

№12 (183) 2014

Выпуск 35

Научный рецензируемый журнал

Основан в 1995 г.

Журнал входит
в Перечень ведущих рецензируемых
научных журналов и изданий,
выпускаемых в Российской Федерации,
в которых рекомендуется публикация
основных результатов диссертаций
на соискание ученых степеней
доктора и кандидата наук

Учредитель:

Федеральное государственное
автономное образовательное
учреждение высшего
профессионального образования
«Белгородский государственный
национальный исследовательский
университет» (НИУ «БелГУ»)

Издатель:

НИУ «БелГУ»
Издательский дом «Белгород».

Журнал зарегистрирован
в Федеральной службе по надзору
за соблюдением законодательства
в сфере массовых коммуникаций
и охраны культурного наследия.

Свидетельство о регистрации
средства массовой информации
ПИ №ФС77-21121
от 19 мая 2005 г.

**Редакционная коллегия
журнала**

Главный редактор

О.Н. Полухин,
ректор НИУ «БелГУ», доктор
политических наук, профессор

Зам. главного редактора

И.С. Константинов,
проректор по научной и
инновационной деятельности
НИУ «БелГУ»,
доктор технических наук, профессор

Ответственные секретари:

В.М. Московкин,
доктор географических наук,
профессор кафедры мировой
экономики НИУ «БелГУ»

О.В. Шевченко,
зам. начальника УНИД НИУ «БелГУ»,
канд. исторических наук

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

Белгородского государственного университета
Математика Физика

BELGOROD STATE UNIVERSITY
SCIENTIFIC BULLETIN
Mathematics & Physics

Содержание

МАТЕМАТИКА

Проблема Варинга с натуральными числами специального вида. **С.А. Гриценко, Н.Н. Мотькина 5**

Проблемы Дирихле и Римана-Гильберта для аналитических функций. **А.С. Ефимушкин, В.И. Рязанов 19**

Макроскопические модели фильтрации жидкости из водоема в грунт. **Н.С. Ерыгина 37**

Асимптотическая формула для числа решений диофантова уравнения с полупростыми числами из коротких промежутков. **Н.А. Зинченко 49**

О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений. **С.Г. Пятков, Е.И. Сафонов 61**

Метод ассоциированных систем для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих однородные функции. **И.В. Рахмелевич 76**

О построении совершенных шифров замены с неограниченным ключом. **С.М. Рацеев, Н.П. Панов 84**

Явный вид решения начально-краевой задачи для аналога уравнения теплопроводности в банаховом пространстве.

Х.Г. Умаров 92

Главный редактор серии

Ю.П. Вирченко,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

Заместители главного редактора:

Н.В. Малай,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

А.М. Мейрманов,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

Ответственный секретарь

М.Н. Бекназаров,
кандидат физико-математических наук
(НИУ «БелГУ»)

Члены редколлегии:

С.В. Блажевич,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

А.В. Глушак,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

С.А. Гриценко,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

Р. Ковалла,
профессор (Технический университет,
Фрайберг, Германия)

В.В. Красильников,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

О.М. Пенкин,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

А.П. Солдатов,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

В.В. Сыщенко,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

Статьи представлены в авторской
редакции

Компьютерная верстка
Ю.П. Вирченко
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Подписано в печать 21.06.2014
Формат 60×84/8
Гарнитура Courier New
Усл.п.л. 23.25
Тираж 1000 экз.
Заказ 92

Подписные индексы в каталоге агентства
«Роспечать» – 81466

Оригинал-макет тиражирован
в издательском доме «Белгород»

Адрес: 308015, г.Белгород, ул.Победы,
85

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Метод дискретных особенностей в задачах дифракции на системе замкнутых цилиндрических поверхностей. **Ю.Н. Бахмат 117**

Когерентное рентгеновское излучение релятивистского электрона пересекающего мишень из аморфной и кристаллической пластин. **С.В. Блажевич, Р.А. Загороднюк, А.В. Носков, О.Н. Сатлер 126**

Продольный изгиб и выпучивание. Часть II: Стержень сплошного сечения. **В.И. Ванько, Е.С. Перельгина 144**

О распространении фронта насыщения гетерогенной химической реакции в аэрозольном облаке. **Г. Хоменко, П.О. Мчедлов-Петросян, В.Б. Зиммерман 167**

Инвариантные подмодели системы уравнений динамики газозвеси в случае трех пространственных переменных.

А.В. Панов 188

Гауссовское флуктуационное электромагнитное поле с почти-периодическими в среднем квадратичном реализациями.

Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко 200

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Гаусса и Лоренца.

Л.А. Минин, С.М. Ситник, С.Н. Ушаков 214

Задача синтеза ограниченных управлений. **В.И. Коробов, О.А. Тарасова 218**

Математические методы анализа статистических данных негауссовского типа. **М.М. Ошхунов, З.М. Ошхунова, М.А. Джанкулаева 221**

Различия постановок задач статистической механики.

Ю.П. Вирченко 225

Информация для авторов **228**

№12 (183) 2014

Issue 35

Scientific peer-reviewed journal

Founded in 1995

Journal included into the list of leading peer-reviewed journals and publications coming out in Russian Federation that are recommended for publishing key results of theses for Doktor and Kandidat degree-applicants.

Founder:

Federal state autonomous educational establishment of highest professional education "Belgorod National Research University".

Publisher:

Belgorod National Research University
National Research University Publishing House "Belgorod".

The journal is registered in Federal service of control over law compliance in the sphere of mass media and protection of cultural heritage.

Mass media registration certificate
ПИ №ФС77-21121 May 19, 2005.

Editorial Board of Journal

Editor-in-Chief

O.N. Polukhin,

Rector of Belgorod National Research University, Doctor of political sciences, Professor

Deputy of editor-in-chief

I.S. Konstantinov,

Vice-Rector on Scientific and Innovative Work of Belgorod National Research University, Doctor of technical sciences, Professor

Assistant Editors

V.M. Moskovkin,

Doctor of geographical sciences, Professor of world economy department

O.V. Shevchenko,

Deputy of Head of scientific and innovative activity department in Belgorod National Research University, candidate of historical sciences

**Belgorod State University
Scientific Bulletin**

Mathematics & Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

Белгородского государственного университета

Mathematics & Physics

Contents

MATHEMATICS

Waring's problem with special natural numbers. **S.A. Gritsenko, N.N. Motkina 5**

Problems of Dirichlet and Riemann-Hilbert for analytic functions. **A.S. Yefimushkin, V.I. Ryazanov 19**

Macroscopic models of liquid filtration from reservoir into porous medium. **N.S. Erygina 37**

Asymptotic formula of solutions number of Diophantine's equations with semisimple numbers in short intervals. **N.A. Zinchenko 49**

On some classes of linear inverse problems for parabolic systems of equations. **S.G. Pyatkov, E.I. Safonov 61**

Method of associated systems for solving of ordinary differential equations containing homogeneous functions. **I.V. Rakhmelevich 76**

On constructions of perfect codes of substitution with unbounded key. **S.M. Ratseev, N.P. Panov 84**

Explicit solution of the initial-boundary value problem of the analogue of heat equation in banach space. **Kh.G. Umarov 92**

Editorial Board of Journal Series

Editor-in-Chief

Yu.P. Virchenko,
Professor of Belgorod National Research
University

Deputies of editor-in-chief

N.V. Malay,
Professor of Belgorod National Research
University

A.M. Meirmanov,
Professor of Belgorod National Research
University

Responsible Secretary

M.N. Beknazarov,
Associated Professor of Belgorod National
Research University

Members of Editorial Board

S.V. Blazhevich,
Professor of Belgorod National Research
University

A.V. Glushak,
Professor of Belgorod National Research
University

S.A. Gritsenko,
Professor of Belgorod National Research
University

R. Kawalla,
Professor of Technische Universität
Bergakademie Freiberg

V.V. Krasilnikov,
Professor of Belgorod National Research
University

O.M. Penkin,
Professor of Belgorod National Research
University

A.P. Soldatov,
Professor of Belgorod National Research
University

V.V. Syshchenko,
Professor of Belgorod National Research
University

Proposed articles are given in authors'
editing

Dummy layout:
Yu.P. Virchenko
e-mail: virch@bsu.edu.ru

Passed for printing 21.06.2014
Format 60×84/8
Typeface Courier New
Printer's sheets: 23.25
Calculation: 1000 copies
Order 92

Subscription reference in Rospechat'
agency catalogue: 81466

Dummy layout is replicated at Belgorod
National Research University Publishing
House "Belgorod"

Address: 85, Pobedy str., Belgorod,
Russia, 308015

MATHEMATICAL PHYSICS, MATHEMATICAL MODELING

Method of discrete singularities in diffraction problems of closed cylindrical surfaces. **Yu.N. Bakhmat 117**

Coherent X-ray radiation of relativistic electron intersecting amorphous and crystal plates. **S.V. Blazhevich, R.A. Zagorodnyuk, A.V. Noskov, O.N. Satler 126**

Longitudinal bend and swelling. Part II: Rod of complete cross section. **V.I. Vanko, E.S. PereLygina 144**

Spreading of a saturation front of heterogeneous chemical reaction through an aerosol cloud. **G. Khomenko, P.O. Mchedlov-Petrosyan, W.B. Zimmerman 167**

Invariant submodels of equations system of mixture dynamics of gas and small particles in the case of three spatial variables. **A.V. Panov 188**

Gaussian fluctuation electromagnetic field with quadratically average almost-periodic random realizations. **Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko 200**

SHORT COMMUNICATIONS

Properties of coefficients of node functions of uniform expansions with integer shifts of Gauss' and Lorentz' functions. **L.A. Minin, S.M. Sitnik, S.N. Ushakov 214**

Problem of synthesis of bounded controls. **V.I. Korobov, O.A. Tarasova 218**

Mathematical models of statistical data analysis of non-gaussian type. **M.M. Oshkhunov, Z.M. Oshkhunova, M.A. Dzhankulaeva 221**

Differences of problem settings in statistical mechanics. **Yu.P. Virchenko 225**

Information for authors **225**



MSC 11P05

ПРОБЛЕМА ВАРИНГА С НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С.А. Гриценко, Н.Н. Мотькина

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, 308015, Белгород, Россия, e-mail: Motkina@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе решается вариант проблемы Варинга с натуральными числами x , такими, что $a < \{\eta x^n\} < b$, где a и b — произвольные числа из отрезка $[0, 1]$, η — квадратичная иррациональность.

Ключевые слова: аддитивные задачи, проблема Варинга, число решений, асимптотическая формула, квадратичная иррациональность.

1. Введение. Настоящая работа является продолжением исследований авторов аддитивных задач с числами из специальных множеств. Для числа решений $I_{3,1}(N)$ задачи Гольдбаха о представимости нечетного натурального N в виде суммы трех простых чисел:

$$p_1 + p_2 + p_3 = N$$

в 1937 г. И.М. Виноградов получил асимптотическую формулу [1], а именно доказал, что:

$$I_{3,1}(N) \sim \frac{N^2}{2(\log N)^3} \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right).$$

В 1938 г. Хуа Ло-Кен доказал [4], что достаточно большое натуральное N , $N \equiv 5 \pmod{24}$, представимо суммой квадратов пяти простых чисел (задача Хуа Ло-Кена):

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N.$$

Для числа представлений $I_{5,2}(N)$ Хуа показал [7], что

$$I_{5,2}(N) \asymp \frac{N^{3/2}}{(\log N)^5}.$$

В 1770 г. Ж. Лагранж доказал, что каждое натуральное число есть сумма не более четырех квадратов натуральных чисел (задача Лагранжа):

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = N.$$



Для числа решений $I_{4,2}(N)$ задачи Лагранжа известно, что [4]

$$I_{4,2}(N) = \pi^2 N \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a,q)=1}} S_{a,q}^4 e^{-2\pi i N a/q} + O(N^{17/18+\varepsilon}),$$

где

$$S_{a,q} = \sum_{j=1}^q e^{2\pi i a j^2/q}.$$

Пусть η — квадратичная иррациональность, a и b — произвольные действительные числа, $0 \leq a < b \leq 1$. Ранее нами получены следующие результаты.

Теорема 1 [5]. Для числа решений $J_{3,1}(N)$ задачи Гольдбаха с простыми p_i , $a < \{\eta p_i\} < b$, $i = 1, 2, 3$, при любом фиксированном положительном C справедливо равенство

$$J_{3,1}(N) = I_{3,1}(N) \sigma_3(N, a, b) + O(N^2 \log^{-C} N),$$

где

$$\sigma_3(N, a, b) = \sum_{|m| < \infty} e^{2\pi i m(\eta N - 1,5(a+b))} \frac{\sin^3 \pi m(b-a)}{\pi^3 m^3}.$$

Теорема 2 [6]. Пусть $J_{5,2}(N)$ — число решений задачи Хуа Ло-Кена с простыми числами p_i , $a < \{\eta p_i^2\} < b$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Для достаточно большого $N \equiv 5 \pmod{24}$ справедлива формула

$$J_{5,2}(N) = I_{5,2}(N) \sigma_5(N, a, b) + O(N^{3/2-0,00002}),$$

где

$$\sigma_5(N, a, b) = \sum_{|m| < \infty} e^{2\pi i m(\eta N - 2,5(a+b))} \frac{\sin^5 \pi m(b-a)}{\pi^5 m^5}.$$

Теорема 3 [7]. Число решений $J_{4,2}(N)$ задачи Лагранжа в целых числах l_i , $a < \{\eta l_i\} < b$, $i = 1, 2, 3, 4$ для любого положительного малого ε выражается формулой

$$J_{4,2}(N) = (b-a)^4 I_{4,2}(N) + O(N^{0,9+\varepsilon}).$$

Полученные нами в теоремах 1 и 2 формулы отличаются от асимптотических формул классических задач Гольдбаха и Хуа Ло-Кена в простых числах без ограничений. У нас в главных членах появляются ряды $\sigma_3(N, a, b)$, $\sigma_5(N, a, b)$ специального вида. Изучение поведения этих рядов представляет собой отдельную проблему, которая исследуется авторами в [8].

В данной работе рассмотрена *проблема Варинга*:

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = N \tag{1}$$



с натуральными числами x_1, x_2, \dots, x_k специального вида. Число решений $J(N)$ рассматриваемой задачи связано с числом решений $I(N)$ классической задачи, причем в главном члене появляется ряд $\sigma(N, a, b)$ того же типа, что и в теоремах 1, 2.

Теорема 4. Пусть $k \geq cn^2 \log n$, $n \geq 3$. Тогда для числа решений $J(N)$ проблемы Варинга в натуральных числах x_1, x_2, \dots, x_k таких, что $a < \{\eta x_j^n\} < b$ ($j = 1, 2, \dots, k$), справедлива асимптотическая формула.

$$J(N) = I(N)\sigma(N, a, b) + O(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{c_1}{n^2}}),$$

где $I(N)$ — число решений уравнения (1) в произвольных натуральных числах x_1, x_2, \dots, x_k ,

$$\sigma(N, a, b) = \sum_{|m| < \infty} e^{2\pi i m(\eta N - k(a+b)/2)} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k}.$$

Для $I(N)$ известно [12], что при $k \geq cn^2 \log n$,

$$I(N) \sim \frac{(\Gamma(1 + 1/n))^k}{\Gamma(k/n)} N^{k/n-1}.$$

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 \leq a < q \leq \tau, \quad |\theta| \leq 1.$$

Пусть η — алгебраическое число степени $s \geq 2$, m — натуральное число, $m \leq 2M$. Тогда существуют целые взаимно простые числа A и Q такие, что

$$\left| \alpha + \eta m - \frac{A}{Q} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\tau}qQ},$$

$$\frac{(c_0\sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}}{8Mq} \leq Q \leq 2\sqrt{\tau}q,$$

где $c_0 = c_0(\eta) > 0$.

□ В силу теоремы Дирихле существуют целые числа A_1 и Q_1 такие, что

$$\left| \eta - \frac{A_1}{Q_1} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\tau}Q_1}, \quad (A_1, Q_1) = 1, \quad 1 \leq Q_1 \leq \sqrt{\tau}. \quad (2)$$

По условию леммы 1

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau. \quad (3)$$



Тогда из теоремы Дирихле следует, что существуют целые взаимно простые числа A и Q такие, что

$$\left| \alpha + \eta m - \frac{A}{Q} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\tau}qQ}, \quad 1 \leq Q \leq 2\sqrt{\tau}q. \quad (4)$$

Докажем, что

$$\frac{(c_0\sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}}{8Mq} \leq Q \leq 2\sqrt{\tau}q,$$

где $c_0 = c_0(\eta) > 0$.

Из неравенства (2) имеем

$$\left| \eta - \frac{A_1 m}{Q_1} \right| \leq \frac{m}{\sqrt{\tau}Q_1}.$$

Пусть

$$\frac{A_1 m}{Q_1} = \frac{A_2}{Q_2}, \quad (A_2, Q_2) = 1, \quad Q_2 \leq Q_1 \leq \sqrt{\tau},$$

тогда

$$\left| \eta - \frac{A_2}{Q_2} \right| \leq \frac{m}{\sqrt{\tau}Q_2}. \quad (5)$$

Из (3) и (5) следует, что

$$\left| \alpha + \eta m - \frac{aQ_2 + qA_2}{qQ_2} \right| \leq \frac{1}{q\tau} + \frac{m}{\sqrt{\tau}Q_2}.$$

Поскольку $Q_2 \leq \sqrt{\tau}$,

$$\frac{1}{q\tau} + \frac{m}{\sqrt{\tau}Q_2} \leq \frac{2m}{\sqrt{\tau}Q_2},$$

то

$$\left| \alpha + \eta m - \frac{A_3}{Q_3} \right| \leq \frac{2m}{\sqrt{\tau}Q_2},$$

где

$$\frac{A_3}{Q_3} = \frac{aQ_2 + qA_2}{qQ_2}, \quad (A_3, Q_3) = 1.$$

Пусть в приближении (4) числа $\alpha + \eta m$ рациональной дробью A/Q сначала $Q \neq Q_3$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{QQ_3} &\leq \left| \frac{A}{Q} - \frac{A_3}{Q_3} \right| = \left| \left(\frac{A}{Q} - \alpha - \eta m \right) - \left(\frac{A_3}{Q_3} - \alpha - \eta m \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{\tau}qQ} + \frac{2m}{\sqrt{\tau}Q_2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку $Q_3 \leq Q_2 \leq q\sqrt{\tau}$, из (6) имеем

$$\frac{1}{QQ_3} \leq \frac{1}{2\sqrt{\tau}qQ} + \frac{2m}{\sqrt{\tau}Q_2} \leq \frac{1}{2QQ_3} + \frac{2m}{\sqrt{\tau}Q_3},$$



поэтому

$$Q \geq \frac{\sqrt{\tau}}{4m}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда в неравенстве (4) Q совпадает с Q_3 . Пусть $\delta|(aQ_2 + qA_2, qQ_2)$, тогда $\delta|(aqQ_2 + q^2A_2, q^2Q_2)$, следовательно, $\delta|(q^2A_2, q^2Q_2) = q^2$, откуда $\delta \leq q^2$. Тогда имеем:

$$Q_3 \geq \frac{Q_2}{q}.$$

Кроме того,

$$Q_2 \geq \frac{Q_1}{m} \geq \frac{Q_1}{2M},$$

значит,

$$Q_3 \geq \frac{Q_1}{2Mq}.$$

По теореме Лиувилля,

$$\frac{c_0}{Q_1^s} \leq \left| \eta - \frac{A_1}{Q_1} \right| \leq \frac{1}{Q_1 \sqrt{\tau}},$$

где $c_0 = c_0(\eta) > 0$. Тогда имеем

$$Q_1 \geq (c_0 \sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}, \quad Q_3 \geq \frac{(c_0 \sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}}{2Mq}.$$

Мы доказали, что существуют целые взаимно простые числа A и Q такие, что

$$\left| \alpha + \eta m - \frac{A}{Q} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\tau}qQ},$$

при

$$\frac{(c_0 \sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}}{8Mq} \leq \min \left(\frac{(c_0 \sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}}{2Mq}, \frac{\sqrt{\tau}}{4m} \right) \leq Q \leq 2\sqrt{\tau}q.$$

Лемма 2 ([13], с. 22). Пусть r — натуральное число, α и β — вещественные числа, $0 < \Delta < 1/4$, $\Delta \leq \beta - \alpha \leq 1 - \Delta$. Тогда существует периодическая с периодом 1 функция $\psi(x)$, удовлетворяющая условиям:

1. $\psi(x) = 1$ в промежутке $\alpha + \Delta/2 \leq x \leq \beta - \Delta/2$,
2. $0 < \psi(x) < 1$ в промежутках $\alpha - \Delta/2 < x < \alpha + \Delta/2$ и $\beta - \Delta/2 < x < \beta + \Delta/2$,
3. $\psi(x) = 0$ в промежутке $\beta + \Delta/2 \leq x \leq 1 + \alpha - \Delta/2$,
4. $\psi(x)$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{0 < |m| < \infty} c(m) e^{2\pi i m x},$$



где

$$|c(m)| \leq \min \left(\beta - \alpha, \frac{1}{\pi|m|}, \frac{1}{\pi|m|} \left(\frac{r}{\pi|m|\Delta} \right)^r \right).$$

Лемма 3 ([12], с. 85). Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — целые числа, $J_{k,n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — число решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k - x_{k+1} - \dots - x_{2k} = \lambda_1, \\ x_1^n + \dots + x_k^n - x_{k+1}^n - \dots - x_{2k}^n = \lambda_n, \end{cases}$$

$$1 \leq x_1, \dots, x_{2k} \leq P.$$

Справедливы следующие соотношения:

1. $J_{k,n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq J_{k,n}(0, \dots, 0)$;
2. $\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = P^{2k}$;
3. $|\lambda_1| < kP, \dots, |\lambda_n| < kP^n$.

Лемма 4 ([13], с. 76). Пусть $f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x$, α_j — вещественные числа. Пусть n — постоянное, $n \geq 12$, r — целое, $r \geq 2r_1$,

$$r_1 = [n^2(2 \log n + \log \log n + 2, 6)].$$

Тогда

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \sum_{x \leq P} e^{2\pi i f(x)} \right|^r d\alpha_n \dots d\alpha_1 \ll P^{r - \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Лемма 5 ([12], с. 198). Пусть $f(x) = \alpha_{n+1} x^{n+1} + \dots + \alpha_1 x$, α_j — вещественные числа.

$$\alpha_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq P^{n+1}, \quad |\theta| \leq 1.$$

Тогда

$$\left| \sum_{x \leq P} e^{2\pi i (\alpha_{n+1} x^{n+1} + \dots + \alpha_1 x)} \right| \leq c_1(n) P \Delta,$$

где

$$\Delta = \min \left(P, \frac{P^{n+1}}{q}, q \right)^{-\frac{1}{16n^2 \log n}},$$

$c_1(n)$ — положительная константа.

Доказательство теоремы 4. 1. Функцию

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a < x < b, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq a \text{ или } b \leq x \leq 1 \end{cases}$$



продолжим периодически на всю числовую ось с периодом 1. Пусть

$$S_0(\alpha) = \sum_{x \leq P} \psi_0(\eta x^n) e^{2\pi i \alpha x^n},$$

где $P = N^{1/n}$. Тогда число решений уравнения (1) в натуральных числах x_j , удовлетворяющих условию $a < \{\eta x_j^n\} < b$, $j = 1, 2, \dots, k$, равно

$$J(N) = \int_0^1 S_0^k(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha.$$

В лемме 2 о «стаканчиках» И.М. Виноградова выберем $r = [\log N]$, $\Delta = \log^{-1} N$. При выборе $\alpha = a + \Delta/2$ и $\beta = b - \Delta/2$ функцию ψ из леммы о «стаканчиках» И.М. Виноградова обозначим как ψ_1 , α и β — как α_1 и β_1 , соответственно. Положив $\alpha = a - \Delta/2$ и $\beta = b + \Delta/2$, соответствующую функцию ψ обозначим ψ_2 , α и β — как α_2 и β_2 , соответственно.

Определим

$$J_\nu(N) = \int_0^1 \left(\sum_{x \leq P} \psi_\nu(\eta x^n) e^{2\pi i \alpha x^n} \right)^k e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha, \quad \nu = 1, 2. \quad (7)$$

Из свойств $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ следует:

$$J_1(N) \leq J(N) \leq J_2(N).$$

Для $J_1(N)$ и $J_2(N)$ выведем приближенные формулы, главные члены в которых одинаковы.

В представлении функции $\psi_\nu(\eta x^n)$ рядом Фурье

$$\psi_\nu(\eta x^n) = \sum_{|m| < \infty} c_\nu(m) e^{2\pi i m \eta x^n}$$

оценим сумму при $|m| > r\Delta^{-1}$. Из леммы о «стаканчиках» И.М. Виноградова имеем

$$\sum_{|m| > r\Delta^{-1}} c_\nu(m) e^{2\pi i m \eta x^n} \ll \sum_{|m| > r\Delta^{-1}} \frac{1}{\pi|m|} \left(\frac{r}{\pi|m|\Delta} \right)^r \ll \frac{1}{\pi^{r+1}} < N^{-\log \pi}.$$

Разложение в ряд Фурье функции $\psi_\nu(\eta x^n)$

$$\psi_\nu(\eta x^n) = \sum_{|m| \leq r\Delta^{-1}} c_\nu(m) e^{2\pi i m \eta x^n} + O(N^{-\log \pi})$$

подставим в (7):

$$J_\nu(N) = \int_0^1 \left(\sum_{|m| \leq r\Delta^{-1}} c_\nu(m) \sum_{x \leq P} e^{2\pi i (\alpha + m\eta) x^n} \right)^k e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha + O(N^{k-1-\log \pi})$$



$$= \sum_{|m_1| \leq r\Delta^{-1}} c_\nu(m_1) \dots \sum_{|m_k| \leq r\Delta^{-1}} c_\nu(m_k) \int_0^1 \sum_{x_1 \leq P} e^{2\pi i(\alpha+m_1\eta)x_1^n} \times \\ \times \dots \sum_{x_k \leq P} e^{2\pi i(\alpha+m_k\eta)x_k^n} e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha + O(N^{k-1-\log \pi}).$$

2. При $m_1 = m_2 = \dots = m_k = m$ рассмотрим

$$I_1(N) = \sum_{|m| \leq r\Delta^{-1}} c_\nu^k(m) e^{2\pi i m \eta N} \sum_{x_1 \leq P} \dots \sum_{x_k \leq P} \times \\ \times \int_0^1 e^{2\pi i(\alpha+m\eta)(x_1^n+x_2^n+\dots+x_k^n-N)} d\alpha.$$

Учтем, что подынтегральная функция периодична по x с периодом 1, получим

$$I_1(N) = I(N) \sum_{|m| \leq r\Delta^{-1}} c_\nu^k(m) e^{2\pi i m \eta N}.$$

Промежуток суммирования по m разобьем на два промежутка: $|m| < M$ и $M \leq |m| \leq r\Delta^{-1}$. На втором промежутке сумму оценим тривиально, используя известные оценки для коэффициентов Фурье:

$$\sum_{M \leq |m| \leq r\Delta^{-1}} c_\nu^k(m) e^{2\pi i m \eta N} = O(M^{-k+1}).$$

Поскольку при $m \neq 0$

$$c_\nu(m) = i \frac{e^{-2\pi i m \beta_\nu} - e^{-2\pi i m \alpha_\nu}}{2\pi m} \left(\frac{e^{\pi i m \Delta/r} - e^{-\pi i m \Delta/r}}{2\pi i m \Delta/r} \right)^r$$

или после преобразования

$$c_\nu(m) = e^{-\pi i m(\alpha_\nu + \beta_\nu)} \frac{\sin \pi m(\beta_\nu - \alpha_\nu)}{\pi m} \left(\frac{\sin \pi m \Delta/r}{\pi m \Delta/r} \right)^r,$$

то для $0 < |m| < M$

$$c_\nu^k(m) = e^{-k\pi i m(a+b)} \frac{\sin^k \pi m(b-a) + O(M\Delta)}{\pi^k m^k} \left(1 + O(M\Delta)^{k-1} \right) = \\ = e^{-k\pi i m(a+b)} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k} (1 + O(M\Delta)).$$

Тогда

$$\sum_{|m| \leq r\Delta^{-1}} c_\nu^k(m) e^{2\pi i m \eta N} =$$



$$= \sum_{|m| < \infty} e^{2\pi i m(\eta N - k(a+b)/2)} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k} + O(M\Delta) + O(M^{-k+1}).$$

При выборе $M = \Delta^{-1/k}$ получим

$$I_1(N) = I(N)(\sigma(N, a, b) + O(\Delta^{\frac{k-1}{k}})).$$

3. Если среди m_1, m_2, \dots, m_k есть два не равных друг другу числа, то допустим, что $m_1 < m_2$. Рассмотрим

$$I(N, m_1, m_2, \dots, m_k) = \int_0^1 |S(\alpha + m_1\eta)| \dots |S(\alpha + m_k\eta)| d\alpha,$$

где

$$S(\alpha) = \sum_{x \leq P} e^{2\pi i \alpha x^n}.$$

Сделаем замену $t = \alpha + m_1\eta$. Поскольку подынтегральная функция является периодической по t с периодом 1, интеграл можно рассматривать на промежутке $E = [-1/\tau; 1 - 1/\tau)$, где $\tau = 2nP^{n-1}$.

По теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами t представимо в виде

$$t = \frac{d}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad (d, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\theta| \leq 1. \tag{8}$$

Промежуток интегрирования по t разобьем на два непересекающихся множества: E_1 — «большие» дуги и E_2 — «малые» дуги. На «больших» дугах E_1 в разложении (8) выберем $q \leq P^{1/4}$. Тогда $E_2 = E \setminus E_1$. Тогда

$$I(N, m_1, m_2, \dots, m_k) = \int_{E_1} F(t) dt + \int_{E_2} F(t) dt,$$

где

$$F(t) = |S(t)| |S(t + (m_2 - m_1)\eta)| \dots |S(t + (m_k - m_1)\eta)|.$$

4. Пусть $J_{k,n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — число решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k - x_{k+1} - \dots - x_{2k} = \lambda_1, \\ x_1^n + \dots + x_k^n - x_{k+1}^n - \dots - x_{2k}^n = \lambda_n, \\ 1 \leq x_1, \dots, x_{2k} \leq P. \end{cases}$$

При $5n^2 \log n \leq k_1 \leq k/2$ по лемме 3 получим

$$\int_0^1 |S(t)|^{2k_1} dt = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}} J_{k_1, n}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0) \ll J_{k_1, n}(0, \dots, 0) \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}} 1 \ll$$



$$\ll P^{2k_1 - \frac{n(n+1)}{2}} (2k_1)^{n-1} P^{\frac{n(n-1)}{2}} = (2k_1)^{n-1} P^{2k_1 - n}.$$

Здесь для оценки $J_{k_1, n}(0, \dots, 0)$ применили лемму 4.

Пользуясь полученным неравенством, оценим интеграл по множеству E_1 , как

$$\int_{E_1} F(t) dt \ll P^{2k_1 - n} \max_{t \in E_1} |S(t + m\eta)|^{k-2k_1}.$$

Для интеграла по множеству E_2 получим оценку

$$\int_{E_2} F(t) dt \ll P^{2k_1 - n} \max_{t \in E_1} |S(t)|^{k-2k_1}.$$

5. Оценим

$$\max_{t \in E_1} |S(t + m\eta)|$$

сверху. Для этого изучим рациональные приближения числа $t + m\eta$.

По теореме Дирихле

$$\eta = \frac{A}{Q} + \frac{\theta_1}{Q\tau_1}, \quad (A, Q) = 1, \quad |\theta_1| < 1, \quad 1 \leq Q \leq \tau_1. \quad (9)$$

Значение τ_1 выберем позже.

