного годоскопа для время-пролетной системы DSS-проекта с радиоактивным источником и с космическими мюонами. Показано, что оптические, временные и амплитудные характеристики данного годоскопа удовлетворяют требованиям, предъявляемым к время-пролетной системе установки для изучения структуры легких ядер на выведенном пучке ускорителя Нуклотрон-М (ОИЯИ).

Ключевые слова: время-пролетная система, сцинтилляционный счетчик, ионизационные потери.

Введение. Главной целью DSS-проекта [1] является систематическое изучение поляризационных наблюдаемых в адронных реакциях с участием поляризованных дейтронов при промежуточных и высоких энергиях на ускорителе Нуклотрон-М (ОИЯИ). Одним из экспериментов является измерение дифференциального сечения, тензорной анализирующей способности T_{20} и коэффициента спиновой корреляции C_{yy} реакции ${}^3\text{He}(d,p){}^4\text{He}$ при кинетической энергии дейтрона $T = 1.0 - 2.0$ ГэВ с использованием поляризованного дейтронного пучка Нуклотрона-М и поляризованной ${}^3\text{He}$ мишени [2], разработанной в CNS (Япония). Эксперименты, выполненные в RIKEN при энергиях ниже 270 MeV, показали, что коэффициент корреляции

$$C_{||} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} T_{20} + \frac{3}{2} C_{y,y}$$

для реакции ${}^3\text{He}(d,p){}^4\text{He}$ является уникальным способом изучения поведения D-состояния в дейтроне [3]. Цель эксперимента состоит в том, чтобы получить данные по $C_{||}$ в области энергий, где вклад от D-состояния дейтрона достигает максимума в импульсном приближении и реализовать эксперимент по определению матричного элемента реакции ${}^3\text{He}(d,p){}^4\text{He}$ модельно независимым способом. Эти данные помогут понять спиновую структуру дейтрона на малых расстояниях и эффекты ненуклонных степеней свободы.

Ключевым моментом реализации данного эксперимента является надежная идентификация вторичных частиц, для чего будет использована техника измерения времени пролета. Импульс детектируемых частиц будет в диапазоне 1.5-2.5 ГэВ/с, поэтому для надежного разделения протонов и дейтронов при базе пролета 8-10 м требуется временное разрешение время-пролётной системы не больше 0.5 нс.

В рамках DSS-проекта изготовлен и протестирован прототип элемента годоскопа из сцинтилляционных счетчиков на базе ФЭУ-85 для время-пролётной системы установки на выведенном пучке ускорителя Нуклотрон-М (ОИЯИ).

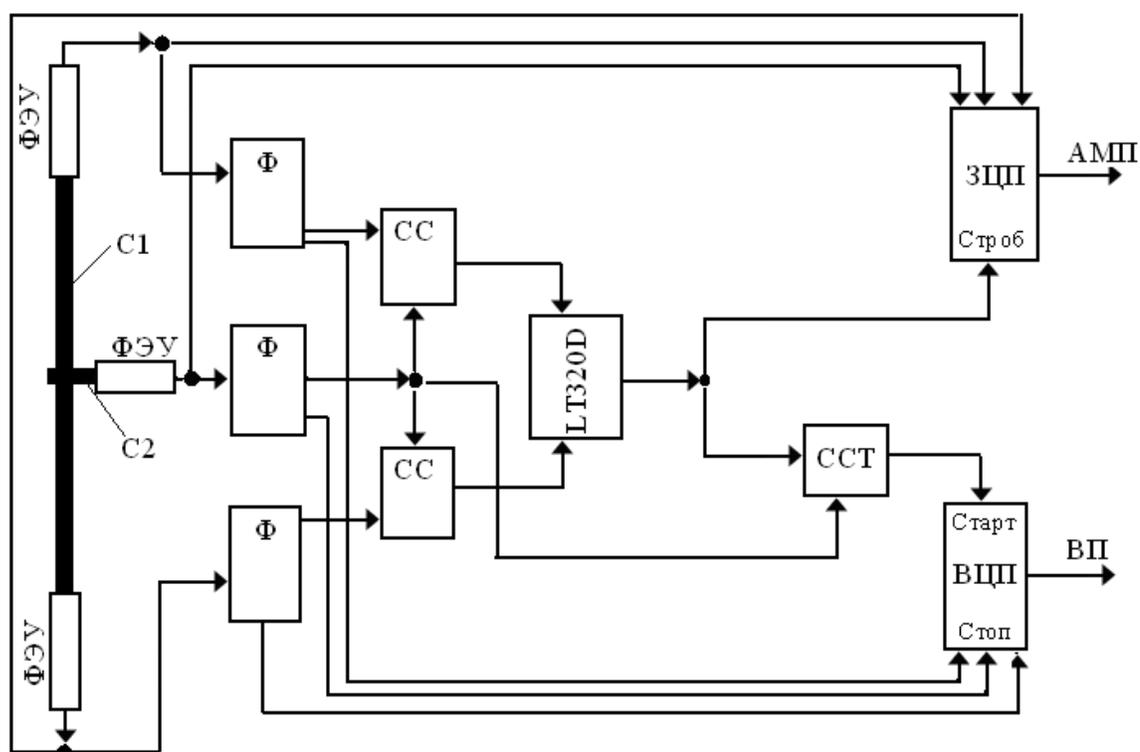


Рис. 1: Блок-схема экспериментальной установки для тестирования элемента годоскопа: С1, С2 – сцинтилляционные счетчики, Ф – формирователи с постоянным порогом (4Ф-115), СС – схемы совпадений (2СС-1511), ССТ – стробируемая схема совпадений, LT320D – логический триггерный модуль, ЗЦП – заряд-цифра-преобразователь (4ЗЦП-397), ВЦП – время-цифра-преобразователь (4ЗЦП-397).

1. Стенд для изучения свойств элемента сцинтилляционного годоскопа

Время-пролётная система установки по изучению структуры легких ядер на выведенном пучке ускорителя Нуклотрон-М (ОИЯИ) будет включать в

себя сцинтилляционные счетчики со съёмом информации с помощью фотоумножителей ХР2020 и годоскопической системы сцинтилляционных счетчиков на базе ФЭУ-85. С целью минимизации количества вещества предполагается, что толщина пластического сцинтиллятора для отдельного элемента годоскопа будет не более 4 мм. Длина пластического сцинтиллятора для счетчика должна быть в пределах 30-50 см. Поэтому важным моментом является изучение оптических свойств пластического сцинтиллятора, таких как длина затухания и скорость распространения света, а также временного и координатного разрешения детектора.

Для этой цели был создан стенд, схематический вид которого показан на рис.1. Изучаемый пластический сцинтиллятор [4] С1 размером 500x40x4 мм³ просматривался с двух сторон фотоумножителями ФЭУ-85 через световоды типа <рыба>, изготовленные из плексиглаза. Для измерения временных характеристик сцинтиллятора и организации триггера использовался дополнительный сцинтилляционный счетчик с размером пластического сцинтиллятора С2 40x40x4 мм³, просматриваемый через световод фотоумножителем ФЭУ-85. Заряженная частица, попадая в сцинтиллятор, за счет ионизационных потерь возбуждает световой сигнал, который собирается на фотокатод ФЭУ-85. Полученные сигналы снимаются с анодов ФЭУ-85, разветвляются и через линии задержки поступают на формирователи с постоянным порогом (Ф), а также на входы заряд-цифра-преобразователя (ЗЦП). Сформированные сигналы со счетчиков С1 и С2 поступают на 2 схемы совпадений (СС). Схемы служат для организации совпадений между сигналами со счетчика С2 и сигналом с левого и правого концов счетчика С1 соответственно.

Логические сигналы со схем совпадений СС поступают на входы логического триггерного модуля LT320D, который вырабатывает сигнал управления системой сбора данных и стробирующие сигналы для ЗЦП и стробируемой схемы совпадений (ССТ). В качестве стартового сигнала для ВЦП используется сигнал со счетчика С2, простробируемый триггерным сигналом для уменьшения фоновых срабатываний ВЦП. Для организации стенда были использованы стандартные модули, разработанные в ОИЯИ и выполненные в стандарте КАМАК: формирователи 4Ф-115, схемы совпадений 2СС-1511, триггерный логический модуль LT320D, преобразователи заряд-цифра 4ЗЦП-397 и время-цифра 4ВЦП-369.

Система сбора данных выполнена на базе крейт-контроллера ССРС5 в операционной системе FreeBSD [5]. Крейт-контроллер осуществляет управление логическим триггерным модулем LT320D и сбор информации с блоков ЗЦП

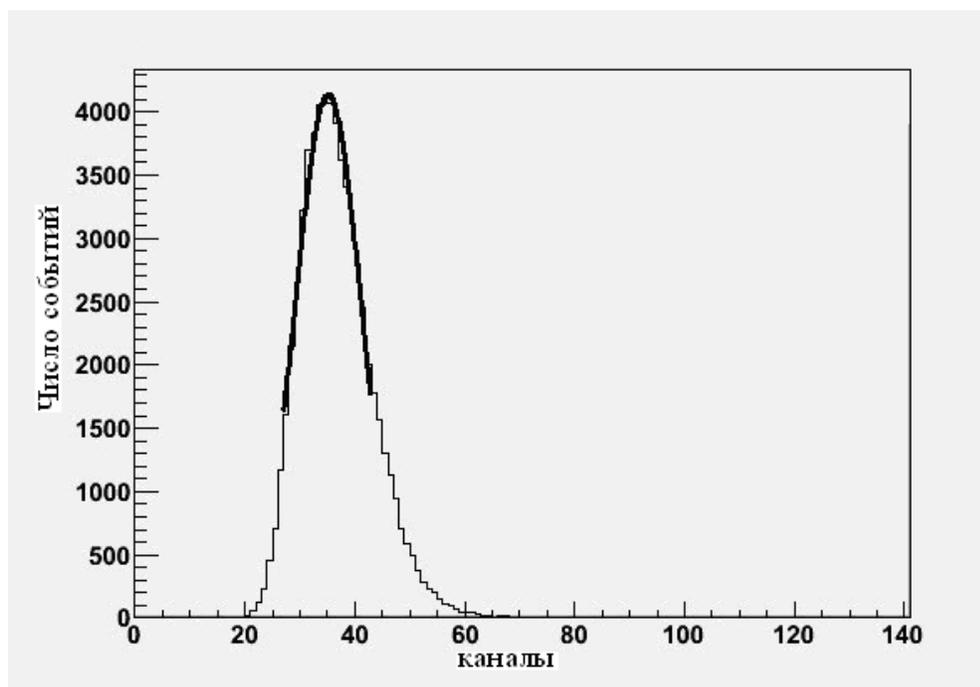


Рис. 2: Распределение амплитуды сигнала одного из ФЭУ. Линия – результат фитирования функцией нормального распределения.

и ВЦП. Считанная информация записывается в файл в двоичном формате.

2. Анализ экспериментальных данных

Анализ полученных данных был выполнен с использованием пакета для обработки и представления экспериментальных данных ROOT [6]. Типичное распределение амплитуды сигналы с одного из ФЭУ представлены на рис.2.

Для распределений амплитуд сигнала для каждого ФЭУ вычислялось значение наиболее вероятной амплитуды, для чего выполнялось фитирование распределения функцией нормального распределения. Полученная величина использовалась в дальнейшем для оценки свойств прототипа элемента годоскопа.

Длина затухания в пластическом сцинтилляторе вычислялась следующим образом. Для различного расположения радиоактивного источника (^{106}Ru вдоль пластического сцинтиллятора измерялось количество срабатываний ФЭУ, расположенных на левом и правом концах пластика. Зависимость числа срабатываний N от расстояния X между соответствующим краем пластического сцинтиллятора и положением радиоактивного источника аппроксимировалась функцией вида $N(X) = N_0 * \exp(-bX)$.

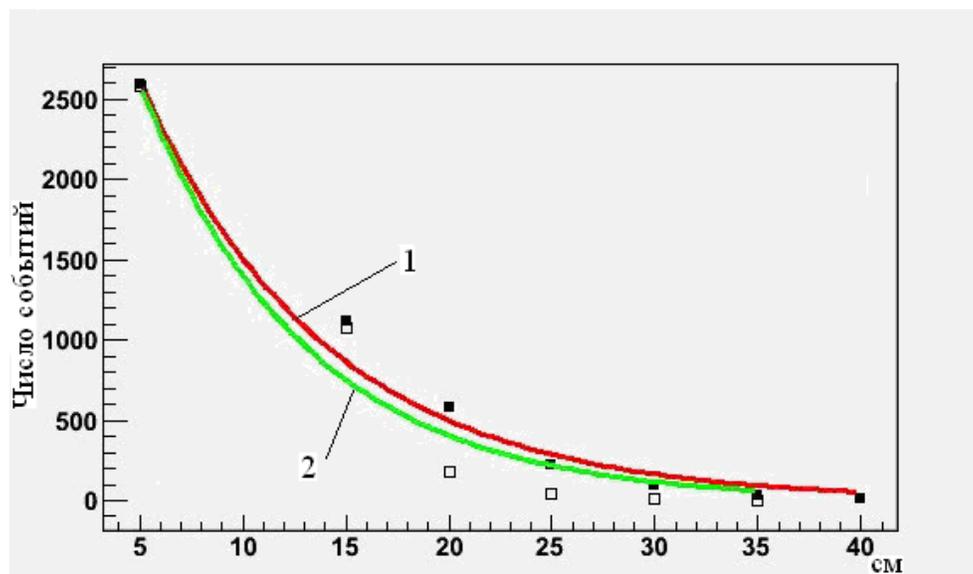


Рис. 3: Зависимость числа событий от расстояния между ФЭУ и радиоактивным источником, перемещаемым по сцинтилляционной пластине. Сплошными и открытыми квадратами обозначены данные, полученные левого и правого ФЭУ. Соответственно кривые 1 и 2 представляют собой аппроксимирующие функции.

Параметр фитирования b определяет длину затухания L как $L = 1/b$. По данным параметра b были получены значения $L_1 = 9.0498 \pm 0.0003$ см и $L_2 = 8.0841 \pm 0.0004$ см для левого и правого ФЭУ соответственно.

Аналогичный анализ был выполнен для космических мюонов. Полученные значения составляют $L_1 = 9.2 \pm 0.3$ см, $L_2 = 8.3 \pm 0.2$ см, что в пределах достигнутой точности совпадает со значениями, полученными для радиоактивного источника.

Оптическая однородность пластики определялась из анализа распределений по амплитудам сигнала для обоих ФЭУ. Для каждого положения центрального счетчика (радиоактивного источника) вычислялись максимумы распределения величин $f_1 = \frac{1}{2}(adc_1 + adc_2)$ и $f_2 = \sqrt{adc_1 * adc_2}$, где adc_1 и adc_2 – распределения амплитуд сигналов для правого и левого ФЭУ. Полученные данные аппроксимировались функцией вида $a + b * x$.

Из рис.4 видна приближенная независимость величин f_1 и f_2 от положения радиоактивного источника на протяжении всей длины сцинтилляционной пластины. Это свидетельствует об однородном распространении светового сигнала в пластине.

Значение средней скорости v распространения света в сцинтилляторе вычислялось следующим образом: для каждого положения радиоактивного ис-

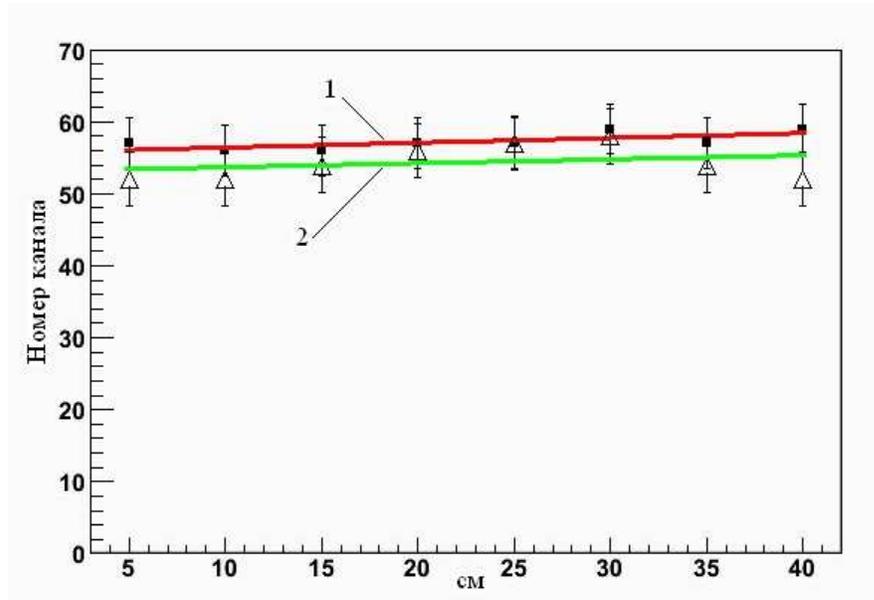


Рис. 4: Квадраты и треугольники соответствуют величинам f_1 и f_2 . Кривые 1 и 2 — результаты фитирования функцией вида $a + b * x$ для величин f_1 и f_2 соответственно.

точника вычислялась экспериментальная разница времен прихода сигнала на вход левого и правого ФЭУ. Полученная зависимость аппроксимировалась функцией вида $a + b * x$.

Скорость распространения светового сигнала v связана с параметром b формулой $v = 47C_{y,y}$ нс/ b , откуда было получено значение $v = 9.1 \pm 0.3$ см/нс. Эта величина совпадает со значением скорости распространения светового сигнала в сцинтилляторе, полученного на космических мюонах, которая составляет $v = 9.0 \pm 0.3$ см/нс.

Временное разрешение определялось из анализа распределений tdc_1 , tdc_2 и $tdc_1 - tdc_2$. Из этих распределений были получены временные разрешения для левого и правого ФЭУ, а также для стартового счетчика, которые составляют соответственно $\sigma_1 = 183 \pm 23$ пс, $\sigma_2 = 179 \pm 14$ пс и $\sigma_0 = 202 \pm 14$ пс. Координатное разрешение составляет $\delta x = 1.1$ см.

Заключение

Результаты исследований могут быть сформулированы следующим образом.

1. Изготовлен прототип элемента годоскопа сцинтилляционных счетчиков на базе ФЭУ-85 который является элементом время-пролётной системы для изучения структуры легких ядер.

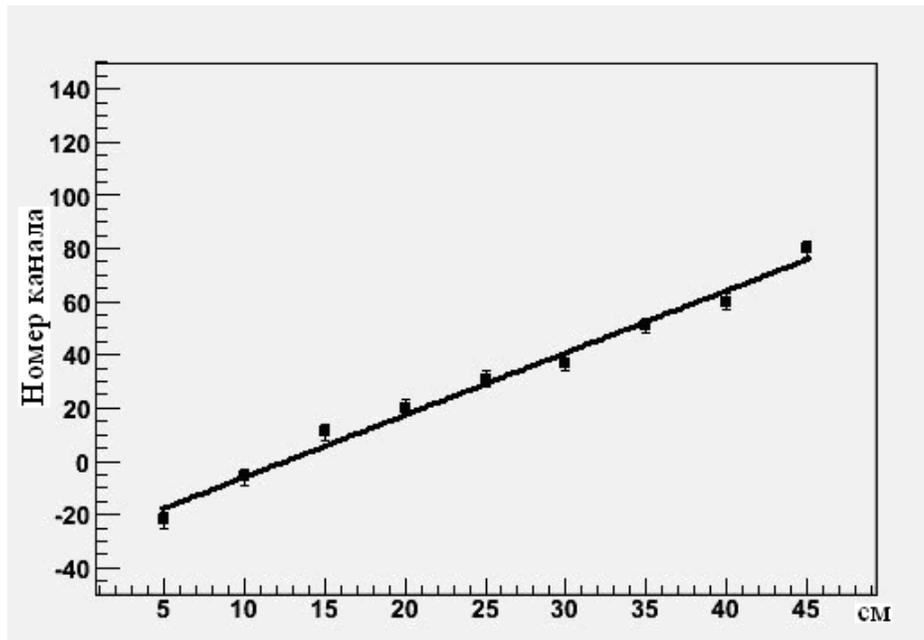


Рис. 5: Распределение значений $(tdc_1 - tdc_2)/2$ в зависимости от местоположения радиоактивного источника.

2. Исследованы свойства прототипа как с помощью радиоактивного источника, так и используя космические мюоны. Получены значения длины затухания и скорости распространения света в пластическом сцинтилляторе, предназначенном для изготовления годоскопа. Показана оптическая однородность используемого образца сцинтиляционной пластины. Получены величины временного и координатного разрешения элемента годоскопа.

3. Полученные оптические, временные и амплитудные характеристики прототипа элемента годоскопа удовлетворяют требованиям, предъявляемым к время-пролетной системе установки для изучения структуры легких на Ну-клотроне-М.

Следующим этапом будет изготовление годоскопа сцинтилляционных счетчиков на базе ФЭУ-85 с цифровым делителем напряжения [7].

Исследования частично поддержаны РФФИ (грант 07-02-00102а).

Литература

1. Ladygin V.P. et al., Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics // Proc. of the XIX Intern. Baldin Seminar on High Energy Physics Problems - Dubna: JINR, 2008. – XII;2. – P.67-72.
2. Uesaka T. et al. // Nucl.Instr.Meth. in Phys.Res.– 1998.– A402.– P.212.

3. Uesaka T. et al. // Phys.Lett. 2002. – B533.– P.1.
4. Аммосов В.В. // Препринт ОИЯИ Р13-88-779. – Дубна : ОИЯИ,1988.–7с.
5. Isupov A.Yu. // Czech.J.Phys.– 2005.– 55,A407.
6. [http: // root.cern.ru](http://root.cern.ru)
7. [http: // hvsys.dubna.ru](http://hvsys.dubna.ru)

DEVELOPMENT OF THE TIME-OF-FLIGHT SYSTEM FOR EXPERIMENTS ON THE STUDY OF THE LIGHT NUCLEI STRUCTURE OF NUKLOTRON-M

**A.A.Terekhin^{1,2)}, I.E.Vnukov¹⁾, V.P.Ladygin²⁾, S.M.Piyadin²⁾,
S.G. Reznikov²⁾, A.N.Hrenov²⁾**

¹⁾Belgorod State University, Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia e-mail: taa@uc.jinr.ru

²⁾Joint Institute of Nuclear Researches, Zholio-Kjuri St., 6, Dubna, 141980, Russia

The testing results of the scintillation hodoscope element prototype with radioactive source and cosmic muons are presented. It is demonstrated that optical, timing and amplitude parameters of the present hodoscope satisfy to requirements of the time-of-flight system of the setup on the extracted beam at accelerator Nuclotron-M (JINR) where the light nuclei structure are investigated.

Key words: time-of-flight system, scintillation hodoscope, ionizing losses.

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА. ФЛУКТУАЦИОННЫЙ ПОДХОД

Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А.

Белгородский государственный университет,

Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Рассматривается одномерная задача радиационно-кондуктивного теплообмена в диэлектрической среде с ковалентной химической связью. На основе представления об обмене теплом посредством электромагнитного поля, которое порождается тепловыми флуктуациями электрической поляризации среды, вычисляется поток энергии флуктуационного поля в виде функционала от её локальной температуры, что позволяет сформулировать замкнутое эволюционное уравнение переноса тепла в среде.

Ключевые слова: радиационно-кондуктивный теплообмен, электрическая поляризация, флуктуации, гауссовское случайное поле, уравнения Максвелла, закон Стефана-Больцмана, поток энергии, распределение температуры.

1. Введение. Перенос тепла в твердотельной среде осуществляется двумя механизмами – посредством теплопроводности и электромагнитным излучением, порождаемым возбуждениями состояния среды. В соответствии с этим эволюционное уравнение для распределения температуры $T(\mathbf{r}, t)$ в момент времени t записывается в виде [1]

$$\rho\lambda\dot{T}(\mathbf{r}, t) = \kappa\Delta T(\mathbf{r}, t) - (\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)), \quad (1)$$

где $\kappa > 0$ – коэффициент теплопроводности среды, ρ – плотность среды и λ – её теплоёмкость. Далее, для простоты мы будем считать эти величины постоянными, не зависящими от температуры. Первое слагаемое в правой части (1) связано с теплопроводностью, а векторное поле $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ представляет собой поток энергии электромагнитного излучения, переносящего тепло. Дивергенция $-(\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{r}, t))$ умноженная на малый объём ΔV пространственной области среды, сосредоточенной около точки \mathbf{r} , равна части этого потока, которая тратится на нагрев области в момент времени t . Центральным для постановки задач радиационно-кондуктивного теплообмена является вычисление поля $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ в виде функционала $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{S}[T(\mathbf{r}, t)]$ от распределения температуры, при наличии которого уравнение (1) для $T(\mathbf{r}, t)$ становится самосогласованным. Обычно, поток энергии $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ находится на основе феноменологических соображений об интенсивности переноса энергии излучения [1], [2]. В

такого рода рассуждениях не используется само электромагнитное поле, осуществляющее перенос тепла. Это положение является неудовлетворительным с теоретической точки зрения. Оно связано с отсутствием последовательной микроскопической теории радиационно-кондуктивного теплообмена, которая должна быть основана на квантовой теории излучения и поглощения атомами среды электромагнитного излучения (фотонов) и, следовательно, носить статистический характер.

Для выявления сложностей, с которыми сталкивается построение микроскопической теории радиационно-кондуктивного теплообмена, рассмотрим это явление с качественной точки зрения. Наше рассмотрение мы ограничим тем случаем, когда среда является диэлектрической и её электромагнитные свойства характеризуются динамической диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, зависящей от частоты излучения ω и постоянной магнитной проницаемостью μ . Будем считать, что среда имеет решёточную кристаллическую структуру, хотя приводимые ниже рассуждения вполне применимы и для аморфной упругой среды. Для определённости мы будем считать, что она состоит из электрически нейтральных атомов. В то же время качественная физическая картина переноса тепла излучением не претерпевает существенных изменений, если в узлах решётки находятся молекулы с ковалентной связью либо ионы, связанные между собой электровалентным образом.

При достаточно большой температуре, то есть при достаточно большой амплитуде неупорядоченных колебаний решётки, последние приводят к деформации электронных оболочек каждого из атомов. Это означает, что атомы могут переходить в энергетически возбуждённые состояния. Релаксация каждого из возбуждённых состояний в исходное приводит к излучению фотона с частотой, пропорциональной разности соответствующих энергетических уровней. При этом атом получает импульс отдачи, который изменяет его динамическое состояние. Излученный фотон распространяется в среде вплоть до поглощения его другим атомом среды, который, таким образом, становится возбуждённым. При этом фотон передаёт атому свой импульс, который может приводить к его раскачке или торможению так же, как и при излучении фотона. Через некоторое время возбуждённый атом переизлучает поглощённый фотон, хотя, возможно, с меньшей частотой. После чего процесс распространения излучения продолжается. В связи с наличием событий отдачи при излучении и поглощении фотонов можно говорить, что существует механизм перекачки энергии как из фотонной подсистемы в фононную, так и обратно.

При наличии градиента температуры в среде переизлучение фотонов атомами в различных областях пространства среды должно носить нескомпенсированный характер. Атомы в областях с меньшей температурой поглощают больше энергии фотонов и, соответственно, меньше её излучают по сравнению с областями, где температура выше. Это положение является, как будет разъяснено ниже, следствием сильной связанности атомов решётки друг с другом. Энергия, равная разности между энергиями поглощённых и излучённых фотонов, переходит в кинетическую энергию неупорядоченных колебаний атомов решётки около их положения равновесия. Среднее же значение этой энергии представляет собой температуру той части среды, которая сосредоточена в рассматриваемом элементе объёма.