Поскольку η — квадратичная иррациональность, согласно теореме Лиувилля имеем

$$\frac{c(\eta)}{Q^2} \leq \left| \eta - \frac{A}{Q} \right|, \quad c(\eta) > 0. \quad (10)$$

Из (9), (10) получаем

$$\frac{c(\eta)}{Q^2} \leq \frac{1}{Q\tau_1},$$

следовательно, $Q \asymp \tau_1$. Тогда

$$\eta = \frac{A}{Q} + \frac{\theta_2}{Q^2}, \quad |\theta_2| \leq 1.$$

Для t , принадлежащих «большим» дугам E_1 , рассмотрим $\gamma = t + m\eta$. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{d}{q} + \frac{Am}{Q} + \frac{\theta}{q\tau} + \frac{\theta_2 m}{Q^2} = \frac{dQ + Amq}{qQ} + \frac{\theta}{q\tau} + \frac{\theta_2 m}{Q^2} = \\ &= \frac{A_1}{Q_1} + \frac{\theta}{q\tau} + \frac{\theta_2 m}{Q^2}, \quad (A_1, Q_1) = 1. \end{aligned}$$

Поскольку

$$Q_1 = \frac{qQ}{(dQ + Amq, qQ)}, \quad (11)$$



то

$$Q_1 \leq qQ.$$

При выборе $\tau_1 = \sqrt{\tau}$ выполняется

$$\frac{\theta}{q\tau} \ll \frac{1}{Q^2} \ll \left(\frac{q}{Q_1}\right)^2,$$

$$\left|\frac{\theta}{q\tau} + \frac{\theta_2 m}{Q^2}\right| = \frac{\theta_3}{Q_1^2}, \quad |\theta_3| \leq (1 + |m|)q^2. \quad (12)$$

Обозначим $(dQ + Amq, Q)$ как δ , тогда $\delta|mq$ и

$$(dQ + Amq, qQ) \leq q(dQ + Amq, Q) = q\delta \leq |m|q^2. \quad (13)$$

Тогда из (11), (13) имеем

$$Q_1 \geq \frac{qQ}{mq^2} \geq \frac{Q}{mq}. \quad (14)$$

6. Повторим рассуждения доказательства теоремы 2 (глава XI, [12]) в нашей ситуации. Рассмотрим

$$S(\alpha) = \sum_{x \leq P} e^{2\pi i \alpha x^{n+1}}.$$

Пусть $Y = [P^{1-\frac{1}{n^2}}]$. Тогда

$$S(\alpha) = \frac{1}{Y} \sum_{y \leq Y} \sum_{x \leq P} e^{2\pi i \alpha (x+y)^{n+1}} + O(Y) = W + O(Y).$$

Воспользуемся неравенством Коши, леммой 3:

$$\begin{aligned} |W|^{2k} &\leq \frac{1}{Y} \sum_{y \leq Y} \left| \sum_{x \leq P} e^{2\pi i \alpha (x^{n+1} + g_1(y)x^n + \dots)} \right|^{2k} = \\ &= \frac{1}{Y} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}} J_{k, n+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \left| \sum_{y \leq Y} e^{2\pi i \alpha (\lambda_{n+1} + g_1(y)\lambda_n + \dots)} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{Y} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J_{k, n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \left| \sum_{y \leq Y} e^{2\pi i \alpha (g_1(y)\lambda_n + \dots + g_n(y)\lambda_1)} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{Y} \sqrt{\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J_{k, n}^2(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \sqrt{\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \left| \sum_{y \leq Y} e^{2\pi i \alpha (g_1(y)\lambda_n + \dots + g_n(y)\lambda_1)} \right|^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{Y} \sqrt{J_{k, n}(0, \dots, 0) P^{2k}} \sqrt{\sum_{y \leq Y} \sum_{y_1 \leq Y} \left| \sum_{\lambda_n} e^{2\pi i \alpha (n+1)\lambda_n (y-y_1)} \right| \left(\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}} 1 \right)} \leq \end{aligned}$$



$$\leq \frac{1}{Y} \sqrt{P^{4k - \frac{n(n+1)}{2}}} \sqrt{\sum_{y \leq Y} \sum_{y_1 \leq Y} \min \left(2kP^n, \frac{1}{2\|\alpha(n+1)(y-y_1)\|} \right) (2k)^{n-1} P^{\frac{n(n-1)}{2}}} \leq \\ \ll \frac{1}{Y} P^{2k - \frac{n}{2}} \sqrt{\sum_{y \leq Y} \sum_{y_1 \leq Y} \min \left(P^n, \frac{1}{\|\alpha(n+1)(y-y_1)\|} \right)}.$$

Зафиксируем y_1 , это можно сделать Y способами. Положим $\beta = -\alpha(n+1)y_1$. Имеем

$$\sum_{y \leq Y} \min \left(P^n, \frac{1}{\|\alpha(n+1)y + \beta\|} \right) \leq \sum_{y \leq Y(n+1)} \min \left(P^n, \frac{1}{\|\alpha y + \beta\|} \right).$$

Положим

$$\alpha = \gamma = \frac{A_1}{Q_1} + \frac{\theta_3}{Q_1^2}.$$

Сумму по y разобьем на суммы длины Q_1 , таких сумм будет

$$\frac{Y(n+1)}{Q_1} + 1.$$

Рассмотрим одну такую сумму.

$$\sum_{lQ_1 < y \leq (l+1)Q_1} \min \left(P^n, \frac{1}{\|\gamma y + \beta\|} \right) = \sum_{y \leq Q_1} \min \left(P^n, \frac{1}{\|\gamma y + \beta_1\|} \right),$$

где $\beta_1 = \beta + l\gamma Q_1$. Рассмотрим

$$\gamma y + \beta_1 = \left(\frac{A_1}{Q_1} + \frac{\theta_3}{Q_1^2} \right) y + \beta_1,$$

где $|\theta_3| \leq (1 + |m|)q^2$. Тогда

$$\gamma y + \beta_1 = \frac{A_1 y + [\beta_1 Q_1] + \theta_3 y / Q_1 + \{\beta_1 Q_1\}}{Q_1},$$

имеем

$$\sum_{y \leq Q_1} \min \left(P^n, \frac{1}{\|\gamma y + \beta_1\|} \right) = \sum_{|y| \leq Q_1/2} \min \left(P^n, \frac{1}{\|y + \theta(y)\|} \right),$$

где $|\theta(y)| \ll |m|q^2$. В результате,

$$\sum_{|y| \leq Q_1/2} \min \left(P^n, \frac{1}{\|y + \theta(y)\|} \right) \ll |m|P^{n+1/2} + Q_1 \log Q_1 \ll |m|P^{n+1/2}.$$

Отсюда

$$\sum_{y \leq Y} \sum_{y_1 \leq Y} \min \left(P^n, \frac{1}{\|\gamma(n+1)(y-y_1)\|} \right) \ll Y \left(\frac{Y}{Q_1} + 1 \right) |m|P^{n+1/2} \ll Y|m|P^{n+1/2}.$$



Тогда

$$|W|^{2k} \ll \frac{1}{Y} P^{2k-n/2} \sqrt{Y|m|P^{n+1/2}} = P^{2k+1/4} \sqrt{\frac{|m|}{Y}},$$

$$S(\gamma) \ll P^{1+\frac{1}{8k}} \left(\frac{|m|}{Y}\right)^{\frac{1}{4k}}.$$

7. Для оценки

$$\max_{t \in E_2} |S(t)|$$

воспользуемся леммой 5. В рассматриваемой задаче для $t \in E_2$

$$\min \left(P, \frac{P^{n-1}}{q}, q \right) = \begin{cases} q, & \text{если } P^{1/4} < q < P, \\ P, & \text{если } P \leq q \leq P^{n-2}, \\ \frac{P^{n-1}}{q}, & \text{если } P^{n-2} \leq q \leq P^{n-1} \end{cases} \ll P.$$

Тогда

$$\max_{t \in E_2} |S(t)| \ll P^{1-\frac{1}{16cn^2 \log n}}.$$

8. Выбирая $k = 2k_1 + 16n^2$, получим утверждение теоремы.

Заключение. В данной работе получена асимптотическая формула для проблемы Варинга с числами специального вида. В главном члене появляется ряд специального вида, поведение которого было изучено авторами ранее. Причина появления такого ряда представляет интерес и требует дальнейшего исследования.

Литература

1. Виноградов И.М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // ДАН СССР. – 1937. – 15. – С.169-172.
2. Hua L.K. On the representation of numbers as the sum of powers of primes // Math. Z. – 1938. – 44. – P.335-346.
3. Хуа Ло-ген. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел / М.: Мир, 1964. – 194 с.
4. Kloosterman H.D. On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ // Acta mathematica. – 1926. – 49. – P.407-464.
5. Gritsenko S., Motkina N. Ternary Goldbach's Problem Involving Primes of a Special type. Режим доступа: <http://arXiv.org/abs/0812.4606> – 25 Dec 2008.
6. Gritsenko S., Motkina N. Hua Loo Keng's Problem Involving Primes of a Special Type / Режим доступа: <http://arXiv.org/abs/0812.4665> – 26 Dec 2008.
7. Гриценко С.А., Мотькина Н.Н. Представление натуральных чисел суммами четырех квадратов целых чисел специального вида // Современная математика и ее приложения. – 2010. – 67. – С.71-77.
8. Гриценко С.А., Мотькина Н.Н. О вычислении некоторых особых рядов // Чебышевский сборник. – 2011. – 12; Вып.4. – С.85-92.
9. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983. – 240 с.
10. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / М.: Наука, 1980. – 160 с.

**WARING'S PROBLEM WITH SPECIAL NATURAL NUMBERS****S.A. Gritsenko, N.N. Motkina**Belgorod State University,
Pobedy St., 85, 308015, Belgorod, Russia, e-mail: Motkina@bsu.edu.ru

Abstract. It is proposed the solution of the variant of Waring's Problem with given natural numbers x such that $a < \{\eta x^n\} < b$ where a and b are arbitrary values of the segment $[0, 1]$ and η is quadratical irrational.

Key words: additive problems, Waring's Problem, number of solutions, asymptotic formula, quadratic irrationality.



MSC: 31A05, 31A20, 31A25, 31B25, 35Q15;
30E25, 31C05, 34M50, 35F45.

ПРОБЛЕМЫ ДИРИХЛЕ И РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.С. Ефимушкин, В.И. Рязанов

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Розы Люксембург, 74, Донецк, 83114, Украина, e-mail: art.89@bk.ru; vl.ryazanov1@gmail.com

Аннотация. Доказан аналог теоремы Лузина, что любая функция на отрезке измерима относительно логарифмической ёмкости почти всюду совпадает с производной от некоторой непрерывной функции. На этой основе установлен аналог теоремы Геринга о разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций в единичном круге с произвольными граничными данными измеримыми относительно логарифмической ёмкости. Более того, доказано, что пространство найденных решений имеет бесконечную размерность. Отсюда нами также выводится разрешимость соответствующих задач Дирихле и Римана-Гильберта для аналитических функций в единичном круге. Наконец, результаты перенесены на квазидиски и, в частности, на области с гладкими и липшицевыми границами.

Ключевые слова: задачи Дирихле и Римана-Гильберта, логарифмическая ёмкость, функции ограниченной вариации, гармонические и аналитические функции.

1. Введение. Краевые задачи для аналитических функций f восходят к знаменитой диссертации Римана (1851), а также известным работам Гильберта (1904, 1912, 1924), и Пуанкаре (1910), смотри историю вопроса в монографии [1], где также рассматривался случай обобщенных аналитических функций.

Хорошо известно, что, если аналитическая функция f задана в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и непрерывна в его замыкании, то по формуле Шварца

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} f(\zeta) \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (1)$$

и, таким образом, аналитическая функция f в единичном круге \mathbb{D} определяется с точностью до чисто мнимой постоянной ic , $c = \operatorname{Im} f(0)$, её реальной частью $\varphi(\zeta) = \operatorname{Re} f(\zeta)$ на границе единичного круга, см., напр., § 8, гл. III, часть 3 в [2], с. 346.

Известно также, что любая гармоническая функция $u(z)$ в \mathbb{D} имеет сопряженную функцию $v(z)$, такую, что $f(z) = u(z) + iv(z)$ является аналитической функцией в \mathbb{D} . Заметим, что граничные значения сопряженной функции v не могут быть произвольно предписаны одновременно с граничными значениями u , поскольку v единственным образом определяется через u с точностью до аддитивной постоянной, см., например, I.A в [3]. Поэтому задача Дирихле для аналитических функций сводится к задаче для гармонических функций с заданной граничной функцией вещественной части.



В 1904 году Гильберт поставил следующую проблему, которую теперь принято называть проблемой Гильберта, или *проблемой Римана-Гильберта*. Она состояла в доказательстве существования аналитической функции f в области $D \subset \mathbb{C}$, ограниченной спрямляемой жордановой кривой, с граничным условием

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z) = \varphi(\zeta) \quad \forall \zeta \in \partial D, \quad (2)$$

где им предполагалось, что функции λ и φ непрерывно дифференцируемы относительно натурального параметра длины на кривой ∂D , и что $|\lambda| \neq 0$ на ∂D . Поэтому без ограничения общности можно считать, что $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$. При $\lambda(\zeta) \equiv 1$ мы возвращаемся к задаче Дирихле и, таким образом, задача Римана-Гильберта является её естественным обобщением, которая находит интересные приложения к математической физике.

Первый способ решения этой проблемы, основанный на теории сингулярных интегральных уравнений, был предложен самим Гильбертом в работе [4]. Эта попытка оказалась не совсем удачной, поскольку теория сингулярных интегральных уравнений была еще недостаточно развита в то время. Однако, как раз этот способ стал основным подходом в этом направлении исследований, см., например, монографии [1], [5] и [6]. В частности, на этом пути было доказано существование решений этой задачи для функций λ и φ непрерывных по Гёльдеру, см. [5].

Другой способ решения задачи Римана-Гильберта, основанный на редукции к решению соответствующих двух задач Дирихле, был также предложен Гильбертом, см. [7]. На основе результата Геринга из работы [8], весьма общее решение задачи Римана-Гильберта этим способом совсем недавно было дано в статье [9] в жордановых областях при произвольных функциях φ и λ , измеримых относительно гармонической меры. Здесь мы даем решение задачи Римана-Гильберта при функциях φ и λ , измеримых относительно так называемой абсолютной гармонической меры или, что то же самое, относительно логарифмической ёмкости.

Напомним, что Лузину принадлежит следующая замечательная теорема: для любой измеримой и п.в. конечной (относительно меры Лебега) функции φ на интервале $[a, b]$, существует непрерывная функция Φ , такая, что $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на $[a, b]$ (см., например, теорему VII(2.3) в [10]). Это утверждение было хорошо известно до Лузина для суммируемой функции φ относительно её неопределенного интеграла Φ , см., например, теорему IV(6.3) в [10]. Однако, этот результат весьма нетривиален для несуммируемой φ . Здесь мы доказываем соответствующий аналог результата Лузина в терминах логарифмической ёмкости, см. теорему 1 в секции 3, после того как в секции 2 будут приведены необходимые сведения о логарифмической ёмкости.

Напомним что, что Герингом был установлен следующий блестящий результат: для любой вещественной с периодом 2π функции, которая измерима (относительно меры Лебега), существует гармоническая в единичном круге \mathbb{D} функция, такая, что $u(z) \rightarrow \varphi(\vartheta)$ для п.в. ϑ при $z \rightarrow e^{i\vartheta}$ вдоль некасательных путей, см. [8]. В секции 4, на основе нашего аналога теоремы Лузина, мы доказываем аналог результата Геринга в терминах логарифмической ёмкости, см. теорему 2. Более того, нами доказано, что пространство найденных решений имеет бесконечную размерность, см. теорему 3 в той же секции.



Теоремы 2 и 3 ведут нас также к решению соответствующей задачи Дирихле для аналитических функций в \mathbb{D} , см. теоремы 4 там же.

Кроме того, после того как в секции 5 нами установлена взаимосвязь между граничными значениями сопряженных гармонических функций, см. теорему 5, на той же основе нами доказано в секции 6 существование решений задачи Римана-Гильберта для аналитических функций в \mathbb{D} , см. теорему 6. Наконец, в секции 7 нами сформулированы и доказаны аналоги этих результатов в квазидисках и, в частности, в областях с гладкими и липшицевыми границами.

2. О логарифмической ёмкости. Наиболее важным для нашего исследования является понятие логарифмической ёмкости, см., например, [11], [12] и [13]. Пусть E – произвольное ограниченное борелевское множество плоскости \mathbb{C} . *Положительным распределением массы* на множестве E называют произвольную неотрицательную вполне аддитивную функцию множества ν с $\nu(E) = 1$, определенную на борелевских подмножествах множества E . Функцию

$$U^\nu(z) := \int_E \log \left| \frac{1}{z - \zeta} \right| d\nu(\zeta) \quad (3)$$

называют *логарифмическим потенциалом* распределения ν . Соответственно, *логарифмической ёмкостью* $C(E)$ борелевского множества E называется величина

$$C(E) = e^{-V}, \quad V = \inf_\nu V_\nu(E), \quad V_\nu(E) = \sup_z U^\nu(z). \quad (4)$$

Заметим, что здесь супремум достаточно вычислять по множеству E . Если $V = \infty$, то полагают $C(E) = 0$. Известно, что $0 \leq C(E) < \infty$, $C(E_1) \leq C(E_2)$, если $E_1 \subseteq E_2$, $C(E) = 0$, если $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ с $C(E_n) = 0$, см., например, лемму III.4 в [12].

Напомним, что логарифмическая ёмкость совпадает с так называемой абсолютной гармонической мерой, введенной Рольфом Неванлинной, см., например, [13], с. 123. Поэтому множество E имеет нулевую (хаусдорфову) длину, если $C(E) = 0$, см., например, теорему V.6.2 в [13]. Однако, существуют множества нулевой длины, имеющие положительную ёмкость, см., например, теорему IV.5 в [12].

Хорошо известна также следующая геометрическая характеристика логарифмической ёмкости, см. [13]:

$$C(E) = \tau(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} V_n^{\frac{2}{n(n-1)}}, \quad (5)$$

где V_n обозначает супремум (на самом деле, максимум для компактов) величины

$$V(z_1, \dots, z_n) = \prod_{k < l}^{l=1, \dots, n} |z_k - z_l|, \quad (6)$$

когда всевозможные конечные наборы точек z_1, \dots, z_n пробегают множество E . Следуя Фекете [14], величину $\tau(E)$ называют *трансфинитным диаметром* множества E .



Из указанной геометрической интерпретации логарифмической ёмкости через трансфинитный диаметр, сразу же видим, что если $C(E) = 0$, то $C(f(E)) = 0$ для любого отображения f непрерывного по Гёльдеру.

Чтобы ввести множества, измеримые относительно логарифмической ёмкости, определим, следуя [12], *внутреннюю* C_* и *внешнюю ёмкости* C^* :

$$C_*(E) := \sup_{F \subseteq E} C(F), \quad (7)$$

где супремум берётся по всем компактным множествам $F \subseteq \mathbb{C}$, и

$$C^*(E) := \inf_{E \subseteq O} C(O), \quad (8)$$

где инфимум берётся по всем открытым множествам $O \subseteq \mathbb{C}$. Далее ограниченное множество $E \subseteq \mathbb{C}$ называется *измеримым относительно логарифмической ёмкости*, если

$$C^*(E) = C_*(E), \quad (9)$$

и общее значение $C_*(E)$ и $C^*(E)$ по-прежнему обозначается через $C(E)$. Отметим, см. лемму III.5 в [12], что внешняя ёмкость полуаддитивна, т.е.

$$C^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} C^*(E_n). \quad (10)$$

Функцию $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$, заданную на ограниченном множестве $E \subseteq \mathbb{C}$, будем называть *измеримой относительно логарифмической ёмкости*, если для любых открытых множеств $O \subseteq \mathbb{C}$ измеримы относительно логарифмической ёмкости множества

$$\Omega = \{z \in E : \varphi(z) \in O\}. \quad (11)$$

Ясно, что само множество E измеримо относительно логарифмической ёмкости.

Замечание 1. Известно, что борелевские множества и, в частности, компактные и открытые множества измеримы относительно логарифмической ёмкости, см. [12], с. 9 и 31. Кроме того, как это следует прямо из определения, любое множество $E \subseteq \mathbb{C}$ конечной логарифмической ёмкости, представимо в виде объединения сигма-компакта (объединения счётного числа компактов) и множества логарифмической ёмкости нуль. Известно также, что борелевские множества, например, компакты измеримы относительно всех хаусдорфовых мер и, в частности, относительно меры длины, см., например, теорему II(7.4) в [10]. Поэтому любое множество $E \subseteq \mathbb{C}$ конечной логарифмической ёмкости измеримо относительно меры длины. Таким образом, на таком множестве любая функция $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$ измеримая относительно логарифмической ёмкости будет также измеримой относительно меры длины на E . Однако, существуют функции измеримые относительно меры длины, которые не являются измеримыми относительно логарифмической ёмкости, см., например, теорему IV.5 в [12].



Нас особо будут интересовать функции $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, заданные на единичной окружности $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Однако, ввиду (5), нам достаточно будет изучить соответствующие вопросы на отрезках вещественной оси, поскольку любая замкнутая дуга на $\partial\mathbb{D}$ допускает билипшицево (даже бесконечно гладкое, так называемое стереографическое) отображение g на такой отрезок, а g и g^{-1} по теореме Кирсбрауна допускают продолжение до липшицевых отображений \mathbb{C} на себя, см., например, теорему 2.10.43 в [15].

В связи с этим, напомним, что отображение $g : X \rightarrow X'$ между метрическими пространствами (X, d) и (X', d') называется *липшицевым*, если $d'(g(x_1), g(x_2)) \leq C \cdot d(x_1, x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$ и для некоторой конечной постоянной C . Если в дополнение к этому $d(x_1, x_2) \leq c \cdot d'(g(x_1), g(x_2))$ для любых $x_1, x_2 \in X$ и для некоторой конечной постоянной c , то отображение g называется *билипшицевым*.

Напомним также, см., например, [10], с. 195, что точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *точкой плотности* для измеримого (относительно длины, т.е. по Лебегу) множества $E \subset \mathbb{R}$, если $x_0 \in E$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus E|}{2\varepsilon} = 0. \quad (12)$$

Аналогично говорим, что точка $x_0 \in \mathbb{R}$ является *точкой плотности относительно логарифмической ёмкости* для измеримого (относительно C) множества $E \subset \mathbb{R}$, если $x_0 \in E$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \setminus E)}{C([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])} = 0. \quad (13)$$

Напомним, наконец, что функция $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ *аппроксимативно непрерывна (относительно логарифмической ёмкости)* в точке $x_0 \in (a, b)$, если она непрерывна на некотором множестве $E \subseteq [a, b]$, для которого x_0 является точкой плотности (относительно логарифмической ёмкости), см., например, [10], с. 199, и [15], с. 176, соответственно.

Для дальнейшего важно, что имеет место следующий аналог теоремы А. Данжуа, см., например, теорему 2.9.13 в [15], сравни теорему IV(10.6) в [10].

Предложение 1. *Функция $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ измерима относительно логарифмической ёмкости тогда и только тогда, когда она аппроксимативно непрерывна для п.в. $x \in (a, b)$ также относительно логарифмической ёмкости.*

Замечание 2. Как известно, $C([a, b]) \simeq -1/\log \delta$ при $\delta = b - a \rightarrow 0$, где запись $u \simeq v$ означает, что для достаточно малых δ найдется постоянная $c \in (0, \infty)$, такая, что $v/c \leq u \leq c \cdot v$, см., например, [16], с. 131. Кроме того, $C(E) \geq A/\log(1/|E|)$ при малых длинах $|E|$, см., например, лемму 1 в [17]. Таким образом, если x_0 является точкой плотности для множества E относительно логарифмической ёмкости, то x_0 - также точка плотности для множества E относительно меры длины. Следовательно, любая точка аппроксимативной непрерывности функции $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ относительно логарифмической ёмкости, является также точкой аппроксимативной непрерывности функции φ относительно меры Лебега на вещественной оси.



Отсюда, в частности, получаем следующую полезную лемму.

Лемма 1. Пусть функция $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и измерима относительно логарифмической ёмкости и пусть $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$ – её неопределенный интеграл Лебега. Тогда $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на (a, b) относительно логарифмической ёмкости.

□ Действительно, пусть $x_0 \in (a, b)$ – точка аппроксимативной непрерывности для функции φ . Тогда найдется множество $E \subseteq [a, b]$, для которого x_0 является точкой плотности и на котором функция φ непрерывна. Так как $|\varphi(x)| \leq C < \infty$ для всех $x \in [a, b]$, получаем, что при малых h

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - \varphi(x_0) \right| \leq \max_{x \in E \cap [x_0, x_0 + h]} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| + 2C \frac{|(x_0, x_0 + h) \setminus E|}{|h|},$$

т.е. $\Phi'(x_0) = \varphi(x_0)$. Таким образом, заключение леммы следует из предложения 1, см. также замечание 2. ■

3. Об одном аналоге теоремы Лузина.

При доказательстве аналога теоремы Лузина в терминах логарифмической ёмкости ключевую роль будет играть следующая лемма о сингулярных функциях канторовского типа.

Лемма 2. Существует непрерывная неубывающая функция $\Psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, такая, что $\Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = 1$ и $\Psi'(t) = 0$ п.в. относительно логарифмической ёмкости.

□ Для доказательства этого факта воспользуемся конструкцией множеств канторовского типа логарифмической ёмкости нуль, принадлежащей Рольфу Неванлинне. Именно, рассмотрим произвольную последовательность чисел $p_k > 1$, $k = 1, 2, \dots$, и определим соответствующую последовательность множеств $E(p_1, \dots, p_n)$, $n = 1, 2, \dots$, по индукции следующим образом. Пусть $E(p_1)$ – множество, состоящее из 2-х равных по длине отрезков, которое получается из единичного отрезка $[0, 1]$ выбрасыванием центрального интервала длины $1 - 1/p_1$; $E(p_1, p_2)$ – множество, состоящее из 2^2 равных по длине отрезков, которое получается выбрасыванием из каждого отрезка предыдущего множества $E(p_1)$ центрального интервала, который составляет $1 - 1/p_2$ долю от его длины и так далее. Обозначим через $E(p_1, p_2, \dots)$ пересечение всех множеств $E(p_1, \dots, p_n)$, $n = 1, 2, \dots$. По теореме V.6.3 в [13] множество $E(p_1, p_2, \dots)$ имеет логарифмическую ёмкость нуль тогда и только тогда, когда ряд $\sum 2^{-k} \log p_k$ расходится. Например, это условие выполняется, если $p_k = e^{2^k}$.

Как известно, все множества канторовского типа гомеоморфны. Более того, найдется гомеоморфизм $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $h(0) = 0$ и $h(1) = 1$, при котором $E(p_1, p_2, \dots)$ перейдет в классическое канторово множество, см., например, конструкцию 8.23 в [19]. Таким образом, если κ – классическая канторова функция, см., например, конструкцию 8.15 в [19], то $\Psi = \kappa \circ h$ – искомая функция. ■

Лемма 3. Пусть функция $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная функция



$G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $|G(x)| \leq \varepsilon$ для всех $x \in [a, b]$, $G(a) = G(b) = 0$, и $G'(x) = g(x)$ п.в. на $[a, b]$ относительно логарифмической ёмкости.

□ Пусть $H(x) = \int_a^x g(t) dt$ – неопределенный интеграл Лебега функции g . Выберем на $[a, b]$ конечный набор точек $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, таких, что колебание H меньше $\varepsilon/2$ на каждом из отрезков $[a_k, a_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Применяя линейные преобразования независимой и зависимой переменной в функции $\Psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ из леммы 2, получаем на каждом из отрезков $[a_k, a_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, функцию F_k , которая имеет нулевую производную п.в. относительно логарифмической ёмкости и совпадает с функцией H в концах отрезка. Пусть F – функция на $[a, b]$, склеенная из функций F_k . Тогда $G = H - F$ даёт нам искомую функцию по леммам 1 и 2. ■

Лемма 4. Пусть функция $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и измерима относительно логарифмической ёмкости и пусть P – замкнутое подмножество отрезка $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная функция $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $|G(x+h)| \leq \varepsilon|h|$ для всех $x \in P$ и всех h , таких, что $x+h \in [a, b]$, $G(x) = G'(x) = 0$ для всех $x \in P$, и $G'(x) = g(x)$ п.в. на $[a, b] \setminus P$ относительно логарифмической ёмкости.

□ Пусть $I = (a, b)$. Тогда множество $I \setminus P$ является открытым и представимо в виде объединения счётного числа попарно непересекающихся интервалов $I_k = (a_k, b_k)$. Выберем в каждом интервале I_k возрастающую последовательность чисел $c_k^{(j)}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, такую, что $c_k^{(j)} \rightarrow a_k$ при $j \rightarrow -\infty$ и $c_k^{(j)} \rightarrow b_k$ при $j \rightarrow \infty$. Обозначим через $\varepsilon_k^{(j)}$ меньшее из 2-х чисел $\varepsilon(c_k^{(j)} - a_k)/(k + |j|)$ и $\varepsilon(b_k - c_k^{(j)})/(k + |j|)$. Тогда по лемме 3 в каждом интервале I_k найдется непрерывная функция G_k , такая, что $|G_k(x)| \leq \varepsilon_k^{(j)}$ для всех $x \in [c_k^{(j)}, c_k^{(j+1)}]$, $G_k(c_k^{(j)}) = 0$ для всех $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и $G_k'(x) = g(x)$ п.в. на I_k относительно логарифмической ёмкости. Таким образом, полагая $G(x) = G_k(x)$ на каждом интервале I_k и $G(x) = 0$ на множестве P , получаем искомую функцию. ■

Наконец, докажем следующий аналог теоремы Лузина, сформулированной во введении.

Теорема 1. Пусть функция $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда найдется непрерывная функция $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на (a, b) также относительно логарифмической ёмкости. Более того, функцию Φ можно выбрать так, что $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ и $|\Phi(x)| \leq \varepsilon$ при всех $x \in [a, b]$ для любого заранее предписанного $\varepsilon > 0$.

□ Определим по индукции последовательность замкнутых множеств $P_n \subseteq [a, b]$, $n = 0, 1, \dots$ и последовательность непрерывных функций $G_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \dots$, чьи производные существуют п.в. и измеримы относительно логарифмической ёмкости, такие, что при обозначениях $Q_n = \bigcup_{k=0}^n P_k$ и $\Phi_n = \sum_{k=0}^n G_k$ выполняются следующие условия: (a) $\Phi_n'(x) = \varphi(x)$ при $x \in Q_n$, (b) $G_n(x) = 0$ при $x \in Q_{n-1}$, (c) $|G_n(x+h)| \leq |h|/2^n$ для всех $x \in Q_{n-1}$ и всех h , таких, что $x+h \in [a, b]$, (d) $C(I \setminus Q_n) < 1/n$, где $I = [a, b]$.

Итак, пусть $G_0 \equiv 0$ и $P_0 = \emptyset$ и пусть G_n и P_n с указанными свойствами уже



построены для всех $n = 1, 2, \dots, m$. Тогда найдется компакт $E_m \subset I \setminus Q_m$, такой, что:

$$C(I \setminus (Q_m \cup E_m)) < 1/(m+1), \quad (14)$$

а функции Φ'_m и φ непрерывны на E_m , см., например, теорему 2.3.5 в [15].

По лемме 4 с множеством $P = Q_m$ и функцией $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, равной $\varphi(x) - \Phi'_m(x)$ на E_m и нулю на $I \setminus E_m$, найдется непрерывная функция $G_{m+1} : I \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что:

(i) $G'_{m+1}(x) = \varphi(x) - \Phi'_m(x)$ п.в. на $I \setminus Q_m$ относительно логарифмической ёмкости, (ii) $G_{m+1}(x) = G'_{m+1}(x) = 0$ для всех $x \in Q_m$, и (iii) $|G_{m+1}(x+h)| \leq |h|/2^{m+1}$ для всех $x \in Q_m$ и всех h , таких, что $x+h \in I$.

По определению логарифмической ёмкости, условиям (i) и (14), найдется компакт $P_{m+1} \subseteq E_m$, такой, что

$$C(I \setminus (Q_m \cup P_{m+1})) < 1/(m+1), \quad (15)$$

$$G'_{m+1}(x) = \varphi(x) - \Phi'_m(x) \quad \forall x \in P_{m+1}. \quad (16)$$

Как легко видеть из (15) и (16), а также (ii) и (iii), условия (a), (b), (c) и (d) сохраняются и для $n = m+1$.

Положим теперь на основе приведённой конструкции последовательностей G_n и P_n :

$$\Phi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x), \quad Q = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k. \quad (17)$$

Заметим, что $\Phi_k \rightarrow \Phi$ равномерно на отрезке I ввиду условия (c) и, следовательно, функция Φ является непрерывной. По построению, для любого $x_0 \in Q$ имеем, что $x_0 \in Q_n$ при всех достаточно больших n и, т.к.

$$\frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = \frac{\Phi_n(x_0+h) - \Phi_n(x_0)}{h} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_k(x_0+h) - G_k(x_0)}{h},$$

мы получаем из условий (a), (b) и (c), что

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} - \varphi(x_0) \right| < \frac{1}{2^n},$$

т.е. $\Phi'(x_0) = \varphi(x_0)$. Кроме того, по условию (d) видим, что $C(I \setminus Q) = 0$. Таким образом, $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на $[a, b]$ относительно логарифмической ёмкости.

Наконец, применяя конструкцию доказательства леммы 3 к найденной нами функции Φ вместо неопределённого интеграла, находим новую функцию Φ_* , такую, что $\Phi'_*(x) = \varphi(x)$ п.в. на $[a, b]$ также относительно логарифмической ёмкости с $\Phi_*(a) = \Phi_*(b) = 0$ и $|\Phi_*(x)| \leq \varepsilon$ при всех $x \in [a, b]$ для любого заранее предписанного $\varepsilon > 0$. ■

4. О задаче Дирихле в единичном круге.

Одним из центральных результатов работы является следующий аналог теоремы Геринга.



Теорема 2. Пусть $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – 2π -периодическая функция, которая измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда существует гармоническая функция $u(z)$, $z \in \mathbb{D}$, такая, что $u(z) \rightarrow \varphi(\vartheta)$ при $z \rightarrow e^{i\vartheta}$ вдоль некасательных путей для всех $\vartheta \in \mathbb{R}$ за исключением быть может множества логарифмической ёмкости нуль.