Таким образом, перекачка энергии электромагнитного поля в кинетическую энергию колебаний решётки связана с наличием в гамильтониане системы атомов решётки эффективного электроупругого взаимодействия. Причём, оно обязано присутствовать даже в том случае, когда атомы электронейтральны. При наличии такого взаимодействия последовательное вычисление величины $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ сводится к составлению и исследованию кинетического уравнения для фотон-фононной системы. Такой подход к описанию радиационно-кондуктивного теплообмена уже на первоначальном шаге, то есть при составлении эффективного гамильтониана взаимодействия, обладающего указанными выше свойствами, оказывается сложным для реализации. Это связано с тем, что система атомов должна быть сильно связанной. В противном случае, как это имеет место в газовой среде, поглощение фотона любым из атомов с последующим его излучением можно рассматривать как упругое взаимодействие с этим атомом. Такое взаимодействие не приводит к преимущественной перекачке энергии фотонов в тепловую энергию решётки. Неупругость же взаимодействия происходит вследствие того, что все атомы сильно связаны в единую систему. Так как между поглощением и излучением каждого фотона проходит некоторое время задержки, то за счёт наличия сильной связи часть поглощённой атомом энергии фотона успевает перераспределиться между другими атомами из ближайшего его окружения. Поэтому атом после переизлучения фотона не возвращается в исходное энергетическое состояние. Указанный механизм перекачки энергии излучения в тепловые колебания решётки, благодаря которому в твёрдых телах возможен радиационно-кондуктивный теплообмен, довольно сложно описать на языке эффективного гамильтониана. Заметим также, что явный вид такого гамильтониана должен зависеть от природы среды, так как в случае отсут-

ствия электронейтральности атомов решётки либо наличия у них собственного магнитного момента процессы их взаимодействия с электромагнитным излучением усложняются.

В связи со сложностями построения микроскопической теории радиационно-кондуктивного теплообмена естественно попробовать развить более простой полуфеноменологический подход к теоретическому описанию этого процесса. В рамках такого подхода желательно преодолеть главный недостаток существующей теории – ввести в описание радиационно-кондуктивного теплообмена электромагнитное поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла, но при этом не конкретизировать микроскопический механизм превращения его энергии в тепловую энергию неупорядоченных колебаний решётки. В рамках такой теории желательно отказаться от квантового описания излучения вследствие возникновения излишних усложнений, так как само явление радиационно-кондуктивного теплообмена не является квантовым эффектом. В настоящей статье даётся пример такого построения. Предлагаемая нами математическая модель формулируется в приближении сплошной среды и основана на представлении о флуктуациях $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ дипольного электрического момента совокупности атомов среды в элементе объёма, сосредоточенного около пространственной точки \mathbf{r} в момент времени t при поглощении и испускании ими фотонов. При этом квантовая природа излучения электромагнитного поля атомами среды в модели проявляется только лишь в том, что эти флуктуации носят случайный характер, то есть $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ представляет собой с математической точки зрения случайный процесс. При конкретном вычислении потока энергии мы для простоты ограничимся рассмотрением одномерной задачи, что позволит нам провести все вычисления явно.

2. Конструкция модели. Мы исходим из уравнений Максвелла для электромагнитного поля в *сплошной* среде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + [\nabla, \mathbf{E}] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - [\nabla, \mathbf{H}] = 0, \quad (3)$$

$$(\nabla, \mathbf{D}) = 0, \quad (\nabla, \mathbf{B}) = 0, \quad (4)$$

в которых, по основному замыслу нашей теории радиационно-кондуктивного теплообмена, должны быть учтены случайные флуктуации электродинамических свойств среды, связанные с процессами излучения и поглощения переносящего тепло электромагнитного поля. Поле магнитной индукции \mathbf{B} в

уравнениях (1),(3) имеет вид $\mathbf{V} = \mu\mathbf{H}$, где \mathbf{H} – напряжённость магнитного поля, распространяющегося в разогретой среде, наведенного излучением составляющих её атомов. Так как среда представляет собой диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, и атомы электронейтральны (то же самое имеет место, если в узлах решётки находятся электронейтральные молекулы с ковалентной химической связью), то в уравнения (2-4) не включены флуктуации макроскопических электрических токов и зарядов. При построении связи между полем электрической индукции \mathbf{D} в среде и напряжённостью электрического поля \mathbf{E} мы учтём наличие флуктуаций свойств среды. Мы считаем, что в результате процессов излучения и поглощения флуктуационным образом в каждой пространственно-временной точке (\mathbf{r}, t) изменяется электрическая поляризация среды. Мы запишем её в виде суммы двух слагаемых $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$. Первое слагаемое представляет собой поляризацию, индуцированную электрической напряжённостью $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, распространяющегося в среде излучения. Если представить напряжённость $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и поляризацию $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ в виде разложений в интегралы Фурье

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (5)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6)$$

то функции $\bar{\mathbf{P}}$ и $\bar{\mathbf{E}}$ связаны соотношением $\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \chi(\omega)\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$, где $\chi(\omega) = (\varepsilon(\omega) - 1)/4\pi$ – динамическая электрическая восприимчивость среды. Второе слагаемое $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ связано с существованием "спонтанных", не зависящих от $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ случайных флуктуаций поляризации среды, возникающих вследствие процессов поглощения и излучения фотонов каждым из атомов. Это слагаемое представляет собой случайное поле, неоднородное по пространству и статистически независимое в каждой пространственной точке \mathbf{r} . Его неоднородность связана с зависимостью средней амплитуды флуктуаций от температуры и с наличием пространственного распределения температуры в среде. Оно описывает независимые акты поглощения и излучения фотонов каждым из атомов. Поле $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ будем считать гауссовским ввиду малости флуктуаций. Кроме того, не ограничивая общности, среднее значение флуктуаций будем считать равным нулю. Поэтому $\langle \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$, где угловые скобки здесь и далее обозначают математическое ожидание по случайным реализациям

соответствующей случайной функции. Тогда статистические свойства этого поля полностью определяются парным коррелятором $\langle \tilde{P}_j(\mathbf{r}, t) \tilde{P}_{j'}(\mathbf{r}', t') \rangle$, $j, j' = 1, 2, 3$ для каждой пары пространственно-временных точек (\mathbf{r}, t) и (\mathbf{r}', t') . Ввиду пространственной независимости и изотропии флуктуаций этот коррелятор пропорционален $\delta_{jj'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, $j, j' = 1, 2, 3$. Будем считать, что зависимость поля $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ от пространственной координаты полностью определяется мгновенным распределением температуры $T(\mathbf{r}, t)$ в среде. Зависимость же этого поля от времени будем считать "почти" стационарной, где понятие стационарности понимается в смысле математической теории случайных процессов. Медленные отклонения от "точной" стационарности определяются зависимостью температуры $T(\mathbf{r}, t)$ от пространственной точки \mathbf{r} и от времени t , так как распределение $T(\mathbf{r}, t)$ температуры удовлетворяет уравнению (1). Для задания поля $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ в каждой отдельной пространственной точке \mathbf{r} с учётом указанных свойств представим его, по аналогии с (5),(6), в виде разложения в интеграл Фурье

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) d\omega. \quad (7)$$

Если считать случайную функцию $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$ гауссовской с нулевым средним $\langle \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) \rangle = 0$, то линейность преобразования (7) гарантирует (см., например, [4]) гауссовость случайного поля $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$, а статистическая независимость функции $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$ при изменении пространственной точки \mathbf{r} влечёт аналогичное свойство у поля $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$. Кроме того, равенство $\langle \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) \rangle = 0$ влечёт равенство $\langle \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$. Таким образом, случайное поле $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ ввиду линейности преобразования (7) полностью определяется корреляционными свойствами случайной функции $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$. Определим эту функцию следующим образом. Будем считать, что случайные реализации функции $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$ медленно зависят от времени в связи с изменением температуры $T(\mathbf{r}, t)$ в пространственно-временной точке (\mathbf{r}, t) , и положим

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = U(T(\mathbf{r}, t), \omega) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, \omega), \quad (8)$$

где *амплитуда* $U(T, \omega)$ является неслучайной функцией температуры T и частоты ω . Сейчас мы не будем конкретизировать эту функцию. Существенно только то, что она при каждом фиксированном значении T обладает свой-

СТВОМ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |U(T, \omega)|^2 d\omega < \infty, \quad (9)$$

что означает конечность спектральной плотности излучаемой энергии. Положим случайную вектор-функцию $\varphi(\mathbf{r}, \omega)$ гауссовской с нулевым средним

$$\langle \varphi(\mathbf{r}, \omega) \rangle = 0$$

и статистически независимой по \mathbf{r} и по ω , со статистически независимыми компонентами $\varphi_j(\mathbf{r}, \omega)$, $j = 1, 2, 3$, что ввиду линейности преобразования (8) влечёт гауссовость случайной функции $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$ и равенство нулю её среднего значения. Свойство же независимости значений случайной функции $\varphi_j(\mathbf{r}, \omega)$ в различных точках (\mathbf{r}, ω) для компонент с различными номерами $j = 1, 2, 3$ выражается формулой для парного коррелятора

$$\langle \varphi_j(\mathbf{r}, \omega) \varphi_{j'}^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle = \frac{1}{2\pi} \delta_{jj'} \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (10)$$

который показывает, что случайный процесс

$$\phi_j(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \varphi_j(\mathbf{r}, \omega) d\omega, \quad j = 1, 2, 3 \quad (11)$$

в каждой пространственной точке \mathbf{r} представляет собой белый шум с единичной интенсивностью по временной переменной t , и все элементы этого набора шумов, занумерованные переменными \mathbf{r} и j , являются статистически независимыми, то есть имеют место соотношения

$$\langle \phi_j(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad \langle \phi_j(\mathbf{r}, t) \phi_{j'}(\mathbf{r}', t') \rangle = \delta_{jj'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad j, j' = 1, 2, 3.$$

Заметим, что ввиду выбора случайного процесса $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ в форме (7), (8) вместе со свойством (9), его зависимость от времени носит двоякий характер. Она складывается из медленной зависимости, связанной с изменением распределения температуры в среде, и быстрой зависимости, связанной с процессами поглощения и излучения электромагнитного поля элементом объёма среды в каждой пространственной точке \mathbf{r} . Зависимость от ω функции $U(T, \omega)$, в частности свойство (9), приводит к тому, что временной коррелятор случайного процесса $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ не пропорционален $\delta(t - t')$. Это отражает тот факт, что в нашей модели существенен учёт корреляций на коротких временах, а

на длинных – электромагнитные волны практически не принимают участия в переносе тепла. Посредством разложения в интеграл Фурье

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

введём спектральную плотность $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega)$ электрической индукции. Используя известную (см., например, [5]) связь между этой спектральной плотностью и спектральными плотностями напряжённости $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ и электрической поляризации, равной в нашем случае $\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$, запишем

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + 4\pi(\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)) = \varepsilon(\omega)\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + 4\pi U(T, \omega)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, \omega). \quad (12)$$

Вид спектральной плотности $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega)$ электрической индукции, даваемый формулой (12) совместно с уравнениями (2 - 4), составляет основу нашей теории.

Так как в определении стохастического возмущения $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ явным образом введено два масштаба времени, то мы будем решать уравнения (2 - 4), считая, что зависимость от времени t функций \mathbf{E} , \mathbf{H} также двухмасштабна в указанном смысле. Она состоит из быстрой зависимости, связанной с изменением фазы электромагнитного поля, переносящего излучение, и медленной зависимости его амплитуды от \mathbf{r} и t , связанной с её функциональной зависимостью от значения распределения температуры в данной пространственно-временной точке (\mathbf{r}, t) . Нашей целью является вычисление плотности потока энергии

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}], \quad (13)$$

усреднённой по случайным реализациям процесса $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ и по быстрой временной зависимости.

Ввиду двухмасштабности временной зависимости процесса $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$, решение системы уравнений (2 - 4), (11) – поля \mathbf{E} и \mathbf{H} , как и флуктуации поляризации $\tilde{\mathbf{P}}$, будем искать в виде следующих разложений в "интегралы Фурье"

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) d\omega, \quad (14)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) d\omega, \quad (15)$$

где спектральные плотности $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ и $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)$ полей являются функционалами распределения температуры $T(\mathbf{r}, t)$ и, следовательно, медленно изменяющимися функциями от t через посредство зависимости от времени этого распределения.

Подставляя разложения (7), (14), (15) в исследуемую систему уравнений, получаем для медленно зависящих от времени амплитуд $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$, $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)$, $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$ систему уравнений:

$$\frac{i\mu\omega}{c} \bar{\mathbf{H}} + [\nabla, \bar{\mathbf{E}}] = 0, \quad (16)$$

$$\frac{i\omega}{c} (\varepsilon(\omega)\bar{\mathbf{E}} + 4\pi U(T, \omega)\boldsymbol{\varphi}) - [\nabla, \bar{\mathbf{H}}] = 0, \quad (17)$$

$$(\nabla, \varepsilon(\omega)\bar{\mathbf{E}} + 4\pi U(T, \omega)\boldsymbol{\varphi}) = 0, \quad (\nabla, \bar{\mathbf{H}}) = 0. \quad (18)$$

Заметим, что первое из уравнений (17) указывает на возможность появления продольной составляющей напряжённости электрического поля, малой в меру малости флуктуаций поляризации. Второе же уравнение (18) выполняется тождественно вследствие (16).

Исключая из уравнений (16), (17) магнитную составляющую

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{ic}{\mu\omega} [\nabla, \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)], \quad (19)$$

получим уравнение для электрической составляющей в виде

$$\bar{k}^2(\omega)\bar{\mathbf{E}} + \Delta\bar{\mathbf{E}} = -C\omega^2 U\boldsymbol{\varphi} - \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)} U(T, \omega)\nabla(\nabla, \boldsymbol{\varphi}), \quad (20)$$

где введены обозначения

$$\bar{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu\varepsilon(\omega), \quad C = \frac{4\pi\mu}{c^2}. \quad (21)$$

В дальнейшем нас будет интересовать только асимптотика решения $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$. По этой причине при решении уравнения (20) ввиду наличия у первого слагаемого в правой части множителя ω^2 вторым слагаемым в правой части можно пренебречь.

Заметим теперь, что динамическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ должна быть комплексной, чтобы имело место затухание электрической составляющей $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ электромагнитной волны при изменении t в отсутствие возмущения в правой

части (20). Так как $\varepsilon(\omega) \rightarrow \varepsilon$ при $\omega \rightarrow \infty$ с $\varepsilon > 0$, то, ограничившись первыми двумя членами разложения

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon - i\frac{\nu}{\omega} + o(\omega^{-1})$$

с положительным коэффициентом затухания $\nu > 0$, преобразуем уравнение (20) к виду

$$\Delta \bar{\mathbf{E}} + (k_*^2 - ik_*\gamma)\bar{\mathbf{E}} = -C\omega^2 U \boldsymbol{\varphi}, \quad (22)$$

где

$$k_* = \frac{\omega}{c}(\varepsilon\mu)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{\nu}{c} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2}. \quad (23)$$

Введём в рассмотрение спектральную плотность $\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \omega)$ потока энергии $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ так, что

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \omega) d\omega. \quad (24)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] dt = \\ &= \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega'), \bar{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}, \omega' - \omega)] d\omega'. \end{aligned}$$

В этой формуле величины $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$, $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)$ и, следовательно, плотность потока энергии являются случайными, так как они представляют собой решения стохастического дифференциального уравнения. Физически наблюдаемой величиной, которая должна определять радиационно-кондуктивный теплообмен, является математическое ожидание

$$\langle \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \omega) \rangle = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle [\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega'), \bar{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}, \omega' - \omega)] \rangle d\omega'. \quad (25)$$

3. Одномерная задача. Будем далее интересоваться одномерной задачей, когда поля \mathbf{E} и \mathbf{H} являются только функциями одной координаты x и времени t . В этом случае поле $\mathbf{E}(x, t)$ можно сделать поперечным, выбрав

зависящую от x и t случайную функцию $\varphi(x, t)$ так, чтобы у неё отсутствовала первая компонента. Тогда тождественно $(\nabla, \varphi) = 0$. При этом из условия $(\nabla, \bar{\mathbf{E}}) = 0$ следует, что $d\bar{E}_1/dx = 0$, и можно, не ограничивая общности, положить $\bar{E}_1 = 0$. Уравнение (22) в одномерном случае превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\bar{\mathbf{E}}}{dx^2} + \bar{k}^2\bar{\mathbf{E}} = -C\omega^2U\varphi \quad (26)$$

для вектор-функции, у которой отличны от нуля только компоненты \bar{E}_2 и \bar{E}_3 .

Будем решать задачу радиационно-кондуктивного теплообмена на отрезке $[-L/2, L/2]$ длиной L , заполненном средой. Вне отрезка находится вакуум, для которого $\varepsilon(\omega) = \mu = 1$, $U \equiv 0$, поэтому уравнение (26) переходит в однородное:

$$\frac{d^2\bar{\mathbf{E}}}{dx^2} + k^2\bar{\mathbf{E}} = 0, \quad (27)$$

где $k = \omega/c$.

Уравнения (26) и (27) нужно решать совместно с граничными условиями непрерывности решения $\bar{\mathbf{E}}(x, \omega)$ и его производной по x на границах отрезка. Последнее гарантирует выполнимость физического требования непрерывности на границах магнитного поля $\bar{\mathbf{H}}(x, \omega)$, так как $\bar{\mathbf{H}}(x, \omega) = (i/k)d\bar{\mathbf{E}}/dx$. При этом вне среды нужно выбрать решение в виде расходящихся монохроматических волн с частотой ω , уходящих от отрезка $[-L/2, L/2]$ среды. Таким образом, вне среды решение имеет вид $\bar{\mathbf{E}}(x, \omega) = \mathbf{E}_{+,0}e^{-ik(x-L/2)}$ справа от отрезка при $x > L/2$, и слева от него $-\bar{\mathbf{E}}(x, \omega) = \mathbf{E}_{-,0}e^{ik(x+L/2)}$ при $x < -L/2$, где $\mathbf{E}_{\pm,0}$ – постоянные двухкомпонентные векторы, перпендикулярные 1 -й оси. Тогда решение $\bar{\mathbf{E}}(x, \omega)$ внутри отрезка $[-L/2, L/2]$ должно удовлетворять условиям

$$\bar{\mathbf{E}}(\pm L/2, \omega) = \mathbf{E}_{\pm,0}, \quad \bar{\mathbf{E}}'(\pm L/2, \omega) = \mp ik\mathbf{E}_{\pm,0}, \quad (28)$$

где штрихом обозначена производная по x . Условия (28) приводят к следующим смешанным условиям краевой задачи для уравнения (22):

$$\bar{\mathbf{E}}'(\pm L/2, \omega) = \mp ik\bar{\mathbf{E}}(\pm L/2, \omega).$$

Так как $E_1 = H_1 = 0$, то в одномерной задаче отлична от нуля только первая компонента $S_1 \equiv S$ плотности потока энергии, для которой средняя спектральная плотность определяется интегралом

$$\langle \bar{S}(x, \omega) \rangle = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle [\bar{\mathbf{E}}(x, \omega'), \bar{\mathbf{H}}^*(x, \omega' - \omega)]_1 \rangle d\omega'. \quad (29)$$

4. Решение стохастической краевой задачи. Введём функцию Грина одномерной краевой задачи на отрезке $[-L/2, L/2]$ для уравнения

$$G''(x, y, \omega) + \bar{k}^2 G(x, y, \omega) = \delta(x - y) \quad (30)$$

с граничными условиями

$$G'(\pm L/2, y, \omega) = \mp ikG(\pm L/2, y, \omega). \quad (31)$$

Решение этой краевой задачи имеет вид

$$G(x, y, \omega) = \frac{i}{2\bar{k}} \left(1 - \varkappa^2 e^{-2i\bar{k}L}\right)^{-1} \times \\ \times \left[e^{-i\bar{k}|x-y|} + 2\varkappa e^{-i\bar{k}L} \cos[\bar{k}(x+y)] + \varkappa^2 e^{-2i\bar{k}L} e^{i\bar{k}|y-x|} \right], \quad (32)$$

где введён коэффициент отражения

$$\varkappa = \frac{\bar{k} - k}{\bar{k} + k}.$$

На основании функции Грина (32) получается выражение для фурье-компонент электрического и магнитного полей

$$\bar{\mathbf{E}}(x, \omega) = -C\omega^2 \int_{-L/2}^{L/2} G(x, y, \omega) U(T(y, t), \omega) \boldsymbol{\varphi}(y, \omega) dy, \quad (33)$$

$$\bar{H}_j(x, \omega) = -\frac{ic}{\mu\omega} \epsilon_{1jl} \bar{E}'_l(x, \omega), \quad j = 2, 3, \quad (34)$$

где ϵ_{jlm} – полностью антисимметричный символ Леви-Чивита и штрихом обозначена производная по x .

5. Вычисление потока энергии. Так как $\epsilon_{1jl}\epsilon_{1lm} = \delta_{1m}\delta_{1j} - 1$ и $\bar{E}_1(x, \omega') = \bar{E}_1(x, \omega' - \omega) = 0$, то, используя (34),

$$[\bar{\mathbf{E}}(x, \omega'), \bar{\mathbf{H}}^*(x, \omega' - \omega)]_1 = -\frac{ic}{\mu(\omega' - \omega)} \bar{E}_j(x, \omega') \bar{E}^*{}'_j(x, \omega' - \omega).$$

Подставив результат этого вычисления в (25), находим

$$\langle \bar{S}(x, \omega) \rangle = \frac{c^2}{4i\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \bar{E}_j(x, \omega') \bar{E}^*{}'_j(x, \omega' - \omega) \rangle \frac{d\omega'}{\omega' - \omega}$$

или, используя найденное выражение (33) для компонент электрического поля:

$$\langle \bar{S}(x, \omega) \rangle = C^2 \frac{c^2}{4i\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^2 (\omega' - \omega) \int_{-L/2}^{L/2} G(x, y, \omega') U(T(y, t), \omega') \times \\ \times \int_{-L/2}^{L/2} G^{*'}(x, y', \omega' - \omega) U^*(T(y', t), \omega' - \omega) \langle \varphi_j(y, \omega') \varphi_j^*(x, \omega' - \omega) \rangle dy' dy d\omega' .$$

На основании формулы (10) для коррелятора в подынтегральном выражении и формулы для постоянной C в (21) произведём преобразования

$$\langle \bar{S}(x, \omega) \rangle = -\delta(\omega) \frac{4i\mu}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^3 \int_{-L/2}^{L/2} G(x, y, \omega') G^{*'}(x, y', \omega') |U(T(y, t), \omega')|^2 dy d\omega' . \quad (35)$$

Так как поле $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ вещественное, то его фурье-образ обладает свойством $\bar{\mathbf{S}}^*(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, -\omega)$. Принимая это во внимание, а также чётность относительно ω полученного выражения (35), заключаем, что функция $\langle \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \omega) \rangle$ вещественна. Тогда, применяя к правой части (35) операцию $\text{Re}(\cdot)$, получаем следующую формулу для среднего значения фурье-образа потока энергии

$$\langle \bar{S}(x, \omega) \rangle = \delta(\omega) \frac{4\mu}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^3 \int_{-L/2}^{L/2} |U(T(y, t), \omega')|^2 \text{Im}[G(x, y, \omega') G^{*'}(x, y, \omega')] dy d\omega' . \quad (36)$$

Воспользуемся общим свойством функции Грина $G(x, y, \omega)$ и найдём формулу для дивергенции (в данном случае производной по x) этого потока. Так как на основании (30) функция $G^*(x, y, \omega)$ удовлетворяет уравнению

$$G^{*''}(x, y, \omega) + \bar{k}^{*2} G^*(x, y, \omega) = \delta(x - y) , \quad (37)$$

то, умножив его на $G(x, y, \omega)$ и вычтя из него уравнение (30), умноженное на $G^*(x, y, \omega)$, получим

$$\frac{d}{dx} \text{Im}[G(x, y, \omega) G^{*'}(x, y, \omega)] = \text{Im}[\bar{k}^2] |G(x, y, \omega)|^2 + \delta(x - y) \text{Im}G(x, x, \omega) . \quad (38)$$

Продифференцировав по x обе части формулы (36) и применив формулу (38), находим выражение для дивергенции фурье-образа потока энергии

$$\langle (\nabla, \bar{\mathbf{S}}(x, \omega)) \rangle = -\delta(\omega) \frac{4\mu}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^3 \left[\frac{\gamma n}{c} \omega' \int_{-L/2}^{L/2} |U(T(y, t), \omega')|^2 |G(x, y, \omega')|^2 dy - \right. \\ \left. - |U(T(x, t), \omega')|^2 \text{Im}G(x, x, \omega') \right] d\omega',$$

где мы воспользовались тем, что $\text{Im}[\bar{k}^2] = -\gamma k_*$ с величиной $k_* = \omega'(n/c)$, определяемой, согласно (23), частотой ω' и оптическим показателем среды $n = (\varepsilon\mu)^{1/2}$. Тот факт, что полученное выражение пропорционально $\delta(\omega)$, указывает на то, что дивергенция потока энергии, вычисляемая согласно (24), уже не содержит быстрой зависимости от времени,

$$\langle (\nabla, \mathbf{S}(x, t)) \rangle = -\frac{4\mu}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^3 \left[\frac{\gamma n}{c} \omega' \int_{-L/2}^{L/2} |U(T(y, t), \omega')|^2 |G(x, y, \omega')|^2 dy - \right. \\ \left. - |U(T(x, t), \omega')|^2 \text{Im}G(x, x, \omega') \right] d\omega'. \quad (39)$$

Так как $\bar{k}^2 \equiv \bar{k}^2(\omega) = k_*^2 - i\gamma k_*$ обладает свойством $\bar{k}^{2*}(\omega) = \bar{k}^2(-\omega)$, то уравнение (37) записывается в виде

$$G^{**}(x, y, \omega) + \bar{k}^2(-\omega)G^*(x, y, \omega) = \delta(x - y).$$

Кроме того, так как функция $k(\omega) = \omega/c \equiv k(\omega)$ обладает свойством $k(\omega) = -k(-\omega)$, то граничные условия, однозначно определяющие вместе с этим уравнением функцию $G^*(x, y, \omega)$, записываются как

$$G'^*(\pm L/2, y, \omega) = \mp k(-\omega)G^*(\pm L/2, y, \omega).$$

Сравнивая, соответственно, с уравнением (30) и с граничными условиями (31), находим, что $G^*(x, y, \omega) = G(x, y - \omega)$. Точно так же, так как случайные поля $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$, $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}, t)$ вещественны, соответствующие фурье-образы $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, \omega)$ удовлетворяют соотношениям $\tilde{\mathbf{P}}^*(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, -\omega)$, $\boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{r}, \omega) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, -\omega)$.

Тогда из формулы (8) следует, что функция $U(T, \omega)$ также обладает аналогичным свойством $U^*(T, \omega) = U(T, -\omega)$. Исходя из этого и аналогичного свойства функции Грина, можно утверждать, что подынтегральное выражение в (39) чётно относительно ω , поэтому

$$\langle (\nabla, \mathbf{S}(x, t)) \rangle = -\frac{8\mu}{c^2} \int_0^\infty \omega^3 \left[\frac{\gamma n}{c} \omega \int_{-L/2}^{L/2} |U(T(y, t), \omega)|^2 |G(x, y, \omega)|^2 dy - |U(T(x, t), \omega)|^2 \text{Im}G(x, x, \omega) \right] d\omega. \quad (40)$$

6. Случай высоких температур. Нашей следующей задачей является вывод из (40) более простой формулы для дивергенции потока энергии при радиационно-кондуктивном теплообмене в более конкретной физической ситуации. Механизм радиационно-кондуктивного теплообмена вносит существенный вклад в изменение распределения температуры в полупрозрачном диэлектрике в том случае, когда его характерная температура достаточно высока. В этом случае характерные частоты излучаемых атомами фотонов должны быть такими, чтобы соответствующие им энергии были порядка порядка этой температуры, выраженной в энергетических единицах. Температура, равная средней энергии, которая соответствует этой частоте $\approx 2 \cdot 10^{14} \text{с}^{-1}$, имеет порядок 10^3К , т.е. сравнима с температурой плавления вещества диэлектрика.

Естественно связать величину $|U(T, \omega)|^2$ со средней энергией излучаемых фотонов частотой ω . Так как физическая размерность фурье-образа $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$ электрической поляризации равна эрг/см^{3/2}·с, а размерность величины $\varphi(\mathbf{r}, \omega)$ равна с^{1/2}/см^{3/2}, то физическая размерность величины $|U(T, \omega)|^2$ имеет размерность действия эрг·с. В связи с этим, введя феноменологическую среднюю частоту τ^{-1} внутриатомных энергетических переходов, которые приводят к излучению фотонов, положим, что

$$|U(T, \omega)|^2 = \tau \hbar \omega W(\hbar \omega / T), \quad (41)$$

где $W(\cdot)$ – плотность распределения числа фотонов по энергиям. Мы считаем, эта плотность зависит только от отношения энергии фотона $\hbar \omega$ частотой ω к температуре T фотонного газа, которая измеряется в энергетических единицах. В частности, в случае модели абсолютно чёрного тела, плотность $W(\cdot)$

имеет форму планковской функции распределения $W(\zeta) = (e^\zeta - 1)^{-1}$. При этом интеграл (9) пропорционален средней энергии газа фотонов. В рассматриваемом случае формула (40) принимает вид

$$\langle (\nabla, \mathbf{S}(x, t)) \rangle = -\frac{8\mu\tau c^2}{(nT_0L)^4} \left[\frac{\gamma}{T_0L} \int_{-L/2}^{L/2} T^6(y, t) \int_0^\infty \zeta^5 W(\zeta) |G(x, y, \omega_y)|^2 d\zeta dy - \right. \\ \left. - T^5(x, t) \int_0^\infty \zeta^4 W(\zeta) \text{Im}G(x, x, \omega_x) d\zeta \right], \quad (42)$$

где $\omega_y = T(y, t)\zeta/\hbar$ в интеграле по безразмерной переменной ζ и введена характерная температура $T_0 = \hbar c/nL$.