□ По теореме 1 найдется непрерывная 2π -периодическая функция $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $\Phi'(\vartheta) = \varphi(\vartheta)$ для п.в. ϑ относительно логарифмической ёмкости. Пусть

$$U(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta-t) + r^2} \Phi(t) dt \quad (18)$$

для $r < 1$. Тогда по хорошо известному результату, восходящему к Фату, $\frac{\partial}{\partial \vartheta} U(z) \rightarrow \Phi'(\vartheta)$ при $z \rightarrow e^{i\vartheta}$ вдоль любых некасательных путей всюду, где существует $\Phi'(\vartheta)$, см., например, 3.441 в [20], с. 53, см. также теорему IX.1.2 в [21]. Следовательно, заключение теоремы следует для функции $u(z) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} U(z)$, $z = re^{i\vartheta}$, $r \in (0, 1)$, доопределённой нулём в точке $z = 0$.

Действительно, функция U является гармонической в единичном круге, см., например, теорему I.D.1.1 в [3], и потому бесконечно дифференцируемой. Таким образом, дифференциальный оператор $\partial/\partial \vartheta$ перестановочен с оператором Лапласа для U в проколоте единичном круге $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ и, следовательно, функция $u(z)$ – гармоническая в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Кроме того,

$$u(re^{i\vartheta}) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r(1-r^2) \sin \vartheta}{(1-2r \cos(\vartheta-t) + r^2)^2} \Phi(t) dt \quad (19)$$

и элементарные вычисления в (19) дают оценку на окружностях $|z| = r$, $r \in (0, 1)$,

$$|u(z)| \leq \frac{2r(1+r)}{(1-r)^3} \cdot M \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0,$$

где $M = \max \Phi$. Таким образом, $u(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$. Наконец, интеграл от функции u по любой окружности $|z| = r$, $r \in (0, 1)$, равен нулю и, по характеристическому свойству о средних интегральных значениях на окружностях, функция $u(z)$ — гармоническая в \mathbb{D} . ■

По известному принципу максимума Линделёфа, см., например, лемму 1.1 в монографии [18], получается теорема единственности для задачи Дирихле в классе *ограниченных гармонических функций* в единичном круге. В более широких классах гармонических функций нет никакой теоремы единственности решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Более того, в работе [9] было доказано, что пространство всех гармонических функций в \mathbb{D} с некасательным пределом 0 в почти каждой точке $\partial\mathbb{D}$ имеет бесконечную размерность.



На основе леммы 2 можно аналогично доказать более тонкий результат о гармонических функциях относительно логарифмической ёмкости вместо меры длины на $\partial\mathbb{D}$.

Лемма 5. *Пространство всех гармонических функций $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, таких, что $\lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) = 0$ вдоль любых некасательных путей для почти всех $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости имеет бесконечную размерность.*

□ Действительно, пусть $\Phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ - интегрируемая функция, которая дифференцируема с $\Phi'(t) = 0$ п.в. на $\partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости. Тогда функция

$$U(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta-t) + r^2} \Phi(t) dt, \quad z = re^{i\vartheta}, \quad r < 1,$$

является гармонической в \mathbb{D} и $U(z) \rightarrow \Phi(\Theta)$ при $z \rightarrow e^{i\Theta}$, см., например, теорему 1.3 в [18] или теорему IX.1.1 в [21], и $\frac{\partial}{\partial\vartheta} U(z) \rightarrow \Phi'(\Theta)$ при $z \rightarrow e^{i\Theta}$ вдоль любых некасательных путей, где $\Phi'(\Theta)$ существует, см., например, 3.441 в [20], с. 53, или теорему IX.1.2 в [21]. Таким образом, гармоническая функция $u(z) = \frac{\partial}{\partial\vartheta} U(z)$ имеет некасательный предел 0 п.в. на $\partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости.

Укажем подпространство таких функций u с бесконечным базисом. Именно, пусть $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ - функция канторовского типа из леммы 2 и пусть $\varphi_n : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 1]$ равна $\varphi((t - a_{n-1})/(a_n - a_{n-1}))$ на $[a_{n-1}, a_n]$, где $a_0 = 0$ и $a_n = 2\pi(2^{-1} + \dots + 2^{-n})$, $n = 1, 2, \dots$ и 0 вне $[a_{n-1}, a_n]$. Обозначим через U_n и u_n гармонические функции, соответствующие φ_n как в первом абзаце.

По построению, носители функций φ_n взаимно не пересекаются и, таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \varphi_n$ корректно определён для любой последовательности $\gamma_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$. Если мы дополнительно ограничимся последовательностями $\gamma = \{\gamma_n\}$ в пространстве l с нормой $\|\gamma\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|$, то ряд является подходящей функцией Φ для первого абзаца.

Обозначим через U и u гармонические функции, соответствующие функции Φ как в первом абзаце, а через \mathcal{H}_0 - класс всех таких функций u . Заметим, что функции u_n , $n = 1, 2, \dots$, из второго абзаца образуют базис пространства \mathcal{H}_0 с локально равномерной сходимостью в \mathbb{D} , которое метризуемо.

Во-первых, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n \neq 0$, если $\gamma \neq 0$. Действительно, предположим, что $\gamma_n \neq 0$ для некоторого $n = 1, 2, \dots$. Тогда $u \neq 0$, поскольку пределы $\lim_{z \rightarrow \zeta} U(z)$ существуют для всех $\zeta = e^{i\vartheta}$ с $\vartheta \in (a_{n-1}, a_n)$ и могут быть произвольно близкими как к 0 так и к γ_n .

Во-вторых, $u_m^* = \sum_{n=1}^m \gamma_n u_n \rightarrow u$ локально равномерно в \mathbb{D} при $m \rightarrow \infty$. Действительно, имеем следующую оценку остаточного члена в круге



$$\mathbb{D}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}, r < 1,$$

$$|u(z) - u_m^*(z)| \leq \frac{2r(1+r)}{(1-r)^3} \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} |\gamma_n| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

Замечание 3. Отметим, что гармонические функции u , найденные нами в лемме 5, в отличие от функций U , сами не могут быть представлены в виде интеграла Пуассона с какой-либо интегрируемой функцией $\Phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, поскольку такой интеграл имел бы некасательные пределы Φ п.в., см., например, следствие IX.9.1 в [21]. Таким образом, u не принадлежит к классам h_p ни при каком $p > 1$, см., например, теорему IX.2.3 в [21].

Теорема 3. Пусть $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ - функция, измеримая относительно логарифмической ёмкости. Тогда пространство всех гармонических функций $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ с пределами $\lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) = \varphi(\zeta)$ для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости вдоль некасательных путей имеет бесконечную размерность.

□ Действительно, по теореме 2 имеем по крайней мере одну такую гармоническую функцию u и, комбинируя этот факт с леммой 5, получаем заключение теоремы 3. ■

Теорема 4. Пусть $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ - функция, измеримая относительно логарифмической ёмкости. Тогда существует аналитическая функция f в \mathbb{D} , такая, что $\operatorname{Re} f(z) \rightarrow \varphi(\zeta)$ при $z \rightarrow \zeta$ вдоль любых некасательных путей для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости. Размерность пространства всех таких аналитических функций бесконечна.

□ Действительно, поскольку любая гармоническая функция u в \mathbb{D} имеет сопряженную функцию v , такую, что $f = u + iv$ - аналитическая функция в \mathbb{D} , теорема 4 следует непосредственно из теоремы 3. ■

5. О взаимосвязи граничных значений сопряженных функций.

Известен весьма тонкий факт, восходящий к Лузину, что гармонические функции в единичном круге с непрерывными (даже абсолютно непрерывными !) граничными значениями могут иметь сопряженные гармонические функции, чьи граничные значения не являются непрерывными функциями, более того, не являются даже существенно ограниченными в окрестности любой точки единичной окружности, см. например, [22], с. 557. Таким образом, взаимосвязь между граничными значениями сопряженных гармонических функций является весьма непростой вещью, см. также I.E в [3].

Мы называем $\lambda : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ функцией ограниченной вариации, пишем $\lambda \in \mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$, если

$$V_\lambda(\partial\mathbb{D}) := \sup \sum_{j=1}^k |\lambda(\zeta_{j+1}) - \lambda(\zeta_j)| < \infty, \quad (20)$$

где супремум берётся над всеми конечными наборами точек $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}$, $j = 1, \dots, k$, с циклическим порядком, означающим, что ζ_j лежит между ζ_{j+1} и ζ_{j-1} для каждого $j = 1, \dots, k$. Здесь мы предполагаем, что $\zeta_{k+1} = \zeta_1 = \zeta_0$. Величина $V_\lambda(\partial\mathbb{D})$ называется вариацией функции λ .



Замечание 4. Как это явствует из неравенства треугольника, если мы добавляем новые промежуточные точки в набор ζ_j , $j = 1, \dots, k$, то сумма в (9) не убывает. Таким образом, супремум в (9) достигается при $\delta = \max_{j=1, \dots, k} |\zeta_{j+1} - \zeta_j| \rightarrow 0$. Отметим также, что по определению $V_\lambda(\partial\mathbb{D}) = V_{\lambda \circ h}(\partial\mathbb{D})$, т.е. *вариация является инвариантом* при гомеоморфизмах $h : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ и, таким образом, определение может быть распространено естественным образом на произвольную жорданову кривую в \mathbb{C} .

Обозначим через $A(\zeta_0, \delta)$ дугу единичной окружности $\partial\mathbb{D}$ с центром в точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ длины 2δ , где $\delta \in (0, \pi)$. Назовём множество $E \subset \partial\mathbb{D}$ *логарифмически тонким в точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$* , если при $\delta \rightarrow 0$

$$C(E \cap A(\zeta_0, \delta)) = o\left(\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right). \quad (21)$$

Как известно, $C(A(\zeta_0, \delta)) \simeq -1/\log \delta$ при $\delta \rightarrow 0$, где запись $u \simeq v$ означает, что для достаточно малых δ найдется постоянная $c \in (0, \infty)$, такая, что $v/c \leq u \leq c \cdot v$, см., например, [16], с. 131. Таким образом, (21) означает, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{C(E \cap A(\zeta_0, \delta))}{C(A(\zeta_0, \delta))} = 0, \quad (22)$$

т.е. ζ_0 является *точкой разрежения для множества E* относительно логарифмической ёмкости. Условие (21) влечёт также, что ζ_0 является *точкой разрежения для множества E* относительно меры длины на окружности $\partial\mathbb{D}$, как это следует, например, из леммы 1 в [17].

Будем говорить, что функция $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ *почти непрерывна* в точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$, если найдется некоторое логарифмически тонкое множество $E \subseteq \partial\mathbb{D}$, такое, что $\varphi(\zeta) \rightarrow \varphi(\zeta_0)$ при $\zeta \rightarrow \zeta_0$ вдоль множества $\partial\mathbb{D} \setminus E$. Будем также говорить, что φ *почти непрерывна на $\partial\mathbb{D}$* , если она почти непрерывна в каждой точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ за исключением быть может множества логарифмической ёмкости нуль. Заметим, что почти непрерывные функции являются измеримыми относительно логарифмической ёмкости по предложению 1. Заметим также, что логарифмически тонкие множества, а также множества логарифмической ёмкости нуль и, следовательно, почти непрерывные функции инвариантны относительно конформных (дробно-линейных) отображений расширенной комплексной плоскости на себя, переводящих единичную окружность в расширенную вещественную ось и обратно. Таким образом, по теореме 1 в [17] получаем следующее заключение.

Теорема 5. Пусть $\alpha : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция ограниченной вариации и пусть $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ – аналитическая функция, такая, что

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} f(z) = \alpha(\zeta) \quad \text{для п.в. } \zeta \in \partial\mathbb{D} \quad (23)$$

относительно логарифмической ёмкости вдоль любых некасательных путей. Тогда

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Im} f(z) = \beta(\zeta) \quad \text{для п.в. } \zeta \in \partial\mathbb{D} \quad (24)$$



относительно логарифмической ёмкости вдоль любых некасательных путей, где $\beta : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая функция измеримая относительно логарифмической ёмкости.

Также докажем следующее предложение, которым мы воспользуемся позже.

Предложение 2. Для любой функции $\lambda : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ класса $\mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$ найдется функция $\alpha_\lambda : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ класса $\mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$, такая, что $\lambda(\zeta) = \exp\{i\alpha_\lambda(\zeta)\}$, $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.

В дальнейшем мы называем функцию α_λ функцией аргумента λ .

□ Рассмотрим функцию $\Lambda(\vartheta) = \lambda(e^{i\vartheta})$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Ясно, что $V_\Lambda = V_\lambda$ и, таким образом, Λ имеет не более чем счетный набор скачков j_n , где ряд $\sum j_n$ является абсолютно сходящимся, $\sum |j_n| \leq V_\lambda$, и $\Lambda(\vartheta) = J(\vartheta) + C(\vartheta)$, где $C(\vartheta)$ – непрерывная функция, а $J(\vartheta)$ – функция скачков Λ , которая равна сумме всех ее скачков на отрезке $[0, \vartheta]$, см., например, следствие VIII.3.2 и теорему VIII.3.7 в [23]. Мы имеем, что $V_J \leq V_\lambda$ и $V_C \leq 2V_\lambda$, см., например, теорему 6.4 в [24]. Ассоциируем с комплексной величиной j_n вещественную величину

$$\alpha_n = -2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re} j_n}{\operatorname{Im} j_n} \in [-\pi, \pi].$$

В силу геометрической интерпретации этих величин ($|j_n|$ равна длине хорды для дуги единичной окружности длины $|\alpha_n|$) и элементарных вычислений, мы имеем, что $|j_n| \leq |\alpha_n| \leq j_n \cdot \pi/2$.

Теперь, ассоциируем с функцией $J(\vartheta)$ функцию $j(\vartheta)$, которая равна сумме всех α_n соответствующих скачкам Λ на отрезке $[0, \vartheta]$. Заметим, что $V_j \leq V_J \cdot \pi/2$. Далее, ассоциируем с комплекснозначной функцией $C(\vartheta)$ вещественнозначную функцию $c(\vartheta)$ следующим образом. Так как $C(\vartheta)$ равномерно непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$, последний можно поделить на отрезки $S_k = [\theta_{k-1}, \theta_k]$, $\theta_k = 2\pi k/m$, $k = 1, \dots, m$, с достаточно большим $m \in \mathbb{N}$, таким, что $|C(\vartheta) - C(\vartheta')| < 2$ для всех ϑ и $\vartheta' \in S_k$. Положим по индукции

$$c(\vartheta) = c(\theta_{k-1}) - 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re}[C(\vartheta) - C(\theta_{k-1})]}{\operatorname{Im}[C(\vartheta) - C(\theta_{k-1})]} \quad \forall \vartheta \in S_k, k = 1, \dots, m,$$

где

$$c(0) := \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re}[C(0) - 1]}{\operatorname{Im}[C(0) - 1]}.$$

Кроме того, пусть $\gamma_\lambda(\vartheta) = j(\vartheta) + c(\vartheta)$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. По построению $\Lambda(\vartheta) = e^{i\gamma_\lambda(\vartheta)}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, $V_{\gamma_\lambda} \leq V_\lambda \cdot 3\pi/2$. Наконец, полагая $\alpha_\lambda(\zeta) = \gamma_\lambda(\vartheta)$, если $\zeta = e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, получаем искомую функцию α_λ класса $\mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$. ■



6. Проблема Римана-Гильберта в единичном круге.

Теорема 6. Пусть $\lambda : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ – функция ограниченной вариации и $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция измеримая относительно логарифмической ёмкости. Тогда существуют аналитические функции $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, такие, что вдоль любых некасательных путей

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z) \} = \varphi(\zeta) \quad \text{для п.в. } \zeta \in \partial\mathbb{D} \quad (25)$$

относительно логарифмической ёмкости. Пространство всех таких аналитических функций имеет бесконечную размерность.

□ Заметим, что по предложению 2 функция аргумента $\alpha_\lambda \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ поскольку $\lambda \in \mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$. Поэтому

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \alpha(\zeta) \frac{z + \zeta}{z - \zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (26)$$

является аналитической функцией в \mathbb{D} с $u(z) = \operatorname{Re} g(z) \rightarrow \alpha(\zeta)$ при $z \rightarrow \zeta$ вдоль любых некасательных путей в \mathbb{D} для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, см., например, следствие IX.1.1 в [21] и теорему I.E.1 в [3]. Отметим, что $\mathcal{A}(z) = \exp\{ig(z)\}$ является аналитической функцией.

По теореме 5 существует функция $\beta : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ конечная п.в. и измеримая относительно логарифмической ёмкости, такая, что $v(z) = \operatorname{Im} g(z) \rightarrow \beta(\zeta)$ при $z \rightarrow \zeta$ для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ также относительно логарифмической ёмкости вдоль любых некасательных путей. Таким образом, по теореме 4 существует аналитическая функция $\mathcal{B} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, такая, что $U(z) = \operatorname{Re} \mathcal{B}(z) \rightarrow B(\zeta) := \varphi(\zeta) \cdot \exp\{\beta(\zeta)\}$ при $z \rightarrow \zeta$ вдоль любых некасательных путей для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости. Наконец, элементарные вычисления показывают, что искомая функция $f = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$. Более того, по той же теореме 4 размерность пространства таких функций бесконечна. ■

Замечание 5. Как это следует из формулы (26), первая аналитическая функция \mathcal{A} в приведенном доказательстве вычисляется в явном виде. Функция $\beta : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ в доказательстве также может быть явно вычислена по следующей формуле, см., например, теорему I.E.4.1 в [3], для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$

$$\beta(\zeta) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\alpha(\zeta e^{-it}) - \alpha(\zeta e^{it})}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt. \quad (27)$$

Вторая аналитическая функция \mathcal{B} в этом доказательстве равна $\frac{\partial}{\partial \vartheta} G(z)$, $z = re^{i\vartheta}$, с

$$G(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \Phi(\zeta) \frac{z + \zeta}{z - \zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (28)$$

где $\Phi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, такая, что $\frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi(\zeta) = B(\zeta)$, $\zeta = e^{i\vartheta}$, для п.в. $\vartheta \in [0, 2\pi]$ относительно логарифмической ёмкости, см. нетривиальную конструкцию в доказательстве теоремы 1.



7. Распространение результатов на квазидиски. Наши результаты можно распространить на случай квазидисков (областей, ограниченных квазиконформными кривыми) и, в частности, на области с гладкими и липшицевыми границами.

Итак, пусть D – область в комплексной плоскости \mathbb{C} и пусть $\mu : D \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. Уравнением Бельтрами в D с коэффициентом μ называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \tag{29}$$

где $f_{\bar{z}} = \bar{\partial}f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y – частные производные функции $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ по x и y , соответственно. Уравнение (29) называется невырожденным, если $\|\mu\|_\infty < 1$.

Напомним, что гомеоморфные решения с обобщенными производными по Соболеву невырожденных уравнений Бельтрами (29) называются *квазиконформными отображениями*, см., например, [25] и [26]. *Квазидисками* именуются образы единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ при квазиконформных отображениях \mathbb{C} на себя, а их границы – *квазиокружностями* или *квазиконформными кривыми*. Напомним, что *жордановой кривой* называется взаимнооднозначный непрерывный образ окружности в \mathbb{C} . Известно, что любая гладкая и любая липшицева жорданова кривая является спрямляемой квазиконформной кривой и, в тоже время, квазиконформные кривые могут быть неспрямляемыми, как показывает известный пример так называемой снежинки Коха, см., например, пункт II.8.10 в [26].

Заметим, что жордановы кривые вообще говоря не имеют касательных. Поэтому нам нужна замена понятия некасательного предела. В связи с этим, напомним теорему Бейджмила [27], см. также теорему III.1.8 в [11], согласно которой для любой функции $\Omega : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, за исключением не более чем счетного множества $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, для любой пары дуг γ_1 и γ_2 в \mathbb{D} , оканчивающихся в $\zeta \in \partial\mathbb{D}$,

$$C(\Omega, \gamma_1) \cap C(\Omega, \gamma_2) \neq \emptyset, \tag{30}$$

где $C(\Omega, \gamma)$ обозначает *предельное множество Ω в ζ вдоль γ* , т.е.,

$$C(\Omega, \gamma) = \{w \in \overline{\mathbb{C}} : \Omega(z_n) \rightarrow w, z_n \rightarrow \zeta, z_n \in \gamma\}.$$

Непосредственно по теоремам Римана и Каратеодори, см., например, теоремы II.2.1 и II.3.2 в [21] и теорему II.C.1 в [3], этот результат можно распространить на произвольную жорданову область D в \mathbb{C} . Для функции $\Omega : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ и $\zeta \in \partial D$, обозначим через $P(\Omega, \zeta)$ пересечение всех предельных множеств $C(\Omega, \gamma)$ для дуг γ в D , оканчивающихся в ζ . Далее называем точки множества $P(\Omega, \zeta)$ *главными асимптотическими значениями Ω в ζ* . Отметим, что, если Ω имеет предел хотя бы вдоль одной дуги в D , оканчивающейся в точке $\zeta \in \partial D$, со свойством (30), то главное асимптотическое значение единственно.

Теорема 7. Пусть D – жорданова область в \mathbb{C} , ограниченная квазиконформной кривой, $\lambda : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$, $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$ – функция ограниченной вариации и $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ –



функция, измеримая относительно логарифмической ёмкости. Тогда существуют аналитические функции $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, такие, что в смысле единственного главного асимптотического значения

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z) \} = \varphi(\zeta) \quad \text{для п.в. } \zeta \in \partial \mathbb{D} \quad (31)$$

относительно логарифмической ёмкости. Пространство всех таких аналитических функций имеет бесконечную размерность.

Если ∂D – спрямляемая квазиконформная кривая, то предел в (31) имеет место п.в. относительно натурального параметра вдоль любых некасательных путей.

В частности, последнее заключение в теореме 7 имеет место для областей с гладкими и липшицевыми границами.

□ Без ограничения общности можно считать, что $0 \in D$ и $1 \in \partial D$. Жорданова область D по теоремам Римана и Каратеодори может быть отображена с помощью конформного отображения h на единичный круг \mathbb{D} с нормировками $h(0) = 0$ и $h(1) = 1$.

По принципу отражения для квазиконформных отображений, привлекая конформное отражение (инверсию) относительно единичной окружности в образе и квазиконформное отражение относительно ∂D в прообразе, мы можем продолжить h до квазиконформного отображения $H : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $H(0) = 0$, $H(1) = 1$ и $H(\infty) = \infty$, см., например, I.8.4, II.8.2 и II.8.3 в [26]. Отметим, что $\Lambda = \lambda \circ H^{-1}$ является функцией ограниченной вариации, $V_\Lambda(\partial \mathbb{D}) = V_\lambda(\partial D)$.

При отображениях H и H^{-1} множества логарифмической ёмкости нуль на ∂D переходят в множества логарифмической ёмкости нуль на $\partial \mathbb{D}$ и наоборот, поскольку квазиконформные отображения являются непрерывными по Гёльдеру на ∂D и $\partial \mathbb{D}$, соответственно, см., например, теорему II.4.3 в [26].

Далее, функция $\Phi = \varphi \circ H^{-1}$ является измеримой относительно логарифмической ёмкости. Действительно, при указанных отображениях любые множества, измеримые относительно логарифмической ёмкости, переходят в множества, измеримые относительно логарифмической ёмкости, поскольку любое такое множество представимо в виде объединения сигма-компакта и множества логарифмической ёмкости нуль, а компакты при непрерывных отображениях переходят в компакты и являются измеримыми множествами относительно логарифмической ёмкости.

Поэтому исходная задача (31) сводится к задаче Римана-Гильберта для аналитических функций F в единичном круге:

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \overline{\Lambda(\zeta)} \cdot F(z) = \Phi(\zeta), \quad (32)$$

а по теореме 6 существует аналитическая функция $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, для которой это граничное условие выполняется для п.в. $\zeta \in \partial \mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости вдоль любых некасательных путей. Таким образом, ввиду теоремы Бейджмила, искомого решение исходной задачи Римана-Гильберта (31) существует и представимо в виде $f = F \circ H$. Более того, по той же теореме 6 размерность пространства таких решений бесконечна.



Наконец, поскольку искажение углов при квазиконформных отображениях ограничено, см., например, [28], [29] и [30], то в случае спрямляемой ∂D условие (31) можно понимать вдоль некасательных путей п.в. относительно натурального параметра. ■

Отметим, что использование логарифмической ёмкости позволяет применить наши результаты также к задачам Дирихле и Римана-Гильберта для уравнений Бельтрами, поскольку логарифмическая ёмкость является инвариантом при квазиконформных отображениях.

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / М.: Физматгиз, 1959. – 509 с.
2. Гурвиц А. Курант Р. Теория функций / М.: Наука, 1968. – 618 с.
3. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p / М.: Мир, 1984. – 364 с.
4. Hilbert D. Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf eine Problem der Funktionentheorie / Verhandl. des III Int. Math. Congr., Heidelberg, 1904.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / М.: Наука, 1977. – 640 с.
6. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Наука, 1968. – 448 с.
7. Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen / Leipzig, Berlin, 1912.
8. Gehring F.W. On the Dirichlet problem // Michigan Math. J. – 1955–1956. – 3. – P.201.
9. Ryazanov V. On the Riemann-Hilbert Problem without Index // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. – 2014. – 5 (LXIII); 1. – P.169-178.
10. Сакс С. Теория интеграла / М.: ИЛ, 1949. – 344 с.
11. Носиро К. Предельные множества / М.: ИЛ, 1963. – 252 с.
12. Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств / М.: Мир, 1971. – 126 с.
13. Неваплинна Р. Однозначные аналитические функции / М.: ОГИЗ, 1941. – 388 с.
14. Fékete M. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // Math. Z. – 1923. – 17. – P.228-249.
15. Федерер Г. Геометрическая теория меры / М.: Наука, 1987. – 760 с.
16. Adams D.R., Hedberg L.I. Function spaces and potential theory / Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 366 p.
17. Twomey J.V. The Hilbert transformation and fine continuity // Irish Math. Soc. Bulletin. – 2006. – 58. – P.81-91.
18. Garnett J.B., Marshall D.E. Harmonic Measure / Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. – 572 p.
19. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе / М.: Мир, 1967. – 252 с.
20. Зигмунд А. Тригонометрические ряды /- М.: НКТП, 1939. – 324 с.
21. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / М.: Наука, 1966. – 628 с.
22. Бари Н.К. Тригонометрические ряды / М.: Физматлит, 1961. – 936 с.
23. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / М.: Наука, 1974. – 480 с.
24. Рудин У. Основы математического анализа / М.: Мир, 1966. – 320 с.
25. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям / М.: Мир, 1969. – 134 с.
26. Lehto O., Virtanen K.J. Quasiconformal mappings in the plane / Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1973. – 258 p.
27. Bagemihl F. Curvilinear cluster sets of arbitrary functions // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. – 1955. – 41. – P.379–382.
28. Agard S. B., Gehring F.W. Angles and quasiconformal mappings // Proc. London Math. Soc.(3). – 1965. – 14a. – P.1–21.



29. Agard S. Angles and quasiconformal mappings in space // J. Anal. Math. – 1969. – 22. – P.177-200.
30. Taari O. Charakterisierung der Quasikonformität mit Hilfe der Winkelverzerrung // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. – 1966. – 390. – P.1-43.

**PROBLEMS OF DIRICHLET AND RIEMANN-HILBERT
FOR ANALYTIC FUNCTIONS**

A.S. Yefimushkin, V.I. Ryazanov

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU,
Roze Luxemburg St., 74, Donetsk, 83114, Ukraine, e-mail: art.89@bk.ru; vl.ryazanov1@gmail.com

Abstract. It is proved the analog of Lusin's theorem which set that each function on a segment being measurable with respect to logarithmic capacity coincides almost everywhere with the derivative of a continuous function. On this basis, it is established the analog of Gehring's theorem on solvability of the Dirichlet problem for harmonic functions on the unit disk with arbitrary boundary data which are measurable with respect to logarithmic capacity. Furthermore, it is proved that the space of the found solutions has the infinite dimension. We also derive from here the solvability of the corresponding problems of Dirichlet and Riemann-Hilbert for analytic functions on the unit disk. Finally, these results are extended to quasisidisks and, in particular, to domains with smooth and Lipschitz boundaries.

Key words: problems of Dirichlet and Riemann-Hilbert, logarithmic capacity, functions of bounded distortion, harmonic and analytic functions.



MSC 74F10

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ ИЗ ВОДОЕМА В ГРУНТ

Н.С. Ерыгина

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, 308015, г. Белгород, e-mail: eryginan@bsu.edu.ru

Аннотация. Статья посвящена математической модели фильтрации жидкости из водоема в упругий пористый грунт под действием силы тяжести. Динамика жидкости описывается системой нестационарных уравнений Стокса для несжимаемой жидкости, а перемещение упругого скелета – уравнениями Ламе.

Ключевые слова: фильтрация жидкостей, уравнения Ламе и Стокса, усреднение периодических структур.

Введение. В настоящей работе выводятся макроскопические математические модели фильтрации жидкости из водоема в грунт, полученные усреднением точной математической модели описывающей данный процесс на микроскопическом уровне. Этот подход был ранее использован В. Ягером и А. Микеличем [1]- [3] для специальной геометрии порового пространства (несвязный твердый скелет) в пространстве \mathbb{R}^2 (плоский случай).

Задача решается в пространстве \mathbb{R}^3 для произвольной геометрии порового пространства используя методы, предложенные в работах А.М. Мейрманова [4]- [7].

В этих работах были введены безразмерные критерии физических процессов τ_0 , μ_0 , μ_1 и λ_0 , характеризующие конкретный физический процесс. Так, например, медленной фильтрации жидкости в пористом упругом грунте соответствуют параметры $\tau_0 = 0$, $\mu_0 = 0$ и $\lambda_0 > 0$, а фильтрации жидкости в абсолютно твердом пористом грунте соответствуют параметры $\tau_0 = 0$, $\mu_0 = 0$ и $\lambda_0 = 0$.

В настоящей статье выводятся усредненные уравнения для случая $\mu_0 = 0$, $\tau_0 > 0$ и $\lambda_0 > 0$, после чего осуществляется предельный переход при $\tau_0 \rightarrow 0$.

1. Постановка задачи. Исследуемая область Q включает в себя область Ω^0 – водоем, область Ω – пористый грунт и их общую границу S^0 : $Q = \Omega^0 \cup \Omega \cup S^0$. Область Q лежит в полупространстве $\{x_3 < 0\}$. Предполагается, что область Ω есть периодическое повторение элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0, 1)^3$, подобласть $Y_s \subset Y$ моделирует твердый скелет в Y , подобласть $Y_f \subset Y$ поровое пространство, а поверхность $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ границу «твердый скелет – поровое пространство». Твердый скелет Ω_s^ε есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_s , поровое пространство Ω_f^ε – элементарной ячейки εY_f , а граница Γ^ε – периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon \gamma$.

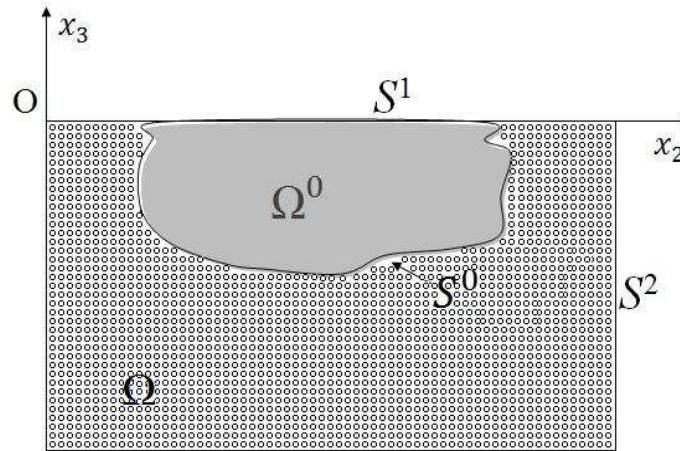


Рис. 1. Фильтрация из водоема в грунт.

Предполагается также, что часть S^1 внешней границы S области Q принадлежит плоскости $\{x_3 = 0\}$, $\mathbf{e} = -\mathbf{e}_3$, $S^2 = S \setminus S^1$ является поверхностью класса C^2 .

Движение жидкости в области Ω^0 при $t > 0$ описывается нестационарной системой уравнений Стокса

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0, \quad (1)$$

$$\tau_0 \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}_f + \varrho_f \mathbf{e}, \quad (2)$$

где

$$\mathbb{P}_f = \alpha_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) - p \mathbb{I},$$

а совместное движение упругого скелета и жидкости в Ω при $t > 0$ описывается уравнением неразрывности (1) и уравнением сохранения моментов

$$\tau_0 \varrho^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \varrho^\varepsilon \mathbf{e}, \quad (3)$$

где

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) + (1 - \chi^\varepsilon) \lambda_0 \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) - p \mathbb{I},$$

и

$$\varrho^\varepsilon = \varrho_f \chi^\varepsilon + \varrho_s (1 - \chi^\varepsilon). \quad (4)$$

На общей границе $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$ при $t > 0$ выполняются условия непрерывности

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^0}} \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad (5)$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^0}} \mathbb{P}_f(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbb{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0), \quad (6)$$



для перемещений и нормальных напряжений. Здесь $\mathbb{D}(x, \mathbf{w})$ – симметрическая часть градиента $\nabla \mathbf{w}$, \mathbb{I} – единичный тензор, $\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)$ – вектор внешней нормали к границе S^0 в точке $\mathbf{x}^0 \in S^0$, $\mathbf{e} = -\mathbf{e}_3$.