Оценим численное значение температуры T_0 . Будем исходить из величины $n = 1, 5$ и $L = 1\text{см}$. Тогда, принимая $\hbar \approx 10^{-27}\text{эрг}\cdot\text{с}$, $c/n \approx 2 \cdot 10^{10}\text{см}/\text{с}$, находим, что $T_0 = 2 \cdot 10^{-17}\text{эрг}\cdot 1, 4 \cdot 10^{-16}\text{К}/\text{эрг} = 1, 5 \cdot 10^{-1}\text{К}$. Следовательно, отношение типичной температуры $T(y, t) \approx 10^2 \div 10^3\text{К}$ к T_0 в рассматриваемой нами физической ситуации представляет собой большой параметр $\approx 10^4$, что мы примем во внимание при вычислении интеграла в (42).

Оценим теперь величину $\bar{k}L$ в формуле (32) в области интегрирования по ζ , где отношение $T(y, t)\zeta/T_0$ представляет собой большую величину:

$$\bar{k}L = \frac{T(y, t)\zeta}{T_0} \left(1 - i\gamma L \frac{T_0}{T(y, t)\zeta} \right)^{1/2} \approx \frac{T(y, t)\zeta}{T_0} - \delta,$$

и отношение $\delta = \gamma L/2$ характеризует оптическую длину затухания электромагнитного поля в среде. Его типичное значение в рассматриваемом нами случае изменяется в пределах $\delta = 0, 1 \div 10$, поэтому второе слагаемое в скобках очень мало по сравнению с первым.

Используя полученное приближённое выражение для $\bar{k}L$, находим для коэффициента отражения

$$\varkappa = \frac{\bar{k} - k}{\bar{k} + k} \approx \frac{T(y, t)\zeta(1 - n^{-1})/T_0 - i\delta}{T(y, t)\zeta(1 + n^{-1})/T_0 - i\delta} \approx \frac{n - 1}{n + 1},$$

где поправочное слагаемое имеет порядок $\delta T_0/T(y, t)\zeta$ и представляет, таким образом, очень малую величину в допустимом диапазоне изменения δ . Поэтому при вычислении интеграла в (40) можно положить коэффициент \varkappa

чисто вещественным и не зависящем от распределения температуры и переменной интегрирования ζ . По той же причине можно положить величину \bar{k}^{-1} в выражении для $|G(x, y, \omega)|^2$ равной $\bar{k}^{-1} \approx T_0 L / T(y, t) \zeta$.

Таким образом, в рассматриваемом нами случае величина $G(x, y, \omega_y)$ в подынтегральном выражении в (42) даётся приближённой формулой:

$$|G(x, y, \omega_y)|^2 = \left(\frac{T_0 L}{2T(y, t)\zeta} \right)^2 |R(x, y, \zeta; T)|^2,$$

$$\text{Im}G(x, x, \omega_x) = \left(\frac{T_0 L}{2T(y, t)\zeta} \right) \text{Re}R(x, x, \zeta; T),$$

где ядро $R(z, y, \zeta; T)$ функционально зависит от распределения температуры и имеет вид

$$R(x, y, \zeta; T) = (1 - (\kappa e^{-\delta})z_-)^{-1} \times$$

$$\times (u_- P_- + (\kappa e^{-\delta})^2 u_+ P_+ z_-^2 + (\kappa e^{-\delta})z_- [v_+ Q_+ + v_- Q_-]) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z_-^n (\kappa e^{-\delta})^n (u_- P_- + (\kappa e^{-\delta})^2 u_+ P_+ z_-^2 + (\kappa e^{-\delta})z_- [v_+ Q_+ + v_- Q_-]) ;$$

$$z_{\pm} = e^{\pm i T \zeta / T_0}, \quad z_+ z_- = 1;$$

$$u_{\pm} = \exp\left(\pm i \frac{T \zeta}{T_0 L} |x - y|\right), \quad u_+ u_- = 1;$$

$$v_{\pm} = \exp\left(\pm i \frac{T \zeta}{T_0 L} (x + y)\right), \quad v_+ v_- = 1;$$

$$P_{\pm} = e^{\pm \delta |x - y| / L}, \quad P_+ P_- = 1; \quad Q_{\pm} = e^{\pm \delta (x + y) / L}, \quad Q_+ Q_- = 1,$$

где мы для краткости записи опустили аргументы в распределении температуры $T(y, t)$.

На основании (32) и (42) поток энергии можно представить в виде

$$\langle (\nabla, \mathbf{S}(x, t)) \rangle = -\frac{2\mu\tau c^2}{n^4 (T_0 L)^3} \left[\gamma \int_{-L/2}^{L/2} T^4(y, t) K(x, y; T) dy - 2I(x; T) T^4(x, t) \right], \quad (43)$$

где введены обозначения

$$K(x, y; T) = \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) |R(x, y, \zeta; T)|^2 d\zeta, \quad (44)$$

$$I(x; T) = \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) \operatorname{Re} R(x, x, \zeta; T) d\zeta. \quad (45)$$

Ввиду большой величины отношения T/T_0 внутренний интеграл в (42) представляет собой быстро осциллирующую функцию. Мы вычислим главный член асимптотики этого интеграла при $T/T_0 \rightarrow \infty$.

Подставляя разложение для $|R(x, y, \zeta; T)|^2$ в формулу (44), находим

$$\begin{aligned} K(x, y; T) = & \sum_{n_+, n_- = 0}^{\infty} (\varkappa e^{-\delta})^{2(n_+ + n_-)} \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) z_+^{n_+} z_-^{n_-} \left[P_-^2 + (\varkappa e^{-\delta})^4 P_+^2 + \right. \\ & + (\varkappa e^{-\delta})^2 (Q_+^2 + Q_-^2) + (\varkappa e^{-\delta})^2 (z_-^2 u_+^2 + z_+^2 u_-^2 + v_+^2 + v_-^2) + \\ & + (\varkappa e^{-\delta}) z_- P_- u_+ [Q_+ v_+ + Q_- v_-] + (\varkappa e^{-\delta}) z_+ P_- u_- [Q_+ v_- + Q_- v_+] + \\ & \left. + (\varkappa e^{-\delta})^3 z_- P_+ u_+ [Q_+ v_- + Q_- v_+] + (\varkappa e^{-\delta})^3 z_+ P_+ u_- [Q_+ v_+ + Q_- v_-] \right] d\zeta. \end{aligned} \quad (46)$$

Асимптотику ядра $K(x, y; T)$ найдём посредством вычисления асимптотики каждого отдельного слагаемого в (46), что допустимо, так как ряд мажорируется рядом по степеням $(\varkappa e^{-\delta})^{2(n_+ + n_-)}$. Так как $W(0) < \infty$, то каждый член ряда

$$\int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) z_+^{n_+ + m_-} z_-^{n_- + m_+} u_+^{l_+} u_-^{l_-} v_+^{m_+} v_-^{m_-} d\zeta = \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) e^{i\Lambda\zeta} d\zeta,$$

определяемый набором показателей $n_{\pm} = 0, 1, 2, \dots$; $l_{\pm} = 0, 1, 2$; $m_{\pm} = 0, 1, 2$, где $l_+ l_- = 0$, $m_+ m_- = 0$, $l_+ + l_- + m_+ + m_- = 0, 2$;

$$\Lambda = \frac{T}{T_0} \left(n_+ + m_- - n_- - m_+ + \frac{l_+ - l_-}{L} |x - y| + \frac{m_+ - m_-}{L} (x + y) \right),$$

оценивается посредством трёхкратного интегрирования по частям,

$$\int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) e^{i\Lambda\zeta} d\zeta = i\Lambda^{-3} \int_0^{\infty} e^{i\Lambda\zeta} \frac{d^3}{d\zeta^3} [\zeta^3 W(\zeta)] d\zeta = O(\Lambda^{-3}),$$

если $\Lambda \neq 0$. При этом величина Λ пропорциональна большому параметру T/T_0 . В связи с этим главные значения ядра $K(x, y; T)$ дают члены ряда,

у которых $\Lambda = 0$. Это равенство имеет место, только если по отдельности выполняются равенства

$$n_+ + m_- = n_- + m_+, \quad |l_+ - l_-||x - y| = |m_+ - m_-||x + y| = L.$$

Второе равенство при любых допустимых не равных нулю значениях чисел l_{\pm}, m_{\pm} возможно только в том случае, когда $x = y, x = -y$. Тогда, $l_+ = l_- = m_+ = m_- = 0$, что на основании первого из выписанных условий приводит к равенству $n_+ = n_-$. Таким образом, оставляя в сумме (46) только слагаемые, удовлетворяющие этим условиям, которые уже не зависят от ζ , получим

$$\begin{aligned} K(x, y; T) &= E \sum_{n=0}^{\infty} (\kappa e^{-\delta})^{4n} \left[P_-^2 + (\kappa e^{-\delta})^4 P_+^2 + (\kappa e^{-\delta})^2 (Q_+^2 + Q_-^2) \right] = \\ &= \frac{E}{1 - (\kappa e^{-\delta})^4} \left[P_-^2 + (\kappa e^{-\delta})^4 P_+^2 + (\kappa e^{-\delta})^2 (Q_+^2 + Q_-^2) \right], \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$E = \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) d\zeta.$$

Аналогичным методом вычислим асимптотику величины $I(x; T)$. Подставляя в (45) разложение в ряд функции $\text{Re}R(x, x, \zeta; T)$, находим

$$\begin{aligned} I(x; T) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\kappa e^{-\delta})^{2n} \times \\ &\times \text{Re} \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) z_-^n \left[1 + z_-^2 (\kappa e^{-\delta})^2 + z_- (\kappa e^{-\delta}) (v_x^2 P_x^2 + v_x^{-2} Q_x^{-2}) \right] d\zeta, \end{aligned}$$

где $v_x = \exp(ixT(x, t)/LT_0)$, $P_x = \exp(\delta x/L)$. Асимптотика каждого члена этого ряда

$$\text{Re} \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) z_-^{n+|m|} v_x^{2m} d\zeta = \text{Re} \int_0^{\infty} \zeta^3 W(\zeta) e^{-i\Gamma\zeta} d\zeta = O(\Gamma^{-3}),$$

$$\Gamma = \frac{T(x, t)}{T_0} \left[n + |m| - \frac{2mx}{L} \right], \quad m = 0, \pm 1$$

не является малой только в том случае, когда $\Gamma = 0$, то есть при $n + |m| = 2mx/L$ при произвольном значении $x \in [-L/2, L/2]$. Это возможно только

при $n = m = 0$. Тогда $I(x; T) = E + O(\Gamma^{-3})$. Это соотношение вместе с (43), (48) дают окончательное выражение для искомой плотности потока энергии:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla, \mathbf{S}(x, t)) \rangle = & -\frac{2\alpha\gamma}{1 - (\kappa e^{-\delta})^4} \int_{-L/2}^{L/2} T^4(y, t) \times \\ & \times \left[\exp(-2\delta|x - y|/L) + (\kappa e^{-\delta})^4 \exp(2\delta|x - y|/L) + \right. \\ & \left. + 2(\kappa e^{-\delta})^2 \operatorname{ch}[2\delta(x + y)/L] \right] dy + 4\alpha T^4(x, t), \end{aligned} \quad (49)$$

где введён коэффициент α , который в терминах универсальных констант имеет вид

$$\alpha = \frac{\mu\tau c^2 E}{n^4 (T_0 L)^3} = \tau \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \frac{q^4}{\hbar^3 c} E$$

в том случае, если температура выражается в градусах, $q = 1, 4 \cdot 10^{-16}$ эрг/К – постоянная Больцмана.

В выражении (49) интегральное ядро универсально. Оно не зависит от функции распределения $W(\cdot)$ фотонов. В частности, при большой величине $\delta \gg 1$ последними двумя слагаемыми в подынтегральном выражении можно пренебречь, а оставшееся ядро $e^{-2\delta|x-y|/L}$ превращается в δ -функцию $2\gamma^{-1}\delta(x-y)$. Тогда интегральное слагаемое в (49) при $\delta \rightarrow \infty$ стремится к $(-4\alpha T^4(x, t))$, поэтому в указанном пределе второе слагаемое в правой части эволюционного уравнения (1) обращается в нуль $(\nabla, \mathbf{S}(x, t)) = 0$, то есть в случае сильного поглощения весь теплообмен определяется теплопроводностью.

В случае слабого поглощения $\gamma \rightarrow 0$ первое слагаемое в потоке энергии равно нулю, в то время как последнее слагаемое в (49) не исчезает при $\gamma = 0$, и в этом случае $\langle (\nabla, \mathbf{S}(x, t)) \rangle = -4\alpha T^4(x, t)$ и среда остывает благодаря радиационно-кондуктивному теплообмену, что естественно с физической точки зрения. Оценим в этом случае вклад радиационно-кондуктивного теплообмена в виде (50) в эволюцию распределения температуры согласно уравнению (1). При $\varepsilon \approx 1$, $\mu \approx 1$, $E \approx 1$, положив $\tau \approx 10^{-14}$ с, получим, что величина (50) в том случае, когда $T = 10^3$ К, равна

$$\left(\frac{10^{-14} \cdot (10^{-16})^4}{3 \cdot 10^{10} \cdot (10^{-27})^3} \right) (10^3)^4 = 10^5 \text{ эрг/см}\cdot\text{с}\cdot\text{К}.$$

Слагаемое же в уравнении (1), ответственное за теплопроводность, имеет порядок 10^7 эрг/см³·с при $L \approx 1$ см и при коэффициенте теплопроводности

$\kappa \approx 10^4$ эрг/см·с·К и той же температуре $T = 10^3$ К. Таким образом, при слабом поглощении радиационно-кондуктивный теплообмен даёт лишь малую относительную поправку $\sim 10^{-2}$.

Литература

1. Спэрроу Э.М. Теплообмен излучением / Э.М.Спэрроу, Р.Д.Сесс. – Л.: Энергия, Ленинградское отд.,1972. – 295 с.
2. Рубцов Н.А. Теплообмен излучением в сплошных средах / Н.А.Рубцов – Новосибирск: Наука, Сибирское отд.,1984. – 278 с.
3. Петров В.А.Перенос энергии в частично прозрачных твёрдых материалах / В.А.Петров, Н.В.Марченко. - Москва: Наука,1985. – 190 с.
4. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. т.II. Случайные поля. – Изд.2-е / С.М.Рытов, Ю.А.Кравцов, В.И.Татарский. – М.: Наука,1978. – 464 с.
5. Тамм И.Е. Основы теории электричества / И.Е.Тамм. – М.: Наука, 1988.
6. Оцисик М.Н. Сложный теплообмен / М.Н. Оцисик. – Москва: Мир,1976. – 616 с.
7. Зигель Р. Теплообмен излучением / Р.Зигель, Дж.Хауэлл. – М.: Мир,1975. – 934 с.

ONE-DIMENSIONAL PROBLEM OF HEAT RADIATIVE CONDUCTANCE. FLUCTUATION APPROACH

Yu.P.Virchenko, M.A.Saprykin

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

One-dimensional problem of the heat radiative conductance in the dielectric medium with homopolar chemical bond is considered. On the basis of presentation that the heat exchange is done by means of electromagnetic field generated thermal fluctuations of the medium electrical polarization, it is calculated the energy flux of the fluctuative field in the form of the functional on local temperature. It permits to formulate the complete evolution of the heat transfer in the medium.

Key words: radiative conductance of heat, electrical polarization, fluctuations, gaussian random field, Maxwell equations, Stefan-Boltzmann law, energy flux, temparture distribution.

К ВОПРОСУ НАРАБОТКИ ^{99m}Tc НА НЕЙТРОННОМ ГЕНЕРАТОРЕ

А.Н. Довбня¹⁾, Э.Л. Купленников¹⁾, В.А.Цымбал¹⁾,
В.В.Красильников²⁾

¹⁾ННЦ ХФТИ, Харьков, 61108, Украина, e-mail: kupl@kipt.kharkov.ua

²⁾Белгородский государственный университет, ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия

Рассмотрена возможность применения нейтронного генератора (НГ) с потоком тепловых нейтронов интенсивности $10^{12}\text{н}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{с}^{-1}$ для получения изотопа ^{99m}Tc на основе ядерной реакции $^{98}\text{Mo}(n\gamma)^{99}\text{Mo}\rightarrow^{99m}\text{Tc}$.

Ключевые слова: генератор нейтронов, тепловые нейтроны, поперечное сечение, молибден, технеций, ядерная медицина.

1. Введение

Среди изотопов, применяемых в ядерной медицине, большая роль отводится генераторным нуклидам. Генераторные нуклиды – это система двух связанных между собой радионуклидов (РН), один из которых – более короткоживущий (дочерний) – постоянно образуется в результате распада другого (материнского), имеющего существенно больший период полураспада ($T_{1/2}$). Среди радиоизотопных генераторов наибольшее применение в ядерной медицине имеет генератор $^{99}\text{Mo}\rightarrow^{99m}\text{Tc}$.

Одним из возможных путей получения ^{99}Mo является ядерная реакция $^{98}\text{Mo}(n\gamma)^{99}\text{Mo}$. Образующийся при облучении изотоп ^{99}Mo испускает β -частицы (100%) с максимальной энергией 1210 кэВ и основные γ -кванты с энергией 181.1 и 739.4 кэВ (интенсивность γ -линии $I_\gamma = 6.08\%$, 12.1% соответственно). В результате β -распада ^{99}Mo ($t_{1/2} = 65.9$ ч.) превращается в ^{99m}Tc ($t_{1/2} = 6.02$ ч.), который испускает фотоны, основная энергия которого равна 140.5 кэВ ($I_\gamma = 87.7\%$).

Настоящая работа посвящена количественной оценке наработки ^{99m}Tc на создаваемом в ННЦ ХФТИ малогабаритном НГ с интенсивностью потока тепловых нейтронов $10^{12}\text{н}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{с}^{-1}$.

2. Нароботка ^{99}Mo В(n, γ) реакции

Одним из важных параметров, характеризующих прохождение нейтронов через реальные образцы, является макроскопическое сечение [1] $\Sigma = \rho \cdot \sigma_{eff} \text{см}^{-1}$, где ρ – плотность ядер элемента, σ_{eff} – эффективное сечение взаимодействия. Величина Σ аналогична линейному коэффициенту ослабления γ -квантов и может быть использована для оценки ослабления потока нейтронов при взаимодействии с ядерной средой образца.

Интенсивность потока нейтронов, прошедших слой вещества x без учета вклада многократного рассеяния, равна

$$I(x) = I_0 e^{-\Sigma_t x}, \quad (1)$$

где I_0 – интенсивность первоначального пучка нейтронов, Σ_t – полное макроскопическое сечение, характеризующее всю совокупность процессов взаимодействия нейтронов с веществом.

Толщина мишени, полученная согласно (1), оказалась равной $x = 0.216$ см. Расчет выполнен со следующими параметрами: плотность молибдена естественного изотопного состава (^{Nat}Mo) 10.2 г/см^3 ; полное сечение взаимодействия $\sigma_t = 7.22$ барна, что соответствует среднему значению энергии тепловых нейтронов 0.038 эВ при температуре $T=300^\circ\text{K}$; $\Sigma_t = 0.462 \text{ см}^{-1}$; уменьшение потока нейтронов на задней стенке образца 10% .

Количество ядер ^{98}Mo , содержащихся в мишени, рассчитано согласно выражению

$$N = \beta m \frac{6.02 \cdot 10^{23}}{A}, \quad (2)$$

где $\beta = 24.13\%$ – содержание изотопа ^{98}Mo в натуральном молибдене; $m = 43.25 \text{ г}$ – вес мишени (диаметр образца 5 см выбран исходя из среднего размера пробы, которая обычно используется в активационном анализе на тепловых нейтронах); $A = 98$ – массовое число. В данном случае N равно $6.41 \cdot 10^{22}$ ядер.

Для вычисления активности A_M изотопа ^{99}Mo , накопившегося в пробе за время облучения t_{irr} , использовалась формула [2]

$$A_M = \sigma I_0 N (1 - e^{-\lambda_M t_{irr}}), \quad (3)$$

где $I_0 = 0.95 \cdot 10^{12} \text{ н/см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ – средняя величина потока нейтронов в облучаемой пробе; $\lambda_M = 0.693/T_{1/2} = 2.92 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ – постоянная радиоактивного распада ^{99}Mo ; $\sigma = 0.13 \text{ барн}$ – сечение реакции на тепловых нейтронах. В [2]

подчеркивается, что поскольку сечение реакции зависит от энергии, в формулу (3) нужно подставлять среднее значение сечения реакции в изучаемом энергетическом интервале.

Оценки проведены для двух времен облучения $t_{irr}^{(24)} = 24$ и $t_{irr}^{(66)} = 66$ часов. При указанных выше параметрах облучения активность наработанного ^{99}Mo равна $A_M^{(24)} = 17.6 \cdot 10^8$ Бк и $A_M^{(66)} = 0.4 \cdot 10^{10}$ Бк, а удельная активность $4.07 \cdot 10^7$ Бк/г и $9.2 \cdot 10^7$ Бк/г соответственно.

В работе [3] отмечено, что в случае облучения образца эпитеpmальными нейтронами реактора с энергией более 0.4 эВ сечение увеличивается до 11.6 барн. Вследствие этого выбор места облучения в активной зоне реактора может существенно повысить активацию ^{98}Mo . В большинстве случаев эффективное сечение составляет около 0.5 барн. В некоторых реакторах удается реализовать эффективное сечение, равное 0.8 барн. По-видимому, облучение образцов нейтронами энергией более 0.4 эВ можно технически осуществить и на НГ.

Интересно сравнить этот результат с данными других авторов, например, [3,4]. В работе [3] показано, что при облучении молибдена в потоке реакторных нейтронов $10^{15} \text{ n} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ в течение 5 суток удельная активность ^{99}Mo может достигать 14.5 Ки/г для природного Мо. Проведенные нами расчеты удельной активности данных [3] по вышеописанной методике с эффективным сечением 0.5 барн [3] дали практически ту же величину. Полученный результат указывает на то, что методика оценки выхода ^{99}Mo достаточно корректна и может быть использована для прогнозирования выхода других РН.

В [4] представлены результаты вычислений активности ^{99}Mo в $^{100}\text{Mo}(n\gamma)^{99}\text{Mo}$ реакции. По оценкам авторов: "приемлемая толщина образцов из ^{Nat}Mo может составлять до 15 г/см² (≤ 1.47 см), а мощность электронного пучка до 20 кВт. В этом случае наработка ^{99}Mo на мишени толщиной 15 г/см², за время 66 часов будет составлять 0.8 Ки". Наши оценки активности ^{99}Mo в реакции $^{98}\text{Mo}(n\gamma)^{99}\text{Mo}$ при той же экспозиции ~ 0.1 Ки.

3. Выход ^{99m}Tc . Обсуждение результатов

Максимальная активность дочернего изотопа, равная активности материнского РН может быть достигнута по истечении времени t_{max} [5]

$$t_{max} = \frac{1}{\lambda_D - \lambda_M} \ln \left(\frac{\lambda_D}{\lambda_M} \right). \quad (4)$$

Подставляя в (4) соответствующие параметры: $\lambda_D = 3.19 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, $\lambda_M = 2.92 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$, получаем $t_{max} = 22.9$ ч. Подчеркнем, что извлечение ^{99m}Tc из

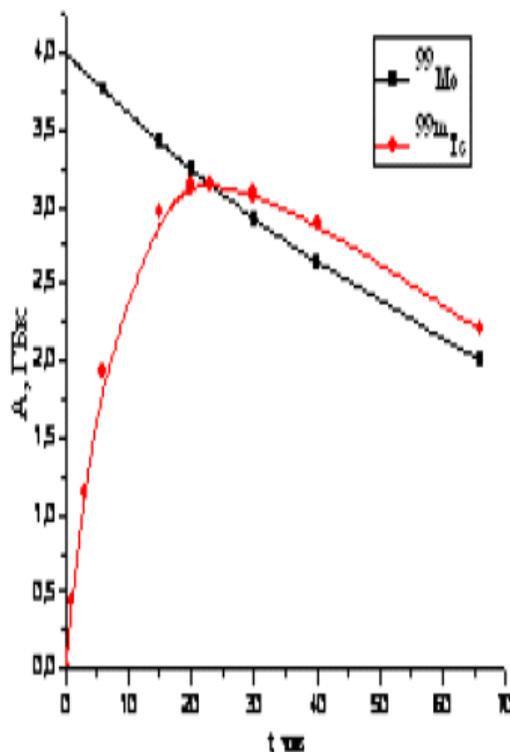


Рис. 1: Зависимость активности.

генератора технеция можно проводить несколько раз в день, не дожидаясь максимального накопления РН, поскольку уже через 6 часов достигается 50% от максимальной активности.

Для любого момента времени t активность дочернего изотопа может быть выражена через активность материнского РН (на тот же момент времени) [5]

$$A_D = A_M \frac{\lambda_D}{\lambda_D - \lambda_M} (1 - e^{-(\lambda_D - \lambda_M)t}), \quad (5)$$

где A_D – активность дочернего вещества в смеси с материнским изотопом или в генераторе в момент времени t , где t – время, прошедшее с начала отсчета до настоящего момента; A_M – начальная активность материнского нуклида в момент зарядки генератора или в момент начала отсчета времени.

Отметим, что при условии $\lambda_D \gg \lambda_M$ выражение (5) несколько упрощается [6]

$$A_D = A_M (1 - e^{-\lambda_D t}). \quad (6)$$

В данном случае $\lambda_D/\lambda_M \sim 10.9$, т.е. условие $\lambda_D \gg \lambda_M$ выполняется не в полной мере, что в итоге отражается на конечном результате дочерней активно-

сти. В связи со сказанным для оценки величины A_D использована формула (5).

Распад материнского вещества и нарастание дочерней активности в первоначально чистой материнской фракции в зависимости от времени приведены на рис.1. Увеличение активности дочернего изотопа с течением времени при начальной активности его равной нулю рассчитывалось по формуле [5]

$$A_D = A_M \frac{\lambda_D}{\lambda_D - \lambda_M} [e^{-\lambda_M t} - e^{-\lambda_D t}]. \quad (7)$$

Подставляя в (5) следующие параметры: $t = 24$ часа, $A_M^{(24)} = 17.6 \cdot 10^8$ и $t = 66$ часов, $A_M^{(66)} \sim 0.4 \cdot 10^{10}$ Бк – и учитывая, что только 82.4% ^{99}Mo трансформируется в ^{99m}Tc [5], а интенсивность γ линии ^{99m}Tc , которая соответствует излучению фотона энергией 140.5 кэВ – 87.7%, получаем $A_D^{(24)} = 12.84 \cdot 10^8$ и $A_D^{(66)} = 31.80 \cdot 10^8$ Бк соответственно.

Ясно, что в реальных условиях получения ^{99m}Tc его активность будет несколько меньше, чем в нашем идеальном случае, поскольку эффективность выделения радиоизотопа в генераторе технеция меньше единицы.

Для однократной диагностики систем жизнедеятельности человека требуется определенная активность радиоизотопа ^{99m}Tc [7]. Например, для исследования сердечно-сосудистой системы нужна активность ~ 55 МБк, для диагностики центральной нервной системы ~ 240 МБк, для скенограммы опухоли головного мозга ~ 370 МБк и т. д. (Кстати, по оценкам экспертов МАГАТЭ, средняя диагностическая доза 10 мКи). Таким образом, наработанная за 24 и 66 часов активность ^{99m}Tc достаточна при обследовании сердечно-сосудистой системы (скенограммы опухоли головного мозга) для $A_D^{(24)}$ в среднем у 23 и 4 пациентов и для $A_D^{(66)}$ у 58 и 9 больных соответственно.