На границе S^1 при $t > 0$ задается условие Неймана

$$\mathbb{P}_f(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = -p^0(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}, \quad (7)$$

а на границе S^2 при $t > 0$ – условие Дирихле

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (8)$$

Задача замыкается начальными условиями

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q. \quad (9)$$

Характеристическая функция $\chi^\varepsilon(\mathbf{x})$ области Ω_f^ε определяется выражением

$$\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = (1 - \zeta)\chi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right),$$

где $\zeta = \zeta(\mathbf{x})$ – характеристическая функция области Ω^0 в Q , $\chi(\mathbf{y})$ – характеристическая функция Y_f (жидкой части элементарной ячейки) [8].

Предполагается, что существуют предельные значения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha_\mu(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \mu_1.$$

2. Основные результаты.

Определение. Будем говорить, что функции $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ такие, что

$$p^\varepsilon \in L_2(Q_T), \quad \mathbf{w}^\varepsilon, \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon), (\zeta + (1 - \zeta)\chi^\varepsilon)\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) \in \mathbf{L}_2(Q_T),$$

являются обобщенным решением задачи (1)-(9), если они удовлетворяют уравнению неразрывности (1) почти всюду в области $Q \times (0, T)$, граничному условию (8), начальному условию (9) для функции \mathbf{w}^ε и интегральному тождеству

$$\int_0^T \int_Q \left(-\tau_0 \tilde{\varrho}^\varepsilon \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\zeta \mathbb{P}_f + (1 - \zeta)\mathbb{P}) : \mathbb{D}(x, \varphi) \right) dx dt + \int_0^T \int_Q \left(\tilde{\varrho}^\varepsilon \mathbf{e} \cdot \varphi - \nabla \cdot (\varphi p^0) \right) dx dt = 0. \quad (10)$$

для любых гладких функций φ таких, что $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ на границе S_T^2 и $\varphi(\mathbf{x}, T) = 0$, $\mathbf{x} \in Q$.

Здесь $\tilde{\varrho}^\varepsilon = (\zeta + (1 - \zeta)\chi^\varepsilon)\varrho_f + (1 - \zeta)(1 - \chi^\varepsilon)\varrho_s$.



Теорема 1. Пусть

$$p^0 = p^0(t).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и произвольного промежутка времени $[0; T]$ существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(9) и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \int_Q \left(\tau_0^2 \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right|^2 + \tau_0 \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 + \lambda_0 (1 - \zeta) (1 - \chi^\varepsilon) |\mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{w}^\varepsilon)|^2 \right) dx + \\ \int_0^T \int_Q \left(|p^\varepsilon|^2 + \alpha_\mu (\zeta + (1 - \zeta) \chi^\varepsilon) \left| \mathbb{D} \left(\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 \right) dx dt \leq C_0, \end{aligned} \quad (11)$$

где C_0 – произвольная константа, не зависящая от τ_0 и ε .

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1,

$$\mu_0 = 0, \quad 0 < \lambda_0, \tau_0 < \infty, \quad \mu_1 = \infty,$$

функции $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ являются обобщенным решением задачи (1)-(9) и $\mathbf{w}_s^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon}(\mathbf{w}^\varepsilon)$ является продолжением из области Ω_s^ε в область Ω .

Тогда последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, $\left\{ \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right\}$, $\left\{ (1 - \zeta) \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right\}$ и $\{p^\varepsilon\}$ сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ и $L_2(Q_T)$ к функциям \mathbf{v} , \mathbf{w} , $\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2}$ и p соответственно при $\varepsilon \rightarrow 0$. Последовательность $\{\mathbf{w}_s^\varepsilon\}$ сходится слабо в $\mathbf{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ к функции \mathbf{w}_s при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предельное давление p и предельная скорость жидкости \mathbf{v} удовлетворяет системе

$$\tau_0 \rho_f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \rho_f \mathbf{e}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (12)$$

в области Ω_0 при $t > 0$. В области Ω при $t > 0$ предельные функции \mathbf{w}_s и p являются решением усредненной системы, состоящей из усредненного уравнения баланса

$$\tau_0 \hat{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}_0^{(s)} + \hat{\rho}, \quad \mathbf{e}, \quad (13)$$

$$\mathbb{P}_0^{(s)} = \lambda_0 \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) - p \mathbb{I} \quad (14)$$

и уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{w}_s = 0. \quad (15)$$

Это решение удовлетворяет условию непрерывности

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \in S^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbf{w}_s(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \in S^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega_0}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0), \quad (16)$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \in S^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbb{P}_0^{(s)}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = - \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \in S^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega_0}} p(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0) \quad (17)$$



на общей границе S^0 , граничному условию

$$\mathbf{w}_s = 0, \tag{18}$$

на границе S^2 , граничному условию

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0(t), \tag{19}$$

на границе $S_0^1 = S^1 \cap \overline{\Omega_0}$ и граничному условию

$$\mathbb{P}_0^{(s)}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = -p_0(t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0), \tag{20}$$

на границе $S_1^1 = S^1 \cap \overline{\Omega}$.

В (13)-(20) $\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)$ — единичный вектор нормали к S^0 (или S_1^1) в точке $\mathbf{x}^0 \in S^0$ (или S_1^1),

$$\hat{\rho} = m\rho_f + (1 - m)\rho_s, \quad m = \int_Y \chi(y)dy,$$

\mathfrak{N}_0^s — симметричный положительно определенный тензор четвертого порядка, который определяется из решения вспомогательной задачи на элементарной ячейке.

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 2 $\tau_0 = 1/n$ и $p^{(n)}$, $\mathbf{w}^{(n)}$ и \mathbf{w}_s^n — обобщенное решение задачи (12)-(20). Тогда последовательность $\{p^{(n)}\}$ сходится слабо в $L_2(Q_T)$ к функции p и последовательность $\{\mathbf{w}_s^n\}$ сходится слабо в $\mathbf{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ к функции \mathbf{w}_s при $n \rightarrow \infty$. Предельное давление жидкости p в области Ω_0 при $t > 0$ равно гидростатическому давлению

$$p(\mathbf{x}, t) = p^0(t) - \rho_f x_3 \equiv p_0(\mathbf{x}, t), \tag{21}$$

Предельные функции являются решением усредненной системы в области Ω при $t > 0$, состоящей из усредненного уравнения баланса

$$\nabla \cdot \mathbb{P}_0^{(s)} + \hat{\rho} \mathbf{e} = 0, \tag{22}$$

и уравнения неразрывности (15). Это решение удовлетворяет граничному условию (18) на границе S^2 , граничному условию (20) на границе S_1^1 и граничному условию

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbb{P}_0^{(s)}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = -p_0(\mathbf{x}^0, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0), \tag{23}$$

на общей границе S^0 . При этом тензор $\mathbb{P}_0^{(s)}(\mathbf{x}, t)$ определяется как и в формулировке предыдущей теоремы.

3. Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы основывается на энергетических тождествах

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_Q \left(\tau_0 \tilde{\rho}^\varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + \lambda_0 (1 - \zeta) (1 - \chi^\varepsilon) |\mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t))|^2 \right) dx + \\ & + \alpha_\mu \int_0^t \int_Q (\zeta + (1 - \zeta) \chi^\varepsilon) \left| \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, \tau) \right) \right|^2 dx d\tau = \\ & = \int_0^t \int_Q \tilde{\rho}^\varepsilon \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau) dx d\tau, \tag{24} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_Q \left(\tau_0 \tilde{\varrho}^\varepsilon \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + \lambda_0 (1 - \zeta) (1 - \chi^\varepsilon) \left| \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right) \right|^2 \right) dx + \\ & \alpha_\mu \int_0^t \int_Q (\zeta + (1 - \zeta) \chi^\varepsilon) \left| \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial \tau^2}(\mathbf{x}, \tau) \right) \right|^2 dx d\tau = \\ & \frac{1}{2} \int_Q \tau_0 \tilde{\varrho}^\varepsilon \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x}, 0) \right|^2 dx = I_0. \quad (25) \end{aligned}$$

Для нахождения решения задачи (1)-(9) используем метод Галеркина. Этот метод показывает, что при любом $t \geq 0$ и произвольной соленоидальной функции $\varphi \in W_2^1(Q)$, равной нулю при $\mathbf{x} \in S^2$, выполняется равенство

$$\begin{aligned} \int_Q \tau_0 \tilde{\varrho}^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \cdot \varphi(\mathbf{x}) dx + \int_Q (\zeta \mathbb{P}_f + (1 - \zeta) \mathbb{P})(\mathbf{x}, t) : \mathbb{D}(x, \varphi(\mathbf{x})) dx = \\ \int_Q \tilde{\varrho}^\varepsilon \mathbf{e} \cdot \varphi(\mathbf{x}) dx. \end{aligned}$$

При $t = 0$ $\zeta \mathbb{P}_f + (1 - \zeta) \mathbb{P} = 0$ в силу начального условия. В итоге получим

$$\int_Q \tau_0 \tilde{\varrho}^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x}, 0) \cdot \varphi(\mathbf{x}) dx = \int_Q \tilde{\varrho}^\varepsilon \mathbf{e} \cdot \varphi(\mathbf{x}) dx.$$

Согласно (1), $\frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x}, 0)$ является соленоидальной функцией в Q . Возьмем в качестве пробной функции функцию

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x}, 0),$$

$$\int_Q \tau_0 \tilde{\varrho}^\varepsilon \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x}, 0) \right|^2 dx = \int_Q \tilde{\varrho}^\varepsilon \mathbf{e} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x}, 0) dx.$$

Тогда

$$\int_Q \tau_0 \tilde{\varrho}^\varepsilon \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x}, 0) \right|^2 dx \leq \frac{C_0}{\tau_0}.$$

Последнее отношение и (25) доказывает оценку для производной $\frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}$ в (11).

Для оценки правой части (24) используется представление

$$\tilde{\varrho}^\varepsilon = \varrho_f + (1 - \zeta)(1 - \chi^\varepsilon)(\varrho_s - \varrho_f), \quad \mathbf{e} = -\nabla x_3,$$

формула интегрирования по частям и уравнение неразрывности (1)

$$\varrho_f \int_Q \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} dx = -\varrho_f \int_Q (\nabla x_3) \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} dx = 0.$$



Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_Q \tilde{\rho}^\varepsilon \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} dx d\tau = -\rho_f \int_Q (\nabla x_3) \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} dx + (\rho_s - \rho_f) \int_\Omega (1 - \chi^\varepsilon) \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} dx = \\ &= (\rho_s - \rho_f) \int_\Omega (1 - \chi^\varepsilon) \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} dx. \end{aligned}$$

Используя неравенства Гельдера и Коши

$$\begin{aligned} I &\leq \left(\int_\Omega (\rho_s - \rho_f)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (1 - \chi^\varepsilon) \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{(\rho_s - \rho_f)^2}{2\delta} |\Omega| + \frac{\delta}{2} \int_\Omega (1 - \chi^\varepsilon) \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{w}_s^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon}(\mathbf{w}^\varepsilon)$ — продолжение функции \mathbf{w}^ε из области Ω_s^ε в область Ω (Здесь используются результаты о продолжении полученные С. Сонса [9]). Тогда из неравенства Пуанкаре-Фридрихса

$$\int_\Omega (1 - \chi^\varepsilon) \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 dx = \int_\Omega (1 - \chi^\varepsilon) \left| \frac{\partial \mathbf{w}_s^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 dx \leq C \int_\Omega (1 - \chi^\varepsilon) \left| \nabla \frac{\partial \mathbf{w}_s^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 dx$$

и неравенства Корна

$$\int_\Omega (1 - \chi^\varepsilon) \left| \nabla \frac{\partial \mathbf{w}_s^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 dx \leq C \int_\Omega (1 - \chi^\varepsilon) \left| \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}_s^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 dx = C \int_Q (1 - \chi^\varepsilon) (1 - \zeta) \left| \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 dx$$

получаем соотношение

$$I \leq \frac{(\rho_s - \rho_f)^2}{2\delta} |\Omega| + C \frac{\delta}{2} \int_Q (1 - \chi^\varepsilon) (1 - \zeta) \left| \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 dx,$$

которое вместе с (25) доказывает (11).

Для получения оценки на давление p^ε интегральное тождество (10) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} p^\varepsilon \nabla \cdot \varphi dx dt &= \int_{Q_T} \left((\zeta + (1 - \zeta) \chi^\varepsilon) \alpha_\mu \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) + \right. \\ &\left. + (1 - \zeta) (1 - \chi^\varepsilon) \lambda_0 \mathbb{D} (x, \mathbf{w}^\varepsilon) \right) : \mathbb{D} (x, \varphi) dx dt - \int_{Q_T} \tilde{\rho}^\varepsilon \mathbf{e} \cdot \varphi dx dt - \int_{Q_T} p^0 \nabla \varphi dx dt. \end{aligned}$$

Такое представление и оценка (11) позволяют записать неравенство

$$\left| \int_{Q_T} p^\varepsilon \nabla \cdot \varphi dx dt \right| \leq C \left(\int_{Q_T} |\nabla \varphi|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (26)$$



Далее в качестве пробной функции выбирается функция $\varphi(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющая условиям:

$$\nabla \cdot \varphi = p^\varepsilon \quad \text{и} \quad \int_{Q_T} |\nabla \varphi|^2 dx dt \leq \int_{Q_T} |p^\varepsilon|^2 dx dt.$$

Для этого представим ее в виде суммы $\varphi = \varphi_0 + \nabla \psi$, где

$$\Delta \psi = p^\varepsilon, \quad x \in Q; \quad \psi|_{S_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right|_{S_1} = 0; \quad (27)$$

$$\nabla \cdot \varphi_0 = 0, \quad x \in Q; \quad \varphi_0 + \nabla \psi = 0, \quad x \in S_2. \quad (28)$$

Согласно результатам, изложенным в монографиях О.А. Ладыженской [10] и [11], каждая из задач (27), (28) имеет единственное решение, причем справедливы оценки

$$\psi \in L_2((0, T); W_2^2(Q)), \quad \int_0^T (\|\psi\|_2^{(2)})^2 dt \leq C \int_{Q_T} (p^\varepsilon)^2 dx dt,$$

$$\varphi_0 \in L_2((0, T); W_2^1(Q)), \quad \int_0^T (\|\varphi_0\|_2^{(1)})^2 dt \leq C \int_{Q_T} (\|\psi\|_2^{(2)})^2 dt.$$

Тогда неравенство (26) примет вид

$$\left| \int_{Q_T} (p^\varepsilon)^2 dx dt \right| \leq C \left(\int_{Q_T} (p^\varepsilon)^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

и, окончательно, получим

$$\left(\int_{Q_T} (p^\varepsilon)^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C.$$

Доказательство теоремы 2. Основываясь на оценках (11) заключаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место:

$$p^\varepsilon \rightarrow p \text{ слабо в } L_2(Q_T),$$

$$\mathbf{w}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \text{ слабо и двухмасштабно в } \mathbf{L}_2(Q_T),$$

$$\mathbf{w}_s^\varepsilon \rightarrow \mathbf{w}_s(\mathbf{x}, t) \text{ слабо и двухмасштабно в } \mathbf{L}_2(Q_T),$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \text{ слабо и двухмасштабно в } \mathbf{L}_2(Q_T),$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}_s^\varepsilon}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \text{ слабо и двухмасштабно в } \mathbf{L}_2(Q_T),$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \text{ слабо и двухмасштабно в } \mathbf{L}_2(Q_T),$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s^\varepsilon}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \text{ слабо и двухмасштабно в } \mathbf{L}_2(Q_T),$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}_s(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$\mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{w}_s^\varepsilon) \rightarrow \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{w}_s) + \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)) \text{ двухмасштабно в } \mathbf{L}_2(Q_T).$$



Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в интегральном тождестве (10) с пробной функцией $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$, равной нулю при $t = T$ и на S^2 , мы получаем макроскопическое уравнение баланса моментов в форме интегрального тождества

$$\int_0^T \int_Q \nabla \cdot (\varphi p^0) dxdt - \int_0^T \int_\Omega (\tau_0 \hat{\rho} \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \hat{\rho} \mathbf{e} \cdot \varphi) dxdt +$$

$$\int_0^T \int_\Omega (\lambda_0 ((1-m)\mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) + \langle \mathbb{D}(x, \mathbf{U}) \rangle_{Y_s}) - p \mathbb{I}) : \mathbb{D}(x, \varphi) dxdt =$$

$$\int_0^T \int_{\Omega^0} (\tau_0 \varrho_f \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varrho_f \mathbf{e} \cdot \varphi + p(\nabla \cdot \varphi)) dxdt.$$

Можно показать, что

$$(1-m)\mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) + \langle \mathbb{D}(x, \mathbf{U}) \rangle_{Y_s} = \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s).$$

Таким образом, последнее тождество примет вид

$$\int_0^T \int_Q \nabla \cdot (\varphi p^0) dxdt - \int_0^T \int_\Omega (\tau_0 \hat{\rho} \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \hat{\rho} \mathbf{e} \cdot \varphi) dxdt +$$

$$\int_0^T \int_\Omega (\lambda_0 \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) - p \mathbb{I}) : \mathbb{D}(x, \varphi) dxdt =$$

$$\int_0^T \int_{\Omega^0} (\tau_0 \varrho_f \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varrho_f \mathbf{e} \cdot \varphi + p(\nabla \cdot \varphi)) dxdt. \quad (29)$$

Уравнение неразрывности (1) для \mathbf{w}^ε преобразуется в уравнение неразрывности в форме интегрального тождества

$$\int_0^T \int_Q \nabla \xi \cdot \mathbf{w} dxdt = 0 \quad (30)$$

для любой гладкой функции ξ равной нулю на $S^1 \times (0, T)$. Это тождество предполагает уравнение неразрывности в (12), уравнение неразрывности (15), и условие непрерывности (16) на общей границе S^0 .

Интегральное тождество (29) включает динамическое уравнение (12), динамическое уравнение (13), условие непрерывности (17) на общей границе S^0 , граничное условие (20) на границе S_1^1 и граничное условие (19) на границе S_0^1 .

Получим формулу для нахождения тензора \mathfrak{N}_0^s . Пусть $\mathbf{U}_0^{ij} \in \mathbb{W}_2^1(Y_s)$ решение задачи

$$\nabla_y \cdot ((1-\chi)(\mathbb{D}(y, \mathbf{U}_0^{(i,j)}) + \mathbb{J}^{i,j} - \mathbf{P}_0^{(i,j)} \mathbf{I})) = 0, \quad (1-\chi)\nabla_y \cdot \mathbf{U}_0^{(i,j)} = 0, \quad \mathbf{y} \in Y$$

такое, что $\langle \mathbf{U}_0^{(i,j)} \rangle_{Y_s} = 0$ и пусть

$$\mathbf{U} = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{U}_0^{(ij)}(\mathbf{y}) D_{ij}(\mathbf{x}, t),$$



где

$$D_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) (\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{w}_s = (u_1, u_2, u_3),$$

$$\mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) = \sum_{ij=1}^3 D_{ij} \mathbb{J}^{ij}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(y, \mathbf{U}) &= \sum_{ij=1}^3 \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_0^{ij}) D_{ij} = \sum_{ij=1}^3 \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_0^{ij}) (\mathbb{J} : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s)) = \\ &= \left(\sum_{ij=1}^3 \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_0^{ij}) \otimes \mathbb{J}^{ij} \right) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) = \mathbb{B}_0^s(\mathbf{y}) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) \end{aligned}$$

и

$$\mathfrak{N}_0^s = (1 - m) \sum_{i,j=1}^3 \mathbb{J}^{ij} \otimes \mathbb{J}^{ij} + \sum_{i,j=1}^3 \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_0^{(i,j)}) \rangle_{Y_s} \otimes \mathbb{J}^{ij}.$$

Свойства тензора \mathfrak{N}_0^s следуют из интегрального тождества

$$\int_{Y_s} \left(\mathbb{D}(y, \mathbf{U}_0^{ij}) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_0^{kl}) + \mathbb{J}^{ij} : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_0^{kl}) \right) dy = 0.$$

Доказательство теоремы 3. Заметим, что оценки (11) справедливы для функций $p^{(n)}$ и $\mathbf{w}_s^{(n)}$. Тогда из (11) и (12) следует, что $\nabla p^{(n)} \in L_2((0, T); L_2(\Omega^0))$ и справедливы следующие оценки

$$\begin{aligned} &\max_{0 \leq t \leq T} \int_Q \left(\frac{1}{n^2} \zeta \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{(n)}}{\partial t^2} \right|^2 + \frac{1}{n^2} (1 - \zeta) \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s^{(n)}}{\partial t^2} \right|^2 \right) dx + \\ &\max_{0 \leq t \leq T} \int_Q \left(\frac{1}{n} \zeta \left| \frac{\partial \mathbf{w}^{(n)}}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{n} (1 - \zeta) \left| \frac{\partial \mathbf{w}_s^{(n)}}{\partial t} \right|^2 + \lambda_0 (1 - \zeta) |\mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s^{(n)})|^2 \right) dx + \\ &\int_0^T \int_Q \left(|p^{(n)}|^2 + \zeta |\nabla p^{(n)}|^2 \right) dx dt \leq C_0. \quad (31) \end{aligned}$$

Переписывая (29) в виде

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_Q \nabla \cdot (\varphi p^0) dx dt - \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{1}{n} \hat{\varrho} \frac{\partial \mathbf{w}_s^{(n)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \hat{\varrho} \mathbf{e} \cdot \varphi \right) dx dt + \\ &\int_0^T \int_\Omega \left(\lambda_0 \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s^{(n)}) - p^{(n)} \mathbb{I} \right) : \mathbb{D}(x, \varphi) dx dt = \\ &\int_0^T \int_{\Omega^0} \left(\frac{1}{n} \varrho_f \frac{\partial \mathbf{w}^{(n)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varrho_f \mathbf{e} \cdot \varphi + p^{(n)} (\nabla \cdot \varphi) \right) dx dt, \quad (32) \end{aligned}$$



закключаем, что

$$p^{(n)}(\mathbf{x}, t) = p^0(t), \quad \mathbf{x} \in S_0^1, \quad t > 0, \quad (33)$$

как след функции из $L_2((0, T); W_2^1(\Omega^0))$.

Из оценок (31) следует, что из последовательности $\{n\}$ можно выделить такие номера, что подпоследовательности (для простоты оставим старое обозначение) сходятся

$$\frac{1}{n} \hat{\rho} \frac{\partial \mathbf{w}_s^{(n)}}{\partial t} \rightarrow 0 \quad \text{сильно} \quad L_2((0, T); L_2(\Omega)),$$

$$\frac{1}{n} \varrho_f \frac{\partial \mathbf{w}^{(n)}}{\partial t} \rightarrow 0 \quad \text{сильно} \quad L_2((0, T); L_2(\Omega^0)),$$

$$\nabla p^{(n)} \rightharpoonup \nabla p_0, \quad p^{(n)} \rightharpoonup p_0 \quad \text{слабо} \quad L_2((0, T); L_2(\Omega^0)),$$

и

$$p^{(n)} \rightharpoonup p, \quad \mathbf{w}_s^{(n)} \rightharpoonup \mathbf{w}_s, \quad \nabla \mathbf{w}_s^{(n)} \rightharpoonup \nabla \mathbf{w}_s \quad \text{слабо} \quad L_2((0, T); L_2(\Omega))$$

при $n \rightarrow \infty$.

Переходя к пределу в (32) и в (30) при $n \rightarrow \infty$, получим интегральное тождество

$$\int_0^T \int_Q \nabla \cdot (\varphi p^0) dxdt - \int_0^T \int_{\Omega^0} (\varrho_f \mathbf{e} \cdot \varphi + p_0 (\nabla \cdot \varphi)) dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} ((\lambda_0 \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) - p \mathbb{I}) : \mathbb{D}(x, \varphi) - \hat{\rho} \mathbf{e} \cdot \varphi) dxdt = 0, \quad (34)$$

и уравнение неразрывности (15).

Интегральное тождество (34) очевидно, содержит (20)-(23).

Литература

1. Jäger W., Mikelić A. On the flow conditions at the boundary between a porous medium and an impervious solid // in "Progress in PDE: the Metz surveys 3", eds. M. Chipot, J. Saint Jean Paulin et I. Shafirir, Pitman research Notes in Mathematics / London: Longman Scientific and Technical, 1994. – №314. – P.145-161.
2. Jäger W., Mikelić A. On the boundary conditions at the contact interface between a porous medium and a free fluid // Ann. Sc. norm. Super. Pisa, Cl, Sci.-Ser. IV. – 1996. – XXIII, Fasc. 3. – P.403-465.
3. Jäger W., Mikelić A. On the boundary conditions at the contact interface between two porous media // in "PDE, Theory and numerical solution", eds. W. Jäger, J. Nečas, O. John, K. Najzar and J. Stará, Chapman and Hall/CRC Research notes in Math. / London: CRS Press, 1999. – №406. – P.175-186.
4. Meirmanov A. Nguetseng's two-scale convergence Method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media // Siberian Mathematical Journal 2007. – 48. – №. 3. – P.519-538.
5. Meirmanov A. Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermo-elastic porous media // Euro. Jnl. of Applied Mathematics. – 2008. – 19. – P.259-284.
6. Meirmanov A. Double porosity models in incompressible poroelastic media // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2010. – 20. – №4. – P.635-659.



7. Meirmanov A. A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 2008. – 40. – №3. – P.1272-1289.
8. Гриценко С.А. Ерыгина Н.С. О корректности задачи фильтрации из водоема в грунт: случай вязкоупругой фильтрации // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2013. – №5;(148). – Вып.30. – С.142-153.
9. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // Math. Pures et Appl. – 1985. – 64. – P.31-75.
10. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / М.: Наука, 1970. – 288 с.
11. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / М.: Наука, 1973. – 408 с.

MACROSCOPIC MODELS OF LIQUID FILTRATION FROM RESERVOIR INTO POROUS MEDIUM

N.S. Erygina

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: eryginan@bsu.edu.ru

Abstract. Filtration from reservoir into porous medium under gravity is investigated. The motion of the liquid is governed by the non-stationary Stokes' system and the joint motion of the poroelastic medium is governed by the Lamé system.

Key words: filtration of liquids, homogenization, Lamé's and Stokes' equations.



MSC 11D09

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ ДИОФАНТОВА УРАВНЕНИЯ С ПОЛУПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ ИЗ КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКОВ

Н.А. Зинченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: zinchenko@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе доказывается асимптотическая формула для числа решений диофантова уравнения $xy + p_1p_2 = n$, где p_1 и p_2 — простые, а x и y — натуральные числа, при условии, что числа p_1p_2 лежат в промежутках $[(2m)^c, (2m+1)^c)$, где $m \in \mathbb{N}$, $c \in (1, 2]$, а простые числа p_1 и p_2 удовлетворяют дополнительным условиям: $p_i > \exp(\sqrt{\ln n})$, $i = 1, 2$.

Ключевые слова: бинарная аддитивная задача, полупростые числа, метод тригонометрических сумм, короткие (виноградовские) промежутки.

1. Введение. В 1940 году И.М. Виноградов в [1] методом тригонометрических сумм получил асимптотическую формулу для числа простых чисел, не превосходящих x и лежащих в промежутках вида $[(2m)^2, (2m+1)^2)$, $m \in \mathbb{N}$. В 1986 году С.А. Гриценко в [2] вывел асимптотическую формулу для числа простых чисел, не превосходящих x и лежащих в промежутках вида

$$[(2m)^c, (2m+1)^c), \tag{1}$$

где $m \in \mathbb{N}$, и $c \in (1, 2]$. Такие промежутки принято называть короткими или «виноградовскими». В 1988 году С.А. Гриценко решил ряд аддитивных задач с простыми числами, лежащими в промежутках (1) (см. [3], [4]). Позднее, задачи подобного вида рассматривались в [5] А. Балогом и Дж. Фридлендером. Отметим, что в работах [3]- [5] аддитивные задачи являются тернарными, или решаются по схеме тернарной задачи.

Естественно задаться вопросом о разрешимости бинарных аддитивных задач с простыми числами из промежутков вида (1). В связи с тем, что не существует вариантов теоремы Бомбьери-Виноградова для простых чисел из промежутков вида (1), сопоставимых по силе с классической теоремой Бомбьери-Виноградова, решать бинарные аддитивные задачи с простыми числами из (1) в настоящее время не удается. Автором были решены некоторые бинарные аддитивные задачи с полупростыми числами из «виноградовских» промежутков ([6], [7], [8]). В данной статье выводится асимптотическая формула для числа решений некоторого диофантова уравнения, которая была сформулирована в работе [7] без доказательства.

Теорема. Пусть c — произвольное число из полуинтервала $(1, 2]$, p_1, p_2 — простые числа,

$$J(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n: \\ p_i > \exp(\sqrt{\ln n})}} 1, \quad J_1(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n: \\ p_i > \exp(\sqrt{\ln n}), \\ \{\frac{1}{2}(p_1p_2)^{1/c}\} < \frac{1}{2}}} 1, \quad i = 1, 2.$$



Тогда справедлива формула

$$J_1(n) = \frac{1}{2}J(n) \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln \ln n}{\ln \ln n}\right)\right), \quad J(n) \sim c_0 n \ln \ln n, \quad c_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu^2(r)}{r\varphi(r)}.$$

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (теорема Бруна-Титчмарша) ([9], с. 20). Для натуральных чисел a и k , удовлетворяющих условиям $(a, k) = 1$ и $k \leq x$ имеем:

$$\pi(x, a, k) = \sum_{p \leq x, p \equiv a \pmod{k}} 1 < \frac{(2 + \eta)x}{\varphi(k) \ln\left(\frac{2x}{k}\right)},$$

где $\eta > 0$ и $x > x_0(\eta)$.

Лемма 2. Пусть $X \geq 2$ и $\varphi(m)$ — значение функции Эйлера (число натуральных чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m). Тогда справедливо равенство

$$\sum_{m \leq X} \frac{1}{\varphi(m)} = c_0 \ln X + O(1), \quad c_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu^2(r)}{r\varphi(r)}.$$

Лемма 3 ([12], с. 136). При $N > 2$ и целом положительном l для $\tau(m)$ (число натуральных делителей m)

$$\sum_{0 < m \leq N} (\tau(m))^l \ll N(\ln N)^{2l-1}.$$

Лемма 4 ([10], с. 476) (теорема Бомбьери-Виноградова). Пусть $\text{Li } x = \int_2^x \frac{du}{\ln u}$ и при $a \leq k$, $(a, k) = 1$

$$\pi(x, a, k) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{k}}} 1.$$

Тогда для всякого $A > 0$ найдется такое B , что

$$\sum_{k \leq \sqrt{x}(\ln x)^{-B}} \max_{(l, k)=1} \left| \pi(x, l, k) - \frac{\text{Li } x}{\varphi(k)} \right| = O\left(\frac{x}{\ln^A x}\right).$$

Лемма 5 ([11], с. 30). Пусть x — большое число, $D \leq x^{1-\alpha}$, где

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}, \quad (l, D) = 1, \quad x_1 < x, \quad x - x_1 > x^{1-\frac{\alpha}{2}}.$$



Тогда

$$\sum_{x_1 \leq Dm+l \leq x} (\tau(Dm+l))^k = O\left(\frac{x-x_1}{D} (\ln x)^{a(k)}\right),$$

где $a(k)$ — константа, зависящая только от k .

3. Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы разобьем на несколько этапов.

1. Сначала преобразуем сумму $J_1(n)$. Прежде всего заметим, что

$$J_1(n) = \bar{J}_1(n) + O\left(\frac{n}{\ln n}\right), \tag{2}$$

где

$$\bar{J}_1(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n: \\ p_i > \exp(\sqrt{\ln n}), \\ \{\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\} < \frac{1}{2}, \\ p_1 \nmid n, p_2 \nmid n}} 1.$$

Далее, при суммировании по p_i ($i = 1, 2$) будем подразумевать, что p_i не делит n . Обозначим через $\chi(y)$ характеристическую функцию промежутка $[0, 1/2)$, продолженную периодически с периодом 1 на всю числовую ось. Тогда

$$\bar{J}_1(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n: \\ p_1 > \exp(\sqrt{\ln n}), p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \chi\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\right).$$

Везде далее будем иметь в виду, что $p_i > \exp(\sqrt{\ln n})$, $i = 1, 2$. Ограничивая промежутки изменения по переменным x и y , получим:

$$\bar{J}_1(n) = 2J_{11}(n) - J_{12}(n), \tag{3}$$

где

$$J_{11}(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n: \\ x \leq \sqrt{n}}} \chi\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\right), \quad J_{12}(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n: \\ x \leq \sqrt{n}, y \leq \sqrt{n}}} \chi\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\right).$$

Рассмотрим сначала $J_{11}(n)$. Ограничим дополнительно промежуток изменения переменной x , выделив случай $x \leq \sqrt{n} P^{-10}$, где $P = \frac{1}{n^{(\ln \ln n)^2}}$, и оценим соответствующую ошибку. В результате, получим

$$J_{11}(n) = J'_{11}(n) + O(R_{11}(n)), \tag{4}$$

где

$$J'_{11}(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n: \\ x \leq \sqrt{n} P^{-10}}} \chi\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\right), \quad R_{11}(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n: \\ \sqrt{n} P^{-10} < x \leq \sqrt{n}, \\ p_1 \leq \sqrt{n}}} 1.$$



Оценим сверху $R_{11}(n)$. Так как сумма $R_{11}(n)$ соответствует слагаемым, для которых $p_1 \nmid n$, то из уравнения $p_1 p_2 + xy = n$, следует, что в этой сумме будут собраны слагаемые, для которых $p_1 \nmid x$, то есть $(p_1, x) = 1$. Поэтому

$$R_{11}(n) = \sum_{p_1 \leq \sqrt{n}} \sum_{\substack{\sqrt{n}P^{-10} < x \leq \sqrt{n}, \\ (x, p_1) = 1}} \sum_{\substack{p_2 \leq \frac{n}{p_1}, \\ p_2 \equiv p_1^* n \pmod{x}}} 1 \leq \sum_{\sqrt{n}P^{-10} < x \leq \sqrt{n}} \sum_{p_1 \leq \sqrt{n}} \sum_{\substack{p_2 \leq \frac{n}{p_1}, \\ p_2 \equiv p_1^* n \pmod{x}}} 1,$$

где p_1^* — решение сравнения $p_1 y \equiv 1 \pmod{x}$.

Так как $\frac{n}{p_1} \geq \sqrt{n}$ и $x \leq \sqrt{n}$, то $x \leq \frac{n}{p_1}$. Поэтому для оценки внутренней суммы по p_2 можно воспользоваться теоремой Бруна-Титчмарша (лемма 1). В результате, получим

$$R_{11}(n) \ll n \sum_{\sqrt{n}P^{-10} < x \leq \sqrt{n}} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{p_1 \leq \sqrt{n}} \frac{1}{p_1 \ln \frac{2n}{p_1 x}}.$$

Оценивая внутреннюю сумму в полученном неравенстве, рассмотрим отдельно случаи, когда $p_1 \leq \sqrt[4]{n}$ и $\sqrt[4]{n} < p_1 \leq \sqrt{n}$:

$$\sum_{p_1 \leq \sqrt{n}} \frac{1}{p_1 \ln \frac{2n}{p_1 x}} = \sigma_1(x, n) + \sigma_2(x, n),$$

где

$$\sigma_1(x, n) = \sum_{p_1 \leq \sqrt[4]{n}} \frac{1}{p_1 \ln \frac{2n}{p_1 x}}, \quad \sigma_2(x, n) = \sum_{\sqrt[4]{n} < p_1 \leq \sqrt{n}} \frac{1}{p_1 \ln \frac{2n}{p_1 x}}.$$

Для оценки $\sigma_1(x, n)$ воспользуемся тем, что $x \leq \sqrt{n}$, $p \leq \sqrt[4]{n}$. В результате, получим

$$\sigma_1(x, n) \leq \sum_{p_1 \leq \sqrt[4]{n}} \frac{1}{p_1 \ln 2\sqrt[4]{n}} \ll \frac{1}{\ln n} \sum_{p_1 \leq \sqrt[4]{n}} \frac{1}{p_1} \ll \frac{\ln \ln n}{\ln n}.$$

Применяя для оценки $\sigma_2(x, n)$ формулу частного суммирования (преобразование Абеля [12, с. 29]), получим:

$$\sigma_2(x, n) = \int_{\sqrt[4]{n}}^{\sqrt{n}} \frac{du}{u \ln u \ln \frac{2n}{xu}} + O\left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right) \ll \frac{\ln \ln n}{\ln n}.$$

Следовательно,

$$\sum_{p_1 \leq \sqrt{n}} \frac{1}{p_1 \ln \frac{2n}{p_1 x}} \ll \frac{\ln \ln n}{\ln n}. \quad (5)$$

Далее, пользуясь леммой 2, получим, что

$$\sum_{\sqrt{n}P^{-10} < x \leq \sqrt{n}} \frac{1}{\varphi(x)} \ll \ln \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}P^{-10}} \ll \frac{\ln n}{(\ln \ln n)^2}.$$



Отсюда и из (5) имеем

$$R_{11}(n) \ll \frac{n \ln \ln n}{\ln n} \cdot \frac{\ln n}{(\ln \ln n)^2} = \frac{n}{\ln \ln n}.$$

Следовательно, из (4) следует, что

$$J_{11}(n) = J'_{11}(n) + O\left(\frac{n}{\ln \ln n}\right). \tag{6}$$

Аналогично рассуждая, приходим к равенству

$$J_{12}(n) = \sum_{p_1 p_2 + xy = n} \chi\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\right) = J'_{12}(n) + O\left(\frac{n}{\ln \ln n}\right),$$

причем суммирование ведется по $x \leq \sqrt{n}P^{-10}$ и $y \leq \sqrt{n}$, а простые числа p_1 и p_2 больше, чем $\exp(\sqrt{\ln n})$.

2. Рассмотрим $J'_{11}(n)$ и $J'_{12}(n)$ и выделим случаи, когда p_1 ограничено сверху величиной P , оценив при этом погрешность приближения. Для $J'_{11}(n)$ имеем:

$$J'_{11}(n) = J''_{11}(n) + O(r_{11}(n)), \tag{7}$$

где

$$J''_{11}(n) = \sum_{x \leq \sqrt{n}P^{-10}} \sum_{p_1 \leq P} \sum_{\substack{p_2 \leq \frac{n}{p_1}, \\ p_1 p_2 \equiv n \pmod{x}}} \chi\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\right),$$

$$r_{11}(n) = \sum_{P < p_1 \leq \sqrt{n}} \sum_{x \leq \sqrt{n}P^{-10}} \sum_{\substack{p_2 \leq \frac{n}{p_1}, \\ p_1 p_2 \equiv n \pmod{x}}} 1.$$

Оценим $r_{11}(n)$ сверху. Заметим, что, так как $(p_1, n) = 1$, то имеют решения только те из сравнений $p_1 y \equiv n \pmod{x}$, в которых $(p_1, x) = 1$. Для всех остальных x соответственные слагаемые будут равны нулю, и поэтому

$$r_{11}(n) = \sum_{P < p_1 \leq \sqrt{n}} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n}P^{-10}, \\ (x, p_1) = 1}} \sum_{\substack{p_2 \leq \frac{n}{p_1}, \\ p_2 \equiv p_1^* n \pmod{x}}} 1 = \sum_{P < p_1 \leq \sqrt{n}} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n}P^{-10}, \\ (x, p_1) = 1}} \pi\left(\frac{n}{p_1}, np_1^*, x\right),$$

где $p_1 p_1^* \equiv 1 \pmod{x}$.

Так как $\frac{n}{p_1} \geq \sqrt{n} \geq x$, то для оценки $\pi\left(\frac{n}{p_1}, np_1^*, x\right)$ можно воспользоваться теоремой Бруна-Титчмарша (лемма 1). Получаем

$$r_{11}(n) \ll n \sum_{x \leq \sqrt{n}P^{-10}} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{P < p_1 \leq \sqrt{n}} \frac{1}{p_1 \ln \frac{2n}{xp_1}}.$$



В работе [6] была получена оценка для внутренней суммы:

$$\sum_{P < p_1 \leq \sqrt{n}} \frac{1}{p_1 \ln \frac{2n}{xp_1}} \ll \frac{\ln \ln \ln n}{\ln n}.$$

Отсюда и из леммы 2 следует, что $r_{11}(n) \ll n \ln \ln \ln n$. Поэтому из (6) следует, что

$$J_{11}(n) = J''_{11}(n) + O(n \ln \ln \ln n). \quad (8)$$

Аналогично, получаем равенство:

$$J_{12}(n) = J''_{12}(n) + O(n \ln \ln \ln n), \quad (9)$$

где

$$J''_{12}(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n: \\ \exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 \leq P, \\ x \leq \sqrt{n} P^{-10}, y \leq \sqrt{n}}} \chi\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\right).$$

Из (3), (8) и (9) следует, что

$$\bar{J}_1(n) = 2J''_{11}(n) - J''_{12}(n) + O(n \ln \ln \ln n). \quad (10)$$

3. Оценим $J''_{12}(n)$:

$$J''_{12}(n) \leq \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10}, \\ y \leq \sqrt{n}}} \sum_{p_1 p_2 = n - xy} 1 \leq \sum_{m \leq \sqrt{n} P^{-10}} \tau(m) \sum_{p_1 p_2 = n - m} 1.$$

Заметим, что число решений уравнения $p_1 p_2 = n - m$, то есть $\sum_{p_1 p_2 = n - m} 1$ — величина ограниченная. Действительно, обозначив разность $n - m$ через n_1 , легко проверить, что число решений выше упомянутого уравнения не превосходит 2. Для этого рассмотрим три случая:

- 1) если $n_1 = p^2$, то уравнение $p_1 p_2 = n_1$ имеет 1 решение: $p_1 = p, p_2 = p$;
- 2) если $n_1 = q_1 q_2$, то уравнение $p_1 p_2 = n_1$ имеет 2 решения: $p_1 = q_1, p_2 = q_2$ и $p_1 = q_2, p_2 = q_1$;
- 3) если $n_1 \neq q_1 q_2$ и $n_1 \neq p^2$, то уравнение $p_1 p_2 = n_1$ не имеет решений.

Отсюда и из леммы 3 следует, что

$$J''_{12}(n) \ll \sum_{m \leq \sqrt{n} P^{-10}} \tau(m) \ll n P^{-10} \ln n \leq n P^{-9} \leq \frac{n}{\ln \ln n}.$$

Учитывая эту оценку, из (10) и (39) получим:

$$J_1(n) = 2J''_{11}(n) + O(n \ln \ln \ln n). \quad (11)$$



Аналогичными рассуждениями получается формула для $J(n)$:

$$J(n) = \sum_{p_1 p_2 + xy = n} 1 = 2K_{11}(n) + O(n \ln \ln \ln n), \tag{12}$$

где

$$K_{11}(n) = \sum_{x \leq \sqrt{n} P^{-10}} \sum_{\substack{p_1 \leq P, \\ (p_1, n) = 1}} \sum_{\substack{p_2 \leq \frac{n}{p_1}, \\ p_1 p_2 \equiv n \pmod{x}}} 1.$$

Для доказательства теоремы нам понадобится асимптотическая формула для $K_{11}(n)$. Ожидаемый главный член этой формулы по порядку должен быть равен $n \ln \ln n$.

Заметим, что из взаимной простоты чисел p_1 и n , удовлетворяющих уравнению $p_1 p_2 + xy = n$, следует взаимная простота чисел p_1 и x . Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} K_{11}(n) &= \sum_{p_1 \leq P} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10}, \\ (x, p_1) = 1}} \sum_{\substack{p_2 \leq \frac{n}{p_1}, \\ p_2 \equiv p_1^* n \pmod{x}}} 1 = \\ &= \sum_{p_1 \leq P} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10}, \\ (x, p_1) = 1}} \pi\left(\frac{n}{p_1}, n p_1^*, x\right), \end{aligned}$$

где p_1^* — решение сравнения $p_1 y \equiv 1 \pmod{x}$.

Далее, представим эту сумму в виде:

$$K_{11}(n) = \sum_{p_1 \leq P} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10}, \\ (x, p_1) = 1}} \frac{\text{Li}\left(\frac{n}{p_1}\right)}{\varphi(x)} + k_1(n),$$

где

$$k_1(n) = \sum_{p_1 \leq P} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10}, \\ (x, p_1) = 1}} \left(\pi\left(\frac{n}{p_1}, n p_1^*, x\right) - \frac{\text{Li}\left(\frac{n}{p_1}\right)}{\varphi(x)} \right).$$

Воспользовавшись теоремой Бомбьери-Виноградова (лемма 4), получим:

$$k_1(n) \ll \frac{n}{\ln n} \sum_{p_1 \leq P} \frac{1}{p_1} \ll \frac{n \ln \ln n}{\ln n}.$$

Используя лемму 2, делаем заключение:

$$\sum_{p_1 \leq P} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10}, \\ (x, p_1) = 1}} \frac{\text{Li}\left(\frac{n}{p_1}\right)}{\varphi(x)} = n \sum_{p_1 \leq P} \frac{1}{p_1 \ln \frac{n}{p_1}} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10}, \\ (x, p_1) = 1}} \frac{1}{\varphi(x)} + O\left(\frac{n \ln \ln n}{\ln n}\right),$$



поэтому

$$K_{11}(n) = n \sum_{\exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 \leq P} \frac{1}{p_1 \ln \frac{n}{p_1}} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10}, \\ (x, p_1) = 1}} \frac{1}{\varphi(x)} + O\left(\frac{n \ln \ln n}{\ln n}\right). \quad (13)$$

Преобразуем внутреннюю сумму в первом слагаемом полученного равенства:

$$\sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10}, \\ (x, p_1) = 1}} \frac{1}{\varphi(x)} = \sum_{x \leq \sqrt{n} P^{-10}} \frac{1}{\varphi(x)} - \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10}, \\ p_1 | x}} \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Воспользуемся теперь леммой 2:

$$\sum_{x \leq \sqrt{n} P^{-10}} \frac{1}{\varphi(x)} = c_0 \ln \sqrt{n} P^{-10} + O(1) = \frac{c_0}{2} \ln n + O\left(\frac{\ln n}{(\ln \ln n)^2}\right).$$

Воспользовавшись тем, что для функции Эйлера $\varphi(a \cdot b) \geq \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, $\varphi(p) = p - 1$ и учитывая, что $p_1 > \exp(\sqrt{\ln n})$, получим:

$$\sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10}, \\ p_1 | x}} \frac{1}{\varphi(x)} = \sum_{x_1 \leq \sqrt{n} P^{-10} p_1^{-1}} \frac{1}{\varphi(x_1 p_1)} \leq \sum_{x_1 \leq \sqrt{n} P^{-10} p_1^{-1}} \frac{1}{\varphi(x_1) \varphi(p_1)} = o(1).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10}, \\ (x, p_1) = 1}} \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{c_0}{2} \ln n + O\left(\frac{\ln n}{(\ln \ln n)^2}\right).$$

Применяя суммирование по Абелю и интегрирование по частям, получаем формулу:

$$\sum_{\exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 \leq P} \frac{1}{p_1 \ln \frac{n}{p_1}} = \frac{\ln \ln n}{2 \ln n} + O\left(\frac{1}{(\ln n)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Подставляя полученные формулы в (13), имеем:

$$K_{11}(n) = \frac{c_0}{4} n \ln \ln n + O\left(\frac{n}{\sqrt{\ln n}}\right). \quad (14)$$

Очевидно, что формула (14) является асимптотической.

4. Займемся получением асимптотической формулы для $J''_{11}(n)$. Для этого воспользуемся леммой о «стаканчиках» И.М. Виноградова ([13], с. 23) и выберем параметры r , Δ , α , β двумя способами.

Сначала определим эти параметры так: $r = [\ln n]$, $\Delta = \frac{1}{\ln^2 n}$, $\alpha = \Delta$, $\beta = \frac{1}{2} - \Delta$. Обозначим через $\chi_1(x)$ функцию, существование которой следует из леммы о «стаканчиках». Затем, при тех же r и Δ , положим $\alpha = -\Delta$, $\beta = \frac{1}{2} + \Delta$, а соответствующую функцию обозначим как $\chi_2(x)$. Тогда из леммы о «стаканчиках» следует, что $\chi_1(x) \leq \chi(x) \leq \chi_2(x)$, и

$$I_1(n) \leq J''_{11}(n) \leq I_2(n), \quad (15)$$



где

$$I_i(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n: \\ p_1 \leq P, x \leq \sqrt{n} P^{-10}}} \chi_i \left(\frac{1}{2} (p_1 p_2)^{\frac{1}{c}} \right), \quad i = 1, 2.$$

Если будут получены асимптотические формулы для $I_1(n)$ и $I_2(n)$ с совпадающими главными членами, то из неравенства (15) следует, что формула с таким же главным членом будет верна и для $J''_{11}(n)$.

Выведем асимптотическую формулу для $I_1(n)$. Раскладывая функцию $\chi_1(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}})$ в ряд Фурье, получим:

$$I_1(n) = \left(\frac{1}{2} + O(\Delta) \right) K_{11}(n) + \tilde{R}_1(n) + O(\ln n), \tag{16}$$

где

$$K_{11}(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n: \\ p_1 \leq P, \\ x \leq \sqrt{n} P^{-10}}} 1, \quad \tilde{R}_1(n) = \sum_{0 < |m| \leq \ln^3 n} |g_m| |S_m(n)|,$$

$$S_m(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 \leq n, \\ p_1 \leq P}} t'(n - p_1 p_2) e^{\pi i m (p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}}, \quad t'(k) = \sum_{\substack{xy = k, \\ x \leq \sqrt{n} P^{-10}}} 1,$$

g_m — коэффициент Фурье с номером m для функции $\chi_1(n)$.

Оценим сумму $S_m(n)$. Для этого разобьем промежуток суммирования по p_1 на $O(\ln P)$ промежутков вида $(P_1, P_2]$, где $P_1 < P_2 \leq 2P_1$, $\exp(\sqrt{\ln n}) < P_1 \leq P$. Тогда

$$|S_m(n)| \ll \ln P |S_m(P_1, P_2)|, \quad S_m(P_1, P_2) = \sum_{\substack{p_1 p_2 \leq n, \\ P_1 < p_1 \leq P_2}} t'(n - p_1 p_2) e^{\pi i m (p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}}. \tag{17}$$

Далее, оценим $S_m(P_1, P_2)$:

$$|S_m(P_1, P_2)| \leq \sum_{k \leq \frac{n}{P_1}} \left| \sum_{\substack{P_1 < p_1 \leq P_2, \\ kp_1 < n}} t'(n - kp_1) e^{\pi i m (kp_1)^{\frac{1}{c}}} \right|.$$

Возведем обе части неравенства в квадрат и применим неравенство Коши. Используя лемму 5, получим:

$$\begin{aligned} |S_m(P_1, P_2)|^2 &\leq \frac{n}{P_1} \sum_{k \leq \frac{n}{P_1}} \left| \sum_{\substack{P_1 < p_1 \leq P_2, \\ kp_1 < n}} t'(n - kp_1) e^{\pi i m (kp_1)^{\frac{1}{c}}} \right|^2 \leq \\ &\leq \frac{n}{P_1} \sum_{P_1 < p_1 \leq P_2} \sum_{\substack{P_1 < p_2 \leq P_2 \\ p_1 \neq p_2}} V(m; p_1, p_2) + \frac{n}{P_1} \sum_{P_1 < p_1 \leq P_2} \sum_{k \leq \frac{n}{P_1}} \tau^2(n - kp_1) = \end{aligned}$$



$$= \frac{n}{P_1} \sum_{P_1 < p_1 \leq P_2} \sum_{\substack{P_1 < p_2 \leq P_2, \\ p_1 \neq p_2}} V(m; p_1, p_2) + O\left(n^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\ln n}\right)\right), \quad (18)$$

$$V(m; p_1, p_2) = \sum_{k \leq \frac{n}{P_1}} t'(n - kp_1) t'(n - kp_2) e^{\pi i m (p_1^{\frac{1}{c}} - p_2^{\frac{1}{c}}) k^{\frac{1}{c}}}.$$

Пусть $P_1 < p_2 < p_1 \leq P_2$. Оценим сумму $V(m; p_1, p_2)$:

$$V(m; p_1, p_2) = \sum_{x_1 \leq \sqrt{n} P^{-10}} \sum_{x_2 \leq \sqrt{n} P^{-10}} \sum_{\substack{k \leq \frac{n}{p_1}, \\ kp_1 \equiv n \pmod{x_1}, \\ kp_2 \equiv n \pmod{x_2}}} e^{\pi i m (p_1^{\frac{1}{c}} - p_2^{\frac{1}{c}}) k^{\frac{1}{c}}}. \quad (19)$$

Рассмотрим систему сравнений

$$\begin{cases} kp_1 \equiv n \pmod{x_1}, \\ kp_2 \equiv n \pmod{x_2}. \end{cases}$$

относительно переменной k . Если она неразрешима, то $V(m; p_1, p_2) = 0$. Если же система сравнений разрешима, то, она эквивалентна сравнению $k \equiv k_0 \pmod{x_3}$, где $x_3 = [x_1, x_2]$ и $0 \leq k_0 < x_3$.

Рассмотрим внутреннюю сумму в (19). Обозначив ее через $v_m(p_1, p_2)$, имеем:

$$v_m(p_1, p_2) = \sum_{\substack{k \leq \frac{n}{p_1}, \\ k \equiv k_0 \pmod{x_3}}} e^{\pi i m (p_1^{\frac{1}{c}} - p_2^{\frac{1}{c}}) k^{\frac{1}{c}}} = \sum_{t \leq \left(\frac{n}{p_1} - k_0\right) \frac{1}{x_3}} e^{\pi i m (p_1^{\frac{1}{c}} - p_2^{\frac{1}{c}}) x_3^{\frac{1}{c}} (t + \xi_0)^{\frac{1}{c}}},$$

где $\xi_0 = \frac{k_0}{x_3}$, $0 \leq \xi_0 < 1$.

В работе [6] для суммы $v_m(p_1, p_2)$ получена оценка вида

$$v_m(p_1, p_2) \ll \frac{n}{p_1 x_3} \exp\left(-\gamma \frac{\ln n}{(\ln \ln n)^6}\right), \quad \gamma > 0.$$

Отсюда, из (19) и (18) получаем, что $|S_m(P_1, P_2)| \ll n \exp(-\sqrt{\ln n})$ и, следовательно, из (17) следует оценка:

$$|S_m(n)| \ll n \exp\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\ln n}\right).$$

Используя эту оценку и (18), приходим к формуле:

$$I_1(n) = \left(\frac{1}{2} + O(\Delta)\right) K_{11}(n) + O\left(n \exp\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\ln n}\right)\right).$$

Аналогичная асимптотическая формула получается и для $I_2(n)$. Поэтому, из (15) следует, что для $J''_{11}(n)$ верна асимптотическая формула:

$$J''_{11}(n) = \left(\frac{1}{2} + O(\Delta)\right) K_{11}(n) + O\left(n \exp\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\ln n}\right)\right).$$



Далее, из (11) получаем, что

$$J_{11}(n) = \left(\frac{1}{2} + O(\Delta)\right)K_{11}(n) + O(n \ln \ln \ln n) = \frac{1}{2}K_{11}(n) + O(n \ln \ln \ln n).$$

Теперь утверждение теоремы 1 следует из равенства:

$$J(n) = 2K_{11}(n) + O(n \ln \ln \ln n).$$

На этом доказательство теоремы 1 завершено.

Заключение. Бинарная аддитивная задача, рассмотренная в статье, решена с помощью метода тригонометрических сумм И.М. Виноградова [12]. Использована идея И.М. Виноградова сглаживания двойной тригонометрической суммы (получение оценки (18)). Существенную роль в доказательстве Теоремы 1 играет оценка тригонометрической суммы вида

$$\sum_{k \leq K, k \equiv k_0 \pmod{x}} \exp(2\pi i \chi k^{1/c}),$$

доказательство которой проводится с использованием как теоремы о среднем значении, так и оценок ван дер Корпута по s -й производной. Рассмотренная задача решена с полупростыми числами $p_1 p_2$ из промежутков (1). Метод Виноградова позволяет решать бинарные аддитивные задачи и для некоторых других «редких» последовательностей, «близких» к последовательности простых чисел, например, вида $p_1 p_2^a$ из виноградовских промежутков.

Литература

1. Виноградов И.М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Мат. сб. – 1940. – №7. – С.365-372.
2. Гриценко С.А. Об одной задаче И.М. Виноградова // Мат. заметки. – 1986. – 39, Вып.5. – С.625-640.
3. Гриценко С.А. Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха-Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // УМН. – 1988. – 43; Вып.4(262). – С.203-204.
4. Гриценко С.А. Три аддитивные задачи // Изв. РАН. Сер. мат. – 1992. – 56; №6. – С.1198-1216.
5. Balog A., Friedlander K.J. A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski-Shapiro // Pacific. J. Math. – 1992. – 156. – P.45-62.
6. Зинченко Н.А. Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами специального вида // Чебышевский сборник. – 2005. – VI; Вып.2 (14). – С.145-162.
7. Зинченко Н.А. Две бинарные аддитивные задачи // Сибирские электронные математические известия. – 2006. – 3. – С.352-354.
8. Зинченко Н.А. Об одной аддитивной бинарной задаче // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика, информатика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. – 2007. – 7; Вып.1. – С.9-13.
9. Хооли К. Применение методов решета в теории чисел / М.: Наука, 1987. – 136 с.
10. Прахар К. Распределение простых чисел / М.: Мир, 1967. – 511 с.
11. Линник Ю.В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах / Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. – 208 с.
12. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983. – 240 с.



13. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / М.: Наука, 1971. – 162 с.

**ASYMPTOTIC FORMULA OF SOLUTIONS NUMBER
OF DIOPHANTINE'S EQUATIONS WITH SEMISIMPLE NUMBERS
IN SHORT INTERVALS**

N.A. Zinchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: zinchenko@bsu.edu.ru

Abstract. The asymptotic formula of the solutions number of Diophantine's equations $xy + p_1p_2 = n$ is proved where p_1 and p_2 are primes, $p_i > \exp(\sqrt{\ln n})$ $i = 1, 2$; x, y are natural numbers such that p_1p_2 are in the $[(2m)^c, (2m + 1)^c)$ and $m \in \mathbb{N}, c \in (1, 2]$.

Keywords: binary additive problem, semisimple number, trigonometric sum, short (Vinogradov) intervals.



MSC 35K45, 65M32

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

С.Г. Пятков, Е.И. Сафонов

Югорский Государственный Университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск, 628012, Россия, e-mail: s_pyatkov@ugrasu.ru;
dc.gerz.hd@gmail.com

Аннотация. В работе рассмотрены вопросы корректности линейных обратных задач для параболических уравнений и систем. По интегральным условиям переопределения вместе с решением восстанавливается правая часть системы. Доказаны теоремы существования и единственности решений в классах Соболева. Показано, что подходящем выборе интегральных условий переопределения возможен предельный переход по параметру и предельное решение – решение обратной задачи, где условия переопределения – значения решения в отдельных точках.

Ключевые слова: параболическая система, обратная задача, задача управления, краевая задача, корректность.

Введение

Мы рассматриваем вопрос об определении вместе с решением правой части специального вида в параболических уравнениях и системах. Пусть G – область в \mathbb{R}^n с границей Γ класса C^{2m} и $Q = G \times (0, T)$. Параболическое уравнение имеет вид

$$u_t + A(t, x, D)u = \sum_{i=1}^r b_i(t, x)q_i(t) + f, \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

где A – матричный эллиптический оператор порядка $2m$ с матричными коэффициентами размерности $h \times h$, представимый в виде

$$A(t, x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(t, x)D^\alpha, \quad D = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}).$$

Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(t, x)D^\beta u|_S = g_j(t, x), \quad (2)$$

где $m_j < 2m$, $j = 1, 2, \dots, m$ и $S = (0, T) \times \Gamma$. Неизвестными в (1), (2) являются решение u и функции $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, r$), входящие в правую часть (1). Мы рассматриваем 2 вида условий переопределения. В первом случае условия переопределения имеют вид

$$\int_{G_i} u \varphi_i(x) dx = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (3)$$



где $\varphi_i(x), \psi_i(t)$ – некоторые гладкие функции, условия на которые мы уточним ниже, и $G_i \subset G$ некоторые области. Во втором случае рассматриваем условия вида

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad x_i \in G, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (4)$$

Параметры s, r связаны равенством $r = sh$. Задача о нахождении функций u, q_i с использованием краевых условий и условий переопределения может быть сформулирована и как некоторая задача управления. Обратные задачи подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях ([1]- [4]). Одной из моделей, возникающей при описании процессов тепломассопереноса, является система уравнений Навье-Стокса, дополненная уравнениями для температуры и концентраций переносимых веществ. По данным измерений на сечениях канала или некоторым другим характеристикам определяются те или иные параметры в задаче. Это или коэффициенты уравнений или плотности источников (правая часть) (см., например, [1], [4]- [9]). В простейших случаях при описании процессов тепломассопереноса используются параболические уравнения и системы. В литературе рассматривались как условия переопределения вида (3) так и условия переопределения (4). В частности обратные задачи об определении коэффициентов уравнения (1), зависящих от переменной t , с условием переопределения (3), где $r = 1$ и $G_i = G$, рассматривались в [10]- [16]. Соответственно линейные обратные задачи об определении правой части исследовались в [9, 17]. Аналогично, как линейные так и коэффициентные обратные задачи с условием переопределения (4) рассматривались в [8, 18] и в ([19]- [21]) соответственно. Однако, отметим, что большинство работ посвящено модельным уравнениям и случаю $n = 1$. Можно отметить работы [22, 23] одного из авторов, где были рассмотрены задачи вида (1), (2), (4) в общей постановке. Мы также сошлемся на монографии [2, 10, 18, 24, 25], где имеется большое количество постановок обратных задач для параболических уравнений и систем, и ряд результатов.

В настоящей работе, при определенных естественных условиях на данные задачи мы показываем, что задача (1)-(3) имеет единственное решение. Далее, выбирая подходящим образом функции $\varphi_i = \varphi_i(x, \varepsilon)$, зависящее от параметра $\varepsilon > 0$ (фактически мы строим приближение δ -функции Дирака, см. ниже), мы показываем, что решение u_ε задачи (1)-(3) сходится к решению задачи (1), (2), (4) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теоремы подобного рода важны при построении численных алгоритмов построения решений задач вида (1), (2), (4), поскольку для этих задач приходится вычислять производные высокого порядка для приближенных решений, что является некорректной задачей, и по этим причинам иногда возникают и излишние условия на коэффициенты уравнения (см., например, [8]). Опишем содержание работы. В следующем параграфе мы приводим вспомогательные утверждения и условия на данные. В параграфе 2 мы формулируем и доказываем наши основные утверждения – теоремы 2.1, 2.2, 2.4.

1. Определения и вспомогательные результаты

Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G; E)$ (G — область в \mathbb{R}^n) обозначается пространство сильно измеримых функций, определенных на G со значениями в



E и конечной нормой $\| \|u(x)\|_E \|_{L_p(G)}$ [26]. Мы также используем пространства $C^k(\overline{G})$, состоящие из функций, имеющих в G все производные до порядка k включительно, непрерывные в G и допускающие непрерывное продолжение на замыкание \overline{G} . Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G; E)$, $W_p^s(Q; E)$ и т.д. стандартные (см. [26, 27]). Если $E = \mathbb{C}$ или $E = \mathbb{C}^n$, то вместо $W_p^s(G; E)$ или $C^k(\overline{G}; E)$ используем обозначения $W_p^s(G)$ или $C^k(\overline{G})$. Таким образом, включение $u \in W_p^s(G)$ (или $u \in C^k(\overline{G})$) для данной вектор-функции $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ означает, что каждая из компонент u_i принадлежит пространству $W_p^s(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). В этом случае под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Будем считать, что аналогичное соглашение справедливо и для матриц, т.е. включение $a \in W_p^s(G)$ для данной матрицы-функции $a = \{a_{ij}\}_{j,i=1}^k$ означает, что $a_{ij}(x) \in W_p^s(G)$ для всех i, j . Для данного интервала $J = (0, T)$, положим $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$, Соответственно, $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$. Через $\rho(x, M)$ обозначаем расстояние от точки x до множества M . Условие $\Gamma \in C^\alpha$ ($\alpha \geq 1$) означает, что для любой точки $x_0 \in \Gamma$ найдется окрестность U (координатная окрестность) и система координат y (локальная система координат), полученная путем поворота и переноса начала координат из исходной, в которой

$$\overline{U} \cap G = \{y \in \mathbb{R}^n : y' \in \overline{B_r}, \omega(y') < y_n \leq \omega(y') + \delta\},$$

$$\overline{U} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}) = \{y \in \mathbb{R}^n : \omega(y') - \delta \leq y_n < \omega(y')\},$$

$$\Gamma \cap \overline{U} = \{y \in \mathbb{R}^n : y' \in \overline{B_r}, y_n = \omega(y')\},$$

где $y' = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, $B_r = \{y' : |y'| < r\}$, $\delta > 0$ – некоторая постоянная и $\omega \in C^\alpha(\overline{B_r})$. Без ограничения общности, считаем, что для локальной системы координат ось y_n направлена по нормали к Γ в точке x_0 .