Увеличить выход ^{99}Mo , генерирующего ^{99m}Tc , можно: 1) максимум в 4.1 раза при использовании обогащенной мишени, содержащей только изотоп ^{98}Mo ; 2) почти в 2 раза при возрастании толщины мишени до 4.8 мм, что соответствует 20% уменьшению потока нейтронов на задней стенке образца; 3) путем увеличения экспозиции $t_{irr} \geq T_{1/2}$; 4) в случае одновременного облучения более одной мишени, что предусмотрено конструкцией НГ.

3. Выводы

Рассмотрена возможность применения малогабаритного нейтронного генератора, обладающего интенсивностью потока тепловых нейтронов 10^{12} н·

$\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$ для получения ^{99m}Tc на основе ядерной реакции $^{98}\text{Mo}(n\gamma)^{99}\text{Mo}$. Показано, что НГ может, в принципе, производить радиоизотоп ^{99m}Tc с активностью, 353 достаточной для применения в ядерной медицине.

Работа поддержана грантом УНТЦ № Р333.

Литература

1. Блан Д. Ядра, частицы, ядерные реакторы / Д.Блан – М.: Мир,1989. – 335 с.
2. Немец О.Ф. Справочник по ядерной физике / О.Ф.Немец, Ю.В.Гофман Ю.В. – Киев: Наукова Думка,1975. – 415 с.
3. Веревкин А.А., Стервеедов Н.Г., Ковтун Г.П. // Вестник ХНУ. Серия: Ядра, частицы, поля. – 2006. - 745; 4(32). – С.54-64.
4. Довбня А.Н., Пугачев Г.Д., Пугачев Д.Г. и др., Получение мощных фотонных пучков для наработки медицинских радионуклидов // ВАНТ. Серия: яд.-физ. исследования. – 1997. – 4,5(31,32). – С.154-156.
5. Соколов В.А., Генераторы короткоживущих радиоактивных изотопов / В.А.Соколов. – М.: Атомиздат,1975. – 113 с.
6. Баранов В.Ю., Изотопы II / В.Ю. Баранов. – М.:Физматлит, 2005. – 727 с.
7. П.А. Демченко П.А., Воронко В.А., Мигаленя В.Я. и др. // ВАНТ. Серия: яд.-физ.исследования. – 1997. – 4,5(31,32). – С.168-170.

TO THE PROBLEM OF ^{99m}Tc YIELD IN REACTION



A.N. Dovbnya¹⁾, E.L. Kuplennikov¹⁾, V.A. Tsymbal¹⁾, V.V. Krasil'nikov²⁾

¹⁾National Science Center "Kharkov Institute of Physics and Technology",
Akademicheskaya st., Kharkov, 61108, Ukraine, e-mail: kupl@kipt.kharkov.ua

²⁾Belgorod State University, Belgorod, Russia

Possibility of the neutron generator with intensity flow of thermal neutrons $10^{12}\text{n}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ application for ^{99m}Tc production on the base of $^{98}\text{Mo}(n\gamma)^{99}\text{Mo} \rightarrow ^{99m}\text{Tc}$ nuclear reaction is considered.

Key words: neutron generator, thermal neutrons, cross-section, molybdenum, technetium, nuclear medicine.

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДВИЖЕНИЯ НАГРЕТЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В ВЯЗКИХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ГАЗООБРАЗНЫХ СРЕДАХ

Н.В. Малай¹⁾, А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: malay@mail.ru

Разработан математический метод решения линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса с учетом зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. Используя найденное решение, рассмотрена задача о влиянии нагрева поверхности частицы на силу и скорость ее гравитационного движения. При рассмотрении движения предполагалось, что средняя температура поверхности частицы может существенно отличаться от температуры окружающей ее среды. Численные оценки показали, что нагрев поверхности частицы существенно влияет на силу сопротивления и скорость гравитационного падения. Проведено сравнение с известными данными эксперимента, которое показало расхождение не более 15%, что указывает на правомерность разработанного математического метода.

Ключевые слова: линеаризованное по скорости уравнение Навье-Стокса, гравитационное движение, движение нагретой частицы в поле силы тяжести.

1. Решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса с учётом зависимости коэффициентов переноса от температуры

1. Введение. Вследствие общей нелинейной природы получить точные решения уравнений гидродинамики не представляется возможным [1-3]. До настоящего времени не увенчались успехом усилия, направленные на разрешение принципиальных вопросов, таких как, например, имеют ли уравнения гидродинамики при дополнительных граничных и начальных условиях единственное решение, насколько удовлетворительно описывают получаемые решения реальные течения и др.

Как показано в [1-3], богатейший теоретический и экспериментальный материал, накопленный в гидродинамике, по-видимому, недостаточен для строгого математического анализа происходящих в жидкости и газе явлений.

Многочисленные парадоксы гидродинамики указывают на то, что до окончательной теории здесь еще далеко. Поэтому исследование линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса позволяет найти пути решения общего уравнения движения вязкой неизотермической газообразной среды.

При рассмотрении многих прикладных задач, связанных с описанием движения отдельных частиц в вязких неизотермических газообразных средах возникает, как правило, вопрос о нахождении полей скорости, температуры, давления и т.д., которые определяются путем решения общего уравнения движения вязкой неизотермической среды. Эти поля необходимы для нахождения действующих на частицы сил, скоростей их упорядоченного движения, определения элементов тепло- и массопереноса.

В произвольной ортогональной криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) общая система гидродинамических уравнений для квазистационарного случая включает в себя [3 – 6]:

– уравнение Навье-Стокса ($i = 1, 2, 3$)

$$\rho \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{U_{x^k}}{H_k} \frac{\partial U_{x^i}}{\partial x^k} - \sum_{k=1}^3 \frac{U_{x^k}^2}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^3 \frac{U_{x^k} U_{x^i}}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} \right\} =$$

$$= \rho F_{x^i} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial P}{\partial x^i} + \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{H_1 H_2 H_3 H_i}{H_k} \sigma_{ik} \right) - \frac{\sigma_{kk}}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} \right\}, \quad (1)$$

– уравнение непрерывности

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} \rho U_{x^i} \right) = 0, \quad (2)$$

– уравнение конвективной теплопроводности ($i = 1, 2, 3$)

$$\rho c_p \left(\sum_{k=1}^3 U_{x^k} \right) \frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} \lambda(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial x^i} \right), \quad (3)$$

где через U_{x^i} , F_{x^i} и σ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) обозначены физические составляющие массовой скорости \mathbf{U} , силы \mathbf{F} и тензора полных напряжений

$$\sigma_{ik} = \mu \left\{ \frac{1}{H_k} \frac{\partial U_{x^i}}{\partial x^k} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial U_{x^k}}{\partial x^i} - \frac{1}{H_i H_k} \left(U_{x^i} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} + U_{x^k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} \right) + \right.$$

$$\left. + 2\delta_k^i \sum_{n=1}^3 \frac{U_{x^n}}{H_n H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x^n} - \frac{2}{3} \delta_k^i \sum_{n=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^n} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_n} U_{x^n} \right) \right\}, \quad (4)$$

$H_i(x)$ — коэффициенты Ламэ; P , T и ρ — соответственно давление, температура и плотность вязкой среды; c_p , n , m , μ и λ — соответственно, удельная теплоемкость при постоянном давлении, концентрация, масса, коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности газообразной среды.

Уравнения (1) – (3) вместе с зависимостями коэффициента теплопроводности $\lambda = \lambda(\rho, T)$, плотности $\rho = \rho(T)$ и динамической вязкости $\mu = \mu(\rho, T)$ от температуры, а также определяемые конкретной задачей граничными условиями позволяют полностью описать состояние вязкой среды (газа или жидкости), т.е. позволяют определить давление, плотность, компоненты массовой скорости и температуру при неизотермическом течении вязкой среды. Здесь и далее индексы "e" и "i" будем относить к газообразной среде и частице. Индексом "S" будем обозначать значения физических величин, взятых при средней относительной температуре частицы, равной T_{iS} , а индексом " ∞ " — значения физических величин, характеризующих газообразную среду на далёком расстоянии от частицы.

Как отмечалось выше, вследствие общей нелинейной природы получить точные решения системы гидродинамических уравнений не представляется возможным, т.е. общего метода построения решений для вязкой неизотермической среды не существует. В гидродинамике были разработаны приближенные методы, позволяющие в той или иной мере упростить систему гидродинамических уравнений и приспособить ее к характеру отдельных типов конкретных физических задач. Большинство конкретных задач о движении вязкой неизотермической среды, имеющих тот или иной практический интерес, решены именно на основании приближенных уравнений движения вязкой неизотермической среды. Они получаются из полных уравнений с помощью некоторых упрощений путем отбрасывания (полностью или частично) некоторых членов в уравнениях и граничных условиях. Эти методы основаны обычно на использовании малых параметров, называемых в научной литературе безразмерными комбинациями (числами Рейнольдса, Пекле, Эйлера и т.д.), которые подходящим способом определяются из исходных уравнений, граничных и начальных условий. Малость этих безразмерных комбинаций позволяет упростить полную систему гидродинамических уравнений.

Для решения системы уравнений (1) – (3) сделаем следующие физические допущения.

1. Движение частицы в газообразной среде рассматривается при значительных (больших) относительных перепадах температуры. Под относительным перепадом температуры понимают отношение разности температуры на

поверхности частицы и температуры области, далёкой от этой частицы. Относительный перепад температуры считается малым, если выполняется неравенство $(T_{is} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \ll 1$. При выполнении этого неравенства коэффициенты молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) и плотность можно считать постоянными величинами. Если $(T_{is} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \sim O(1)$, то относительный перепад температуры считается значительным. В этом случае уже нельзя считать эти величины постоянными. В работе при описании свойств газообразной среды и частицы рассматривается степенной вид зависимости динамической вязкости и теплопроводности от температуры [7, 8], таким образом

$$\begin{aligned} \mu_e &= \mu_{e\infty} t_e^\beta, \quad \lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha, \quad \rho_e = \rho_{e\infty} t_e, \quad \lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^\omega, \\ \mu_{e\infty} &= \mu_e(T_{e\infty}), \quad \rho_{e\infty} = \rho_e(T_{e\infty}), \quad \lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty}), \quad \lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_{e\infty}), \\ t_k &= T_k/T_{e\infty}, \quad k = e, i, \quad 0,5 \leq \alpha, \beta \leq 1, \quad -1 \leq \omega \leq 1. \end{aligned}$$

2. Определяющими параметрами задачи являются коэффициенты $c_p, \rho_{e\infty}, \mu_{e\infty}, \lambda_{e\infty}$ и сохраняющиеся в процессе движения частицы величины $R, T_{e\infty}, U_\infty$. Из этих параметров можно составить две безразмерные комбинации: число Рейнольдса $\text{Re}_\infty = (\rho_{e\infty} U_\infty R) / \mu_{e\infty} \ll 1$ и тепловое число Пекле $\text{Pe}_\infty = (c_p U_\infty R \rho_{e\infty}) / \lambda_{e\infty} \ll 1$, где R — радиус частицы, $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$ — характерная скорость задачи.

3. Коэффициент теплопроводности частицы по величине намного больше коэффициента теплопроводности газа. Это допущение приводит к тому, что в коэффициенте вязкости можно пренебречь зависимостью от угла θ в системе "частица-газ" (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры) и считать, что вязкость связана только с температурой $t_{e0}(r)$, т.е. $\mu_e(t_e(r, \theta)) \approx \mu_e(t_{e0}(r))$. При этом $t_e(r, \theta) = t_{e0}(r) + \delta t_e(r, \theta)$, где $\delta t_e(r, \theta) \ll t_{e0}(r)$, а $\delta t_e(r, \theta), t_{e0}(r)$ определяются из решения тепловой задачи. Это допущение позволяет рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется через граничные условия.

4. Частица образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом.

В рамках сформулированных выше допущений, в работе рассматривается следующая система гидродинамических уравнений, описывающая распределения полей скорости \mathbf{U}_e , давления P_e и температуры T вне и внутри нагретой частицы:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} P_e = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu_e \left(\frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^e}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_k^j \frac{\partial U_n^e}{\partial x_n} \right) \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_e U_k^e) = 0, \quad (5)$$

$$\rho_e c_{pe} (U_e \cdot \nabla) T_e = \operatorname{div} (\lambda_e \nabla T_e), \quad (6)$$

$$\operatorname{div} (\lambda_i \nabla T_i) = q_i, \quad (7)$$

где x_k — декартовы координаты, q_i — плотность тепловых источников, неоднородно распределенные в объеме частицы, за счет которых и происходит её нагрев.

При математическом описании равномерного движения нагретой частицы в вязкой неизотермической газообразной среде природа сил, вызывающих это движение, нас интересовать не будет. Она может быть гравитационной, магнитной, термофоретической, электрофоретической и т.д., что позволяет распространить разработанный математический метод решения линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса на очень широкий класс физических задач. Этот вопрос мы подробно рассмотрим во второй части статьи на конкретной физической задаче. Поскольку частица движется равномерно, то мы можем перейти в систему координат, связанную с её центром масс. В качестве системы координат выбираем сферическую систему координат (r, θ, φ) . В этом случае задача сводится к определению обтекания нагретой неподвижной частицы плоскопараллельным потоком газа со скоростью U_∞ ($U_\infty \parallel Oz$). Все неизвестные функции зависят только от координат r и θ .

В сферической системе координат линеаризованное по скорости уравнение Навье-Стокса, описывающее распределение скорости и давления вне частицы равенством (5), имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial y} + \frac{2}{y} \sigma_{rr} + \frac{1}{y} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{y} \sigma_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{y}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{y} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial y} + \frac{3}{y} \sigma_{r\theta} + \frac{1}{y} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{y} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}), \quad (9)$$

где $y = r/R$, σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ — компоненты тензора напряжений в сферической системе координат, определяемые равенствами

$$\sigma_{rr} = \mu_e \left(2 \frac{\partial U_r^e}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_e \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \mu_e \left(\frac{2}{y} \frac{\partial U_\theta^e}{\partial \theta} + \frac{2}{y} U_r^e - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_e \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \mu_e \left(\frac{2}{y} U_r^e + \frac{2}{y} \operatorname{ctg} \theta U_\theta^e - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_e \right), \quad \sigma_{r\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{y} \right).$$

Компоненты массовой скорости и давления будем искать в виде разложения по полиномам Лежандра и Гегенбауэра. Они нужны нам для нахождения общей силы, действующей на частицу. Сила определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы и равна [3]

$$F_z = \int_S (-P_e \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (10)$$

Используя свойство полиномов Лежандра и Гегенбауэра, легко показать, что эта сила определяется только первыми членами разложений [2]. Поэтому мы можем записать

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty G(y) \cos \theta, \quad U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty g(y) \sin \theta, \quad (11)$$

где $G(y)$ и $g(y)$ — произвольные функции, зависящие от радиальной координаты.

Связь между функциями $G(y)$ и $g(y)$ может быть найдена из уравнения непрерывности (2) с учетом зависимости плотности газообразной среды от температуры (уравнение состояния). Эта связь имеет вид

$$g(y) = G(y) + \frac{y}{2} (G'(y) - f(y) G(y)), \quad (12)$$

где $f(y) = \frac{1}{t_{e0}(y)} \frac{dt_{e0}(y)}{dy}$.

Тепловая задача решается методом сращиваемых асимптотических разложений [9, 10]. Нулевое приближение для внутреннего разложения поля температуры с учетом третьего допущения равно

$$t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (13)$$

где $\Gamma_0 > 0$ — постоянная, определяемая из граничных условий на поверхности нагретой частицы.

С учетом (13) зависимость динамической вязкости от температуры (см. допущение 3) принимает вид

$$\mu_e(y, \theta) \approx \mu_{e\infty} t_{e0}^\beta(y) = \mu_{e\infty} \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{\beta(1+\alpha)}. \quad (14)$$

2. Решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в виде обобщенных степенных рядов. Подставляя (11) в (8), (9) и учитывая (12) и (3), освобождаясь от давления, предварительно продифференцировав (8) по переменной θ , а (9) – по y , в конечном итоге, было получено следующее однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка для функции $G(y)$:

$$y^4 \frac{d^4 G(y)}{dy^4} + y^3 (8 + \alpha_1 \ell(y)) \frac{d^3 G(y)}{dy^3} + y^2 (8 + \alpha_2 \ell(y) + \alpha_3 \ell^2(y)) \frac{d^2 G(y)}{dy^2} + y (\alpha_4 \ell(y) + \alpha_5 \ell^2(y) + \alpha_6 \ell^3(y) - 8) \frac{dG(y)}{dy} + (\alpha_7 \ell^2(y) + \alpha_8 \ell^3(y) + \alpha_6 \ell^4(y)) G(y) = 0, \quad (15)$$

в котором

$$\ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}, \quad \alpha_1 = \frac{1 - 2\beta}{1 + \alpha}, \quad \alpha_2 = -\frac{8\beta}{1 + \alpha},$$

$$\alpha_3 = \frac{\beta^2 - 3\beta - \alpha\beta + 3 + 3\alpha}{(1 + \alpha)^2}, \quad \alpha_4 = 2\frac{\beta - 1}{\alpha + 1},$$

$$\alpha_5 = 2\frac{\beta^2 + \beta - \alpha\beta - 3\alpha - 3}{(1 + \alpha)^2}, \quad \alpha_6 = \frac{6 + 12\alpha + 6\alpha^2 + \beta^2 - 5\beta - 5\alpha\beta}{(1 + \alpha)^3},$$

$$\alpha_7 = 2\frac{2 + 2\alpha - \beta}{(1 + \alpha)^2}, \quad \alpha_8 = -2\alpha_6$$

с краевыми условиями

$$G(1) = F_1, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} G(y) = 1, \quad g(1) = F_2, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = 1, \quad (16)$$

где F_1 и F_2 – постоянные, вид которых определяется конкретной физической задачей. Например, в случае классической задачи Стокса имеем $F_1 = F_2 = 0$, что соответствует условию прилипания на поверхности сферы радиуса R .

Точка $y = 0$ для уравнения (15) является регулярной особой точкой [11, 12]. Поэтому будем искать его решение в виде функционального ряда

$$G(y) = y^\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n \ell^n(y), \quad C_0 \neq 0. \quad (17)$$

Вычисляя производные, получим

$$G'(y) = -y^{\rho-1} \sum_{n=0}^{\infty} [(n-\rho) C_n - (n-1) C_{n-1}] \ell^n(y),$$

$$G''(y) = y^{\rho-2} \sum_{n=0}^{\infty} [(n-\rho)(n-\rho+1) C_n - 2(n-\rho)(n-1) C_{n-1} + (n-1)(n-2) C_{n-2}] \ell^n(y),$$

$$G'''(y) = -y^{\rho-3} \sum_{n=0}^{\infty} [(n-\rho)(n-\rho+1)(n-\rho+2) C_n - 3(n-\rho)(n-\rho+1)(n-1) C_{n-1} + 3(n-\rho)(n-1)(n-2) C_{n-2} + (n-1)(n-2)(n-3) C_{n-3}] \ell^n(y),$$

$$G^{IV}(y) = y^{\rho-4} \sum_{n=0}^{\infty} [(n-\rho)(n-\rho+1)(n-\rho+2)(n-\rho+3) C_n - 4(n-\rho)(n-\rho+1)(n-\rho+2)(n-1) C_{n-1} + 6(n-\rho)(n-\rho+1)(n-1)(n-2) C_{n-2} - 4(n-\rho)(n-1)(n-2)(n-3) C_{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) C_{n-4}] \ell^n(y).$$

Подставляя ряд (17) в (15) и приравнивая коэффициенты при y^ρ , получаем определяющее уравнение

$$\rho(\rho+3)(\rho+1)(\rho-2) = 0,$$

имеющее корни $\rho_1 = -3$, $\rho_2 = -1$, $\rho_3 = 0$, $\rho_4 = 2$. Заметим, что разность корней равна целому числу. Следовательно, согласно общей теории решения дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов (метод Фробениуса) во всех остальных решениях, кроме первого, соответствующего $\rho_1 = -3$, появляется дополнительное слагаемое, содержащее множитель $\ln y$, умноженный на первое решение (см. [11, 12]).

Большому (по модулю) из корней отвечает решение

$$G_1(y) = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (15), получим рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов $C_{n,1}$

$$\begin{aligned}
 C_{0,1} = 1, \quad C_{n,1} = [n(n+2)(n+3)(n+5)]^{-1} \times \\
 \times \{ (n+2) [4(n-1)(n^2+4n+1) + \\
 + \alpha_1(n+3)(n+4) + \alpha_4 - \alpha_2(n+3)] C_{n-1,1} - \\
 - [2(n-1)(n-2)(3n^2+9n+4) + \\
 + 3\alpha_1(n-2)(n+2)(n+3) - \\
 - 2\alpha_2(n+2)(n-2) + \alpha_3(n+1)(n+2) + \\
 + \alpha_4(n-2) - \alpha_5(n+1) + \alpha_7] C_{n-2,1} + \\
 + [4(n+1)(n-1)(n-2)(n-3) + \\
 + 3\alpha_1(n-2)(n+2)(n-3) - \alpha_2(n-3)(n-2) + \\
 + 2\alpha_3(n+1)(n-3) - \alpha_5(n-3) + \alpha_6n - \alpha_8] C_{n-3,1} - \\
 - (n-3) [(n-1)(n-2)(n-4) + \\
 + \alpha_1(n-2)(n-4) + \alpha_3(n-4) + \alpha_6] C_{n-4,1} \},
 \end{aligned}$$

здесь и в дальнейшем мы считаем, что $C_{n,k} = 0$, если $n < 0$.

Второе решение уравнения (15), линейно независимое с решением $G_1(y)$ и соответствующее корню $\rho_2 = -1$, будем искать в виде

$$G_2(y) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2} \ell^n(y) + \frac{\omega_1 \ln y}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (15), получаем рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов $C_{n,2}$

$$\begin{aligned}
 C_{0,2} = 1, \quad C_{1,2} = -\frac{1}{8} (6\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_4), \quad C_{2,2} = 1, \\
 C_{n,2} = [n(n-2)(n+3)(n+1)]^{-1} \times \\
 \times \{ n [4(n-1)(n^2-3) + \alpha_1(n+1)(n+2) + \alpha_4 - \alpha_2(n+1)] C_{n-1,2} - \\
 - [2(n-1)(n-2)(3n^2-3n-2) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +3\alpha_1 n(n-2)(n+1) - 2\alpha_2 n(n-2) + \\
 & \quad + \alpha_3 n(n-1) + \alpha_4(n-2) - \alpha_5(n-1) + \alpha_7] C_{n-2,2} + \\
 & + [4(n-1)^2(n-2)(n-3) + 3\alpha_1 n(n-2)(n-3) - \\
 & \quad - \alpha_2(n-3)(n-2) + 2\alpha_3(n-1)(n-3) - \\
 & \quad - \alpha_5(n-3) - \alpha_8 + \alpha_6(n-2)] C_{n-3,2} - \\
 & - (n-3)[(n-1)(n-2)(n-4) + \\
 & \quad + \alpha_1(n-2)(n-4) + \alpha_3(n-4) + \alpha_6] C_{n-4,2} + \\
 & \quad + \frac{\omega_1}{\Gamma_0^2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) \Delta_k \} ,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega_1}{\Gamma_0^2} &= \frac{1}{30} [2\alpha_3 - \alpha_5 + \alpha_7 - 2(4 + 12\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_4) C_{1,2}] , \\
 \Delta_k &= (4k^3 + 30k^2 + 62k + 30) C_{k,1} - \\
 & \quad - [12(k^2 - 1)(k + 3) + \alpha_4 + \\
 & \quad + \alpha_1(3k^2 + 18k + 26) - \alpha_2(2k + 5)] C_{k-1,1} + \\
 & + [6(k-1)(k-2)(2k+3) - 2\alpha_2(k-2) - \\
 & \quad - \alpha_5 + \alpha_3(2k+3) + 3\alpha_1(k-2)(2k+5)] C_{k-2,1} - \\
 & - [4(k-1)(k-2)(k-3) + 3\alpha_1(k-2)(k-3) + \alpha_6 + 2\alpha_3(k-3)] C_{k-3,1} .
 \end{aligned}$$

Третье решение уравнения (15), линейно независимое с решениями $G_1(y)$, $G_2(y)$ и соответствующее корню $\rho_3 = 0$, будем искать в виде

$$G_3(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,3} \ell^n + \frac{\omega_2 \ln y}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n + \frac{\omega_0 \ln y}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2} \ell^n. \quad (20)$$

Аналогично предыдущему получаем рекуррентную формулу для определения коэффициентов $C_n^{(3)}$, ($n \geq 4$)

$$\begin{aligned}
 C_{0,3} &= 1, \quad C_{1,3} = 0, \quad C_{2,3} = \frac{\alpha_7}{8}, \quad C_{3,3} = 1, \quad \omega_0 = 0, \\
 C_{n,3} &= [n(n+2)(n-3)(n-1)]^{-1} \times \\
 &\times \{ (n-1) [4(n-1)(n^2-2n-2) + \alpha_1 n(n+1) + \alpha_4 - \alpha_2 n] C_{n-1,3} - \\
 &- [2(n-1)(n-2)(3n^2-9n+4) + 3\alpha_1 n(n-2)(n-1) + \\
 &\quad (n-1)(n-2)(\alpha_3 - 2\alpha_2) + (n-2)(\alpha_4 - \alpha_5) + \alpha_7] C_{n-2,3} + \\
 &+ [4(n-1)(n-2)^2(n-3) + 3\alpha_1(n-1)(n-2)(n-3) + \\
 &\quad + (n-3)(n-2)(2\alpha_3 - \alpha_2) + (n-3)(\alpha_6 - \alpha_5) + \alpha_7] C_{n-3,3} - \\
 &- (n-3) [(n-1)(n-2)(n-4) + \\
 &\quad + \alpha_1(n-2)(n-4) + \alpha_3(n-4) + \alpha_6] C_{n-4,3} + \\
 &+ \frac{1}{60} [\alpha_8 - \alpha_7(8 + 12\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_4) / 4] \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(n-k-1) \Delta_k \}.
 \end{aligned}$$

Четвертое решение $G_0(y)$ уравнения (15), отвечающее корню $\rho_4 = 2$, согласно методу Фробениуса, следует искать в виде

$$\begin{aligned}
 G_0(y) &= y^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,4} \ell^n + \frac{s_0}{y^3} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n + \\
 &+ \frac{s_1}{y} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2} \ell^n + s_2 \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,3} \ell^n, \quad C_{0,4} = 1.
 \end{aligned}$$

Поскольку это решение не удовлетворяет краевому условию

$$\lim_{y \rightarrow \infty} G(y) = 1,$$

то его явный вид мы не приводим.