Условия согласования и гладкости. Фиксируем $p > n + 2m$. Приведем, используемые ниже условия на данные задачи.

$$u_0(x) \in W_p^{2m-2m/p}(G), \quad g_j(x, t) \in W_p^{k_j, 2mk_j}(S), \quad k_j = 1 - \frac{m_j}{2m} - \frac{1}{2pm}, \quad (5)$$

где $j = 1, 2, \dots, m$.

$$f \in L_p(Q), \quad (6)$$

$$g_j(x, 0) = B_j(x, 0)u_0(x)|_{\partial G}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

$$\psi_i(t) \in W_p^1(0, T), \quad \psi_i(0) = \int_{G_i} u_0(x)\varphi_i(x)dx, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (8)$$

$$\psi_i(t) \in W_p^1(0, T), \quad \psi_i(0) = u_0(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (9)$$

Условия на коэффициенты операторов A, B_j более или менее стандартные. Более того, для простоты выкладок мы будем использовать не самые точные условия на коэффициенты. Мы считаем, что

$$\begin{aligned} a_\alpha(t, x) &\in L_\infty(Q) \quad (|\alpha| < 2m), \quad a_\alpha \in C(\overline{Q}) \quad (|\alpha| = 2m), \\ b_{j\beta} &\in C^{2m-m_j}(\overline{S}) \quad (j = 1, \dots, m, |\beta| \leq m_j), \end{aligned} \quad (10)$$



$$b_i(x, t) \in L_\infty(0, T; L_p(G)), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (11)$$

Пусть $\{G_j\}$ – набор областей с границей класса C^1 вложенных в G . Мы будем использовать два вида условий на весовые функции $\{\varphi_j(x)\}$:

$$\text{supp } \varphi_j \subset \overline{G_j}, \quad \varphi_j \in W_q^1(G_j) \quad \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \right), \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (12)$$

$$\text{supp } \varphi_j \subset G_j, \quad \varphi_j \in L_1(G), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (13)$$

При выполнении минимальных требований (13) нам понадобятся дополнительные условия на данные задачи Пусть $G_0 = \bigcup_{j=1}^s G_j$, $Q_0 = G_0 \times (0, T)$.

$$\nabla f \in L_p(Q_0), \quad \nabla b_j \in L_\infty(0, T, L_p(G_0)), \quad (14)$$

$$\nabla u_0 \in W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G_0), \quad \nabla a_\alpha(x, t) \in W_\infty^1(Q_0), \quad (|\alpha| \leq 2m). \quad (15)$$

Пусть $B_\rho(x)$ – шар радиуса ρ с центром в точке x . Найдется $\delta_0 > 0$ такое, что $B_{\delta_0}(x_i) \cap B_{\delta_0}(x_j) = \emptyset$ при $i \neq j$ и $B_{\delta_0}(x_i) \cap \partial G = \emptyset$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, r$. Положим $G^\delta = \bigcup_i B_\delta(x_i)$. В случае задачи (1)-(3) определим матрицу $B(t)$ размера $r \times r$, строки которой с номерами $(k-1)h+1, kh, (k=1, 2, \dots, s)$ занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами $\int_G b_1 \varphi_k dx, \dots, \int_G b_r \varphi_k dx$. Можно показать, используя условия (11)-(12) (соответственно, (13), (14)) и теоремы вложения, что элементы этой матрицы принадлежит $L_\infty(0, T)$. В случае задачи (1)-(2), (4) мы будем дополнительно требовать, что выполнены условия (13), (10), где в качестве области G_0 берется δ -окрестность G^δ множества $\{x_j\}_{j=1}^s$ с $\delta < \delta_0$. В качестве матрицы B возьмем матрицу, строки которой с номерами $(k-1)h+1, kh, (k=1, 2, \dots, s)$ занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами $b_1(x_k, t), \dots, b_r(x_k, t)$. Опять при выполнении условий (13), (10) элементы этой матрицы принадлежит $L_\infty(0, T)$. В обоих случаях мы требуем, чтобы существовала постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B(t)| \geq \delta_0, \quad \text{для п.в. } t \in [0, T]. \quad (16)$$

Рассмотрим оператор: $A_0(t, x, D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x, t) D^\alpha$ и предположим, что оператор $\partial_t + A_0$ параболический, т.е. найдется постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что любой корень p многочлена

$$\det(A_0(t, x, i\xi) + pE) = 0,$$

(E – единичная матрица) удовлетворяет неравенству:

$$\text{Re } p \leq -\delta_1 |\xi|^{2m}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (x, t) \in Q. \quad (17)$$

Условие Лопатинского запишется в виде: для любой точки $(t_0, x_0) \in S$ запишем операторы A_0, B_{j0} ($B_{j0} = \sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta} D^\beta$) в локальной системе координат y и предположим, что система

$$(\lambda E + A_0(i\xi', \partial_{y_n}))v(z) = 0, \quad B_{j0}(t_0, x_0)(i\xi', \partial_{y_n})v(0) = h_j, \quad (18)$$



$(\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), y_n \in \mathbb{R}^+, j = 1, 2, \dots, m)$ имеет единственное решение из $C(\overline{\mathbb{R}^+}; E)$ убывающее на бесконечности для всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\arg \lambda| \leq \pi/2$ и $h_j \in E$ таких что $|\xi'| + |\lambda| \neq 0$.

Алгебраические условия, гарантирующие выполнение (18) могут быть найдены, например, в [28]. Положим $G_{\delta,i} = \{x \in G_i : \rho(x, \partial G_i) > \delta\}$, $Q_{\delta,i}^\gamma = G_{\delta,i} \times (0, \gamma)$, $G_\delta = \bigcup_{i=1}^s G_{\delta,i}$ и $Q_\delta = G_\delta \times (0, T)$, $Q_\delta^\gamma = G_\delta \times (0, \gamma)$ ($\delta \geq 0$), $Q^\gamma = G \times (0, \gamma)$.

Справедлива следующая теорема

Теорема 1.1. Пусть G – ограниченная область с границей класса C^{2m} , выполнены условия (5), (10), (17), (18) и $k_j \neq 1/p$ для всех $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда если $g \in L_p(Q)$, то существует единственное решение $u \in W_p^{1,2m}(Q)$ задачи

$$u_t + A(t, x, D_x)u = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad B_j u|_S = g_j, \quad (19)$$

удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} \leq c \left[\|g\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} \right], \quad (20)$$

где c – постоянная, не зависящая от данных задачи g, g_j, u_0 и решения u . Если дополнительно выполнено условие (15) и $\nabla g \in L_p(Q_0)$, то решение u обладает свойством $\nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta)$, $\forall \delta > 0$.

□ Первое утверждение – следствие из теоремы 10.4 в [28]. Получим второе утверждение. Покажем, что полученное решение обладает большей гладкостью в областях $Q_{\delta,j}$. Фиксируем $\delta_2 > \delta_1 > \delta$ (считаем, что δ_2 достаточно мало и таким образом $G_{\delta_2,j} \neq \emptyset$). Построим функцию $\psi_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$; $\psi_0 \equiv 1$ в $G_{\delta_2,j}$ и $\psi_0 \equiv 0$ в $G \setminus G_{\delta_1,j}$. Положим $\Delta_i u = (u(x + e_i \eta) - u(x))/\eta$ (e_i – i -й координатный вектор), где $|\eta| < \delta - \delta_1$. Тогда функция $\tilde{v} = \psi_0(x) \Delta_i u$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} \tilde{v}_t + A_0(t, x, D) \tilde{v} &= \psi_0 [A_0, \Delta_i] u + \psi_0 \Delta_i g + [A_0, \psi_0] \Delta_i u + \\ &+ \psi_0 \Delta_i ((A_0 - A)(u + \Phi)), \end{aligned} \quad (21)$$

$$B_r \tilde{v}|_S = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m), \quad \tilde{v}|_{t=0} = \psi_0(x) \Delta_i u_0.$$

где $[A_0, \Delta_i] = A_0 \Delta_i - \Delta_i A_0$, $[A_0, \psi] = A_0 \psi - \psi A_0$ и т.д. (т.е. квадратные скобки обозначают соответствующий коммутатор). Тогда функция \tilde{v} удовлетворяет оценке (20), где правая часть, граничные функции g_j и функция u_0 заменяются на выражения, входящие в правые части в (21), соответствующие нормы которых оцениваются постоянной не зависящей от параметра h . Используя лемму 4.6 главы 2 в [29], получим, что обобщенная производная $\partial_{x_i} v$ принадлежит $W_p^{1,2m}(Q_{\delta_2,j})$ и удовлетворяет оценке

$$\|v_{x_i}\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_2,j})} \leq c_0 \left[\|\nabla g\|_{L_p(Q_0)} + \|\nabla u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G_0)} + \|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} \right]. \quad (22)$$

В силу произвольности δ_2, δ_1 и i, j заключаем, что $\nabla v \in W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1})$ для всех $\delta_1 > 0$. ■



Как следствие теоремы 1.1 имеем

Теорема 1.2. Пусть G – ограниченная область с границей класса C^{2m} , выполнены условия (10), (17), (18), $k_j \neq 1/p$ для всех $j = 1, 2, \dots, m$ и $g \in L_p(Q^\gamma)$ ($\gamma \in (0, T]$). Тогда существует единственное решение $u \in W_p^{1,2m}(Q^\gamma)$ задачи

$$u_t + A(t, x, D_x)u = g, \quad u|_{t=0} = 0, \quad B_j u|_S = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (23)$$

удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q^\gamma)} \leq c \|g\|_{L_p(Q^\gamma)}, \quad (24)$$

где c – постоянная, не зависящая от γ .

Теорема 1.3. Пусть выполнены условия теоремы 1.2 и условия (15) на коэффициенты a_α . Тогда решение u задачи (23) при фиксированном $\delta_1 > 0$ удовлетворяет оценке

$$\|\nabla u\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^\gamma)} \leq c(\|g\|_{L_p(Q^\gamma)} + \|\nabla g\|_{L_p(Q_0^\gamma)}), \quad (25)$$

где постоянная c не зависит от γ .

2. Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (5)-(8), (10)-(12), (16)-(18). Тогда существует единственное решение (u, q_1, \dots, q_r) задачи (1)-(3) такое, что

$$u \in W_p^{1,2m}(Q), \quad q_i(t) \in L_p(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \sum_{i=1}^r \|q_i(t)\|_{L_p(0,T)} \leq c(\|f\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_{W_p^1(0,T)}).$$

□ Продолжим граничные данные внутрь области, построив функцию $\Phi \in W_p^{1,2m}(Q)$ такую, что $\Phi|_{t=0} = u_0(x)$, $B_j \Phi|_S = g_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$). В качестве функции Φ возьмем решение задачи (19) (см. теорему 1.1), где $g = f$. Тогда, если u решение задачи (1)-(3), то функция $v = u - \Phi$ есть решение задачи

$$v_t + Av = \sum_{i=1}^r f_i(t, x)q_i(t), \quad v|_{t=0} = 0, \quad B_j v|_S = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (26)$$

$$\int_G v \varphi_i dx = \psi_i - \int_G \Phi \varphi_i dx = \tilde{\psi}_i \in W_p^1(0, T). \quad (27)$$



Интегрируем (26) с весом φ_i и используем (27). Имеем

$$\int_G \varphi_i(x)v_t dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_G \varphi_i(x)v(x,t) dx = \tilde{\psi}_{it},$$

$$\tilde{\psi}_{it} + \int_G \varphi_i Av dx = \sum_{j=1}^r q_j \int_G \varphi_i f_j(t,x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (28)$$

На равенство можно смотреть как на уравнение для нахождения функций $q_i(t)$. Действительно, пусть B – матрица, определенная после формулы (15). Правая часть (28) записывается в виде $B\vec{q}$, $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_r)$. Равенство (28) переписывается в виде

$$B\vec{q} = \vec{\psi} + R(\vec{q}), \quad (29)$$

где компоненты векторов $R(\vec{q})$, $\vec{\psi}$ с номерами $(k-1)h+1, kh, (k=1, 2, \dots, s)$ занимают столбцы $\int_G \varphi_k Av dx$ и $\tilde{\psi}_{kt}$, соответственно, причем v решение задачи (26) и значит

$$v = (\partial_t + A)^{-1} \left(\sum_{j=1}^r f_j q_j(t) \right)$$

или

$$\vec{q} = B^{-1}\vec{\psi} + B^{-1}R(q) = \vec{\psi}_0 + R_0(\vec{q}). \quad (30)$$

Покажем, что уравнение (30) разрешимо в $L_p(0, T)$. Получим оценки. Оценим $\|R_0\vec{q}\|_{L_p(0, \gamma)}$. По условию матрица B обратима, и в силу условия (16) имеем

$$\|R_0(\vec{q})\|_{L_p(0, \gamma)} \leq c_0 \|R(q)\|_{L_p(0, \gamma)} \leq \sum_{i=1}^s c_0 \left\| \int_G Av \varphi_i dx \right\|_{L_p(0, \gamma)}. \quad (31)$$

Имеем $Au = A_0v + A_1v$, где $A_0v = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha v$ и $A_1v = \sum_{|\alpha|<2m} a_\alpha D^\alpha v$. При $|\alpha| \leq 2m-1$, получим

$$\left| \int_G a_\alpha D^\alpha u \varphi_i \right| \leq M \left(\int_G |D^\alpha v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_G |\varphi_i|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \|u\|_{W_p^{2m-1}(G)},$$

$$c = M \max_i \left(\int_G |\varphi_i|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad M = \max_{|\alpha|<2m} \|a_\alpha(x, t)\|_{L_\infty(Q)}.$$

Таким образом,

$$\left| \int_G A_1v \varphi_i dx \right| \leq c_1 \|v\|_{W_p^{2m-1}}. \quad (32)$$

Рассмотрим выражение $\int_G A_0v \varphi_i dx$. Сюда входят слагаемые

$$\int_G a_\alpha(x, t) D^\alpha v \varphi_i dx dt = \int_{\Gamma_i} a_\alpha(x, t) D^{\alpha'} v \varphi_i n_k d\Gamma - \int_{G_i} (a_\alpha \varphi_i)_{x_k} D^{\alpha'} v dx,$$



где $D^\alpha v = \frac{\partial}{\partial x_k} D^{\alpha'} v$, n_k – координаты единичной внешней нормали к $\Gamma_i = \partial G_i$. Второй интеграл оценивается сверху

$$\begin{aligned} & \int_{G_i} |a_\alpha| |D^{\alpha'} v| |\varphi_{ix_k}| dx + \int_{G_0} |a_{\alpha x_k}| |D^{\alpha'} v| |\varphi_i| dx \leq \\ & \leq M \left(\int_{G_i} |D^{\alpha'} v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{G_i} |\varphi_{ix_k}|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + M_1 \left(\int_{G_i} (D^{\alpha'} v)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{G_i} \varphi_i^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Таким образом, второй интеграл оценивается величиной $c_2 \|v\|_{W_p^{2m-1}(G)}$. Оценим первый интеграл с использованием теорем о следах (см., например, [26, 28, 29])

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_i} a_\alpha D^{\alpha'} v \varphi_i n_k d\Gamma \right| & \leq M \int_{\Gamma_i} |D^{\alpha'} v| |\varphi_i n_k| d\Gamma \leq M \left(\int_{\Gamma_i} |D^{\alpha'} v|^p d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Gamma_i} \varphi_i^q d\Gamma \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ & c_3 \|D^{\alpha'} v\|_{L_p(\Gamma_i)} \leq c_4 \|D^{\alpha'} v\|_{W_p^\beta(G_i)} \leq c_5 \|v\|_{W_p^{\beta+2m-1}(G_i)}, \quad 1 > \beta > \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Из последних двух неравенств вытекает, что найдется постоянная c_6 такая, что

$$\left| \int_G A_0 v \varphi_i dx \right| \leq c_6 \|v\|_{W_p^{\beta+2m-1}(G)}. \quad (33)$$

Фиксируем β . Тогда из (32), (33) и интерполяционных неравенств (см. [26]) следует, что

$$\|R_0(q)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c_7 \| \|v\|_{W_p^{2m-1+\beta}(G)} \|v\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c_8 \|v\|_{L_p(0,\gamma; W_p^{2m}(G))}^\theta \|v\|_{L_p(0,\gamma; L_p(G))}^{1-\theta},$$

где $2m\theta + (1 - \theta) = (2m - 1 + \beta)$. По теореме 1.2

$$\|v\|_{W_p^{1,2m}(Q^\gamma)} \leq c_9 \left\| \sum_{i=1}^r q_i f_i \right\|_{L_p(Q^\gamma)}. \quad (34)$$

Правая часть оценивается так:

$$\begin{aligned} \|q_i f_i\|_{L_p(Q^\gamma)}^p & = \left(\int_0^\gamma \int_G |q_i|^p |f_i|^p dx dt \right) = \\ & \int_0^\gamma |q_i|^p \int_G |f_i|^p dx dt \leq \|f_i\|_{L_\infty(0,T; L_p(G))} \int_0^\gamma |q_i|^p dt \leq c_{10} \|q_i\|_{L_p(0,\gamma)}^p. \end{aligned} \quad (35)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} v(x, t) & = \int_0^t v_\tau(x, \tau) d\tau, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \\ \|v\|_{L_p(G)} & \leq \int_0^t \|v_\tau(x, \tau)\|_{L_p(G)} d\tau \leq \gamma^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t \|v_\tau(x, \tau)\|_{L_p(G)}^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$



Отсюда получим, что

$$\|v\|_{L_p(Q\gamma)} \leq \gamma \|v_t\|_{L_p(Q\gamma)}. \quad (36)$$

Используя (34)-(36) и приведенное выше неравенство для $\|R_0(q)\|$, получим

$$\|R_0(\vec{q})\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c_{11} \|\vec{q}\|_{L_p(0,\gamma)} \gamma^{1-\theta}. \quad (37)$$

Таким образом, если $c_{11} \gamma^{1-\theta} \leq q_0 < 1$, то уравнение (30) имеет единственное решение \vec{q} из $L_p(0, \gamma) \quad \forall \vec{\psi}_0 \in L_p(0, \gamma)$. Возьмем

$$\vec{q}_0 = \begin{cases} \vec{q}, & t \in (0, \gamma), \\ 0, & t \in [\gamma, 2\gamma] \end{cases}$$

и сделаем замену $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_0$ в (24). Тогда

$$\vec{q}_1 = R_0(\vec{q}_1) + c_0 - \vec{q}_0 + R_0(q_0). \quad (38)$$

Если q_1 есть решение уравнения (38) на $[0, 2\gamma]$, то $q_1 - R_0(\vec{q}_1) = 0$ на $(0, \gamma)$ и по доказанному $q_1 = 0$ на $(0, \gamma)$. Имеем $q_1|_{[\gamma, 2\gamma]} \in L_p(\gamma, 2\gamma)$. Оценим $\|R_0(\vec{q}_1)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma)}$. Как и ранее, получим оценку

$$\|R_0(\vec{q}_1)\|_{L_p(\gamma, 2\gamma)} \leq c \|\vec{q}_1\|_{L_p(\gamma, 2\gamma)} \gamma^{1-\theta},$$

где без ограничения общности считаем, что постоянная c совпадает с постоянной c_{11} из (37). Тогда уравнение (38) имеет единственное решение из $L_p(\gamma, 2\gamma)$. Функция $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_0$ есть решение (30) на промежутке $[0, 2\gamma]$. Повторяя рассуждения за конечное число шагов докажем, что уравнение (30) имеет единственное решение из $L_p(0, T)$.

Восстановим функцию v как решение уравнения (26). Покажем, что функция v есть решение нашей задачи. По построению $v|_{t=0} = 0, B_i v|_S = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$. Докажем, что $\int_G \varphi_i v dx = \tilde{\psi}_i(t)$. Интегрируем уравнение в (26) по G с весом φ_i . Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_G \varphi_i v dx + \int_G A v \varphi_i dx = \sum_{j=1}^r q_j \int_G f_j \varphi_i dx.$$

Функции q_j удовлетворяют системе (28), вычитая i -е уравнение которой из предыдущего равенства получим, что $\left(\int_G \varphi_i v dx - \tilde{\psi}_i \right)_t = 0$ или

$$\int_G \varphi_i v dx - \tilde{\psi}_i = \left(\int_G \varphi_i v dx - \tilde{\psi}_i \right)|_{t=0} = 0,$$

в силу условий согласования. Таким образом функция v есть решение нашей задачи. ■

Оценка из утверждения теоремы фактически была получена в процессе доказательства разрешимости обратной задачи.



Теорема 2.2. Пусть выполнены условия (5)-(8), (10)-(11), (13)-(18). Тогда существует единственное решение (u, q_1, \dots, q_r) задачи (1)-(3) такое, что

$$u \in W_p^{1,2m}(Q), \quad q_i(t) \in L_p(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad \nabla_x u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta)$$

для всех $\delta > 0$. При фиксированном $\delta > 0$ решение удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} & \|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \|\nabla_x u\|_{W_p^{1,2m}(Q_\delta)} + \sum_{i=1}^r \|q_i(t)\|_{L_p(0,T)} \leq \\ & c \left(\|f\|_{L_p(Q)} + \|\nabla_x f\|_{L_p(Q_0)} + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S)} + \right. \\ & \left. + \|u_0\|_{W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G)} + \|\nabla_x u_0\|_{W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G_0)} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_{W_p^1(0,T)} \right). \end{aligned}$$

□ Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство предыдущей теоремы. Единственное отличие в доказательстве - способ получения оценки для нормы оператора R_0 . Приведем его. Оценим $\|R_0 \vec{q}\|_{L_p(0,\gamma)}$. Как и ранее имеем

$$\|R_0(\vec{q})\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c_0 \|R(q)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq \sum_{i=1}^s c_0 \left\| \int_G Av \varphi_i dx \right\|_{L_p(0,\gamma)}.$$

В силу компактности множеств $\text{supp } \varphi_j$, найдется $\delta_0 > 0$ такое, что $\text{supp } \varphi_j \subset G_{\delta,j}$ для всех $\delta \geq \delta_0$ и для всех j . В силу условий на коэффициенты и теорем вложения [26],

$$\left| \int_G Av \varphi_i dx \right| = \left| \int_{G_{\delta_0,j}} Av \varphi_i dx \right| \leq M \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(G_{\delta_0,j})} \|\varphi_j\|_{L_1(G)} \leq$$

$$M_1 \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|D^\alpha v\|_{W_p^\beta(G_{\delta_0,j})} \leq M_2 \|v\|_{W_p^{2m+\beta}(G_{\delta_0,j})}, \quad \beta \in (n/p, 1).$$

Далее, используя интерполяционные неравенства [26], получим оценку для последней нормы

$$M_3 \|v\|_{W_p^{2m+1}(G_{\delta_0,j})}^\theta \|v\|_{L_p(G)}^{1-\theta}, \quad (2m+1)\theta = 2m + \beta.$$

Неравенство справедливо для всех j . Тогда

$$\|R_0(q)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq M_4 \|v\|_{L_p(0,\gamma; W_p^{2m+1}(G_{\delta_0}))}^\theta \|v\|_{L_p(0,\gamma; L_p(G))}^{1-\theta},$$

В силу оценки (36), имеем

$$\|R_0(q)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq M_5 \|v\|_{L_p(0,\gamma; W_p^{2m+1}(G_{\delta_0}))}^\theta \|v\|_{L_p(0,\gamma; L_p(G))}^{1-\theta} \gamma^{1-\theta},$$



Далее, в силу оценки из теорем 1.2, 1.3,

$$\|v\|_{L_p(0,\gamma;W_p^{2m+1}(G_{\delta_0}))} \leq c \sum_{i=1}^r \left(\|q_i \nabla_x f_i\|_{L_p(Q_0^\gamma)}^p + \|q_i f_i\|_{L_p(Q^\gamma)}^p \right),$$

где c – постоянная не зависящая от γ . Используя условия на функции f_i , $\nabla_x f_i$, как и при доказательстве теоремы 2.1, получим оценку

$$\|R_0(\vec{q})\|_{L_p(0,\gamma)} \leq M_4 \|\vec{q}\|_{L_p(0,\gamma)} \gamma^{1-\theta}. \tag{39}$$

Это как раз и есть нужная нам оценка. Остальные рассуждения совпадают с рассуждениями из предыдущей теоремы. ■

Рассмотрим задачу (1), (2), (4). Фиксируем $\delta_1 < \delta_0$ (постоянная δ_0 была определена после формулы (15)) и возьмем в качестве областей G_j шары $B_{\delta_1}(x_j)$. Как и ранее, $G_0 = \bigcup_{j=1}^s G_j$. Мы воспользуемся теоремой 2.3 из [30] в соответствии с которой:

Теорема 2.3. *При выполнении условий (5)-(7), (9)-(11), (14)-(18) существует единственное решение задачи (1), (2), (4) такое, что $\vec{q} \in L_p(0, T)$, $u \in W_p^{1,2m}(Q)$, $\nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta)$, $\forall \delta > 0$.*

□ Предположим, что выполнены условия теоремы 2.3. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(B_1)$ ($B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$) такую, что $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ и $\varphi(x) \geq 0$ для всех x . Определим $\varphi_{j\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n} \varphi([x - x_j]/\varepsilon)$. Имеем

$$\|\varphi_j\|_{L_1(G)} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{j\varepsilon}(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x - x_j}{\varepsilon}\right) dx = 1.$$

Введем $r_{j\varepsilon} = \int_G \varphi_{j\varepsilon}(x) u_0(x) dx - u_0(x_j)$. В силу теорем вложения и условий на функцию u_0 , легко увидеть, что найдется постоянная $M > 0$ такая, что $|r_{j\varepsilon}| \leq M\varepsilon$ для всех j . Рассмотрим задачу (1)-(3), где $\varphi_j = \varphi_{j\varepsilon}$, $\varepsilon < \delta_1$, $G_j = B_{\delta_1}(x_j)$, а в качестве функций ψ_j возьмем функции $\psi_{j\varepsilon} = \psi_j(t) + r_{j\varepsilon}$. По построению и в силу условий (9),

$$\psi_{j\varepsilon}(0) = \int_G \varphi_{j\varepsilon} u_0(x) dx.$$

Решение этой задачи (1)-(3) (оно существует и обладает свойствами указанными в теореме 2.2) обозначим через u_ε , $\vec{q}_\varepsilon = (q_1^\varepsilon, \dots, q_r^\varepsilon)$, а решение задачи (1), (2), (4) через u , $\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$. ■

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Тогда*

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

□ Введем функции $v = u - \Phi$ и $v_\varepsilon = u_\varepsilon - \Phi$ (функция Φ была построена в доказательстве теоремы 2.1). Функции v и v_ε есть решения задач

$$v_{\varepsilon t} + Av_\varepsilon = \sum_{i=1}^r q_i^\varepsilon f_i, \quad v_\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad B_j v_\varepsilon|_S = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \tag{40}$$



$$v_t + Av = \sum_{i=1}^r q_i f_i, \quad v|_{t=0} = 0, \quad B_j v|_S = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (41)$$

Выполнены условия

$$v(x_j, t) = \psi_j - \Phi(x_j, t), \quad (42)$$

$$\int_G v_\varepsilon \varphi_{j\varepsilon} dx = \psi_{j\varepsilon} - \int_G \Phi \varphi_{j\varepsilon}(x) dx. \quad (43)$$

В силу теоремы 1.1, $\nabla \Phi \in W_q^{1,2m}(Q_\delta)$, $\forall \delta > 0$. Фиксируем $\delta \in (0, \delta_1)$ и считаем, что $\varepsilon < \delta_1 - \delta$. Обозначим $\omega_\varepsilon = v - v_\varepsilon$ и $a_i^\varepsilon = q_i - q_i^\varepsilon$. Вычитая (40) и (41), а также (42), (43), получим

$$\begin{aligned} \omega_{\varepsilon t} + A\omega_\varepsilon &= \sum_{i=1}^r a_i^\varepsilon f_i, \quad v_\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad B_j v_\varepsilon|_S = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ \int_G \omega_\varepsilon \varphi_{j\varepsilon} dx &= \int_G (v(x, t) - v(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx + \int_G (\Phi - \Phi(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon}(x) dx - r_{j\varepsilon}. \end{aligned}$$

По теореме 2.2 справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\omega_\varepsilon\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \sum_{i=1}^r \|a_i^\varepsilon\|_{L_p(0,T)} &\leq c \left(\sum_{j=1}^s \left\| \int_G (v - v(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx \right\|_{W_p^1(0,T)} + \right. \\ &\left. \sum_{j=1}^s \left\| \int_G (\Phi - \Phi(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon}(x) dx \right\|_{W_p^1(0,T)} \right) + M_1 \varepsilon. \end{aligned} \quad (44)$$

Рассмотрим второе слагаемое

$$\sum_{j=1}^s \left\| \int_G (\Phi - \Phi(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon}(x) dx \right\|_{W_p^1(0,T)}.$$

Используя теоремы вложения, оценим, например,

$$J_j = \left\| \int_G (\Phi_t(x, t) - \Phi_t(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon}(x) dx \right\|_{L_p(0,T)}.$$

При $\alpha = 1 - n/p$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_{G_j} (\Phi_t(x, t) - \Phi_t(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon}(x) dx \right| &\leq \sup_{x \in B_\varepsilon(x_j)} |\Phi_t(x, t) - \Phi_t(x_j, t)| \cdot \int_{G_j} |\varphi_{j\varepsilon}(x)| dx \leq \\ \varepsilon^\alpha \sup_{x \in B_\varepsilon(x_j)} \frac{|\Phi_t(x, t) - \Phi_t(x_j, t)|}{|x - x_j|^\alpha} &\leq \varepsilon^\alpha \sup_{x, y \in G_\delta} \frac{|\Phi_t(x, t) - \Phi_t(x_j, t)|}{|x - x_j|^\alpha} \leq \varepsilon^\alpha \|\Phi_t\|_{C^\alpha(G_\delta)}. \end{aligned}$$

Так как $\|\Phi_t\|_{C^\alpha(G_\delta)} \leq c \|\Phi_t\|_{W_p^1(G_\delta)}$, то окончательная оценка будет иметь вид

$$J_j \leq c_1 \varepsilon^\alpha \|\Phi_t\|_{L_p(0,T;W_p^1(G_\delta))},$$



где постоянная c_1 не зависит от ε, j . Аналогично оцениваем выражение $\| \int_G (\Phi(x, t) - \Phi(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon}(x) dx \|_{L_p(0, T)}$. Тогда справедлива оценка

$$\left\| \int_G (\Phi - \Phi(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx \right\|_{W_p^1(0, T)} \leq c_2 \varepsilon^\alpha (\|\Phi_t\|_{L_p(0, T; W_p^1(G_\delta))} + \|\Phi\|_{L_p(0, T; W_p^1(G_\delta))}),$$

Рассмотрим второе слагаемое $\int_G (v - v(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx$. Совершенно аналогично имеем оценку:

$$\left\| \int_G (v - v(x_j, t)) \varphi_{j\varepsilon} dx \right\|_{W_p^1(0, T)} \leq c_3 \varepsilon^\alpha (\|v_t\|_{L_p(0, T; W_p^1(G_\delta))} + \|v\|_{L_p(0, T; W_p^1(G_\delta))}),$$

где постоянная c_3 не зависит от ε, j . Ввиду (44), окончательная оценка имеет вид

$$\|\omega_\varepsilon\|_{W_p^{1, 2m}(Q)} + \sum_{i=1}^r \|a_i^\varepsilon\|_{L_p(0, T)} \leq c_4 \varepsilon^\alpha,$$

где постоянная c_4 не зависит от ε . ■

Заключение. Приведенные выше рассуждения достаточно конструктивны и полученные результаты и способы нахождения решений могут быть использованы при построении численных алгоритмов решений как задачи (1)-(3) так и задачи (1), (2), (4). По сути в теореме 2.1 показано, что при любой начальной функции метод последовательных приближений, примененный при построении решений системы (30), сходится.

Литература

1. Алексеев Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики / М.: Научный мир, 2010.
2. Belov Ya.Ya. Inverse problems for parabolic equations / Utrecht: VSP, 2002.
3. Levandowsky M., Childress W.S., Hunter S.H., Spiegel E.A. A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms // J. Protozoology. – 1975. – 22. – P.296-309.
4. Sapatina A., Stavre R. A control problem in biconvective flow // J. Math. Kyoto Univ. – 1997. – 37; №4. – P.585-595.
5. Алексеев Г.В., Калинина Е.А. Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции // Сиб. жур. индустриальной математики. – 2007. – 10; №1(29). – С.3-16.
6. Alekseev G.V. Coefficient Inverse Extremum Problems for Stationary Heat and Mass Transfer Equations // Comp. Math. and Math. Phys. – 2007. – 47; №6. – P.1007-1028.
7. Babeshko O.M., Evdokimova O.V., Evdokimov S.M. On taking into account the types of sources and settling zones of pollutants // Dokl. Math. – 2000. – 61; №2. – P.283-285.
8. Калинина Е.А. Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии // Дальневосточный матем. жур. – 2004. – 5; №1. – С.89-99.