Заметим, что выбор постоянных $C_{0,1}$, $C_{0,2}$ и $C_{0,3}$ осуществляется таким образом, чтобы функции $G_1(y)$, $G_2(y)$ и $G_3(y)$ стремились к соответствующим функциям для сферы при малых относительных перепадах температуры [2, 3], т.е. чтобы при $\Gamma_0 \rightarrow 0$

$$G_1(y) \rightarrow \frac{1}{y^3}, \quad G_2(y) \rightarrow \frac{1}{y}, \quad G_3(y) = 1.$$

Учитывая неравенство

$$\ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0} \leq \frac{\Gamma_0}{1 + \Gamma_0} < 1,$$

можно показать, что ряды, определяющие функции $G_i(y)$, $i = 1, 2, 3$, равномерно сходятся при $y \geq 1$ и определяют ограниченные функции, которые можно дифференцировать нужное число раз. В дальнейшем нам потребуются производные до третьего порядка. Производя необходимые вычисления, получим

$$G_1'(y) = -\frac{1}{y^4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3) C_n^{(1)} - (n-1) C_{n-1,1} \right] \ell^n(y),$$

$$G_1''(y) = \frac{1}{y^5} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)(n+4) C_n^{(1)} - \right. \\ \left. - 2(n+3)(n-1) C_{n-1,1} + \right. \\ \left. + (n-1)(n-2) C_{n-2,1} \right] \ell^n(y),$$

$$G_1'''(y) = -\frac{1}{y^6} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)(n+4)(n+5) C_{n,1} - \right. \\ \left. - 3(n+3)(n+4)(n-1) C_{n-1,1} + \right. \\ \left. + 3(n+3)(n-1)(n-2) C_{n-2,1} + \right. \\ \left. + (n-1)(n-2)(n-3) C_{n-3,1} \right] \ell^n(y),$$

$$G_2'(y) = -\frac{1}{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) C_{n,2} - (n-1) C_{n-1,2} \right] \ell^n(y) +$$

$$+ \frac{\omega_1}{y^4} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y) + \omega_1 \ln y C_1^I(y),$$

$$G_2'''(y) = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) C_{n,2} - \\ - 2(n+1)(n-1) C_{n-1,2} + \\ + (n-1)(n-2) C_{n-2,2}] \ell^n(y) - \\ - \frac{\omega_1}{y^5} \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+7) C_{n,1} - 2(n-1) C_{n-1,1}] + \omega_1 \ln y G_1''(y),$$

$$G_2''''(y) = -\frac{1}{y^4} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)(n+3) C_{n,2} - \\ - 3(n+1)(n+2)(n-1) C_{n-1,2} + \\ + 3(n+1)(n-1)(n-2) C_{n-2,2} + \\ + (n-1)(n-2)(n-3) C_{n-3,2}] \ell^n(y) + \\ + \frac{\omega_1}{y^6} \sum_{n=0}^{\infty} [(3n^2 + 24n + 47) C_{n,1} - 3(n-1)(2n+7) C_{n-1,1} + \\ + 3(n-1)(n-2) C_{n-2,1}] \ell^n(y) + \omega_1 \ln y G_1''(y),$$

$$G_3'(y) = -\frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} [nC_{n,3} - (n-1) C_{n-1,3}] \ell^n(y) + \\ + \frac{\omega_2}{y^4} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y) + \omega_2 \ln y G_1'(y),$$

$$G_3''(y) = \frac{1}{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} [n(n+1) C_{n,3} - \\ - 2n(n-1) C_{n-1,3} + \\ + (n-1)(n-2) C_{n-2,3}] \ell^n(y) -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\omega_2}{y^5} \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+7) C_{n,1} - 2(n-1) C_{n-1,1}] + \omega_2 \ln y G_1''(y), \\
 G_3'''(y) = & -\frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} [n(n+1)(n+2) C_{n,3} - \\
 & -3n(n+1)(n-1) C_{n-1,3} + \\
 & +3n(n-1)(n-2) C_{n-2,3} + \\
 & + (n-1)(n-2)(n-3) C_{n-3,3}] \ell^n(y) + \\
 & + \frac{\omega_2}{y^6} \sum_{n=0}^{\infty} [(3n^2 + 24n + 47) C_{n,1} - \\
 & -3(n-1)(2n+7) C_{n-1,1} + \\
 & +3(n-1)(n-2) C_{n-2,1}] \ell^n(y) + \omega_2 \ln y G_1''(y).
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили общее решение уравнения (15)

$$G(y) = A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + A_3 G_3(y) + A_0 G_0(y), \quad (21)$$

где A_1, A_2, A_3 и A_0 – произвольные постоянные.

Постоянные A_1, A_2, A_3 и A_0 однозначно определяются из краевых условий (16). Очевидно, $A_0 = 0, A_3 = 1$. Для определения постоянных A_1 и A_2 имеем линейную систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 G_1(1) + A_2 G_2(1) = F_1 - G_3(1), \\ A_1 G_4(1) + A_2 G_5(1) = F_2 - G_6(1). \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение, поскольку ее главный определитель отличен от нуля в силу линейной независимости решений $G_1(y), G_2(y), G_3(y)$. Таким образом, имеем

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_1 - G_3(1) & G_2(1) \\ F_2 - G_6(1) & G_5(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1(1) & G_2(1) \\ G_4(1) & G_5(1) \end{vmatrix}}, \quad A_2 = \frac{\begin{vmatrix} G_1(1) & F_1 - G_3(1) \\ G_4(1) & F_2 - G_6(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1(1) & G_2(1) \\ G_4(1) & G_5(1) \end{vmatrix}}. \quad (22)$$

В результате проведенного исследования доказана следующая теорема.

Теорема. Функция $G(y) = A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + G_3(y)$ с коэффициентами, определяемыми формулой (22), является единственным решением уравнения (15), удовлетворяющим краевым условиям (16).

Перейдем теперь к определению компонентов массовой скорости $U_e(y, \theta)$ и давления $P_e(y, \theta)$, которые необходимы для нахождения общей силы (10), действующей на нагретую частицу, движущуюся равномерно в неизотермической газообразной среде. Учитывая, что

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty G(y) \cos \theta, \quad U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty g(y) \sin \theta,$$

получаем

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos \theta [A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + G_3(y)], \quad (23)$$

$$U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta [A_1 G_4(y) + A_2 G_5(y) + G_6(y)], \quad (24)$$

где

$$G_k(y) = \left(1 + \frac{\ell(y)}{2(1+\alpha)}\right) G_{k-3}(y) + \frac{y}{2} G'_{k-3}(y), \quad k = 4, 5, 6. \quad (25)$$

Поскольку явный вид функций $U_r^e(y, \theta)$ и $U_\theta^e(y, \theta)$ нам известен, то мы можем легко получить выражения для поля давления

$$\begin{aligned} P_e = P_{e\infty} + \frac{\mu_{e\infty} U_\infty}{R} t_{e0}^\beta \left\{ \frac{y^2}{2} G'(y) + y \left[3 + \frac{\beta-1}{2} y f(y) \right] G''(y) - \right. \\ \left. - \left[2 - y^2 f'(y) - \frac{\beta}{2} y^2 f^2(y) + (\beta-2) y f(y) \right] G'(y) + \right. \\ \left. + 2 \left[y^2 f''(y) + y f'(y) (4 + \beta y f(y)) - \frac{2}{3} f(y) \right] G(y) \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

$$f(y) = -\frac{\ell(y)}{(1+\alpha)y}.$$

Общая сила, действующая на частицу, интегрированием тензора напряжений по её поверхности в сферической системе координат, определяется по формуле (10). Производя необходимые вычисления, получаем

$$F_z = -4\pi R \mu_{e\infty} U_\infty A_2 n_z, \quad (27)$$

где n_z — единичный вектор в направлении оси Oz , A_2 — постоянная, которая определяется равенством (22) из граничных условий на поверхности нагретой частицы.

Проведем анализ выражения (27). Различным значениям постоянной A_2 соответствуют различные качественные картины движения частицы в неизотермической газообразной среде. Отметим, что сила (27) вычислена в предположении равномерности движения, которое возможно только в случае, если полная сила, действующая на частицу, равна нулю. Поскольку сила (27) пропорциональна скорости и обращается в нуль вместе с ней, то для реализации случая равномерного движения частицы следует предположить наличие некоторой сторонней силы, уравнивающей силу (27).

В зависимости от параметров задачи сила (27) может быть как силой сопротивления (в этом случае для поддержания движения необходима сила, действующая в направлении скорости, например, сила тяжести), так и силой тяги (тогда для поддержания движения должна существовать сила, действующая в направлении, противоположном скорости).

Возможна и другая интерпретация полученных результатов, когда заданной считается действующая на частицу внешняя сила, например, термофоретическая сила, фотофоретическая сила, диффузиофоретическая и т.д. В этом случае из равенства силы (27) внешней силе может быть найдена, например, скорость термофореза, скорость фотофореза нагретой частицы и т.д.

Заключение. В данном разделе исследовалось линеаризованное по скорости уравнение Навье-Стокса в сферической системе координат в предположении, что коэффициент теплопроводности частицы намного больше коэффициента теплопроводности газа (слабая угловая асимметрия распределения температуры). Рассматриваемое уравнение может быть сведено к однородному дифференциальному уравнению четвертого порядка, учитывающему зависимость динамической вязкости и плотности газообразной среды от температуры.

В каждой конкретной физической задаче, задавая явный вид зависимости вязкости среды от температуры, мы можем исследовать полученные уравнения, что, несомненно, представляет как теоретический, так и практический интерес для поиска аналитического решения полного уравнения Навье-Стокса (1).

В частном случае, когда

$$t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{1/(1+\alpha)}, \quad \mu_e(y, \theta) \approx \mu_{e\infty} t_{e0}^\beta(y)$$

, получено однородное дифференциальное уравнение (15) четвертого порядка для функции $G(y)$ с краевыми условиями (16), для решения которого

был применен известный в научной литературе метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов (метод Фробениуса). Доказана теорема существования и единственности полученного решения.

II. Гравитационное движение неравномерно нагретой твёрдой частицы сферической формы.

Введение. На входящие в состав аэродисперсных систем аэрозольные частицы могут действовать силы различной природы. Самым распространенным видом движения является гравитационное, т.е. движение аэрозольных частиц в поле силы тяжести, происходящее за счёт отличия их удельных весов и от удельного веса окружающей среды [2, 3]. На гравитационном движении основаны такие технологические процессы, как флотация, определение гранулометрического состава аэродисперсных систем, тонкая очистка газов и т.п. В частности, при очистке газов от загрязняющих их частиц и обогащении полезных ископаемых важно ускорить процесс выпадения осадка. Этого добиваются различными способами в зависимости от рода частиц и окружающей среды. Основу седиментометрии составляет взаимосвязь между скоростью движения аэрозольных частиц в газообразной среде и их размерами. Скорость движения частиц можно существенно корректировать за счет нагрева их поверхности (например, с помощью лазера), поскольку коэффициенты молекулярного переноса газообразной среды (вязкость, теплопроводность и плотность) существенно зависят от температуры. В связи с этим представляет как теоретический, так и практический интерес описание гравитационного движения неравномерно нагретых частиц в вязких неизотермических средах.

Среднее расстояние между частицами у значительной части, встречающихся на практике аэродисперсных систем намного больше характерного размера частиц. В таких условиях учет влияния аэрозоля на развитие физического процесса можно проводить, основываясь на знании законов динамики движения, тепло- и массообмена с бесконечной окружающей средой отдельных частиц. Поэтому изучение закономерностей движения отдельных частиц в вязких средах является важной актуальной задачей. Кроме того, важно отметить, что исследование движения отдельных частиц в неподвижной среде является составной частью изучения их поведения в произвольном потоке.

Постановка задачи. Рассмотрим движение нагретой твердой частицы сферической формы в вязкой газообразной среде в поле силы тяжести. В рамках сформулированных в части I допущений уравнения для скорости, давления и температур вне и внутри частицы запишутся в виде

$$\frac{\partial P_e}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_e \left[\frac{\partial U_j^e}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial U_m^e}{\partial x_m} \right] \right) + F_k, \quad m, k, j = 1, 2, 3; \quad (28)$$

$$\operatorname{div}(\rho_e \mathbf{U}_e) = 0, \quad (29)$$

$$\rho_e c_p (\mathbf{U}_e \cdot \nabla) T_e = \operatorname{div}(\lambda_e \nabla T_e), \quad (30)$$

$$\operatorname{div}(\lambda_i \nabla T_i) = -q_i, \quad (31)$$

где (x_1, x_2, x_3) декартовы координаты, $q_i(r, \theta)$ – плотность тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы, за счет которых и происходит нагрев частицы. Наличие источников тепла внутри частицы можно связать, например, с протеканием объемной химической реакции, с процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т.д. Наличие источников тепла внутри частицы приводит к тому, что средняя температура ее поверхности может существенно отличаться от температуры окружающей газообразной среды на большом расстоянии от этой частицы. Возникающее при этом повышение температуры поверхности частицы оказывает влияние на теплофизические характеристики газообразной среды (вязкость, теплопроводность, плотность) и тем самым может существенно повлиять на распределение полей скорости и давления в ее окрестности и, в конечном итоге, на силу и скорость ее гравитационного движения.

Целесообразно, как и в первой части, ввести систему координат, связанную с центром масс движущейся частицы. В этом случае задача сводится к анализу обтекания частицы радиуса R бесконечным плоскопараллельным потоком газа со скоростью \mathbf{U}_∞ ($\mathbf{U}_\infty \parallel Oz$), которая подлежит определению из условий задачи.

Описывать движение будем в сферической системе координат r, θ, φ , полярную ось $z = r \cos \theta$ направим по вектору ускорения свободного падения \mathbf{g} . Картина набегающего потока и направления координатных осей приведены на рис. 1.

Угол θ будем отсчитывать против часовой стрелки от точки, где поток набегаёт на сферу. Распределения скорости, давления и температуры обладают аксиальной симметрией относительно оси Oz . В такой системе отсчета нагретая частица неподвижна, а внешняя среда (газ) — движется (как целое)

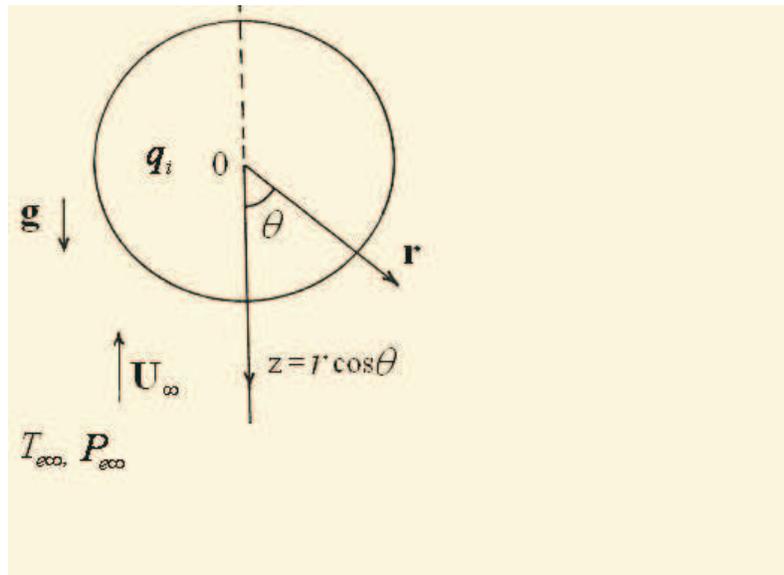


Рис. 1: Обтекание сферы.

в сторону, противоположную направлению фактического движения частицы, со скоростью $U_\infty = -U_p$ (U_p – скорость дрейфа нагретой частицы относительно лабораторной системы координат).

Эта система гидродинамических уравнений решается в сферической системе координат (r, θ, φ) со следующими граничными условиями:

$$U_r^e(y, \theta)|_{r=R} = U_\theta^e(y, \theta)|_{r=R} = 0, \quad T_e|_{r=R} = T_i|_{r=R}, \quad (32)$$

$$\left(\lambda_e T_e \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = \left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \sigma_0 \sigma_1 (T_i^4 - T_{e\infty}^4) \right) \Big|_{r=R}, \quad (33)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U_e = U_\infty \cos \theta e_r - U_\infty \sin \theta e_\theta, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} P_e = P_{e\infty}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} T_e = T_{e\infty}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} T_i \neq \infty, \quad (34)$$

т.е. мы считаем, что на поверхности частицы ($r = R$) выполнено условие прилипания для нормальной и касательной компонент массовой скорости U_e , имеют место равенство температур и непрерывность радиальных потоков тепла с учетом излучения на поверхности частицы (σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана, σ – интегральная степень черноты тела [13]), а также стандартные краевые условия при $r \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$.

Наличие больших относительных перепадов температуры между поверхностью частицы и далёкой от неё областью приводит к необходимости учитывать зависимость от температуры динамической вязкости μ_e , теплопроводности λ_e и плотности ρ_e :

$$\mu_e = \mu_{e\infty} t_e^\beta, \quad \lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha, \quad \lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^\omega, \quad \rho_e = \rho_{e\infty} t_e,$$

где $\mu_{e\infty} = \mu_e(T_{e\infty})$, $\lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty})$, $\lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_{e\infty})$, $\rho_{e\infty} = \rho_e(T_{e\infty})$, $t_k = T_k/T_{e\infty}$ ($k = e, i$) – безразмерная температура. Здесь и далее индекс e указывает на газообразную среду, индекс i – на принадлежность частице, а индекс ∞ означает параметры газообразной среды на бесконечности, т.е. на большом расстоянии от частицы.

Выражения для силы и скорости гравитационного движения нагретой твердой частицы сферической формы. При нахождении силы, действующей на нагретую твердую аэрозольную частицу, и скорости ее движения в гравитационном поле необходимо знать распределение температуры как вне частицы, так и внутри неё.

Интегрируя уравнения теплопереноса и учитывая степенной вид зависимости коэффициентов теплопроводности, получаем

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (35)$$

$$t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) = \left(B_0 + \frac{D_0}{y} + \frac{1}{y} \int_y^1 \psi_0(y) dy - \int_y^1 \frac{\psi_0(y)}{y} dy\right)^{1/(1+\omega)}, \quad (36)$$

где постоянные Γ_0 , B_0 и D_0 определяются из граничных условий (31), (32) на поверхности частицы:

$$\psi_0(y) = -\frac{R^2}{2\lambda_{i\infty}} \frac{1+\omega}{T_{e\infty}} y^2 \int_{-1}^1 q_i dx, \quad x = \cos \theta.$$

Среднее значение температуры поверхности частицы T_{iS} определяется из решения системы уравнений

$$\begin{cases} t_{iS} = t_{eS}, \\ \frac{\ell(1)}{1+\alpha} \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} t_{eS} = \frac{R^2}{3\lambda_{iS}T_{e\infty}} J_0 - \sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{iS}} (t_{iS}^4 - 1), \end{cases} \quad (37)$$

в которой

$$\lambda_{eS} = \lambda_{e\infty} t_{eS}^\alpha, \quad \lambda_{iS} = \lambda_{i\infty} t_{iS}^\omega, \quad t_{iS} = t_{i0}|_{y=1}, \quad t_{eS} = t_{e0}|_{y=1}, \\ T_{iS} = t_{iS} T_{e\infty}, \quad T_{eS} = t_{eS} T_{e\infty},$$

$$\ell(1) = \frac{\Gamma_0}{1+\Gamma_0}, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad J_0 = \frac{1}{V} \int_V q_i(r, \theta) dV,$$

а интегрирование ведется по всему объему частицы.

Из формулы (35) следует, что температура окружающей частицу газа изменяется с расстоянием от поверхности частицы, поэтому и динамическая вязкость также является функцией расстояния $\mu_e = \mu_e(y)$.

Подставляя (35) в выражение для динамической вязкости, имеем

$$\mu_e = \mu_{e\infty} t_{e0}^\beta. \quad (38)$$

Выражение (38) для динамической вязкости совпадает с формулой (14) первой части, и, следовательно, полученное аналитическое решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса применимо в нашем случае, т.е.

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos \theta (A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + G_3(y)), \quad (39)$$

$$U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta (A_1 G_4(y) + A_2 G_5(y) + G_6(y)), \quad (40)$$

где функции $G_1 - G_6$ определены равенствами (18)–(20), (25).

Подставляя (39), (40) в граничные условия (32) – (34), можем определить постоянные A_1 и A_2 . В частности, для коэффициента A_2 , имеем

$$A_2 = \frac{N_2}{N_1}, \quad (41)$$

где $N_1 = G_1(1)G_2'(1) - G_2(1)G_1'(1)$, $N_2 = G_1(1)G_3'(1) - G_3(1)G_1'(1)$.

Общая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы и в сферической системе координат находится по формуле (27)

$$\mathbf{F}_z = -4\pi R \mu_{e\infty} U_\infty A_2 \mathbf{n}_z, \quad (42)$$

где \mathbf{n}_z — единичный вектор в направлении оси Oz .

Подставляя в (42) определяемый равенством (41) коэффициент A_2 , получаем выражение для силы сопротивления неравномерно нагретой сферы

$$\mathbf{F}_z = 6\pi R \mu_{e\infty} U_\infty f_\mu \mathbf{n}_z, \quad f_\mu = \frac{2N_2}{3N_1}. \quad (43)$$

Сферическая частица, падающая под действием силы тяжести, приобретает постоянную скорость \mathbf{U}_p , как только действие силы тяжести уравновешивается гидродинамическими силами.

Сила тяжести, действующая на частицу, с учетом выталкивающей силы равна

$$\mathbf{F}_g = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_{iS} - \rho_{eS}) \mathbf{g}, \quad (44)$$

где \mathbf{g} — направленный вниз вектор ускорения свободного падения, ρ_{iS}, ρ_{eS} — плотность частицы и газообразной среды, взятые при средней температуре поверхности частицы, равной T_{iS} .

Приравнивая (43) к (44), учитывая, что $\mathbf{U}_\infty = -\mathbf{U}_p$, получаем выражение для скорости установившегося падения твердой неравномерно нагретой частицы сферической формы в поле силы тяжести

$$\mathbf{U}_p = h_\mu \mathbf{n}_z, \quad h_\mu = \frac{2(\rho_{iS} - \rho_{eS})}{9 \mu_{e\infty} f_\mu} R^2 g. \quad (45)$$

Таким образом, формулы (43) и (45) позволяют оценивать силу, действующую на неравномерно нагретую сферу, и скорость ее гравитационного падения с учетом зависимости плотности газообразной среды и коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) от температуры при произвольных относительных её перепадах между поверхностью частицы и далёкой от неё областью.

В случае, когда величина нагрева поверхности частицы достаточно мала, т.е. средняя её температура незначительно отличается от температуры окружающей среды на большом расстоянии от неё ($\Gamma_0 = 0$), зависимостью плотности и коэффициентов молекулярного переноса от температуры можно пренебречь, и тогда

$$G_1(1) = 1, \quad G'_1(1) = -3, \quad G_2(1) = 1, \quad G'_2(1) = -1, \quad G_3(1) = 1, \quad G'_3(1) = 0, \\ N_1 = 2, \quad N_2 = 3.$$

В этом случае формулы (42) и (44) переходят в известные выражения для сферы, полученные Стоксом [1, 2],

$$\mathbf{F}_S = 6\pi R \mu_{e\infty} \mathbf{U}_\infty, \quad \mathbf{U} = \frac{2(\rho_{i\infty} - \rho_{e\infty})}{9 \mu_{e\infty}} R^2 \mathbf{g}. \quad (46)$$

Здесь следует отметить, что коэффициенты молекулярного переноса и плотность берутся при температуре поверхности частицы, равной температуре окружающей среды (в нашем случае $T_{e\infty}$), т.е. эти формулы справедливы при малых относительных перепадах температуры.

Однако, из (35) видно, что константа Γ_0 зависит от средней относительной температуры t_{eS} , которая в случае неравномерного нагрева поверхности определяется из системы уравнений (37) и, следовательно, зависит от плотности тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы.

Отсюда следует, что и функции G_1 , G_2 и т.д. также зависят от плотности тепловых источников, поскольку в эти функции входит величина $\ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}$.

Чтобы оценить, какой вклад внутренние источника тепла (нагрев поверхности) оказывают на скорость гравитационного движения аэрозольной частицы сферической формы, можно рассмотреть наиболее простой случай, когда частица поглощает излучение как черное тело [13]. В этом случае поглощение происходит в тонком слое толщиной $\delta R \ll R$, прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной δR определяется равенством

$$q_i(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{I_0}{\delta R} \cos \theta, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, & R - \delta R \leq r \leq R, \\ 0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где I_0 — интенсивность падающего излучения.

В этом случае, вычисляя интеграл $\int_V q_i dV$, получим $\int_V q_i dV \approx \pi R^2 I_0$.

Таким образом, задавая интенсивность падающего излучения, мы можем оценить среднюю температуру поверхности частицы:

$$T_{iS} \approx T_{e\infty} \left(1 + \frac{1 + \alpha}{4\lambda_{e\infty} T_{e\infty}} R I_0 \right)^{1/(1+\alpha)}. \quad (47)$$

Из этой формулы следует, что средняя температура поверхности твердой частицы сферической формы зависит от ее радиуса и интенсивности падающего излучения. На рис.2 приведены значения функции f_μ в зависимости от интенсивности падающего излучения I_0 . Численные оценки проводились для частиц меди радиусом 100 мкм, взвешенных в воздухе при нормальных условиях.

Представляет также интерес сравнение полученных формул для силы сопротивления твердой нагретой частицы сферической формы с экспериментом, приведенным, например, в [14]. В экспериментальной работе [14] исследовалось влияние температуры газовой среды и температуры горящих угольных частиц (разогретых антрацитовых частиц) на коэффициент аэродинамического сопротивления с погрешностью не более 20%. Температура частиц, взвешенных в нейтральной (азотной) и в окислительной (воздушной и кислородной) газовых средах, изменялась от 20°C до 800°C. Размеры угольных частиц в опыте менялись в пределах от 0,1 мм до 1,0 мм.

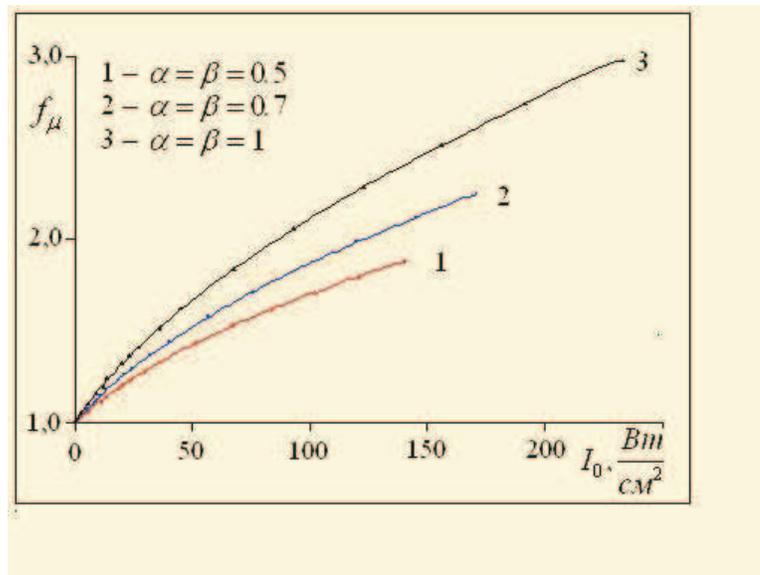


Рис. 2: График зависимости функции f_μ от интенсивности падающего излучения I_0 .

В частности, если на частицу падает поток монохроматического излучения (длина волны λ_0) интенсивностью I_0 , то поглощаемая ею энергия равна $\pi R^2 I_0 K_D$, где R – радиус частицы, K_D – фактор поглощения [13, 15], и эта энергия распределяется по объему сферы равномерно. Сферу можно считать равномерно нагретой. Это допущение справедливо в том случае, если коэффициент теплопроводности частицы намного больше коэффициента теплопроводности внешней среды и $\lambda_0 \gg R$. В экспериментальной работе [14] была предложена формула расчета коэффициента аэродинамического сопротивления частицы в неизотермических условиях

$$C_F^* = \frac{52}{\text{Re}} \left(\frac{T_0}{T_{e\infty}} \right)^m = \frac{\phi_F^*}{\text{Re}}, \quad \phi_F^* = 52 \left(\frac{T_0}{T_{e\infty}} \right)^m,$$

где $m = 1, 7$, T_0 – температура поверхности частицы.

Если привести формулу (43) к аналогичному виду, то она примет вид

$$C_F = \frac{\phi_F}{\text{Re}}, \quad \phi_F = 52 f_\mu t_{eS}.$$

На рис. 3 проведено сравнение коэффициентов ϕ_F и ϕ_F^* в интервале температур от 273^0K до 1273^0K . В диапазоне температур от 273^0K до 873^0K значения коэффициентов практически совпадают, а в диапазоне от 873^0K до 1273^0K различие с экспериментальными данными составляет до 15%.

Заключение. Получены аналитические выражения для силы, действующей на нагретую твердую частицу сферической формы, а также и для скорости ее движения в поле силы тяжести при произвольных относительных

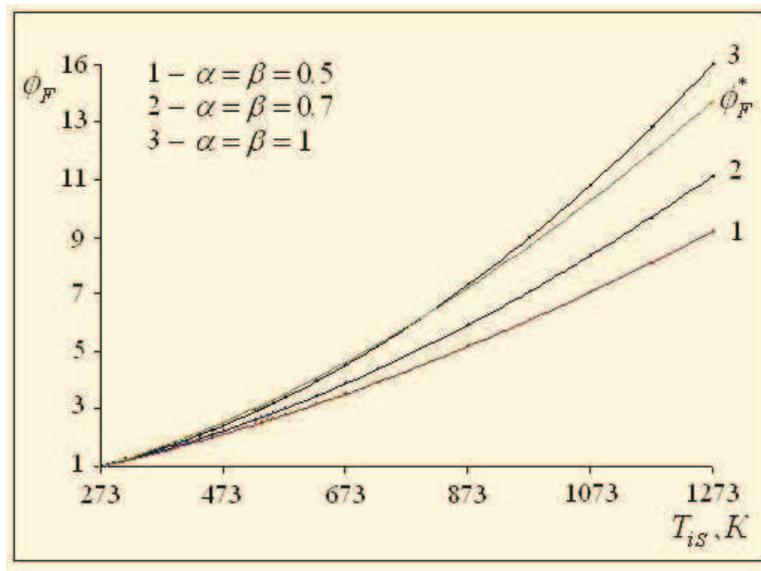


Рис. 3: График зависимости функции ϕ_F от средней температуры поверхности частицы T_{is} .