9. Криксин Ю.А., Плющев С.Н., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф. Обратная задача восстановления плотности источника для уравнения конвекции-диффузии // Матем. моделирование. – 1995. – 7; №11. – С.95-108.
10. Iskenderov A.D., Akhundov A.Ya. Inverse problem for a linear system of parabolic equations // Doklady Mathematics. – 2009. – 79; №1. – P.73-75.
11. Ismailov M.I., Kanca F. Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of heat equation from integral overdetermination condition data // Inverse Problems In Science and Engineering. – 2012. – 20, № 24. – P.463-476.
12. Ivanchov M.I. Inverse problem of simultaneous determination of two coefficients in a parabolic equation // Ukrainian Math. J. – 2000. – 52; №3. – P.379-387.
13. Li Jing, Xu Youjun An inverse coefficient problem with nonlinear parabolic equation // J. Appl. Math. Comput. – 2010. – 34. – P.195-206.
14. Kamynin V.L., Franchini E. An inverse problem for a higher-order parabolic equation // Mathematical Notes. – 1998. – 64; №5. – P.590-599.
15. Kerimov N.B., Ismailov M.I. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2012. – 396. – P.546-554.
16. Кожанов А.И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени // Ж. Вычисл. Матем. и матем. физ. – 2005. – 45; №12. – С.2168-2184.
17. Vasin I.A., Kamynin V.L. On the asymptotic behavior of solutions to inverse problems for parabolic equations // Siberian Mathematical Journal. – 1997. – 38; №4. – P.647-662.
18. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics / New-York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
19. Tryanin A.P. Determination of heat-transfer coefficients at the inlet into a porous body and inside it by solving the inverse problem // Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal. – 1987. – 52; №3. – P.469-475.
20. Dehghan M., Shakeri F. Method of lines solutions of the parabolic inverse problem with an overspecification at a points // Numer. Algor. – 2009. – 50; №4. – P.417-437.
21. Dehghan M. Numerical computation of a control function in a partial differential equation // Applied mathematics and computation. – 2004. – 147. – P.397-408.
22. Pyatkov S.G., Samkov M.L. On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations // Sib. Adv. in Math. – 2012. – 22; №4. – P.287-302.
23. Pyatkov S.G. On some classes of inverse problems for parabolic equations // J. Inv. Ill-Posed problems. – 2011. – 18; №8. – P.917-934.
24. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type // Math. Studies. Monograph Series. – 2003. – 10.
25. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи / Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
26. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / М.: Мир, 1980.
27. Amann H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces // Glasnik matematički. – 2000. – 35(55). – P.161-177.
28. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / М.: Наука, 1967.
29. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / М.: Наука, 1973.
30. Pyatkov S.G., Tsybikov B.N. On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations // J. Evol. Equat. – 2011. – 11. – P.155-186.



ON SOME CLASSES OF LINEAR INVERSE PROBLEMS
FOR PARABOLIC SYSTEMS OF EQUATIONS

S.G. Pyatkov, E.I. Safonov

Yugra State University,
Chekhov St., 16, Khanty-Mansiysk, 628012, Russia, e-mail: s_pyatkov@ugrasu.ru,
dc.gerz.hd@gmail.com

Abstract. Some questions that concerned the well-posedness of some linear inverse problems connected with parabolic equations and systems are examined. Both solutions and right-hand sides of systems are recovered under some integral overdetermination conditions. Uniqueness and existence theorems are proved in the Sobolev classes. It is demonstrated that for an appropriate choice of integral overdetermination conditions it is possible to pass to the limit on a parameter and the limit solution is the solution to the inverse problem with the overdetermination conditions which are represented by values of the solution at some fixed points.

Key words: parabolic system, inverse problem, control problem, boundary value problem, well-posedness.



MSC 34A34

МЕТОД АССОЦИИРОВАННЫХ СИСТЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ

И.В. Рахмелевич

Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского
пр. Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603950, Россия, e-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Аннотация. Предложен метод поиска частных решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), содержащих однородные функции от некоторых дифференциальных выражений. Введено понятие ассоциированной системы, решения которой при определенных условиях совпадают с решениями исходного уравнения, и исследованы ее свойства. Предлагаемый метод проиллюстрирован для некоторых частных случаев.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, однородная функция, ассоциированная система, условия совместности.

1. Введение. В настоящее время существует достаточно много методов решения нелинейных дифференциальных уравнений [1-3]. В этих методах используются, как правило, свойства симметрии или некоторые специальные свойства уравнения. Это относится, например, к однородным и обобщенно-однородным обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) [1,2]. Также получены решения ряда уравнений в частных производных, содержащих однородные функции от производных [4]. В работе сделана попытка обобщения известных результатов для ОДУ, содержащих однородные функции от производных. Предложен метод поиска частных решений нелинейных ОДУ, содержащих однородные функции от некоторых дифференциальных выражений.

2. Понятие ассоциированной системы и ее свойства. Пусть $y(x)$ – комплекснозначная функция действительного аргумента. Рассмотрим ОДУ следующего вида относительно функции $y(x)$:

$$F(\psi_0(x, y, y', \dots, y^{(M)}), \psi_1(x, y, y', \dots, y^{(M)}), \dots, \psi_N(x, y, y', \dots, y^{(M)})) = 0, \quad (1)$$

где $F, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N$ – некоторые заданные функции. Пусть F является однородной функцией с показателем однородности r , т.е. для произвольных комплексных $\alpha, u_0, u_1, \dots, u_N$ и некоторого действительного r выполняется соотношение [5]:

$$F(\alpha u_0, \alpha u_1, \dots, \alpha u_N) = \alpha^r F(u_0, u_1, \dots, u_N). \quad (2)$$

Определение 1. Пусть $\Phi(x) = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x)\}$ – вектор-функция, удовлетворяющая функциональному уравнению:

$$F(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x)) = 0. \quad (3)$$



Ассоциированной системой (АС) для уравнения (1), соответствующей вектор-функции $\Phi(x)$, будем называть систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{\psi_0(x, y, y', \dots, y^{(M)})}{\varphi_0(x)} = \frac{\psi_1(x, y, y', \dots, y^{(M)})}{\varphi_1(x)} = \dots = \frac{\psi_N(x, y, y', \dots, y^{(M)})}{\varphi_N(x)}. \quad (4)$$

Если ввести некоторую произвольную функцию $q(x)$, то АС можно записать в альтернативной форме:

$$\frac{\psi_n(x, y, y', \dots, y^{(M)})}{\varphi_n(x)} = q(x). \quad (5)$$

($n = 0, 1, \dots, N$).

Отметим, что в общем случае АС является переопределенной, так как одна неизвестная функция $y = y(x)$ должна удовлетворять одновременно N уравнениям, входящим в систему (4).

Теорема 1 (о решениях ассоциированной системы). Пусть $y = y(x)$ – некоторая функция, дифференцируемая до порядка M включительно, и пусть ассоциированная система (4) совместна. Тогда для того, чтобы функция $y = y(x)$ была решением уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы эта функция была решением ассоциированной системы (4).

□ **Необходимость.** Пусть $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Тогда в качестве функций $\varphi_n(x)$ можно выбрать $\varphi_n(x) = \psi_n(x, y, y', \dots, y^{(M)})$. При этом $y = y(x)$ удовлетворяет системе (4), так как $\psi_n(x, y, y', \dots, y^{(M)})/\varphi_n(x) = 1$ для всех $n = 0, 1, \dots, N$.

Достаточность. Пусть при некоторых $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x)$ удовлетворяющих уравнению (3), $y = y(x)$ является решением АС. Подставим эту функцию в уравнение (1) и используем АС в виде (5). Тогда уравнение (1) можно записать в виде:

$$F(q(x)\varphi_0(x), q(x)\varphi_1(x), \dots, q(x)\varphi_N(x)) = 0.$$

В силу свойства однородности (2) функции F последнее уравнение может быть преобразовано к виду:

$$(q(x))^r F(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x)) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) удовлетворяется, так как функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x)$ удовлетворяют уравнению (3). Отсюда вытекает, что $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению (1). ■

Используя доказанную теорему, можно находить частные решения уравнения (1), решая систему (4), которая, как правило, является более простой, чем исходное уравнение. Ниже приведены некоторые классы таких уравнений.

2. Некоторые уравнения N -го порядка, решаемые методом АС. Рассмотрим уравнение вида

$$F(\xi_0(x)y, \xi_1(x)y', \dots, \xi_N(x)y^{(N)}) = 0. \quad (7)$$

В данном случае $M = N$, функции $\psi_n(x, y, y', \dots, y^{(N)}) = \xi_n(x)y^{(n)}$ являются линейными по y и ее производным, причем каждая из них зависит только от производной



того же порядка от неизвестной функции. Для уравнения (7) АС имеет вид:

$$\eta_0(x)y = \eta_1(x)y' = \dots = \eta_N(x)y^{(N)}, \quad (8)$$

где $\eta_n(x) = \xi_n(x)/\varphi_n(x)$ для всех $n = 0, 1, \dots, N$.

Найдем условия совместности системы (8). Первое уравнение системы (8) имеет следующее решение:

$$y(x) = C \exp\left(\int \omega(x)dx\right), \quad (9)$$

где $\omega(x) = \eta_0(x)/\eta_1(x)$, C – произвольная постоянная. Из остальных уравнений системы (8) выразим функции $\eta_n(x)$ ($n = 1, \dots, N$):

$$\eta_n(x) = \eta_0(x) \frac{y(x)}{y^{(n)}(x)}. \quad (10)$$

Подставим функцию $y(x)$, определяемую формулой (9), в выражение (10), и после преобразований получим:

$$\eta_n(x) = \frac{\eta_0(x)}{\zeta_n(x)}, \quad (11)$$

где функции $\zeta_n(x)$ определяются рекуррентной формулой:

$$\zeta_n(x) = \zeta'_{n-1}(x) - \omega(x)\zeta_{n-1}(x), \zeta_0(x) = 1. \quad (12)$$

Соотношения (11) представляют собой условия совместности ассоциированной системы для уравнения (7). Для нахождения неизвестной функции $\omega(x)$ необходимо подставить выражение (9) в уравнение (7), и учесть (11) и (12), в результате чего можно получить уравнение порядка $(N - 1)$ относительно $\omega(x)$.

Аналогичный результат приведен в работе [2, с. 90], где рассматривается понижение порядка уравнения $F(x, y, y', \dots, y^{(N)}) = 0$ основанное на замене переменной, с точностью до обозначений совпадающей с выражением (9). В простейшем частном случае уравнения $F(y, y', \dots, y^{(N)}) = 0$, когда уравнение явно не содержит x , частным решением является функция $y = \exp(\lambda x)$, причем постоянная λ должна быть корнем уравнения $F(1, \lambda, \dots, \lambda^N) = 0$. Таким образом, применение метода АС к уравнению (7) приводит к известной замене переменной, позволяющей понизить порядок исходного уравнения.

Пусть теперь $\psi_n(x, y, y', \dots) = y^{(m_n)}(x)$ где $\{m_n\}$ ($n = 1, \dots, N$) – множество значений индекса, определяющего порядки производных, входящих в уравнение (1). Пусть также $m_0 = 0$ (этого всегда можно добиться с помощью замены переменной $z = y^{(m_0)}$). При этом уравнение (1) принимает вид:

$$F(y, y^{(m_1)}, y^{(m_2)}, \dots, y^{(m_N)}) = 0. \quad (13)$$



Предполагаем также, что уравнению (3) удовлетворяют функции $\varphi_n(x) = b_n$. Тогда запишем АС для уравнения (13):

$$\frac{y}{b_0} = \frac{y^{(m_1)}}{b_1} = \dots = \frac{y^{(m_N)}}{b_N}. \quad (14)$$

(14) представляет собой переопределенную систему ОДУ с постоянными коэффициентами. Первое уравнение этой системы $y^{(m_1)} - a_1 y = 0$ ($a_1 = b_1/b_0$) имеет следующее решение:

$$y = \sum_{s=0}^{m_1-1} C_s \exp(\lambda_s x), \quad (15)$$

где

$$\lambda_s = |a_1|^{1/m_1} \exp[i(2\pi s + \theta)/m_1] \quad (16)$$

— корни характеристического уравнения $\lambda^{m_1} - a_1 = 0$, $\theta = \arg a_1$, C_s — произвольные постоянные, $s = 0, 1, \dots, m_1 - 1$. Для нахождения условий совместности АС запишем n -е уравнение этой системы $y^{(m_n)} - a_n y = 0$ ($a_n = b_n/b_0$) и подставим в него решение (15). Тогда приходим к следующему соотношению:

$$a_n = \left(\sum_{s=0}^{m_1-1} C_s \lambda_s^{m_n} \exp(\lambda_s x) \right) / \left(\sum_{s=0}^{m_1-1} C_s \exp(\lambda_s x) \right). \quad (17)$$

Учитывая (16), нетрудно видеть, что соотношение (17) может быть удовлетворено, если при каждом фиксированном n ($1 \leq n \leq N$) для любого $s = 0, 1, \dots, m_1 - 1$ выполняется хотя бы одно из условий:

- а) sm_n/m_1 — целое число;
- б) $C_s = 0$.

В этом случае из (16) и (17) следует, что $a_n = a_1^{m_n/m_1}$. В частности, если все m_n кратны m_1 , то условие а) удовлетворяется при каждом фиксированном n ($1 \leq n \leq N$) для всех $s = 0, 1, \dots, m_1 - 1$.

Тогда из (3) с учетом однородности функции F легко получить алгебраическое уравнение для определения величины a_1 :

$$F \left(1, a_1, a_1^{m_2/m_1}, \dots, a_1^{m_N/m_1} \right) = 0. \quad (18)$$

Итак, уравнение (13) имеет частное решение вида (15), в котором постоянные C_s могут быть отличны от 0, если при каждом n ($1 \leq n \leq N$) sm_n/m_1 — целое число, причем величина a_1 должна удовлетворять алгебраическому уравнению (18).

Пример. Рассмотрим следующее уравнение:

$$F(y, y^{(2)}, y^{(4)}, y^{(8)}) \equiv p_1 y^{(8)} (y^{(4)})^2 + p_2 y^{(4)} (y^{(2)})^2 + p_3 y^3 = 0.$$



Согласно изложенному выше, из (14) получаем АС для данного уравнения:

$$\frac{y}{b_0} = \frac{y^{(2)}}{b_1} = \frac{y^{(4)}}{b_2} = \frac{y^{(8)}}{b_3}.$$

Решение первого уравнения этой системы:

$$y = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x),$$

где $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a_1}$. Для определения величины a_1 используем уравнение (18), которое в данном случае сводится к виду:

$$F(1, a_1, a_1^2, a_1^4) \equiv p_1 a_1^8 + p_2 a_1^4 + p_3 = 0,$$

откуда получаем формулу для возможных значений a_1 :

$$a_1^4 = \frac{-p_2 \pm (p_2^2 - 4p_1 p_3)^{1/2}}{2p_1}.$$

Рассмотрим случай, когда в уравнение (1) входят некоторые степени от неизвестной функции и ее производных:

$$F(y^{\beta_0}, (y')^{\beta_1}, \dots, (y^{(N)})^{\beta_N}) = 0, \quad (19)$$

где $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ – некоторые действительные числа, причем предполагаем, что $\beta_n \neq 0$ для всех $n = 0, 1, \dots, N$. Пусть так же, как в предыдущей задаче, $\varphi_n(x) = b_n$ – некоторые постоянные. Тогда АС для уравнения (19) можно записать в виде:

$$\frac{y^{\beta_0}}{b_0} = \frac{(y')^{\beta_1}}{b_1} = \dots = \frac{(y^{(N)})^{\beta_N}}{b_N}. \quad (20)$$

1). Пусть $\beta_1 \neq \beta_0$. Решая первое уравнение системы (20) $y' = k_1 y^{\sigma_1}$ находим:

$$y = A_0(x + C)^{\nu_1}, \quad (21)$$

где $A_0 = ((1 - \sigma_1)k_1)^{\nu_1}$, $\nu_1 = 1/(1 - \sigma_1)$, $\sigma_1 = \beta_0/\beta_1$, $k_1 = (b_1/b_0)^{1/\beta_1}$; C – произвольная постоянная. Для нахождения условий совместности системы (20) продифференцируем функцию (21) N раз и подставим полученные производные в остальные уравнения системы. Тогда получим искомые условия совместности:

$$\beta_0/\beta_n = 1 - n(1 - \beta_0/\beta_1), \quad b_n/b_0 = A_n^{\beta_n}/A_0^{\beta_0}, \quad (22)$$

где $A_n = A_0 \nu_1 (\nu_1 - 1) \dots (\nu_1 - n + 1)$; $n = 1, \dots, N$.

Подставив функцию из (21) и её производные в уравнение (19), учитывая условия (22) и свойство однородности функции F , получим уравнение, которому должны удовлетворять параметры β_0, β_1, k_1 :

$$F\left(1, A_1^{\beta_1}/A_0^{\beta_0}, \dots, A_N^{\beta_N}/A_0^{\beta_0}\right) = 0. \quad (23)$$



2). Пусть $\beta_1 = \beta_0$. Тогда из первого уравнения системы (20) $y' = k_1 y$ находим решение $y = C \exp(k_1 x)$, где, так же как и выше, $k_1 = (b_1/b_0)^{1/\beta_1}$. Далее, используя остальные уравнения АС, нетрудно получить условия ее совместности: $\beta_n = \beta_0, b_n/b_0 = (b_1/b_0)^n$ для всех $n = 1, \dots, N$. Тогда из уравнения (19) следует, что величина k_1 должна удовлетворять уравнению:

$$F(1, k_1, \dots, k_1^N) = 0. \quad (24)$$

Таким образом, при $\beta_1 \neq \beta_0$ уравнение (19) имеет решение (21) при условии, что входящие в него параметры удовлетворяют уравнению (23). В случае $\beta_1 = \beta_0$ решением уравнения (19) является экспоненциальная функция $y = C \exp(k_1 x)$, причем величина k_1 должна удовлетворять уравнению (24).

3. Решение некоторых уравнений 2-го порядка методом АС. Рассмотрим уравнение 2-го порядка:

$$F(y, y', y'') = 0. \quad (25)$$

Будем предполагать, что уравнение (3) разрешимо относительно одной из функций $\varphi_n(x)$ (в отличие от задач, рассмотренных в п. 2, эти функции, вообще говоря, не предполагаются постоянными).

1). Пусть $F(u_0, u_1, u_2) = F_0(u_0, u_1) + u_2 F_1(u_0, u_1,)$, где $F_0(u_0, u_1), F_1(u_0, u_1)$ – однородные функции с показателями однородности $r, (r - 1)$ соответственно. Тогда из уравнения (3) можно получить:

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_0(x)} = - \frac{F_0(1, \varphi_1(x)/\varphi_0(x))}{F_1(1, \varphi_1(x)/\varphi_0(x))}. \quad (26)$$

Запишем АС для уравнения (25):

$$\frac{y}{\varphi_0(x)} = \frac{y'}{\varphi_1(x)} = \frac{y''}{\varphi_2(x)}. \quad (27)$$

Решение первого уравнения системы (27) выражается формулой (9), где $\omega(x) = \varphi_1(x)/\varphi_0(x)$. Для получения условия совместности АС используем второе уравнение этой системы, которое запишем в виде:

$$\frac{y''}{y} = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_0(x)}.$$

Подставив в это уравнение функцию $y(x)$, определяемую формулой (9), и учитывая соотношение (26), получим уравнение относительно функции $\omega(x)$:

$$\omega'(x) = -\omega^2(x) + g(\omega(x)), \quad (28)$$

где $g(\omega(x)) = F_0(1, \omega(x))/F_1(1, \omega(x))$. Поскольку (28) представляет собой уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными, то его решение запишем в виде:

$$\int \frac{d\omega}{\omega^2 + g(\omega)} = -x + A, \quad (29)$$



где A – произвольная постоянная. Соотношение (29) определяет в неявном виде функцию $\omega(x) = \varphi_1(x)/\varphi_0(x)$, при которой система (27) является совместной. Таким образом, для рассмотренного случая решение уравнения (25) определяется формулами (9) и (29).

2). Пусть теперь $F(u_0, u_1, u_2) = F_0(u_1, u_2) + u_0 F_1(u_1, u_2)$, где $F_0(u_1, u_2)$, $F_1(u_1, u_2)$ – однородные функции с показателями однородности r , $(r - 1)$ соответственно. Тогда уравнение (3) разрешимо относительно функции $\omega(x)$:

$$\omega(x) \equiv \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} = -\frac{F_1(1, \varphi_2(x)/\varphi_1(x))}{F_0(1, \varphi_2(x)/\varphi_1(x))} \quad (30)$$

или

$$\omega(x) = -g(\chi(x)), \quad \chi(x) = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \quad g(\chi) = \frac{F_1(1, \chi)}{F_0(1, \chi)}. \quad (31)$$

Так же, как и в предыдущем случае, АС имеет вид (27), а решение уравнения (25) определяется формулой (9). Для получения условия совместности АС второе уравнение этой системы запишем в виде:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \equiv \chi(x). \quad (32)$$

Подставляя в уравнение (32) функцию $y(x)$, определяемую формулой (9), и учитывая, что $\omega'(x) = -g'(\chi(x))\chi'(x)$, после несложных преобразований получаем уравнение относительно функции $\chi(x)$:

$$\chi'(x) = \frac{g(\chi(x)) + \chi(x)}{h(\chi(x))}, \quad (33)$$

где $h(\chi) = -g'(\chi)/g(\chi)$. Решение уравнения (33) в неявной форме:

$$\int \frac{h(\chi)d\chi}{g(\chi) + \chi} = x + A, \quad (34)$$

Соотношение (34) определяет в неявном виде функцию $\chi(x)$, при которой система (27) для рассматриваемого случая является совместной. Используя (31), можно выразить через эту функцию решение уравнения (25):

$$y(x) = C \exp\left(-\int g(\chi(x)) dx\right). \quad (35)$$

Таким образом, для рассмотренного случая решение уравнения (25) определяется формулами (34), (35).

4. Заключение. Метод ассоциированных систем, предложенный в данной работе, является эффективным средством решения обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих однородные функции от дифференциальных выражений произвольного вида. В процессе применения метода задача решения исходного уравнения (1) разбивается на две более простые задачи:



- 1) решение функционального уравнения (3);
- 2) решение ассоциированной системы вида (4) и нахождение условий ее совместности.

В примерах, рассмотренных в настоящей работе, с помощью представленного метода получены решения уравнений второго порядка в неявной форме для случая, когда уравнение разрешимо относительно искомой функции или одной из ее производных. Также найдены некоторые частные решения уравнений произвольного порядка, для которых АС представляет собой переопределенную систему ОДУ с постоянными коэффициентами, и исследованы условия её совместности. Предложенный метод является перспективным для решения дифференциальных уравнений сложного вида.

Литература

1. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям // М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / М.: Наука, 1969. – 424 с.
3. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики // М.: Физматлит, 2005. – 256 с.
4. Рахмелевич И.В. О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных // Вестник Томского университета. Математика и механика. – 2013. – 3(23). – С.37-44.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров / М.: Наука, 1984. – 832 с.

METHOD OF ASSOCIATED SYSTEMS FOR SOLVING OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS CONTAINING HOMOGENEOUS FUNCTIONS

I.V. Rakhmelevich

Nizhny Novgorod State University,
Gagarin Av., 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia, e-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Abstract. The method for search of particular solutions of ordinary differential equations containing homogeneous functions of some differential expressions is proposed. The concept of associated system is introduced and its properties are investigated. The solutions of this system coincide with the solutions of initial equation under certain conditions. The proposed method is illustrated for some particular cases.

Key words: differential equation, homogeneous function, associated system, conditions of compatibility.



MSC 94A60

О ПОСТРОЕНИИ СОВЕРШЕННЫХ ШИФРОВ ЗАМЕНЫ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ КЛЮЧОМ

С.М. Рацеев, Н.П. Панов

Ульяновский государственный университет,
ул. Льва Толстого, 42, Ульяновск, 432017, Россия, e-mail: RatseevSM@mail.ru

Аннотация. Исследуется задача построения совершенных шифров по фиксированному набору параметров.

Ключевые слова: криптография, информация, шифр, совершенный шифр.

К. Шеннон в 40-х годах 20-го века ввел понятие совершенного шифра, обеспечивающего наилучшую защиту открытых текстов. Такой шифр не дает криптоаналитику никакой дополнительной информации об открытом тексте на основе перехваченной криптограммы. Данные шифры используются в тех случаях, когда наиболее важна секретность передаваемой информации. В настоящей работе исследуется задача построения совершенных шифров замены с неограниченным ключом по фиксированному набору параметров.

Все необходимые определения можно найти в работах [1, 2]. Пусть U — конечное множество возможных «шифрвеличин», V — конечное множество возможных «шифробозначений». Пусть также имеются r ($r > 1$) инъективных отображений из U в V . Пронумеруем данные отображения: E_1, E_2, \dots, E_r . Данные отображения называются простыми заменами. Обозначим $\mathbb{N}_r = \{1, 2, \dots, r\}$. Опорным шифром замены назовем совокупность $\Sigma = (U, \mathbb{N}_r, V, E, D)$, для которой выполнены следующие свойства:

- 1) для любых $u \in U$ и $j \in \mathbb{N}_r$ выполнено равенство $D_j(E_j(u)) = u$;
- 2) $V = \bigcup_{j \in \mathbb{N}_r} E_j(U)$.

При этом $E = \{E_1, \dots, E_r\}$, $D = \{D_1, \dots, D_r\}$, $D_j : E_j(U) \rightarrow U$, $j \in \mathbb{N}_r$.

l -ой степенью опорного шифра Σ назовем совокупность

$$\Sigma^l = (U^l, \mathbb{N}_r^l, V^l, E^{(l)}, D^{(l)}),$$

где U^l, \mathbb{N}_r^l, V^l — декартовы степени соответствующих множеств U, \mathbb{N}_r, V . Множество $E^{(l)}$ состоит из отображений $E_{\bar{j}} : U^l \rightarrow V^l$, $\bar{j} \in \mathbb{N}_r^l$, таких что для любых $\bar{u} = u_1 \dots u_l \in U^l$, $\bar{j} = j_1 \dots j_l \in \mathbb{N}_r^l$ выполнено равенство

$$E_{\bar{j}}(\bar{u}) = E_{j_1}(u_1) \dots E_{j_l}(u_l) = v_1 \dots v_l \in V^l,$$

а множество $D^{(l)}$ состоит из отображений $D_{\bar{j}} : E_{\bar{j}}(U^l) \rightarrow U^l$, $\bar{j} \in \mathbb{N}_r^l$, таких что для любых $\bar{v} = v_1 \dots v_l \in V^l$, $\bar{j} = j_1 \dots j_l \in \mathbb{N}_r^l$ выполнено равенство

$$D_{\bar{j}}(\bar{v}) = D_{j_1}(v_1) \dots D_{j_l}(v_l) = u_1 \dots u_l \in U^l.$$



Отметим такой важный момент. В ряде случаев не всякое слово длины l в алфавите U может появиться в открытом тексте. Поэтому обозначим через $U^{(l)}$ подмножество всех таких слов во множестве U^l , появление которых в открытом тексте имеет ненулевую вероятность:

$$U^{(l)} = \{\bar{u} \in U^l \mid P_{U^l}(\bar{u}) > 0\}.$$

Тогда

$$V^{(l)} = \bigcup_{\bar{j} \in \mathbb{N}_r^l} E_{\bar{j}}(U^{(l)}).$$

Пусть ψ_c — случайный генератор ключевого потока, который для любого натурального числа l вырабатывает случайный ключевой поток $j_1 \dots j_l$, где все $j_i \in \mathbb{N}_r$. Обозначим через Σ_H^l следующую совокупность величин:

$$\Sigma_H^l = (U^{(l)}, \mathbb{N}_r^l, V^{(l)}, E^{(l)}, D^{(l)}, P(U^{(l)}), P(\mathbb{N}_r^l)).$$

Шифром замены с неограниченным ключом назовем семейство

$$\Sigma_H = (\Sigma_H^l, l \in \mathbb{N}; \psi_c).$$

При этом независимые и не содержащие нулевых вероятностей распределения $P(U^{(l)})$ и $P(\mathbb{N}_r^l)$ индуцируют распределения вероятностей на множестве $V^{(l)}$:

$$P_{V^{(l)}}(\bar{v}) = \sum_{\substack{(\bar{u}, \bar{j}) \in U^{(l)} \times \mathbb{N}_r^l \\ E_{\bar{j}}(\bar{u}) = \bar{v}}} P_{U^{(l)}}(\bar{u}) \cdot P_{\mathbb{N}_r^l}(\bar{j}).$$

Также определим условные вероятности $P_{U^{(l)}|V^{(l)}}(\bar{u}|\bar{v})$ и $P_{V^{(l)}|U^{(l)}}(\bar{v}|\bar{u})$:

$$P_{V^{(l)}|U^{(l)}}(\bar{v}|\bar{u}) = \sum_{\bar{j} \in \mathbb{N}_r^l(\bar{u}, \bar{v})} P_{\mathbb{N}_r^l}(\bar{j}), \quad P_{U^{(l)}|V^{(l)}}(\bar{u}|\bar{v}) = \frac{P_{U^{(l)}}(\bar{u}) \cdot P_{V^{(l)}|U^{(l)}}(\bar{v}|\bar{u})}{P_{V^{(l)}}(\bar{v})},$$

где $\mathbb{N}_r^l(\bar{u}, \bar{v}) = \{\bar{j} \in \mathbb{N}_r^l \mid E_{\bar{j}}(\bar{u}) = \bar{v}\}$.

Говорят, что шифр Σ_H является совершенным, если для любого натурального l и для любых $\bar{u} \in U^{(l)}$, $\bar{v} \in V^{(l)}$ выполнено равенство $P_{U^{(l)}|V^{(l)}}(\bar{u}|\bar{v}) = P_{U^{(l)}}(\bar{u})$.

Предложение 1 [2]. Для шифра Σ_H следующие условия эквивалентны:

- (i) для любого $l \in \mathbb{N}$ и любых $\bar{u} \in U^{(l)}$, $\bar{v} \in V^{(l)}$ выполнено равенство $P_{U^{(l)}|V^{(l)}}(\bar{u}|\bar{v}) = P_{U^{(l)}}(\bar{u})$;
- (ii) для любого $l \in \mathbb{N}$ и любых $\bar{u} \in U^{(l)}$, $\bar{v} \in V^{(l)}$ выполнено равенство $P_{V^{(l)}|U^{(l)}}(\bar{v}|\bar{u}) = P_{V^{(l)}}(\bar{v})$;
- (iii) для любого $l \in \mathbb{N}$ и любых $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in U^{(l)}$, $\bar{v} \in V^{(l)}$ выполнено равенство $P_{V^{(l)}|U^{(l)}}(\bar{v}|\bar{u}_1) = P_{V^{(l)}|U^{(l)}}(\bar{v}|\bar{u}_2)$.

Предложение 2 [2]. Пусть шифр замены с неограниченным ключом Σ_H является совершенным. Тогда для данного шифра будут выполнены следующие свойства:



- (i) для любого натурального числа l и любых $\bar{u} \in U^{(l)}$, $\bar{v} \in V^{(l)}$ найдется такой ключевой поток $\bar{j} \in \mathbb{N}_r^l$, что $E_{\bar{j}}(\bar{u}) = \bar{v}$;
- (ii) для любого натурального числа l справедливо двойное неравенство

$$|U^{(l)}| \leq |V^{(l)}| \leq |\mathbb{N}_r^l| = r^l.$$

Теорема 1 (достаточные условия совершенности шифра Σ_H [3]). Пусть шифр замены Σ_H обладает следующими условиями:

(i) правила зашифрования E_1, E_2, \dots, E_r шифра Σ_H обладают тем свойством, что для любых $u \in U$, $v \in V$ найдется, и притом единственный, элемент $j = j(u, v) \in \mathbb{N}_r$, такой что $E_j(u) = v$;

(ii) распределение вероятностей $P(\mathbb{N}_r)$ является равномерным.

Тогда шифр Σ_H является совершенным, причем для любого $l \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $|V^{(l)}| = r^l$ и распределение вероятностей $P(V^{(l)})$ будет являться равномерным.

Теорема 2 [2]. Пусть для шифра Σ_H выполнено равенство: $|U| = |\mathbb{N}_r| = |V|$. Шифр Σ_H является совершенным тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(i) правила зашифрования E_1, E_2, \dots, E_r шифра Σ_H обладают тем свойством, что для любых $u \in U$, $v \in V$ найдется, и притом единственный, элемент $j = j(u, v) \in \mathbb{N}_r$, такой что $E_j(u) = v$;

(ii) распределение вероятностей $P(\mathbb{N}_r)$ является равномерным.

Приведем также критерий совершенных шифров замены с неограниченным ключом в классе шифров с равномерным распределением вероятностей на множестве \mathbb{N}_r .

Теорема 3 [4]. Пусть для шифра Σ_H выполнены неравенства $|U| \leq |V| \leq |\mathbb{N}_r|$ и распределение вероятностей $P(\mathbb{N}_r)$ является равномерным. Шифр Σ_H является совершенным тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(i) для любых $u \in U$ и $v \in V$ найдется такое $j \in \mathbb{N}_r$, что $E_j(u) = v$;

(ii) для любых $u_1, u_2 \in U$, $v \in V$ выполнено равенство $|\mathbb{N}_r(u_1, v)| = |\mathbb{N}_r(u_2, v)|$.

Рассмотрим задачу построения совершенного шифра Σ_H по заданному множеству «шифрвеличин» U и множеству \mathbb{N}_r с распределением вероятностей $P(\mathbb{N}_r)$: по заданным U , \mathbb{N}_r , $P(\mathbb{N}_r)$ требуется определить, найдутся ли такие V , E , D , для которых шифр Σ_H являлся бы совершенным.