перепадах температуры. Указанные выражения являются аналогом формул Стокса.

Проведенный с помощью полученных формул численный анализ показал, что сила и скорость гравитационного движения существенно зависит от средней температуры поверхности частицы и показателей вязкости α и теплопроводности β . Сравнение полученных результатов с экспериментом показало, что различие с экспериментальными данными (относительная погрешность) составляет не более 15%.

Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ, проект № 07 – 01 – 00131.

Литература

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой жидкости / О.А.Ладыженская. – М.: Наука, 1970.
2. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г.Бреннер – Москва: Мир, 1960.

3. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. – М.: Наука, 1986.
4. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е.Кочин. – М.: ОНТИ, 1965.
5. Петкевич В.В. Основы механики сплошных сред / В.В.Петкевич. – М.: УРСС, 2001.
6. Победря Б.Е. Основы механики сплошных сред. Курс лекций / Б.Е.Победря, Д.В.Георгиевский. – М.: Физматлит, 2006.
7. Бретшнайдер С., Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета / С.Бретшнайдер. – М.: Химия, 1966.
8. Варгафтик Н.Б., Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н.Б.Варгафтик. – М.: Наука, 1977.
9. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М.Ван-Дейк. – М.: Мир, 1967.
10. Найфе А. Введение в методы возмущений / А.Найфе. – М.: Мир, 1984.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э.Камке. – М.: Наука, 1976.
12. Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А.Коддингтон, Н.Левинсон. – М.: Иностран. лит-ра, 1958.
13. Борен К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К.Борен, Д.Хафмен. – М.: Мир, 1986.
14. Бабий В.И. Аэродинамическое сопротивление частицы в неизотермических условиях / В.И.Бабий, И.П.Иванова. – М.: Теплоэнергетика, 1965.
15. Береснев С.А., Кочнева Л.Б., Суетин П.Е. // Оптика атмосферы и океана. – 2002. – 15. – С.5-6.

SOME PECULIAR PROPERTIES OF HEATED SPHERICAL PARTICLES IN VISCOUS NONISOTHERMIC GASEOUS MEDIA

N.V. Malay¹⁾, A.V. Glushak

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: malay@mail.ru

The mathematical method of the velocity linearized Navier-Stokes equation solution with the account of molecular transfer coefficients (viscosity, thermal conductivity) and gaseous medium density on the temperature is developed. Using the obtained solution, the problem of the particle surface heating influence on the medium strength force and on the velocity of gravitational motion is studied. It is supposed that the average temperature of particle surface may be essentially differ from the surrounding temperature. Numerical estimates have shown that the heating of particle surface influences essentially on the the medium strength force and on the velocity of gravitational fall. The comparison with known experimental data is done which has shown the divergence being no more than 15%. It points out on the correctness of the developed mathematical method.

Key words: velocity linearized Navier-Stokes equation, gravitational motion, motion of the heated weight particle.

ТЕРМО-, ФОТО- И ДИФФУЗИОФОРЕЗ ТВЁРДОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Н.В. Малай, Н.Н. Миронова

Белгородский государственный университет,
Белгород, ул. Студенческая 14, Белгород, 308007, Россия
e-mail: malay@bsu.edu.ru; e-mail: mironovanadya@mail.ru

В приближении Стокса проведено теоретическое описание термо-, фото- и диффузиофоретического движения аэрозольной частицы сфероидальной формы, внутри которой действуют неравномерно распределенные источники тепла. При рассмотрении движения предполагалось, что средняя температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры окружающей её газообразной среды. На основе решения газодинамических уравнений получено аналитическое выражение для силы и скорости термо-, фото- и диффузиофореза.

Ключевые слова: термофорез, фотофорез, диффузиофорез, аэрозольная частица, сфероид.

Введение. В современной науке и технике, в областях химических технологий, гидрометеорологии, охраны окружающей среды и т.д. широко применяют многофазные смеси. Наибольший интерес представляют дисперсные смеси, состоящие из двух фаз, одна из которых есть частицы, а вторая – вязкая среда (газ или жидкость). Газ (жидкость), со взвешенными в ней частицами называют аэрозолями (гидрозолями), а сами частицы – аэрозольными (гидрозольными). Гидро- и аэрозольные частицы могут оказать значительное влияние на протекание физических и физико-химических процессов различного вида в дисперсных системах (например, процессов массо- и теплообмена). Размер частиц дисперсной фазы находится в очень широких пределах: от макроскопических ($\sim 500\mu\text{м}$) до молекулярных ($\sim 10\text{нм}$) значений; варьирует соответственно и концентрация частиц – от одной частицы до высококонцентрированных систем ($> 10^{10}\text{ см}^{-3}$). В настоящее время с учетом развития нанотехнологий и наноматериалов большую перспективу представляет применение ультрадисперсных (нано-) частиц, например, в наноэлектронике, наномеханике и т.д. На входящие в состав дисперсных систем частицы могут действовать силы различной природы, вызывающие их упорядоченное движение относительно центра инерции вязкой среды. Так, например, седиментация происходит в поле гравитационной силы. В газообразных средах с неоднородным распределением температуры может возникнуть

упорядоченное движение частиц, обусловленное действием сил молекулярного происхождения. Их появление вызвано передачей некомпенсированного импульса частицам молекулами газообразной среды. При этом движение частиц, обусловленное, например, внешним заданным градиентом температуры и концентрации, называют термофорезом и диффузиофорезом. Если движение обусловлено за счет внутренних источников тепла, неоднородно распределенных в объеме частицы, то такое движение называется фотофоретическим.

Существенный вклад в изучение и применение аэрозольных систем внесли ряд отечественных и зарубежных исследователей: Г.С. Эпштейн, Ж.Р. Брок, Н.А. Фукс, В.М. Волощук, Б.В. Дерягин, П.Е. Суетин, О.А. Волковицкий, Ю.И. Яламов и др.

Среднее расстояние между аэрозольными частицами у значительной части встречающихся на практике аэродисперсных систем намного больше характерного размера частиц. В таких системах учет влияния аэрозоля на развитие физического процесса можно проводить, основываясь на знании законов динамики движения, а также тепло- и массообмена с бесконечной окружающей средой отдельных аэрозольных частиц. Без знания закономерностей этого поведения невозможно математическое моделирование эволюции аэрозольных систем и решение такого важного вопроса, как целенаправленное воздействие на аэрозоли.

Многие частицы, встречающиеся в промышленных установках и в природе, имеют форму поверхности отличную от сферической, например, сфероидальную (эллипсоид вращения). Поэтому изучение закономерностей движения отдельных частиц в газообразных (жидких) как однородных, так и неоднородных средах является актуальной задачей, представляющей значительный теоретический и практический интерес.

Постановка задачи. Рассматривается крупная твердая частица сфероидальной формы, взвешенная в бинарной газовой смеси с температурой T_∞ , плотностью ρ_g и вязкостью μ_g . Пусть в этой бинарной газовой смеси с помощью внешних источников поддерживается малый градиент температуры ∇T и концентрации ∇C . Здесь $C_1 + C_2 = 1$, $C_1 = n_1/n_g$, $C_2 = n_2/n_g$, $n_g = n_1 + n_2$, $\rho_g = \rho_1 + \rho_2$, $\rho_1 = m_1 n_1$, $\rho_2 = m_2 n_2$, m_1, n_1 и m_2, n_2 – масса и концентрация первого и второго компонентов бинарной газовой смеси. В настоящей работе учтем одновременное влияние на поведение твердой аэрозольной частицы сфероидальной формы трех перечисленных во введении факторов. При теоретическом описании процесса термо-, фото- и диффузиофоретического движения частицы будем предполагать, что в силу малости времени тепло-

вой релаксации процесс теплопереноса в системе частица-газообразная среда протекает квазистационарно. Движение частицы происходит при малых числах Пекле и Рейнольдса и при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности, т. е. когда $(T_s - T_\infty)/T_\infty \ll 1$. При выполнении этого условия коэффициенты теплопроводности, динамической и кинематической вязкости можно считать постоянными величинами [1]. Тогда используется гидродинамический метод, т. е. решаются уравнения гидродинамики с соответствующими граничными условиями и считается, что фазовый переход отсутствует, и частица однородна по своему составу.

Предположим также, что в некоторый момент времени на частицу падает плоская монохроматическая волна интенсивностью I_0 . Энергия электромагнитного излучения, поглощаясь в объеме частицы, преобразуется в тепловую энергию. Тепло неоднородно распределяется в объеме за счет теплопроводности, и локальное распределение возникших таким образом источников тепла может быть описано некоторой функцией q_p , называемой объемной плотностью внутренних источников тепла.

Описание термо-, фото- и диффузиофоретического движения частицы будем проводить в сфероидальной системе координат $(\varepsilon, \eta, \varphi)$ с началом в центре сфероида. Криволинейные координаты $\varepsilon, \eta, \varphi$ связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$x = c \operatorname{ch} \varepsilon \sin \eta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{ch} \varepsilon \sin \eta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{sh} \varepsilon \cos \eta, \quad (1)$$

$$x = c \operatorname{sh} \varepsilon \sin \eta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{sh} \varepsilon \sin \eta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{ch} \varepsilon \cos \eta, \quad (2)$$

где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – в случае сплюснутого сфероида ($a > b$, формула (1)) и $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ – в случае вытянутого сфероида ($a < b$, формула (2)); и b – полуоси сфероида. При этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно частицы таким образом, чтобы начало координат располагалось в центре сфероида, а ось OZ совпадала с осью симметрии сфероида.

В рамках сформулированных допущений распределение скорости U_g , давления P_g , температур T_g, T_p и концентрации первого компонента бинарной газовой смеси C_1 описываются системой уравнений [2]

$$\begin{aligned} \nabla P_g &= \mu_g \Delta \mathbf{U}_g, \quad \operatorname{div} \mathbf{U}_g = 0, \\ \Delta T_g &= 0, \quad \Delta T_p = -\frac{q_p}{\lambda_p}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Delta C_1 = 0.$$

Система уравнений (3) решалась со следующими граничными условиями в системе координат, связанной с центром масс сплюснутого сфероида [3]:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon = 0, \quad U_\eta = K_{TS} \frac{\nu_g}{T_g} (\nabla T_g \cdot \mathbf{e}_\eta) + K_{DS} D_{12} (\nabla C_1 \cdot \mathbf{e}_\eta), \\ \varepsilon = \varepsilon_0 : \\ T_g = T_p, \quad \lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial \varepsilon} = \lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial C_1}{\partial \varepsilon} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \rightarrow \infty : \\ T_g \rightarrow T_\infty + |\nabla T_g|_\infty c \operatorname{sh} \varepsilon \cos \eta, \\ C_1 \rightarrow C_\infty + |\nabla C_1|_\infty c \operatorname{sh} \varepsilon \cos \eta, \\ P_g \rightarrow P_\infty; \quad U_\varepsilon = U_\infty \cos \eta; \quad U_\eta = -U_\infty \sin \eta. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 : \quad T_p \neq \infty. \quad (6)$$

Здесь \mathbf{e}_η , \mathbf{e}_ε – единичные векторы сфероидальной системы координат; λ_g , λ_p – коэффициенты теплопроводности газа и частицы соответственно; ν_g , μ_g – кинематическая и динамическая вязкости; $H_\varepsilon = c\sqrt{\operatorname{ch}^2 \varepsilon - \sin^2 \eta}$ – коэффициент Ламе; K_{TS} и K_{DS} – коэффициенты теплового и диффузионного скольжений, которые определяются методами кинетической теории газов. Например, при коэффициентах аккомодации тангенциального импульса и энергии, равных единице, газокинетический коэффициент (в случае сферической частицы) $K_{TS} \approx 1,152$.

В граничных условиях (4) на поверхности частицы учтены условие непроницаемости для нормальной компоненты, тепловое и диффузионное скольжения для касательной компонент массовой скорости, равенство температур и непрерывность потоков тепла. Поверхности частицы соответствует координатная поверхность $\varepsilon = \varepsilon_0$. На большом расстоянии от частицы справедливы граничные условия (5), а конечность физических величин, характеризующих частицу при $\varepsilon \rightarrow 0$, учтена в (6).

Распределение температуры и концентрации вне и внутри частицы. Обезразмерим уравнения (3) и граничные условия (4)-(6), введя

безразмерные давление, температуру и скорость следующим образом: $p = P/P_\infty, t = T/T_\infty, V = U/U_\infty$.

В задаче кроме безразмерных чисел Рейнольдса и Пекле имеется еще два контролируемых малых параметра $\xi_1 = a|\nabla T_g|_\infty/T_\infty \ll 1$, характеризующее относительный перепад температуры на размере частицы и $\xi_2 = a|\nabla C_1|_\infty$. Поэтому решение краевой задачи (3)-(6) будем искать в виде разложения по степеням ξ_1, ξ_2

$$V_g = V_{g0} + \xi_1 V_{g1} + \dots, \quad p_g = p_{g0} + \xi_1 p_{g1} + \dots,$$

$$t = t_0 + \xi_1 t_1 + \dots, \quad C_1 = C_{10} + \xi_2 C_{11} + \dots \quad (7)$$

При нахождении силы и скорости термо-, фото- и диффузиофореза мы ограничимся поправками первого порядка малости по ξ_1, ξ_2 . Чтобы их найти, необходимо знать распределение скорости, давления, температуры и концентрации в окрестности сфероида. Подставляя (7) в (3), оставляя члены порядка ξ_1, ξ_2 , решая полученные системы уравнений методом разделения переменных, в конечном итоге, получаем для нулевых приближений $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$

$$t_{g0}(\lambda) = 1 + \gamma \lambda_0 \operatorname{arctg} \lambda, \quad (8)$$

$$t_{p0}(\lambda) = D + \delta \gamma \lambda_0 \operatorname{arctg} \lambda + \int_{\lambda_0}^{\lambda} f_0 \operatorname{arctg} \lambda d\lambda - \operatorname{arctg} \lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda} f_0 d\lambda, \quad (9)$$

$$C_{10} = C_{1\infty} \quad (10),$$

где $\lambda = \operatorname{sh} \varepsilon, \lambda_0 = \operatorname{sh} \varepsilon_0, \delta = \lambda_g/\lambda_p, \gamma = t_s - 1$ – безразмерный параметр, характеризующий нагрев поверхности сфероида; $t_s = T_s/T_\infty, T_s$ – средняя температура поверхности сфероида, определяемая формулой

$$\frac{T_s}{T_\infty} = 1 + \frac{1}{4\pi c \lambda_0 \lambda_g T_\infty} \int_V q_p dV, \quad (11)$$

$$D = 1 + (1 - \delta) \gamma \lambda_0 \operatorname{arctg} \lambda_0, \quad f_n = -\frac{2n + 1}{2\lambda_p T_\infty} \int_{-1}^1 c^2 q_p (\lambda^2 + x^2) P_n(x) dx,$$

$x = \cos \eta, P_n(x)$ – полиномы Лежандра [4].

В формуле (11) интегрирование ведется по всему объему частицы, а для первых приближений имеем

$$t_{g1} = \cos \eta \left(\frac{c\lambda}{a} + \Gamma(\lambda \operatorname{arcctg} \lambda - 1) \right), \quad (12)$$

$$t_{p1} = \cos \eta \left\{ B\lambda + \frac{3(1 - \lambda \operatorname{arcctg} \lambda)}{4\pi c^2 \lambda_p T_\infty} \int_V q_p z dV - \right. \\ \left. - \lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda} f_1(\lambda \operatorname{arcctg} \lambda - 1) d\lambda + \right. \\ \left. + (\lambda \operatorname{arcctg} \lambda - 1) \int_{\lambda_0}^{\lambda} f_1 \lambda d\lambda \right\}, \quad (13)$$

$$C_{11} = \cos \eta \left\{ \frac{c\lambda}{a} - \frac{c(1 + \lambda_0^2)}{((1 + \lambda_0^2) \operatorname{arcctg} \lambda_0 - \lambda_0)a} (\lambda \operatorname{arcctg} \lambda - 1) \right\}. \quad (14)$$

Константы В и Г, входящие в выражения для полей температур вне и внутри частицы (12), (13), определяются из соответствующих граничных условий на поверхности сфероида. Учитывая, что в дальнейшем нам потребуется выражение для коэффициента Г, приведем его явный вид

$$\Gamma = -\frac{c(1 - \delta)}{a\Delta} + \frac{3}{4\pi c^2 \lambda_p \lambda_0 T_\infty (1 + \lambda_0^2) \Delta} \int_V q_p z dV, \quad (15) \\ \Delta = (1 - \delta) \operatorname{arcctg} \lambda_0 + \frac{\delta \lambda_0}{1 + \lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_0}.$$

Определение силы и скорости термо-, фото- и диффузиофореза. Общее решение уравнений гидродинамики в сфероидальной системе координат, удовлетворяющих конечности при $\varepsilon \rightarrow \infty$ имеет вид

$$U_\varepsilon(\varepsilon, \eta) = \frac{U_\infty}{c \operatorname{ch} \varepsilon H_\varepsilon} \cos \eta \{ \lambda A_2 + [\lambda - (1 + \lambda^2) \operatorname{arcctg} \lambda] A_1 + c^2(1 + \lambda^2) \}, \\ U_\eta(\varepsilon, \eta) = -\frac{U_\infty}{c H_\varepsilon} \sin \eta \left\{ \frac{A_2}{\lambda} + [1 - \lambda \operatorname{arcctg} \lambda] A_1 + c^2 \lambda \right\}, \quad (16) \\ P_g(\varepsilon, \eta) = P_\infty + c \frac{\mu_g U_\infty}{H_\varepsilon^4} x(x^2 + \lambda^2) A_2.$$

Постоянные интегрирования A_1, A_2 определяются из граничных условий на поверхности сфероида, в частности,

$$\begin{aligned}
 A_2 = & -\frac{2c^2}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0} + \\
 & + 2K_{TS} \frac{c\nu_g}{U_\infty t_s} \cdot \frac{|\nabla T_g|_\infty}{T_\infty} \cdot \frac{\lambda_0 - (1 + \lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0} \times \\
 & \times \left(\frac{3a(1 - \lambda_0 \text{arcctg } \lambda_0)}{4\pi c^2 \lambda_0 \lambda_p T_\infty (1 + \lambda_0^2) \Delta} \int_V q_p z dV + c\delta \right) + \\
 & + 2K_{DS} D_{12} \frac{c^2 |\nabla C_1|_\infty}{U_\infty (\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0)}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Общая сила, действующая на сфероид, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности аэрозольной частицы [2] и имеет вид

$$F_z = -4\pi \frac{\mu_g U_\infty}{c} A_2. \quad (18)$$

С учетом коэффициента A_2 видим, что общая сила, действующая на твердую крупную аэрозольную частицу сфероидальной формы при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности, будет аддитивно складываться из силы вязкого сопротивления среды F_μ , термо-, фотофоретической силы F_{ph} , пропорциональной дипольному моменту плотности тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы, и диффузиофоретической силы F_{dh}

$$F = F_\mu + F_{ph} + F_{dh}, \quad (19)$$

$$F_\mu = 8\pi \mu_g U_\infty \frac{c}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0},$$

$$\begin{aligned}
 F_{ph} = & -8\pi K_{TS} \frac{\mu_g \nu_g}{t_s} \cdot \frac{|\nabla T_g|_\infty}{T_\infty} \cdot \frac{\lambda_0 - (1 + \lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0} \cdot \frac{c\delta}{(1 + \lambda_0^2)\Delta} \times \\
 & \times \left(1 - \frac{3a(\lambda_0 \text{arcctg } \lambda_0 - 1)}{4\pi c^3 \lambda_0 \lambda_g T_\infty} \int_V q_p z dV \right),
 \end{aligned}$$

$$F_{dh} = -8\pi K_{DS} D_{12} \mu_g \frac{c |\nabla C_1|_\infty}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2) \operatorname{arccctg} \lambda_0}. \quad (20)$$

Приравнивая общую силу к нулю, получаем выражение для величины скорости упорядоченного движения сфероидальной частицы

$$U = -\frac{b}{a} K_{TS} \frac{\nu_g}{t_s} \cdot \frac{|\nabla T_g|_\infty}{T_\infty} \cdot \frac{\delta(1 - (\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) \operatorname{arccctg} \lambda_0)}{\Delta \sqrt{1 + \lambda_0^2}} \times \\ \times \left(1 - \frac{3a(\lambda_0 \operatorname{arccctg} \lambda_0 - 1)}{4\pi c^3 \lambda_0 \lambda_g T_\infty} \int_V q_p z dV \right) - K_{DS} D_{12} |\nabla C_1|_\infty. \quad (21)$$

Чтобы получить силу и скорость термо-, фото- и диффузиофореза для вытянутого сфероида, необходимо заменить в (20), (21) λ на $i\lambda$, c – на $-ic$ (i – мнимая единица).

Анализ полученных результатов. Если не учитывать влияние внутренних источников тепла, (21) примет вид

$$U = -\frac{b}{a} K_{TS} \frac{\nu_g}{t_s} \cdot \frac{|\nabla T_g|_\infty}{T_\infty} \cdot \frac{\delta(1 - (\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) \operatorname{arccctg} \lambda_0)}{\Delta \sqrt{1 + \lambda_0^2}} - K_{DS} D_{12} |\nabla C_1|_\infty,$$

что совпадает с результатами, приведенными в [5].

В случае сферы формула (21) переходит в выражение для термо-, фото- и диффузиофоретической скорости твердой сферической частицы радиусом R , учитывающее влияние внутренних источников тепла [2, 3]:

$$U(a = b = R) = -K_{TS} \frac{\nu_g}{t_s} \cdot \frac{|\nabla T_g|_\infty}{T_\infty} \cdot \frac{2\delta}{1 + 2\delta} \left(1 + \frac{1}{4\pi R^2 \lambda_g T_\infty} \int_V q_p z dV \right) - \\ - K_{DS} D_{12} |\nabla C_1|_\infty. \quad (22)$$

Чтобы оценить, каков вклад внутреннего тепловыделения (неоднородного распределения плотности тепловых источников в объеме частицы) в скорость термо-, фото- и диффузиофореза твердой крупной аэрозольной частицы сфероидальной формы, необходимо конкретизировать природу тепловых источников. В качестве примера рассмотрим наиболее простой случай, когда частица поглощает излучение как черное тело, т.е. нагрев частицы происходит

в тонком слое толщиной $\delta\varepsilon \ll \varepsilon_0$. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной $\delta\varepsilon$ определяется с помощью формулы [6]

$$q_p = \begin{cases} -\frac{\operatorname{ch} \varepsilon \cos \eta}{c(\operatorname{ch}^2 \varepsilon - \sin^2 \eta)\delta\varepsilon} I_0, & \frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \pi, \quad \varepsilon_0 - \delta\varepsilon \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, \\ 0, & 0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (23)$$

где I_0 – интенсивность падающего излучения.

В выражение для скорости входит интеграл $\int_V q_p z dV$. Подставляя в него (23) и учитывая, что $\delta\varepsilon \ll \varepsilon_0$ после интегрирования, получим

$$\int_V q_p z dV = -\frac{2}{3} \pi c^3 I_0 \lambda_0^3 \left(1 + \frac{1}{\lambda_0^2}\right). \quad (24)$$

С учетом (24), выражение (21) примет вид

$$U = -\frac{b}{a} K_{TS} \frac{\nu_g}{t_s} \cdot \frac{|\nabla T_g|_\infty}{T_\infty} \cdot \frac{\delta(1 - (\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) \operatorname{arccctg} \lambda_0)}{\sqrt{1 + \lambda_0^2} \Delta} \times \\ \times \left(1 + \frac{a I_0 (1 + \lambda_0^2) (\lambda_0 \operatorname{arccctg} \lambda_0 - 1)}{2 \lambda_g T_\infty}\right) - K_{DS} D_{12} |\nabla C_1|_\infty. \quad (25)$$

В случае сферы выражение (25) примет вид

$$U(a = b = R) = -K_{TS} \frac{\nu_g}{t_s} \cdot \frac{|\nabla T_g|_\infty}{T_\infty} \cdot \frac{2\delta}{1 + 2\delta} \left(1 - \frac{I_0 R}{6 \lambda_g T_\infty}\right) - K_{DS} D_{12} |\nabla C_1|_\infty.$$

Литература

1. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета / С.Бретшнайдер. – М.: Химия, 1966.
2. Хашпель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж.Хашпель, Г.Бреннер. – М.: Мир, 1960.
3. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986.

4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э.Камке. – М.: Наука,1976.
5. Leong K.H. Thermophoresis and diffusiophoresis of large aerosolparticles of different shapes // Journal of Aerosol Science. – 1984. – 15;4. – P.511-517.
6. Борен К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К.Борен, Д.Хафмен. – М.: Мир,1986.
7. Яламов Ю.И., Метелкин Е.В. О движении аэрозольной частицы в неоднородно нагретой бинарной газовой смеси в гидродинамическом режиме // Журнал физической химии. – 1972. – XLVI;10. – С. 2639-2643.

TERMO-, PHOTO- AND DIFFUSIOPHORESIS OF THE SOLID AEROSOL PARTICLE OF SPHEROIDAL FORM

N.V.Malai , N.N.Mironova

Belgorod State University,

Studencheskaya St.,14, Belgorod, 308007, Russia e-mail: malay@bsu.edu.ru

At the Stokes approach, theoretical description of termo-, photo- and diffusiophoresis motions of spheroidal aerosol particle which has the distributed heat source in it. It is supposed that the average temperature of the particle surface slightly differs from the temperature of its gaseous environment. On the basis of the solution of gas dynamics equations, analytic expressions of the acting force and also the velocity of termo-, photo- and diffusiophoresis are obtained.

Key words: photophoresis, diffusiophoresis, termophoresis, aerosol particle, spheroid.

ТЕПЛОВЫЕ И ТРАНСПОРТНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ГАЛОИДНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД, ВОЗНИКАЮЩИЕ ВБЛИЗИ РАЗМЕЩЕННОГО В НИХ РАДИОАКТИВНОГО ИСТОЧНИКА

О.А. Почепцова¹⁾, З.Р. Маттис²⁾, А.Н. Никитин²⁾

¹⁾Белгородский государственный университет, Студенческая,14, Белгород, 308007, Россия

²⁾Объединенный институт ядерных исследований, лаборатория нейтронной физики им. И.М. Франка, Жолио-Кюри, 6, Дубна, Московская обл., 141980, Россия

В работе приведены результаты исследования свойств природной каменной соли (NaCl). Актуальность обусловлена тем, что данная порода по ряду свойств является одной из предпочтительных для строительства подземных хранилищ радиоактивных отходов и резервуаров природного газа. Однако в солях при определенных условиях повышается проницаемость, что связано с их высокой растворимостью. Жидкие включения, почти всегда присутствующие в галоидных толщах, способны приходить в направленное движение при наличии градиентной силы (температура, механические напряжения). Это резко ухудшает барьерные свойства хранилища. В связи с этим проведены экспериментальные нейтронографические исследования текстуры и температурной зависимости внутренних напряжений в образцах каменной соли. Рассмотрен способ определения значений температур и тепловых градиентов, возникающих в соли в окрестности теплоизлучающего источника (захоронение РАО). Также предложен вариант вычисления максимально возможных скоростей движения включений в указанных условиях.

Ключевые слова: барьерные свойства хранилищ, жидкие включения, радиоактивные отходы, растворы солей, тепловыделяющий источник.

1. Введение

В представленной работе отражены результаты исследования некоторых свойств природной каменной соли. Данная порода представляет большой практический интерес, поскольку по ряду причин она является одной из предпочтительных для сооружения подземных хранилищ радиоактивных отходов, а также для создания резервуаров природного газа. Эти задачи являются актуальными помимо использования солей в традиционных целях – химической и пищевой отраслях.

Соль обладает высокой теплопроводностью, что позволит при её использовании быстро отводить тепло от разогретого захоронения. Кроме того, соль – высокопластичный материал, способствующий залечиванию возникающих

под действием высоких температур и давлений различных трещин и нарушений. И, наконец, это одна из наиболее доступных для использования геологических пород.

Важнейшей характеристикой соли, которую необходимо учитывать при планировании сооружения подземных захоронений РАО и хранилищ газа, является ее жидкостная проницаемость. Несмотря на отсутствие воды в крупных масштабах, в соляных пластах почти всегда присутствуют мелкие включения (размером $10^{-6} - 10^{-2}$ м), содержащие соленасыщенный водный раствор [7]. Эти включения могут двигаться по трещинам и порам, неизбежно возникающим в области повышенных температур и давлений. Направления перемещений в этих случаях определяются текстурой формы (т.е. преимущественно направленными по форме трещин и вытянутых пор). Кроме того, при наличии градиентной силы в солях появляется дополнительный механизм эффективной проницаемости, обусловленный зависимостью растворимости соли в водном растворе от температуры (в случае градиента температур), а также стремлением к понижению упругой энергии системы (в случае градиента механических напряжений). В случае, когда включений будет много, они могут со временем сконцентрироваться в местах расположения контейнеров с отходами и способствовать обрушению стенок захоронения.

Таким образом, чтобы оценить значение проницаемости соляной породы, необходимо рассматривать оба возможных механизма. С этой целью был выполнен ряд экспериментальных и теоретических исследований.

1. На ядерном реакторе ИБР-2 с помощью дифрактометров СКАТ и ФДВР проведены структурные и текстурные измерения образца каменной соли, а также температурные зависимости внутренних решеточных напряжений.

2. Рассчитаны значения температур и тепловых градиентов, возникающих в соли в окрестности теплоизлучающего источника (захоронение РАО).

3. Вычислены максимально возможные скорости движения жидких включений в солях под действием градиента температуры.

2. Структурные и текстурные исследования образца каменной соли (NaCl) [5,6]

В качестве образца использовался порошок, изготовленный из природной каменной соли. С помощью дифрактометров СКАТ и ФДВР были определены параметры решетки при различной температуре и оценен порядок соответствующих внутренних напряжений (табл.1).

Таблица 1. Коэффициенты теплового линейного расширения α и вызываемые тепловым расширением решеточные напряжения σ .

T, °C	$\alpha \cdot 10^{-5}, 1/^\circ\text{C}$	$\sigma, \text{МПа}$
100	3,73231	107
150	3,90209	112
200	4,19786	116
250	4,45661	119
300	4,61178	119

Эти напряжения в свою очередь могут создавать градиентные поля напряжений, инициирующие перемещение водных включений. А также была измерена текстура данного образца (рис.1), определяющая анизотропию проницаемости. Эти факторы, наряду с другими, могут влиять на направление и величину скорости перемещения жидких включений в соли.



Рис. 1: Полюсная фигура (001) соли.

3. Расчет температурных характеристик соляного массива в окрестности тепловыделяющего источника [5,6]

Захоронение радиоактивных отходов можно представить в виде сферического тепловыделяющего контейнера радиусом $R[\text{м}]$ и мощностью теплового излучения $W[\text{Вт}]$, внутри и вне которого находится природная каменная соль. Используя уравнение теплопроводности, имеющее вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + f,$$

было получено в явном виде выражение для функции температуры $T(r, t)$, определяющей температуру соли на расстоянии r м от центра хранилища через время t [с]: $T(r, t) = T_0 + T(a, R, r, t)$, где $a^2 = \frac{k}{C\rho}$ – коэффициент температуропроводности ($\rho = 2180$ кг/м³ – плотность; $k = 9.923$ Вт/м°C – коэффициент теплопроводности; $C = 869.1$ Дж/кг°C – теплоемкость соли).

Расчеты проводились при начальной температуре соли $T_0 = 20^\circ\text{C}$, радиусе контейнера $R = 5$ м, интенсивностях излучения до $f = 100$ Вт/м³ и времени хранения до 100 лет (что соответствует условиям хранения низко- и среднеактивных отходов в отсутствии искусственного охлаждения). Результаты представлены в виде графика (рис.2).

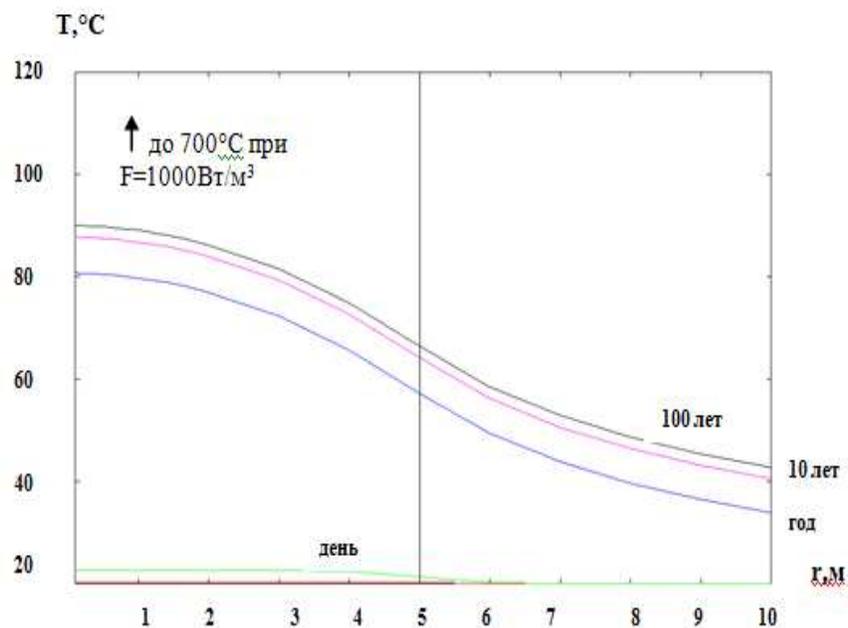


Рис. 2: Распределение температуры в радиусе 10 м от источника тепла (каверна радиусом 5 м) интенсивностью 100 Вт/м³ (через час, день, год, 10 лет и 100 лет хранения).

Как видно, возникающие температуры при этом не превышают 90°C , а максимальный градиент составляет 0.1°C на 1 см.

4. Определение верхней оценки скорости движения капли рассола в кристаллической соли под действием заданного температурного градиента

Механизм движения жидкого включения в поле градиента температуры заключается в следующем [1-4, 8]. В результате повышения растворимости

соли с увеличением температуры у горячей стороны включения возникает недосыщение раствора, а у холодной – пересыщение. Вследствие этого на разогретой стенке включения соль растворяется, посредством диффузии перемещается в растворе вдоль включения и на холодной стенке кристаллизуется. Основным условием стационарного движения включения является равенство последовательных потоков: растворения, диффузии и кристаллизации.

Рассмотрим каплю рассола, находящуюся в бесконечной кристаллической среде соли с заданным постоянным тепловым градиентом. Пусть раствор капли всюду имеет температуру T_0 и концентрацию соли, равную ее концентрации насыщения $C^n(T_0)$, т.е. будем считать, что капля "частично" теплоизолирована и не чувствует градиент температуры окружающей ее соли.

Начальные условия. В момент времени $t = 0$ снимаем теплоизоляцию и предполагаем, что в капле, "вокруг" T_0 , мгновенно устанавливается температурное распределение, соответствующее внешнему тепловому градиенту соли.

Будем рассматривать модель "одномерной капли", под которой понимается капля в форме параллелепипеда, длиной L , с фронтальной и тыльной поверхностями, площадью S . Боковые грани считаем нейтральными по отношению к процессам растворения и кристаллизации (т.е. растворение и кристаллизация разрешены только на фронтальной и тыльной поверхностях капли). Очевидно, что в этом случае процессы диффузии, определяющие изменение концентрации соли вдоль капли со временем, будут описываться одномерным уравнением. Этот факт оправдывает название модели – *одномерная капля*.

Разделим каплю на N клеток размером $\Delta x = L/N$. Согласно заданному постоянному тепловому градиенту соли $dT/dx = (T_1 - T_2)/L > 0$, температура первой клетки (фронтальной стенки) капли будет равна $T_1 > T_0$ и соответствующая концентрация насыщения $C^n(1) = C^n(T_1) > C^n(T_0)$. В последней клетке температура имеет значение $T_2 < T_0$, а концентрация насыщения $C^n(N) = C^n(T_2) < C^n(T_0)$.

Поскольку, согласно начальному распределению концентрации соли в капле в непосредственной близости фронтальной её части, появляется некоторое недосыщение, то считаем, что возможен поток растворения соли, пропорциональный величине этого недосыщения, т.е. $ПОТОК_r = K_r[C^n(1) - C^n(T_0)]$. Коэффициент K_r называется скоростью растворения. Он характеризует максимальное количество соли, которое может раствориться на передней стенке капли при данном недосыщении раствора за единицу времени, и определяет, на сколько может, в принципе, сдвигаться граница растворяющейся соли при

имеющимся недосыщением раствора капли за единицу времени [см/с].

Как известно, для растворения (разрушения кристаллической решетки) требуется определенное количество энергии. То есть при растворении граничный слой рассола, отдавая энергию, охлаждается. Будем считать, что это снижение температуры компенсируется мгновенным притоком тепловой энергии из окружающей каплю кристаллической матрицы соли. Таким образом, зависимость концентрации насыщения рассола от положения в капле $C^n(x)$ определяется заданным постоянным во времени температурным распределением $T(x)$.

На тыльной поверхности капли из-за наличия пересыщения в стартовый момент времени возможен поток кристаллизации соли, пропорциональный величине этого пересыщения, т.е. $ПОТОК_k = K_{kr}[C(N) - C^n(N)]$. Коэффициент K_{kr} называется скоростью кристаллизации. Он характеризует максимальное количество соли, которое может кристаллизоваться на задней стенке капли при данном пересыщении раствора за единицу времени, и определяет перемещение кристаллизующейся поверхности при указанном пересыщении за единицу времени [см/с]. Физически ясно, что скорость кристаллизации всегда будет меньше скорости растворения, $K_r > K_{rk}$. Как растворение, так и кристаллизация являются хаотическими процессами. Очевидно (при одинаковых теплоэнергетических условиях), что процессы разрушения упорядоченной кристаллической решетки NaCl на фронтальной поверхности будут происходить легче, чем создание упорядоченных элементов этой решетки из неупорядоченных молекул соли рассола на тыльной стенке капли.

В процессе кристаллизации выделяется энергия, и граничный слой рассола нагревается (его пересыщение падает). Однако по аналогии с процессом растворения мы считаем, что освобождаемая энергия (тепло) мгновенно передается от новообразованного слоя соли в окружающую среду, и температура тыльной поверхности капли остается равной T_2 .

Эти модельные упрощающие предположения, пренебрегающие наличием связи между динамикой растворения и кристаллизации и тепловыми характеристиками сложной системы "капля - кристаллическая матрица", допустимы для верхних оценок скорости движения капель. Любой учет пространственно-временного распределения тепловой энергии системы может привести только к замедлению процессов, определяющих это движение.

Другим упрощающим моментом, также оправданным для верхних оценок скоростей, является пренебрежение пороговыми эффектами движения капель, связанными с существованием "критических" концентраций недосы-

щения C_r^{kr} для процесса растворения и пересыщения C_k^{kr} (кристаллизации).

Рассматривая процесс растворения частей кристаллической стенки микроскопически, становится ясно, что из-за существования эффекта насыщения объем (длина) пограничного слоя рассола, в котором растворяется часть кристаллической стенки, должен быть намного больше объема (длины) этой растворяемой области. В то же время, растворенный материал должен немедленно уноситься в глубину пограничного слоя, поскольку в противном случае следующий слой стенки уже не сможет раствориться. Скорость переноса будет зависеть от степени недосыщения в пограничном слое рассола. Это в свою очередь определяется интенсивностью диффузии молекул рассола из пограничного слоя в глубину капли, а следовательно, и диффузией внутри капли, которая будет зависеть в том числе и от ее размера. Поэтому должно существовать некоторое критическое значение недосыщения, при котором в результате диффузии растворенной части соли не освобождается объем рассола у края капли, необходимый для растворения очередного слоя кристаллической стенки. При этом процесс растворения соли становится невозможным. Аналогичную картину можно рассмотреть и для процесса кристаллизации на противоположном крае капли. Таким образом, поскольку степени перенасыщения или недосыщения в пограничных слоях зависят, в конце концов, от градиента температуры, диффузионных характеристик рассола и размера капли, то рассмотренные критические значения приведут к пороговым явлениям, т.е. капли слишком маленького размера будут вообще неподвижны. И опять же, пренебрежение этими эффектами не влияет на верхнюю оценку скоростей движения капель.

Все кинематические процессы будем описывать с помощью дискретного аппарата. Так, численный расчет возникающих в капле потоков осуществляется через равные промежутки времени Δt . Выбор величины Δt поясним позже.

Первый временной шаг. За первый временной период Δt концентрация соли в первой клетке увеличится и станет равной

$$C_{нов}(1) = C_{стар}(1) + ПОТОК_r * \Delta t / \Delta x ,$$

а в последней клетке уменьшится:

$$C_{нов}(N) = C_{стар}(N) - ПОТОК_k * \Delta t / \Delta x .$$

Второй временной шаг. Поскольку возникает неравномерное распределение содержания соли в клетках капли, то за следующий промежуток времени ($t = 2\Delta t$) будет происходить диффузия молекул раствора от первой

к последней клетке капли. В нашем случае диффузия описывается одномерным уравнением $dC/dT = Dd^2C/dx^2$. Из этого уравнения для функции $C(n)$, представляющей собой концентрацию соли в n -ой клетке капли, в простейшем приближении для производных можно получить соотношения

$$C_{t+1}(1 < n < N) = C_t(n) + (D\Delta t/\Delta x^2)[C_t(n+1) - 2C_t(n) + C_t(n-1)],$$

$$C_{t+1}(1) = C_t(1) + (D\Delta t/\Delta x^2)[C_t(n+1) - C_t(n)],$$

$$C_{t+1}(N) = C_t(N) + (D\Delta t/\Delta x^2)[C_t(n-1) - C_t(n)].$$

Диффузионный поток будет пропорционален разнице между содержанием соли в соседних клетках капли. Так, например, срединный диффузионный поток равен

$$ПОТОК_d = (D/\Delta x)[C(n_s - 1) - C(n_s)].$$

За этот же промежуток времени снова возможны процесс растворения в первой клетке и кристаллизация соли в последней клетке капли.

В последующие временные шаги будем вычислять потоки всех трех происходящих процессов до тех пор, пока они не станут с указанной точностью равными между собой. Это соответствует установлению стационарного режима движения капли.

Таким образом, нам известно постоянное количество соли, растворяющееся, диффундирующее и кристаллизующееся в капле за единицу времени. Если разделить эту величину на плотность чистой соли, то получится искомое значение скорости движения капли.

Теперь поясним выбор введенных постоянных, а именно K_r , K_{kr} , Δx , Δt . Значение для скорости растворения мы взяли из статьи, посвященной кинетике растворения монокристаллов хлорида натрия в воде [10]. Она составила порядка $6 \cdot 10^{-3}$ см/с. Как уже было отмечено выше, $K_{kr} < K_r$, поэтому при расчетах рассматривались три случая: $K_{kr} = K_r$ (предельный), $K_{kr} = K_r/5$, $K_{kr} = K_r/10$. Ясно, что чем меньше величина K_{kr} , тем большее пересыщение остается на тыльной поверхности капли, и тем медленнее она движется.

Выбор величины Δx зависит от количества клеток N ($\Delta x = L/N$). Пусть, например, $N = 100$ клеток. Тогда $\Delta x = L/100$.

Приведенные выше диффузионные соотношения будут приводить к разумным результатам только в том случае, если выполняется условие $D\Delta t/\Delta x^2 \leq 1/4$ (условие устойчивости указанных соотношений). Таким образом, принимаем, что $\Delta t = \Delta x^2/4D$.

В табл. 2 представлены результаты расчетов скоростей движения включений, находящихся на расстоянии 1 м от сферического теплового источника интенсивностью 100 Вт/м^3 . Начальная температура $T_0=58.45^\circ\text{C}$, $\text{grad } T = 8 \cdot 10^{-2}^\circ\text{C}$ на 1 см, размеры включений 0.05-2 мм. По приведенным данным был построен график зависимости скорости движения капель от их размера (рис.3). Полученная зависимость хорошо согласуется с литературными данными и демонстрирует тот факт, что большие по величине включения движутся быстрее.

Табл. 2. Скорости "одномерного" включения, находящегося в соли на расстоянии 1 м от края ($R=5\text{м}$) сферического теплового источника интенсивностью 100 Вт/м^3 .

Размер включения (L), см	Скорости (см/с) в зависимости от соотношения K_1 и K_2		Путь S (см), пройденный включением за время t				
			час	день	год	10 лет	100 лет
0.01	$K_1=K_2$	$0.420151 \cdot 10^{-10}$	$1.51 \cdot 10^{-7}$	$3.63 \cdot 10^{-6}$	$1.32 \cdot 10^{-3}$	$1.32 \cdot 10^{-2}$	0.132
	$K_1=K_2$	$0.280777 \cdot 10^{-10}$	$1.01 \cdot 10^{-7}$	$2.42 \cdot 10^{-6}$	$8.85 \cdot 10^{-4}$	$8.85 \cdot 10^{-3}$	0.088
	$K_1=10K_2$	$0.198477 \cdot 10^{-10}$	$0.71 \cdot 10^{-7}$	$1.71 \cdot 10^{-6}$	$6.26 \cdot 10^{-4}$	$6.26 \cdot 10^{-3}$	0.063
0.05	$K_1=K_2$	$0.524252 \cdot 10^{-10}$	$1.89 \cdot 10^{-7}$	$4.53 \cdot 10^{-6}$	$1.65 \cdot 10^{-3}$	$1.65 \cdot 10^{-2}$	0.165
	$K_1=5K_2$	$0.466466 \cdot 10^{-10}$	$1.68 \cdot 10^{-7}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$	$1.47 \cdot 10^{-3}$	$1.47 \cdot 10^{-2}$	0.147
	$K_1=10K_2$	$0.409980 \cdot 10^{-10}$	$1.48 \cdot 10^{-7}$	$3.54 \cdot 10^{-6}$	$1.29 \cdot 10^{-3}$	$1.29 \cdot 10^{-2}$	0.129
0.1	$K_1=K_2$	$0.541007 \cdot 10^{-10}$	$1.95 \cdot 10^{-7}$	$4.67 \cdot 10^{-6}$	$1.71 \cdot 10^{-3}$	$1.71 \cdot 10^{-2}$	0.171
	$K_1=5K_2$	$0.508504 \cdot 10^{-10}$	$1.83 \cdot 10^{-7}$	$4.39 \cdot 10^{-6}$	$1.60 \cdot 10^{-3}$	$1.60 \cdot 10^{-2}$	0.160
	$K_1=10K_2$	$0.472983 \cdot 10^{-10}$	$1.70 \cdot 10^{-7}$	$4.07 \cdot 10^{-6}$	$1.49 \cdot 10^{-3}$	$1.49 \cdot 10^{-2}$	0.149
0.15	$K_1=K_2$	$0.546833 \cdot 10^{-10}$	$1.97 \cdot 10^{-7}$	$4.72 \cdot 10^{-6}$	$1.72 \cdot 10^{-3}$	$1.72 \cdot 10^{-2}$	0.172
	$K_1=5K_2$	$0.524252 \cdot 10^{-10}$	$1.89 \cdot 10^{-7}$	$4.53 \cdot 10^{-6}$	$1.65 \cdot 10^{-3}$	$1.65 \cdot 10^{-2}$	0.165
	$K_1=10K_2$	$0.498520 \cdot 10^{-10}$	$1.79 \cdot 10^{-7}$	$14.31 \cdot 10^{-6}$	$1.57 \cdot 10^{-3}$	$1.57 \cdot 10^{-2}$	0.157
0.2	$K_1=K_2$	$0.549793 \cdot 10^{-10}$	$1.98 \cdot 10^{-7}$	$4.75 \cdot 10^{-6}$	$1.73 \cdot 10^{-3}$	$1.73 \cdot 10^{-2}$	0.173
	$K_1=5K_2$	$0.532498 \cdot 10^{-10}$	$1.92 \cdot 10^{-7}$	$4.60 \cdot 10^{-6}$	$1.68 \cdot 10^{-3}$	$1.68 \cdot 10^{-2}$	0.168
	$K_1=10K_2$	$0.512352 \cdot 10^{-10}$	$1.84 \cdot 10^{-7}$	$4.43 \cdot 10^{-6}$	$1.62 \cdot 10^{-3}$	$1.62 \cdot 10^{-3}$	0.162

Ранее уже проводились эксперименты по наблюдению движения капельки водного раствора в соли под действием градиента температуры [4]. При этом были выявлены некоторые закономерности, в частности: а) движущаяся капля деформируется в направлении, перпендикулярном тепловому градиенту (сплющивается); б) после достижения некоторой степени деформации

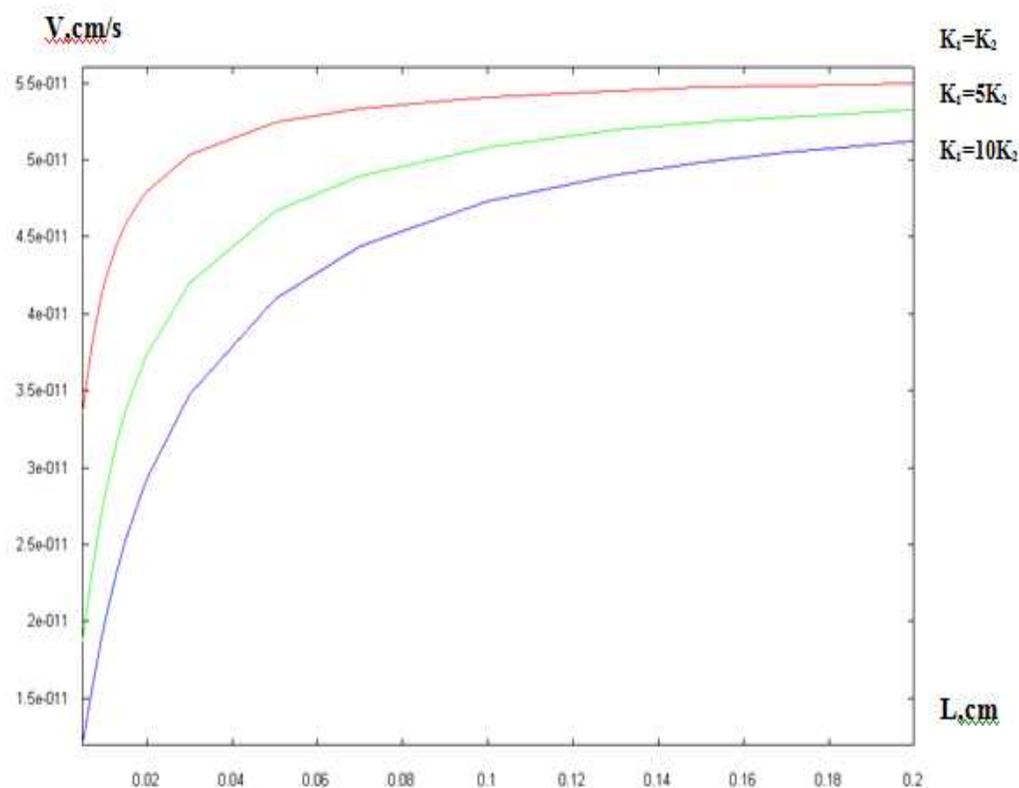


Рис. 3: Зависимость скорости движения включений от их размера при различных соотношениях между скоростью растворения (K_1) и кристаллизации (K_2).

края капли начинают отставать от движения ее средней части; и другие. Для систематического изучения и понимания этих интересных явлений потребовалось бы множество весьма тонких и трудоемких экспериментов. Однако, чтобы показать природу этих эффектов уже достаточным будет рассмотреть модель двумерной капли. Она представляет собой (аналогично одномерному случаю) параллелепипед, у которого процессы растворения и кристаллизации разрешены не только на фронтальной и тыльной, но и на двух взаимно противоположных боковых поверхностях. В этом случае при описании диффузии соли вдоль капли появляется система двумерных уравнений [9]. Опять, рассматривая происходящие процессы дискретно и внося некоторые допущения, можно её, в принципе, разрешить и в результате получить представление о поведении и характере движения двумерной капли. Усложняющим моментом по сравнению с одномерным случаем является то обстоятельство, что сильно упрощающий подход рассмотрения потоков и их выравнивания в стационарном режиме больше нельзя применять. Движение капли и ее деформацию необходимо описать в реальном пространстве, соблюдая при этом сохранение

объема воды рассматриваемой капли. Попыткам продемонстрировать эффекты, наблюдающиеся в экспериментах, посвящены текущие работы, о результатах которых будет сообщено отдельно.

Заключение

Таким образом, по проделанной работе можно сделать следующие выводы.

1. Проведены структурные в диапазоне температур 100-300°C исследования порошкового образца каменной соли. Определена температурная зависимость решеточных напряжений.

2. Измерены полюсные фигуры (ПФ) образца природной каменной соли, которые характеризуют достаточно слабую кристаллографическую текстуру породы.

3. Вычислено температурное распределение, возникающее в соляной породе вблизи размещенного в ней теплоизлучающего источника.

4. Получена теоретическая оценка максимальных скоростей движения включений в монокристалле NaCl под действием градиента температур, создаваемого радиоактивным источником интенсивностью излучения порядка 100Вт/м³.

Литература

1. Anthony T.R., Cline H.E. Thermal Migration of Liquid Droplets through Solids // Journal of Applied Physics.– 1971. – 42;9. – P.3380-3387.
2. Гегузин Я.Е., Кружанов В.С. Движение жидкого включения в монокристалле в поле градиента напряжений // Кристаллография.– 1979.– 24;4.– С.886-888.
3. Гегузин Я.Е., Дзюба А.С., Кружанов В.С. Движение газожидких включений в кристалле в поле температурного градиента // Кристаллография. – 1978.– 23;4 – С.880-882.

4. Гегузин Я.Е., Дзюба А.С., Кружанов В.С. Исследование поведения жидких включений в кристалле в поле температурного градиента // Кристаллография. – 1975.– 20;2.– С.383-391.
5. Никитин А.Н., Родкин М.В., Юрченко О.А., Иванкина Т.И., Васин Р.Н. К вопросу об экологической безопасности захоронений ВАО // Физико-химические и петрофизические исследования в науках о Земле. Материалы седьмой международ. конф. Борок, 25-26 сентября 2006.– ГЕОХИ, ИФЗ: М., 2006.– С.53-55.
6. Никитин А.Н., Кулаковский А.Л., Родкин М.В., Юрченко О.А., Иванкина Т.И., Васин Р.Н. О некоторых механизмах проницаемости горных пород в связи с геоэкологической безопасностью хранилищ ВАО // Геофизические исследования. – 2006. – 6. – С.85-95.
7. Никифоров А.С., Полуэктов П.П., Поляков А.С. О миграции включений рассола в хранилище радиоактивных отходов высокого уровня активности // ДАН СССР. – 1987.– 294;4.– С.860-864.
8. Pigford T.H. Migration of brine inclusions in salt // Nucl. Technology. – 1982.– 56;1.– P.93-101.
9. Тарасевич Ю.Ю., Константинов В.О., Аюпова А.К. Моделирование дендритного роста кристаллов соли в биологических жидкостях // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. серия Естественные науки. – 2001. – Спецвыпуск.
10. Товбин М., Барам О. Кинетика растворения монокристаллов хлорида натрия // Журнал физической химии. – 1949.– XXIII.– С.406-412.

THERMAL AND TRANSPORT FEATURES OF THE ROCK HALOID SALT ARISING NEAR TO THE RADIOACTIVE SOURCE PLACED IN THEM

O.A.Pocheptsova¹⁾, Z. Matthies²⁾, A.N. Nikitin²⁾

¹⁾Belgorod State University, Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia

e-mail: yurchenko_olga@mail.ru

²⁾Joint Institute for Nuclear Research, Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russia

The results of the study of natural rock salt (NaCl) properties are given in the work. Urgency is connected with that the given sort of rock is the preferred one on some its characteristics for the construction of underground vaults of nuclear waste and reservoirs of the natural gas. However, under some definite conditions, the permeability increases in salts that is connected with their high dissolutions. Some liquid inclusions nearly always being present in the rock salt may begin the directed motion at presence of the gradient force (caused by temperature or mechanical tensions). This sharply worsens the barrier properties of the vault. In this connection, the experimental neutronographic study of the texture and the temperature dependency of internal tensions are fulfilled in rock salt samples. The method of the determination of temperature value and heat gradient in salts near the heat radiating source is considered. Besides, the calculation method for possible maximal velocities of inclusion motions is proposed at the specified conditions.

Key words: barrier properties of vaults, liquid inclusions, nuclear waste, salt solutions, heat extracted source.

РАЗВИТИЕ ВРЕМЯ-ПРОЛЕТНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ СТРУКТУРЫ ЛЕГКИХ ЯДЕР НА НУКЛОТРОНЕ-М

А.А. Терехин^{1,2)}, И.Е. Внуков¹⁾, В.П. Ладыгин¹⁾, С.М. Пиядин²⁾,
С.Г. Резников²⁾, А.Н. Хренов²⁾

¹⁾Белгородский государственный университет, Студенческая,14, Белгород, 308007, Россия

²⁾Объединенный институт ядерных исследований, Жолио-Кюри, 6, Дубна, 141980, Россия

Приведены результаты тестирования прототипа элемента сцинтилляционного годоскопа для время-пролетной системы DSS-проекта с радиоактивным источником и с космическими мюонами. Показано, что оптические, временные и амплитудные характеристики данного годоскопа удовлетворяют требованиям, предъявляемым к время-пролетной системе установки для изучения структуры легких ядер на выведенном пучке ускорителя Нуклотрон-М (ОИЯИ).

Ключевые слова: время-пролетная система, сцинтилляционный счетчик, ионизационные потери.

Введение. Главной целью DSS-проекта [1] является систематическое изучение поляризационных наблюдаемых в адронных реакциях с участием поляризованных дейтронов при промежуточных и высоких энергиях на ускорителе Нуклотрон-М (ОИЯИ). Одним из экспериментов является измерение дифференциального сечения, тензорной анализирующей способности T_{20} и коэффициента спиновой корреляции C_{yy} реакции ${}^3\text{He}(d,p){}^4\text{He}$ при кинетической энергии дейтрона $T = 1.0 - 2.0$ ГэВ с использованием поляризованного дейтронного пучка Нуклотрона-М и поляризованной ${}^3\text{He}$ мишени [2], разработанной в CNS (Япония). Эксперименты, выполненные в RIKEN при энергиях ниже 270 MeV, показали, что коэффициент корреляции

$$C_{||} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} T_{20} + \frac{3}{2} C_{y,y}$$

для реакции ${}^3\text{He}(d,p){}^4\text{He}$ является уникальным способом изучения поведения D-состояния в дейтроне [3]. Цель эксперимента состоит в том, чтобы получить данные по $C_{||}$ в области энергий, где вклад от D-состояния дейтрона достигает максимума в импульсном приближении и реализовать эксперимент по определению матричного элемента реакции ${}^3\text{He}(d,p){}^4\text{He}$ модельно независимым способом. Эти данные помогут понять спиновую структуру дейтрона на малых расстояниях и эффекты ненуклонных степеней свободы.

Ключевым моментом реализации данного эксперимента является надежная идентификация вторичных частиц, для чего будет использована техника измерения времени пролета. Импульс детектируемых частиц будет в диапазоне 1.5-2.5 ГэВ/с, поэтому для надежного разделения протонов и дейтронов при базе пролета 8-10 м требуется временное разрешение время-пролётной системы не больше 0.5 нс.

В рамках DSS-проекта изготовлен и протестирован прототип элемента годоскопа из сцинтилляционных счетчиков на базе ФЭУ-85 для время-пролётной системы установки на выведенном пучке ускорителя Нуклотрон-М (ОИЯИ).

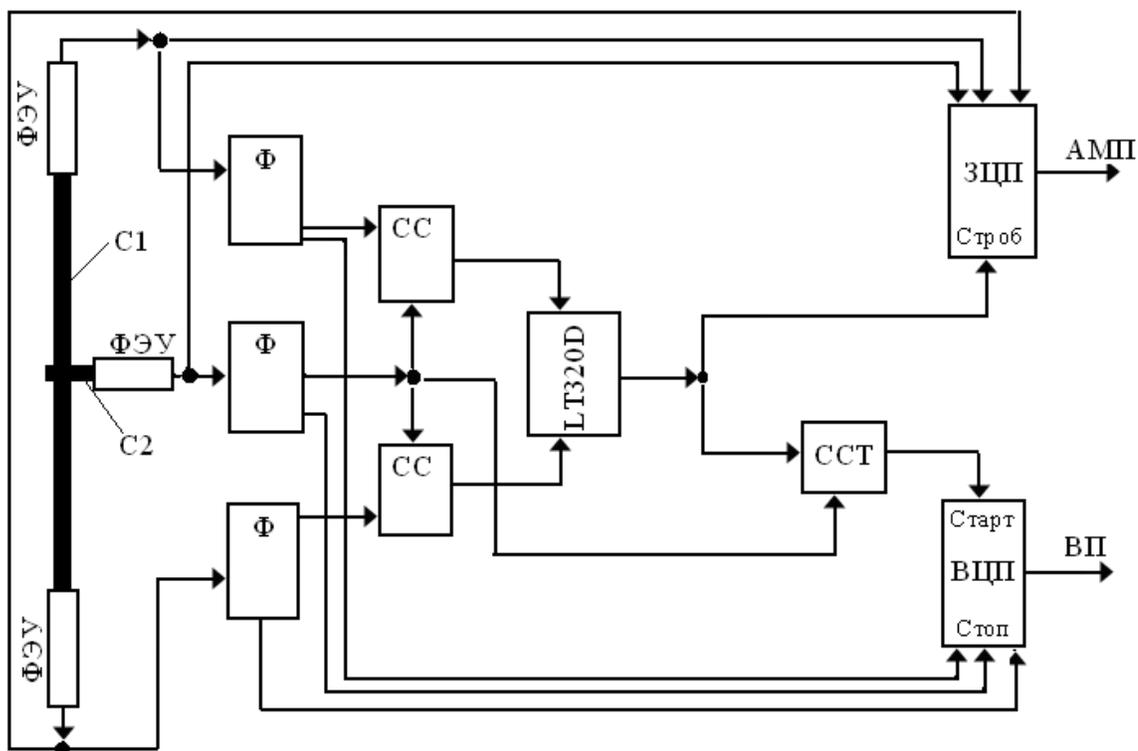


Рис. 1: Блок-схема экспериментальной установки для тестирования элемента годоскопа: С1,С2 – сцинтилляционные счетчики, Ф – формирователи с постоянным порогом (4Ф-115), СС – схемы совпадений (2СС-1511), ССТ – стробируемая схема совпадений, LT320D – логический триггерный модуль, ЗЦП – заряд-цифра-преобразователь (4ЗЦП-397), ВЦП – время-цифра-преобразователь (4ЗЦП-397).

1. Стенд для изучения свойств элемента сцинтилляционного годоскопа

Время-пролётная система установки по изучению структуры легких ядер на выведенном пучке ускорителя Нуклотрон-М (ОИЯИ) будет включать в

себя сцинтилляционные счетчики со съёмом информации с помощью фотоумножителей ХР2020 и годоскопической системы сцинтилляционных счетчиков на базе ФЭУ-85. С целью минимизации количества вещества предполагается, что толщина пластического сцинтиллятора для отдельного элемента годоскопа будет не более 4 мм. Длина пластического сцинтиллятора для счетчика должна быть в пределах 30-50 см. Поэтому важным моментом является изучение оптических свойств пластического сцинтиллятора, таких как длина затухания и скорость распространения света, а также временного и координатного разрешения детектора.

Для этой цели был создан стенд, схематический вид которого показан на рис.1. Изучаемый пластический сцинтиллятор [4] С1 размером 500x40x4 мм³ просматривался с двух сторон фотоумножителями ФЭУ-85 через световоды типа <рыба>, изготовленные из плексиглаза. Для измерения временных характеристик сцинтиллятора и организации триггера использовался дополнительный сцинтилляционный счетчик с размером пластического сцинтиллятора С2 40x40x4 мм³, просматриваемый через световод фотоумножителем ФЭУ-85. Заряженная частица, попадая в сцинтиллятор, за счет ионизационных потерь возбуждает световой сигнал, который собирается на фотокатод ФЭУ-85. Полученные сигналы снимаются с анодов ФЭУ-85, разветвляются и через линии задержки поступают на формирователи с постоянным порогом (Ф), а также на входы заряд-цифра-преобразователя (ЗЦП). Сформированные сигналы со счетчиков С1 и С2 поступают на 2 схемы совпадений (СС). Схемы служат для организации совпадений между сигналами со счетчика С2 и сигналом с левого и правого концов счетчика С1 соответственно.

Логические сигналы со схем совпадений СС поступают на входы логического триггерного модуля LT320D, который вырабатывает сигнал управления системой сбора данных и стробирующие сигналы для ЗЦП и стробируемой схемы совпадений (ССТ). В качестве стартового сигнала для ВЦП используется сигнал со счетчика С2, простробируемый триггерным сигналом для уменьшения фоновых срабатываний ВЦП. Для организации стенда были использованы стандартные модули, разработанные в ОИЯИ и выполненные в стандарте КАМАК: формирователи 4Ф-115, схемы совпадений 2СС-1511, триггерный логический модуль LT320D, преобразователи заряд-цифра 4ЗЦП-397 и время-цифра 4ВЦП-369.

Система сбора данных выполнена на базе крейт-контроллера ССРС5 в операционной системе FreeBSD [5]. Крейт-контроллер осуществляет управление логическим триггерным модулем LT320D и сбор информации с блоков ЗЦП

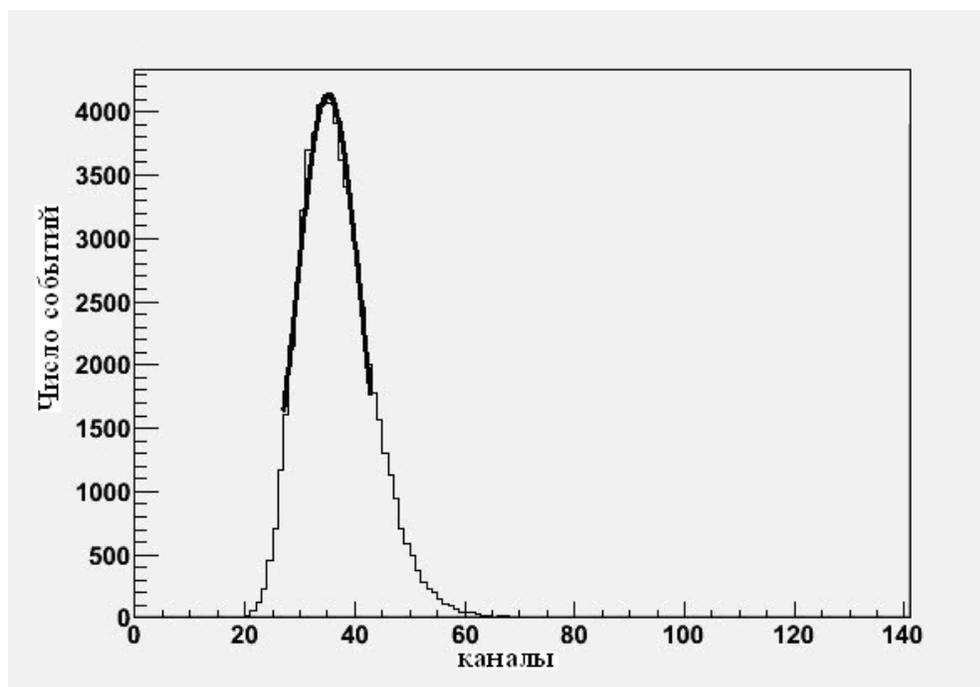


Рис. 2: Распределение амплитуды сигнала одного из ФЭУ. Линия – результат фитирования функцией нормального распределения.

и ВЦП. Считанная информация записывается в файл в двоичном формате.

2. Анализ экспериментальных данных

Анализ полученных данных был выполнен с использованием пакета для обработки и представления экспериментальных данных ROOT [6]. Типичное распределение амплитуды сигналы с одного из ФЭУ представлены на рис.2.

Для распределений амплитуд сигнала для каждого ФЭУ вычислялось значение наиболее вероятной амплитуды, для чего выполнялось фитирование распределения функцией нормального распределения. Полученная величина использовалась в дальнейшем для оценки свойств прототипа элемента годоскопа.

Длина затухания в пластическом сцинтилляторе вычислялась следующим образом. Для различного расположения радиоактивного источника (^{106}Ru вдоль пластического сцинтиллятора измерялось количество срабатываний ФЭУ, расположенных на левом и правом концах пластика. Зависимость числа срабатываний N от расстояния X между соответствующим краем пластического сцинтиллятора и положением радиоактивного источника аппроксимировалась функцией вида $N(X) = N_0 * \exp(-bX)$.

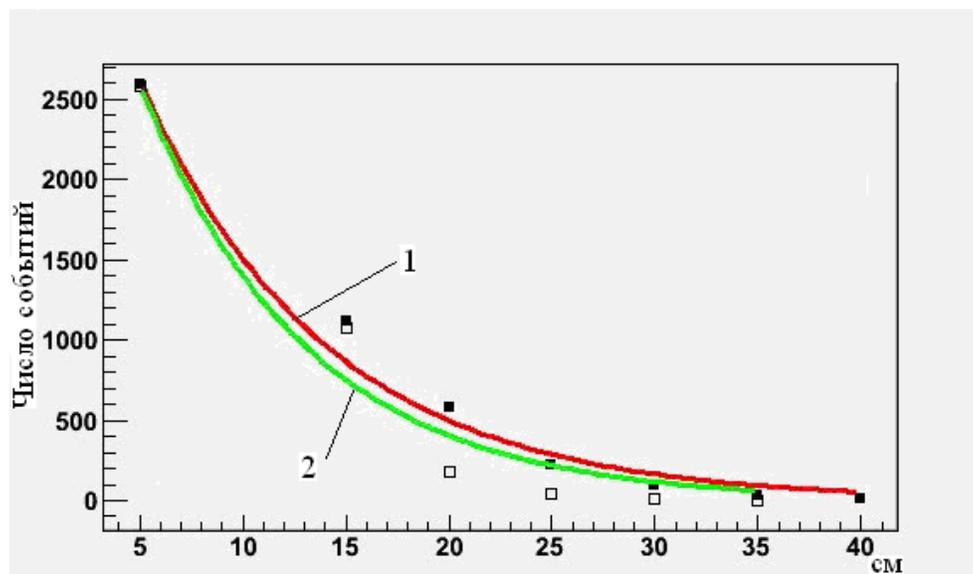


Рис. 3: Зависимость числа событий от расстояния между ФЭУ и радиоактивным источником, перемещаемым по сцинтилляционной пластине. Сплошными и открытыми квадратами обозначены данные, полученные левого и правого ФЭУ. Соответственно кривые 1 и 2 представляют собой аппроксимирующие функции.

Параметр фитирования b определяет длину затухания L как $L = 1/b$. По данным параметра b были получены значения $L_1 = 9.0498 \pm 0.0003$ см и $L_2 = 8.0841 \pm 0.0004$ см для левого и правого ФЭУ соответственно.

Аналогичный анализ был выполнен для космических мюонов. Полученные значения составляют $L_1 = 9.2 \pm 0.3$ см, $L_2 = 8.3 \pm 0.2$ см, что в пределах достигнутой точности совпадает со значениями, полученными для радиоактивного источника.

Оптическая однородность пластики определялась из анализа распределений по амплитудам сигнала для обоих ФЭУ. Для каждого положения центрального счетчика (радиоактивного источника) вычислялись максимумы распределения величин $f_1 = \frac{1}{2}(adc_1 + adc_2)$ и $f_2 = \sqrt{adc_1 * adc_2}$, где adc_1 и adc_2 – распределения амплитуд сигналов для правого и левого ФЭУ. Полученные данные аппроксимировались функцией вида $a + b * x$.

Из рис.4 видна приближенная независимость величин f_1 и f_2 от положения радиоактивного источника на протяжении всей длины сцинтилляционной пластины. Это свидетельствует об однородном распространении светового сигнала в пластине.

Значение средней скорости v распространения света в сцинтилляторе вычислялось следующим образом: для каждого положения радиоактивного ис-

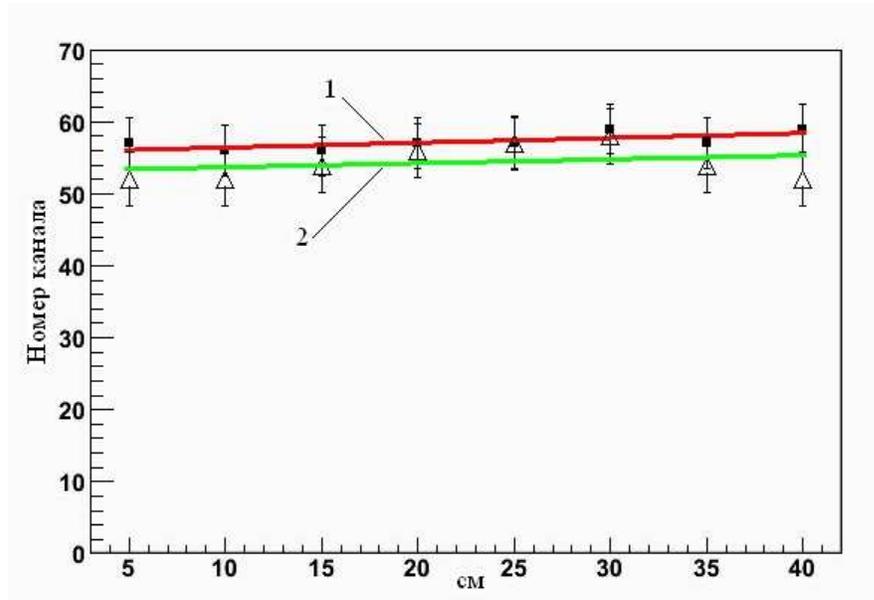


Рис. 4: Квадраты и треугольники соответствуют величинам f_1 и f_2 . Кривые 1 и 2 – результаты фитирования функцией вида $a + b * x$ для величин f_1 и f_2 соответственно.

точника вычислялась экспериментальная разница времен прихода сигнала на вход левого и правого ФЭУ. Полученная зависимость аппроксимировалась функцией вида $a + b * x$.

Скорость распространения светового сигнала v связана с параметром b формулой $v = 47C_{y,y}$ нс/ b , откуда было получено значение $v = 9.1 \pm 0.3$ см/нс. Эта величина совпадает со значением скорости распространения светового сигнала в сцинтилляторе, полученного на космических мюонах, которая составляет $v = 9.0 \pm 0.3$ см/нс.

Временное разрешение определялось из анализа распределений tdc_1 , tdc_2 и $tdc_1 - tdc_2$. Из этих распределений были получены временные разрешения для левого и правого ФЭУ, а также для стартового счетчика, которые составляют соответственно $\sigma_1 = 183 \pm 23$ пс, $\sigma_2 = 179 \pm 14$ пс и $\sigma_0 = 202 \pm 14$ пс. Координатное разрешение составляет $\delta x = 1.1$ см.

Заключение

Результаты исследований могут быть сформулированы следующим образом.

1. Изготовлен прототип элемента годоскопа сцинтилляционных счетчиков на базе ФЭУ-85 который является элементом время-пролётной системы для изучения структуры легких ядер.

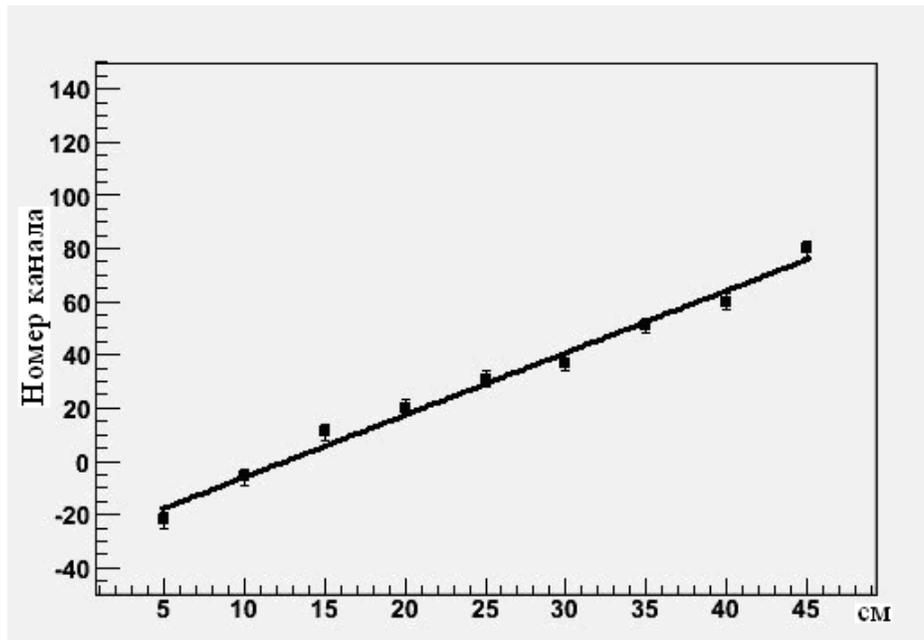


Рис. 5: Распределение значений $(tdc_1 - tdc_2)/2$ в зависимости от местоположения радиоактивного источника.

2. Исследованы свойства прототипа как с помощью радиоактивного источника, так и используя космические мюоны. Получены значения длины затухания и скорости распространения света в пластическом сцинтилляторе, предназначенном для изготовления годоскопа. Показана оптическая однородность используемого образца сцинтиляционной пластины. Получены величины временного и координатного разрешения элемента годоскопа.

3. Полученные оптические, временные и амплитудные характеристики прототипа элемента годоскопа удовлетворяют требованиям, предъявляемым к время-пролетной системе установки для изучения структуры легких на Ну-клотроне-М.

Следующим этапом будет изготовление годоскопа сцинтилляционных счетчиков на базе ФЭУ-85 с цифровым делителем напряжения [7].

Исследования частично поддержаны РФФИ (грант 07-02-00102а).

Литература

1. Ladygin V.P. et al., Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics // Proc. of the XIX Intern. Baldin Seminar on High Energy Physics Problems - Dubna: JINR, 2008. – XII;2. – P.67-72.
2. Uesaka T. et al. // Nucl.Instr.Meth. in Phys.Res.– 1998.– A402.– P.212.

3. Uesaka T. et al. // Phys.Lett. 2002. – B533.– P.1.
4. Аммосов В.В. // Препринт ОИЯИ Р13-88-779. – Дубна : ОИЯИ,1988.–7с.
5. Isupov A.Yu. // Czech.J.Phys.– 2005.– 55,A407.
6. [http: // root.cern.ru](http://root.cern.ru)
7. [http: // hvsys.dubna.ru](http://hvsys.dubna.ru)

DEVELOPMENT OF THE TIME-OF-FLIGHT SYSTEM FOR EXPERIMENTS ON THE STUDY OF THE LIGHT NUCLEI STRUCTURE OF NUKLOTRON-M

**A.A.Terekhin^{1,2)}, I.E.Vnukov¹⁾, V.P.Ladygin²⁾, S.M.Piyadin²⁾,
S.G. Reznikov²⁾, A.N.Hrenov²⁾**

¹⁾Belgorod State University, Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia e-mail: taa@uc.jinr.ru

²⁾Joint Institute of Nuclear Researches, Zholio-Kjuri St., 6, Dubna, 141980, Russia

The testing results of the scintillation hodoscope element prototype with radioactive source and cosmic muons are presented. It is demonstrated that optical, timing and amplitude parameters of the present hodoscope satisfy to requirements of the time-of-flight system of the setup on the extracted beam at accelerator Nuclotron-M (JINR) where the light nuclei structure are investigated.

Key words: time-of-flight system, scintillation hodoscope, ionizing losses.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

- Л.А. Александрова** – аспирант кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета гражданской авиации (г. Санкт-Петербург)
- Е.С. Антонова** – аспирант кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)
- И.А. Астионенко** – старший преподаватель кафедры прикладной математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета (г. Херсон)
- Э.Н. Береславский** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета гражданской авиации (г. Санкт-Петербург)
- Ю.П. Вирченко** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)
- И.Е. Внуков** – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой общей физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)
- А.В. Глушак** – доктор физико-математических наук, декан математического факультета, профессор кафедры математического анализа Белгородского государственного университета (г. Белгород)
- А.Н. Довбня** – доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАНУ, директор Института высоких энергий и ядерной физики Национального научного центра «Харьковский физико-технический институт» Национальной академии наук Украины (г. Харьков)
- В.В. Красильников** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры материаловедения и нанотехнологий Белгородского государственного университета (г. Белгород)
- Э.Л. Кушленников** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Национального научного центра «Харьковский физико-технический институт» Национальной академии наук Украины (г. Харьков)
- В.П. Ладыгин** – доктор физико-математических наук, начальник сектора Лаборатории физики высоких энергий Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна)
- Е.И. Литвиненко** – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета (г. Херсон)
- Н.В. Малай** – доктор физико-математических наук, декан физического факультета, профессор кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)
- З.Р. Матгис** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Лаборатории нейтронной физики Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна)
- Н.Н. Миронова** – аспирант кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)
- А.Н. Никитин** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Лаборатории нейтронной физики Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна)
- Е.В. Пестерев** – магистрант кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета гражданской авиации (г. Санкт-Петербург)

- С.М. Пиягин** – инженер Лаборатории физики высоких энергий Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна)
- О.А. Почепцова** – аспирант кафедры общей физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)
- С.Г. Резников** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Лаборатории физики высоких энергий Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна)
- М.А. Сапрыкин** – аспирант кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)
- А.А. Терёхин** – аспирант кафедры общей физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)
- А.Н. Хомченко** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета (г. Херсон)
- А.Н. Хренов** – ведущий инженер Лаборатории физики высоких энергий Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна)
- В.А. Цымбал** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Национального научного центра «Харьковский физико-технический институт» Национальной академии наук Украины (г. Харьков)

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Принимаются рукописи статей, написанные на русском (или на английском) языке по различным разделам математики и физики. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора (ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором (ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности с таким расчётом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором (ами) направлению исследований, но более широкому кругу, соответственно, математиков и физиков. Ни в коем случае рукопись не должна представлять собой краткий отчёт о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи (соответственно, условий проведения эксперимента). В связи с этим, рукопись должна быть структурирована – разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае рукопись должна содержать введение и заключение.

Во введении должна быть кратко описана проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объёме физико-математического знания, должна быть дана краткая история вопроса и описан полученный автором (ами) результат. В заключении должна быть дана краткая характеристика полученного результата и указано его значение в дальнейшем развитии темы работы.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются для обзорной статьи, с той лишь разницей, что её содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Принимаются также для публикации статьи, носящие методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается отдельным решением редколлегии журнала.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в математических текстах должны быть чётко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объём рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата А4 и должен быть написан шрифтом 14pt через два интервала. Объём обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлегией журнала.

Рукопись должна состоять из следующих частей:

1) основной содержательной части, представленной на русском или английском языках. Она должна начинаться указанием номера УДК того научного направления, которому посвящена статья. Затем следует название статьи. Оно должно состоять не более, чем из 20 слов. Далее приводится список авторов статьи, затем следует полностью основная часть рукописи;

2) аннотации на русском языке. Её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;

3) списка ключевых слов (не более 10-12).

- 4) перевода заглавия, аннотации и ключевых слов на английском языке;
- 5) списка литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;
- 6) данных об авторах статьи с указанием места работы точного почтового адреса и занимаемой должности. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить и на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;
- 7) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи;
- 8) укороченного заголовка статьи, состоящего не более, чем из пяти слов, который печатается в колонтитулах журнала.

В редакцию присылается электронный вариант рукописи. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). При этом нужно также прислать файл с pdf-копией рукописи для того, чтобы редакция имела возможность сравнения с авторским оригиналом при редактировании.

Если в рукописи имеются рисунки, то они должны быть подготовлены в формате "eps" и соответствующие им файлы необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам (п.7).

Особые требования к электронному набору в редакторе LaTeX следующие:

- 1) нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды;
- 2) выключные формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерации цифровых меток, соответствующих номеру формулы. Допускается применение для нумерации формул цифр, снабжённых штрихами. Однако, этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста. В случае, если в статье имеются части в виде приложений, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть не зависимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложения;
- 3) то же самое касается литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи. Их нужно отмечать цифрами в порядке появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.