Теорема 4. Для заданных U , $|U| = n$, \mathbb{N}_r , $P(\mathbb{N}_r)$ существует совершенный шифр Σ_H тогда и только тогда, когда найдется такое натуральное число s и n разбиений множества \mathbb{N}_r

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_r &= K_{11} \cup K_{12} \cup \dots \cup K_{1s}, & K_{1i} \cap K_{1j} &= \emptyset, & 1 \leq i < j \leq s, \\ \mathbb{N}_r &= K_{21} \cup K_{22} \cup \dots \cup K_{2s}, & K_{2i} \cap K_{2j} &= \emptyset, & 1 \leq i < j \leq s, \\ & \dots & & & \\ \mathbb{N}_r &= K_{n1} \cup K_{n2} \cup \dots \cup K_{ns}, & K_{ni} \cap K_{nj} &= \emptyset, & 1 \leq i < j \leq s, \end{aligned} \quad (1)$$



для которых выполнены следующие условия:

- 1) $K_{it} \cap K_{jt} = \emptyset, 1 \leq i < j \leq n, t = 1, \dots, s;$
- 2) для любых $1 \leq i < j \leq n, t = 1, \dots, s$ выполнено равенство

$$\sum_{k \in K_{it}} P_{\mathbb{N}_r}(k) = \sum_{k \in K_{jt}} P_{\mathbb{N}_r}(k).$$

□ Достаточность. Пусть для $U, \mathbb{N}_r, P(\mathbb{N}_r)$, найдется такое s и n таких разбиений (1), для которых выполнены условия 1), 2). Пусть $V = \{v_1, \dots, v_s\}$ — некоторое множество «шифробозначений», где s — число непустых частей из (1). Составим матрицу зашифрования размера $r \times n$ для опорного шифра, где строки пронумерованы элементами множества \mathbb{N}_r , а столбцы — элементами множества U , следующим образом. В i -м столбце ($i = 1, \dots, n$) данной матрицы в строках, пронумерованных элементами множества K_{ij} , поставим элемент $v_j, j = 1, \dots, s$. Условие 1) в этом случае гарантирует, что все простые замены $E_j, j \in \mathbb{N}_r$, полученного шифра являются инъективными отображениями. А из условия 2) следует, что для любого $t = 1, \dots, s$ и любых $1 \leq i < j \leq n$ будут выполнены равенства

$$P_{V|U}(v_t|u_i) = \sum_{k \in K_{it}} P_{\mathbb{N}_r}(k) = \sum_{k \in K_{jt}} P_{\mathbb{N}_r}(k) = P_{V|U}(v_t|u_j).$$

Поэтому, учитывая предложение 1, полученный опорный шифр Σ будет являться совершенным по Шеннону.

Покажем, что для любого $l \in \mathbb{N}$ шифр Σ_H^l является совершенным по Шеннону. Зафиксируем некоторое натуральное l . Пусть $\bar{a} = a_1 \dots a_l \in U^{(l)}, \bar{b} = b_1 \dots b_l \in U^{(l)}, \bar{v} = v_1 \dots v_l \in V^{(l)}$. Тогда

$$P_{V^{(l)}|U^{(l)}}(\bar{v}|\bar{a}) = \prod_{i=1}^l P_{V|U}(v_i|a_i) = \prod_{i=1}^l P_{V|U}(v_i|b_i) = P_{V^{(l)}|U^{(l)}}(\bar{v}|\bar{b}).$$

Поэтому из предложения 1 следует, что шифр Σ_H^l является совершенным по Шеннону.

Необходимость. Пусть для заданных $U, \mathbb{N}_r, P(\mathbb{N}_r)$ существует совершенный шифр Σ_H со множеством «шифробозначений» $V = \{v_1, \dots, v_s\}$. Обозначим для данного шифра

$$K_{it} = \{j \in \mathbb{N}_r \mid E_j(u_i) = v_t\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, s.$$

Понятно, что

$$P_{V|U}(v_t|u_i) = \sum_{j \in K_{it}} P_{\mathbb{N}_r}(j).$$

Из предложений 1 и 2 следует, что для множеств K_{it} будут выполнены равенства (1) и условия 1), 2). ■

Следствие 1. Пусть для заданных $U, \mathbb{N}_r, P(\mathbb{N}_r)$ существует совершенный шифр. Тогда для любого множества «шифрвеличин» $\tilde{U}, |\tilde{U}| \leq |U|$, и для заданных $\mathbb{N}_r, P(\mathbb{N}_r)$ существует совершенный шифр Σ_H .



Следствие 2. Для заданных U , $|U| = n$, \mathbb{N}_r , $P(\mathbb{N}_r)$, V , $|V| = s$, существует совершенный шифр Σ_H тогда и только тогда, когда найдется n таких разбиений (1), для которых выполнены условия 1 и 2 предыдущей теоремы.

Следствие 3. Для заданных V , $|V| = s$, \mathbb{N}_r , $P(\mathbb{N}_r)$ существует совершенный шифр Σ_H тогда и только тогда, когда найдется такое n и такие разбиения (1), для которых выполнены условия 1 и 2 предыдущей теоремы.

Следствие 4. Для заданных \mathbb{N}_r , $P(\mathbb{N}_r)$ существует совершенный шифр Σ_H тогда и только тогда, когда найдутся такие n и s , $n \leq s$, и такие разбиения (1), для которых выполнены условия 1 и 2 предыдущей теоремы.

Пример. Пусть $U = \{u_1, u_2\}$, $\mathbb{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ и распределение вероятностей на множестве \mathbb{N}_4 имеет вид

\mathbb{N}_4	1	2	3	4
$P(\mathbb{N}_4)$	2/7	1/7	3/7	1/7

В этом случае можно построить два разбиения множества \mathbb{N}_4 вида

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_4 &= \{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4\}, \\ \mathbb{N}_4 &= \{3\} \cup \{1, 4\} \cup \{2\} \end{aligned}$$

с условиями

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{N}_4}(1) + P_{\mathbb{N}_4}(2) &= P_{\mathbb{N}_4}(3), \\ P_{\mathbb{N}_4}(3) &= P_{\mathbb{N}_4}(1) + P_{\mathbb{N}_4}(4), \\ P_{\mathbb{N}_4}(4) &= P_{\mathbb{N}_4}(2). \end{aligned}$$

По теореме 4 для данных U , \mathbb{N}_4 , $P(\mathbb{N}_4)$ можно построить совершенный шифр Σ_H . Пусть $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Составим матрицу зашифрования следующим образом:

$\mathbb{N}_4 \setminus U$	u_1	u_2
1	v_1	v_2
2	v_1	v_3
3	v_2	v_1
4	v_3	v_2

Тогда полученный шифр Σ_H будет являться совершенным.

Рассмотрим теперь такой несложный критерий.

Предложение 3. Для заданных U и V можно построить совершенный шифр Σ_H тогда и только тогда, когда $|U| \leq |V|$.

□ Если шифр Σ_H является совершенным, то неравенство $|U| \leq |V|$ следует из предложения 2.

Обратно, пусть для U и V выполнено неравенство $|U| \leq |V|$. Обозначим $r = |V|$, $n = |U|$. Составим матрицу A порядка $r \times n$ над множеством V следующим образом:



в каждом столбце матрицы A каждый элемент множества V встречается ровно один раз, а в каждой строке нет повторяющихся элементов (напомним, что такая матрица называется латинским прямоугольником и построить его можно, например, так: каждый следующий столбец является циклическим сдвигом на одну позицию предыдущего столбца). Пусть матрица A будет матрицей зашифрования опорного шифра для шифра Σ_H , а распределение вероятностей на множестве \mathbb{N}_r равномерно. Тогда из теоремы 1 следует, что шифр Σ_H является совершенным. ■

Пусть $(\Omega = \mathbb{N}_r, F_{\mathbb{N}_r}, P_{\mathbb{N}_r})$ — вероятностное пространство. Зафиксируем $v \in V$. Обозначим через $\mathbb{N}_r(v)$ следующее множество:

$$\mathbb{N}_r(v) = \{j \in \mathbb{N}_r \mid v \in E_j(U)\}.$$

Под обозначением $\mathbb{N}_r(v)$ будем также понимать событие $(\mathbb{N}_r(v) \in F_{\mathbb{N}_r})$, заключающееся в том, что при случайном выборе элемента $j \in \mathbb{N}_r$ «шифробозначение» v можно расшифровать правилом расшифрования $D_j: v \in E_j(U)$. Тогда событию $\mathbb{N}_r(v)$ будут благоприятствовать все элементы из множества $\mathbb{N}_r(v)$, и только они. Поэтому

$$P(\mathbb{N}_r(v)) = \sum_{j \in \mathbb{N}_r(v)} P_{\mathbb{N}_r}(j).$$

Если канал связи готов к работе и на приеме установлены действующие ключи, но в данный момент времени никакого сообщения не передается, то в этом случае противником может быть предпринята попытка имитации сообщения. Тогда вероятность успеха имитации каждого символа передаваемого сообщения определяется следующим образом:

$$P_{\text{im}} = \max_{v \in V} P(\mathbb{N}_r(v)).$$

Если же в данный момент передается некоторое сообщение, то противник может заменить некоторые символы этого сообщения, например некоторый символ $v \in V$ на $\tilde{v} \in V$, отличный от v . При этом он будет рассчитывать на то, что на действующем ключе «шифробозначение» \tilde{v} будет успешно расшифровано. Пусть « $\mathbb{N}_r(\tilde{v}) \mid \mathbb{N}_r(v)$ » — событие, заключающееся в попытке подмены «шифробозначения» v «шифробозначением» \tilde{v} . Применяя теорему о произведении вероятностей, получаем, что

$$P(\mathbb{N}_r(\tilde{v}) \mid \mathbb{N}_r(v)) = \frac{P(\mathbb{N}_r(v) \cap \mathbb{N}_r(\tilde{v}))}{P(\mathbb{N}_r(v))} = \frac{\sum_{j \in \mathbb{N}_r(v, \tilde{v})} P_{\mathbb{N}_r}(j)}{\sum_{j \in \mathbb{N}_r(v)} P_{\mathbb{N}_r}(j)},$$

где $\mathbb{N}_r(v, \tilde{v}) = \mathbb{N}_r(v) \cap \mathbb{N}_r(\tilde{v})$. Тогда вероятность успеха подмены «шифробозначения» будет вычисляться по следующей формуле:

$$P_{\text{podm}} = \max_{\substack{v, \tilde{v} \in V, \\ v \neq \tilde{v}}} P(\mathbb{N}_r(\tilde{v}) \mid \mathbb{N}_r(v)).$$

Теорема 5 [2]. Для шифра Σ_H справедливы неравенства

$$P_{\text{im}} \geq \frac{|U|}{|V|}, \quad P_{\text{podm}} \geq \frac{|U| - 1}{|V| - 1}.$$



При этом $P_{\text{im}} = |U|/|V|$ тогда и только тогда, когда для любого $v \in V$ выполнено равенство $P(K(v)) = |U|/|V|$. Также $P_{\text{podm}} = (|U| - 1)/(|V| - 1)$ тогда и только тогда, когда для любых $v, \tilde{v} \in V$, $v \neq \tilde{v}$, выполнено равенство

$$P(K(\tilde{v}) | K(v)) = (|U| - 1)/(|V| - 1).$$

Далее везде предполагается, что для любого натурального l выполнены равенства $U^{(l)} = U^l$, $V^{(l)} = V^l$. Обозначим через P_{im}^l вероятность успеха имитации сообщения для шифра Σ_H^l , а через $P_{\text{podm}}^l(s)$ — вероятность успеха подмены в сообщении длины l ровно s символов для шифра Σ_H^l , где $s \leq l$. Из определения вероятностей P_{im} и P_{podm} следуют такие равенства:

$$P_{\text{im}}^l = (P_{\text{im}})^l, \quad P_{\text{podm}}^l(s) = (P_{\text{podm}})^s.$$

Предложение 4. Пусть для шифра Σ_H (с матрицей зашифрования опорного шифра из теоремы 4) выполнены равенства (1) и условия 1 и 2 теоремы 4. Тогда

$$P_{\text{im}}^l = \left(n \cdot \max_{1 \leq i \leq s} \sum_{k \in K_{1i}} P_{\mathbb{N}_r}(k) \right)^l,$$

$$P_{\text{podm}}^l(t) = \left(\frac{1}{n} \cdot \max_{\substack{1 \leq i, j \leq s \\ i \neq j}} \frac{\sum_{k \in K_i \cap K_j} P_{\mathbb{N}_r}(k)}{\sum_{k \in K_{1i}} P_{\mathbb{N}_r}(k)} \right)^t,$$

где

$$K_i = \bigcup_{j=1}^n K_{ji}, \quad i = 1, \dots, s.$$

□ Пусть $V = \{v_1, \dots, v_s\}$, $1 \leq i \leq s$. Тогда из условий 1 и 2 теоремы 4 следуют такие равенства:

$$P(\mathbb{N}_r(v_i)) = \sum_{k \in K_{1i} \cup \dots \cup K_{ni}} P_{\mathbb{N}_r}(k) = n \cdot \left(\sum_{k \in K_{1i}} P_{\mathbb{N}_r}(k) \right),$$

поэтому

$$P_{\text{im}} = n \cdot \max_{1 \leq i \leq s} \sum_{k \in K_{1i}} P_{\mathbb{N}_r}(k).$$

Далее, пусть $1 \leq i, j \leq s$, $i \neq j$. Тогда

$$P(\mathbb{N}_r(v_j) | \mathbb{N}_r(v_i)) = \frac{\sum_{k \in K_i \cap K_j} P_{\mathbb{N}_r}(k)}{\sum_{k \in K_i} P_{\mathbb{N}_r}(k)} = \frac{\sum_{k \in K_i \cap K_j} P_{\mathbb{N}_r}(k)}{n \cdot \left(\sum_{k \in K_{1i}} P_{\mathbb{N}_r}(k) \right)},$$

поэтому

$$P_{\text{podm}} = \frac{1}{n} \cdot \max_{\substack{1 \leq i, j \leq s \\ i \neq j}} \frac{\sum_{k \in K_i \cap K_j} P_{\mathbb{N}_r}(k)}{\sum_{k \in K_{1i}} P_{\mathbb{N}_r}(k)}. \quad \blacksquare$$



Предложение 5. Пусть для шифра Σ_H выполнены равенства (1) и условия 1 и 2 теоремы 4. Для шифра Σ_H достигаются нижние границы для вероятностей имитации и подмены

$$P_{\text{im}}^l = \left(\frac{n}{s}\right)^l, \quad P_{\text{podm}}^l(t) = \left(\frac{n-1}{s-1}\right)^t,$$

где $n = |U|$, $s = |V|$, тогда и только тогда, когда для любых $1 \leq i < j \leq s$ выполнены следующие равенства:

$$\sum_{k \in K_{1i}} P_{\mathbb{N}_r}(k) = \frac{1}{s}, \quad \sum_{k \in K_i \cap K_j} P_{\mathbb{N}_r}(k) = \frac{n(n-1)}{s(s-1)}.$$

□ Доказательство следует из теоремы 5 и предложения 4. ■

Литература

1. Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С., Черемушкин А.В. Основы криптографии / М.: Гелиос АРВ, 2005. – 480 с.
2. Зубов А.Ю. Криптографические методы защиты информации. Совершенные шифры / М.: Гелиос АРВ, 2005. – 192 с.
3. Рацев С.М. О совершенных имитостойких шифрах // Прикладная дискретная математика. – 2012. – 17; №3. – С.41-47.
4. Рацев С.М. О совершенных имитостойких шифрах замены с неограниченным ключом // Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. – 2013. – 110; №9/1. – С.42-48.

ON CONSTRUCTIONS OF PERFECT CODES OF SUBSTITUTION WITH UNBOUNDED KEY

S.M. Ratseev, N.P. Panov

Ulyanovsk State University,
Lev Tolstoy St., 42, Ulyanovsk, 432017, Russia, e-mail: RatseevSM@mail.ru

Abstract. The problem of constructing perfect codes on a fixed set of parameters is studied.

Key words: cryptography, information, code, perfect code.



MSC 35L70

ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНАЛОГА УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Х.Г. Умаров

Чеченский государственный университет,
ул. Шерипова, 32, Грозный, 364907, Россия, e-mail: umarov50@mail.ru

Аннотация. Явный вид решения начально-краевой задачи в банаховом пространстве для абстрактного уравнения теплопроводности с операторным коэффициентом получен по классической схеме с применением операторнозначного аналога фундаментального решения. Абстрактные рассуждения иллюстрируются в пространстве непрерывных функций на неотрицательной полуоси, для которых существует предел на бесконечности.

Ключевые слова: сильно непрерывные полугруппы операторов, уравнения в частных производных, банахово пространство.

1. Постановка абстрактной начально-краевой задачи. В банаховом пространстве E рассмотрим аналог уравнения теплопроводности:

$$BV_t = V_{yy} + F, \quad 0 < t \leq T < +\infty, y \in R_+^1 =]0, +\infty[, \quad (1)$$

в котором оператор $-B$ является производящим оператором [1, с. 58] сильно непрерывной полугруппы класса C_0 с неположительным типом: $\|U(t; -B)\| \leq M \exp(-\beta t)$, $\beta \geq 0$, $t \geq 0$, а $F(y, t)$ — заданная функция со значениями в E .

Решение $V = V(y, t)$ уравнения (1) ищется непрерывным при $(y, t) \in \bar{R}_+^1 \times [0, T]$, $\bar{R}_+^1 = [0, +\infty[$ и непрерывно дифференцируемым при $(y, t) \in R_+^1 \times]0, T]$ по переменной t один раз, а по переменной y два раза. Кроме того, полагаем, что при $(x, t) \in R_+^1 \times]0, T]$ значения решения V и ее частной производной V_t принадлежат области определения $\mathcal{D}(B)$ оператора B .

Под первой краевой (смешанной) задачей для уравнения (1) будем понимать, как и в классическом случае, задачу нахождения решения, удовлетворяющего начальному и краевому условиям:

$$V|_{t=0} = \Phi(y), \quad y \in \bar{R}_+^1, \quad (2)$$

$$V|_{y=0} = \mathcal{M}(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

где $\Phi(y)$ и $\mathcal{M}(t)$ — заданные функции со значениями в банаховом пространстве E , подчиненные естественному условию согласования $\Phi(0) = \mathcal{M}(0)$.

Уравнение (1) является псевдопараболическим уравнением соболевского типа не разрешенным относительно производной по временной переменной t . Исследованию



абстрактных псевдопараболических уравнений $BV_t + AV = F$, где A, B — операторы, действующие в банаховом пространстве E , посвящено большое количество работ (см., например, обзор и подробную библиографию, приведенную в монографии [2]), в которых чаще всего рассматриваются вопросы глобальной во времени разрешимости и разрушения решений.

Наша цель, по классической схеме, с применением операторнозначного аналога фундаментального решения, получить явный вид решения первой краевой задачи (1)-(3), т.е. найти интегральное представление решения уравнения (1) через начальную (2) и граничную (3) функции.

В зависимости от того отрицательный или равный нулю тип полугруппы $U(t; -B)$, порождаемой оператором $-B$, будем обозначать уравнение (1) соответственно (1_-) или (1_0) . Вначале рассматривается первая краевая задача (1_-) - (3) для случая экспоненциального убывания нормы полугруппы, порождаемой оператором $-B$. В этом случае существует ограниченный обратный оператор B^{-1} и, значит, абстрактное дифференциальное уравнение (1_-) допускает разрешение относительно производной по времени. Далее предполагается, что тип $\beta = 0$ и рассматривается уравнение (1_0) , не допускающее разрешение относительно производной по времени. Решение первой краевой задачи для уравнения (1_0) , в котором оператор $-B$ порождает полугруппу с нулевым типом, строится как предел при $\delta \rightarrow 0+$ решения вспомогательной первой краевой задачи для уравнения (1) с оператором $B_\delta = \delta I + B$ вместо B .

Все рассуждения статьи иллюстрируются на примере оператора $B = -d/dx$ действующего в банаховом пространстве $C[0, +\infty] \equiv C(\overline{R}_+^1)$ непрерывных функций $\psi(x)$, для которых существует предел при $x \rightarrow +\infty$ и норма которого определяется по формуле $\|\psi(x)\|_{C(\overline{R}_+^1)} \equiv \|\psi(x)\|_C = \sup_{x \in \overline{R}_+^1} |\psi(x)|$. В пространстве $C(\overline{R}_+^1)$ дифференциальный оператор d/dx с областью определения

$$\mathcal{D}(d/dx) = \left\{ \psi(x) \in C(\overline{R}_+^1) : \psi'(x) \in C(\overline{R}_+^1) \right\}$$

является [3, с. 670] производящим оператором сжимающей сильно непрерывной полугруппы $U(t; d/dx)$ класса C_0 левых сдвигов: $U(t; d/dx)\psi(x) = \psi(x+t)$, $t \geq 0$.

2. Фундаментальное оператор - решение первой краевой задачи. Абстрактным фундаментальным оператор - решением первой краевой задачи для уравнения (1_-) в области изменения переменных $(\eta, \tau; y, t) : 0 \leq \tau < t, \eta, y \in \overline{R}_+^1$, назовем операторнозначную функцию

$$G(\eta, \tau; y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left[U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}; -B\right) - U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4(t-\tau)}; -B\right) \right] B^{1/2}, \quad (4)$$

где положительные дробные степени B^ν , $0 < \nu < 1$, определяются [1, с. 140] замыканием своего сужения на $\mathcal{D}(B)$ по формуле

$$B^\nu e = \frac{\sin \pi \nu}{\pi} \int_0^{+\infty} s^{\nu-1} (sI + B)^{-1} B e ds$$



или [4, с. 358] эквивалентной формулой

$$B^\nu e = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{+\infty} s^{-(1+\nu)} [U(s; -B)e - e] ds,$$

$0 < \nu < 1$, $e \in \mathcal{D}(B)$, где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция. Если $k - 1 \leq \nu < k$, k — натуральное число, то для дробных степеней B^ν справедливо [5] представление

$$B^\nu e = \frac{1}{c_{\nu,k}} \int_0^{+\infty} \xi^{-(1+\nu)} [I - U(\xi; -B)]^k e d\xi,$$

$e \in \mathcal{D}(B^k)$, где

$$c_{\nu,k} = \int_0^{+\infty} [1 - \exp(-\xi)]^k \xi^{-(1+\nu)} d\xi.$$

На протяжении статьи будем пользоваться, вытекающими из приведенных определений соотношениями

$$B^{k+1/2}e = B^k B^{1/2}e = (2\sqrt{\pi})^{-1} \int_0^{+\infty} \xi^{-3/2} [I - U(\xi; -B)] B^k e d\xi,$$

$e \in \mathcal{D}(B^{k+1})$, и, в частности, при $E = C(\overline{R}_+^1)$, $B = -d/dx$, дробная производная $(-d/dx)^{1/2}$ представляется [6, с. 95-97] через правостороннюю дробную производную Маршо $\mathbf{D}_-^{1/2}$ на полуоси:

$$\left(-\frac{d}{dx}\right)^{1/2} \psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} [\psi(x) - \psi(x+\xi)] \frac{d\xi}{\xi\sqrt{\xi}} = \mathbf{D}_-^{1/2}(\psi(x)), \quad (5)$$

для $\psi(x) \in \mathcal{D}(d/dx)$.

Непосредственно из определения (4) следует:

1) если $e \in \mathcal{D}(B^{1/2})$, то в области $\tau < t$, $\eta, y \in \overline{R}_+^1$ справедлива оценка нормы

$$\|G(\eta, \tau; y, t)e\| \leq \frac{M \|B^{1/2}e\|}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)} \left[1 + M \exp\left(-\beta \frac{y\eta}{t-\tau}\right)\right] \exp\left[-\beta \frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right];$$

2) $G(\eta, \tau; y, t)e|_{\eta=0} = 0$ при $e \in \mathcal{D}(B^{1/2})$;

3) $G(\eta, \tau; y, t)e \rightarrow 0$ при $e \in \mathcal{D}(B^{1/2})$, $y \neq \eta$ и $\tau \rightarrow t$;

4) если $e \in \mathcal{D}(B^{3/2})$, то имеет место представление

$$G(\eta, \tau; y, t)e = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)} U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}; -B\right) \int_0^{y\eta/(t-\tau)} U(s; -B) B^{3/2}e ds$$

и оценка нормы



$$\|G(\eta, \tau; y, t)e\| \leq \frac{M \|B^{3/2}e\|}{2\beta\sqrt{\pi}(t-\tau)} \left[1 - \exp\left(-\beta\frac{y\eta}{t-\tau}\right) \right] \exp\left[-\beta\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right],$$

$\tau < t, \eta, y \in \bar{R}_+^1$.

5) функция $Ge = G(\eta, \tau; y, t)e$, при $e \in \mathcal{D}(B^{5/2})$, по переменным (η, τ) удовлетворяет уравнению $B\partial Ge/\partial\tau + \partial^2 Ge/\partial\eta^2 = 0$, а по переменным (y, t) — однородному уравнению соответствующему (1₋);

6) для любого элемента $e \in E$ выполняется равенство

$$B^{1/2} \int_0^{+\infty} G(\eta, \tau; y, t) B^{-1/2} e d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} B^{1/2} \int_0^{y^2/(4(t-\tau))} U(s; -B)e \frac{ds}{\sqrt{s}}, \quad \tau < t, y \in R_+^1, \tag{6}$$

где отрицательные дробные степени $B^{-\nu}$, если тип полугруппы $U(\cdot; -B)$ — отрицательный, вычисляются [7, с. 275] по формуле

$$B^{-\nu} = \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} s^{-\nu} (sI + B)^{-1} ds,$$

$0 < \nu < 1$, и для них справедливо интегральное представление [7, с. 297] через полугруппу $U(t; -B)$:

$$B^{-\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} s^{\nu-1} U(t; -B) ds, \quad \nu > 0. \tag{7}$$

Из равенства (6), в силу формулы (7), для любого элемента $e \in E$ вытекает предельное соотношение

$$\lim_{\tau \rightarrow t-0} B^{1/2} \int_0^{+\infty} G(\eta, \tau; y, t) B^{-1/2} e d\eta = e.$$

3. Теоремы существования и единственности решения задачи с оператором B , порождающим полугруппу с отрицательным типом. Сначала рассмотрим теорему единственности:

Теорема 1. Пусть решение $V(y, t)$ первой краевой задачи (1₋)-(3) удовлетворяет условиям:

$$\|V(y, t)\| \leq \lambda(t) \exp(qy^2), \quad (y, t) \in \bar{R}_+^1 \times [0, T];$$

$$\|V_y(y, t)\| \leq \frac{\lambda_1(t)}{y^\delta \sqrt{t}} \exp(qy^2), \quad \delta < 1, q = \text{const} < \frac{\beta}{4T}, \quad (y, t) \in R_+^1 \times]0, T],$$

в которых $\lambda(t), \lambda_1(t), t \in [0, T]$ — непрерывные функции. Тогда в каждой точке $(y, t) \in R_+^1 \times]0, T]$ имеет место формула



$$\begin{aligned}
 V(y, t) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} B^{1/2} \int_0^{+\infty} U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t}; -B\right) \left[I - U\left(\frac{y\eta}{t}; -B\right) \right] \Phi(\eta) d\eta + \\
 & + \frac{y}{2\sqrt{\pi}} B^{1/2} \int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}; -B\right) \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} + \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} B^{-1/2} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}; -B\right) \left[I - U\left(\frac{y\eta}{t-\tau}; -B\right) \right] F(\eta, \tau) d\eta. \quad (8)
 \end{aligned}$$

□ Пусть (y, t) — произвольная фиксированная точка множества $R_+^1 \times]0, T]$ плоскости (η, τ) , а s — достаточно большое число, причем $1/s < y < s$. На плоскости (η, τ) выделим прямоугольник Q_s со сторонами $\{1/s \leq \eta \leq s, \tau = 1/s\}$, $\{\eta = s, 1/s \leq \tau \leq t - 1/s\}$, $\{1/s \leq \eta \leq s, \tau = t - 1/s\}$, $\{\eta = 1/s, 1/s \leq \tau \leq t - 1/s\}$ и рассмотрим в нем тождество

$$\{BG_\tau + G_{\eta\eta}\} B^{-3/2}V + GB^{-3/2}\{BV_\tau - V_{\eta\eta}\} = GB^{-3/2}F, \quad (9)$$

где $G = G(\eta, \tau; y, t)$ — фундаментальный оператор - решение (4), а $V = V(\eta, \tau)$ — решение смешанной задачи (1)-(3).

Проинтегрируем обе части тождества (9) по области Q_s , предварительно представив левую часть (9) в виде дивергенции, тогда получим

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \int_{1/s}^{t-1/s} [G_\eta(s, \tau; y, t) B^{-3/2}V(s, \tau) - G(s, \tau; y, t) B^{-3/2}V_\eta(s, \tau)] d\tau + \right. \\
 & + \left. \int_{1/s}^{t-1/s} G\left(\frac{1}{s}, \tau; y, t\right) B^{-3/2}V_\eta\left(\frac{1}{s}, \tau\right) d\tau \right\} + \int_{1/s}^s G\left(\eta, t - \frac{1}{s}; y, t\right) B^{-1/2}V\left(\eta, t - \frac{1}{s}\right) d\eta - \\
 & - \left\{ \int_{1/s}^{t-1/s} G_\eta\left(\frac{1}{s}, \tau; y, t\right) B^{-3/2}V\left(\frac{1}{s}, \tau\right) d\tau + \int_{1/s}^s G\left(\eta, \frac{1}{s}; y, t\right) B^{-1/2}V\left(\eta, \frac{1}{s}\right) d\eta \right\} = \\
 & = \int_{1/s}^{t-1/s} \int_{1/s}^s G(\eta, \tau; y, t) B^{-3/2}F(\eta, \tau) d\eta d\tau. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Сумма интегралов в первой фигурной скобке в левой части (10) стремится к нулю при $s \rightarrow +\infty$, так как норма первого интеграла этой суммы оценивается выражением

$$\frac{M(1+M)}{2\sqrt{\pi}} E_q(T, y) \int_0^t \left[\lambda(\tau) + s^{-2-\delta} \frac{M}{\beta} \frac{\lambda_1(\tau)}{\sqrt{\tau}} \right] d\tau s^{5/2} \exp\left(-\frac{(s\beta_q(T) - \beta y)^2}{4T\beta_q(T)}\right),$$



где $E_q(t, y) = \exp(q\beta y^2/\beta_q(t))$, $\beta_q(t) = \beta - 4qt$, а для нормы второго интеграла мажорантой будет

$$s^{\delta-1} \frac{yM}{(y-1/s)\sqrt{\beta t}} \exp\left(-\beta \frac{(y-1/s)^2}{4t}\right) \max_{\tau \in [0,t]} \lambda_1(\tau).$$

В интегралах из второй фигурной скобки в левой части (10) у подынтегральных функций если и есть особенности при $s \rightarrow +\infty$, то они устранимые, поэтому

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{1/s}^{t-1/s} G_\eta\left(\frac{1}{s}, \tau; y, t\right) B^{-3/2} V\left(\frac{1}{s}, \tau\right) d\tau = \int_0^t G_\eta(0, \tau; y, t) B^{-3/2} V(0, \tau) d\tau$$

и

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{1/s}^s G\left(\eta, \frac{1}{s}; y, t\right) B^{-1/2} V\left(\eta, \frac{1}{s}\right) d\eta = \int_0^{+\infty} G(\eta, 0; y, t) B^{-1/2} V(\eta, 0) d\eta.$$

Предел интеграла вне фигурных скобок в левой части (10) равен $B^{-1/2} V(y, t)$. Это следует, учитывая формулу (6), из малости для достаточно больших s нормы разности:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{1/s}^s G\left(\eta, t - \frac{1}{s}; y, t\right) B^{-1/2} V\left(\eta, t - \frac{1}{s}\right) d\eta - B^{-1/2} V(y, t) \right\| \leq \\ & \leq \frac{M}{\sqrt{\pi}} \left\{ \lambda(t) \exp(qy^2) \int_{sy^2/4}^{+\infty} \exp(-\beta r) \frac{dr}{\sqrt{r}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{M(1+M)}{\sqrt{\beta}} \max_{|\eta| \leq \eta_0} \left\| V\left(y + \frac{2}{\sqrt{s}}\eta, t - \frac{1}{s}\right) - V(y, t) \right\| + \right. \\ & \quad \left. + (1+M) \left\{ \lambda\left(t - \frac{1}{s}\right) \exp\left(\frac{\beta q y^2}{\beta - 4q/s}\right) \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \left(\int_{-\infty}^{-\eta_0} + \int_{\eta_0}^{+\infty} \right) \exp\left[-\left(\eta \sqrt{\beta - \frac{4q}{s}} - \frac{2qy}{\sqrt{\beta s - 4q}}\right)^2\right] d\eta + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \lambda(t) \exp(qy^2) \left(\int_{-\infty}^{-\eta_0} + \int_{-\infty}^{(1/s-y)\sqrt{s}/2} + \int_{(s-y)\sqrt{s}/2}^{+\infty} + \int_{\eta_0}^{+\infty} \right) \exp(-\beta \eta^2) d\eta \right\} \right\}, \end{aligned}$$

где η_0 — достаточно большое положительное число.

Итак, переходя в обеих частях тождества (10) к пределу при $s \rightarrow +\infty$, в каждой точке $(y, t) \in R_+^1 \times]0, T]$, получим



$$B^{-1/2}V(y, t) = \int_0^{+\infty} G(\eta, 0; y, t) B^{-1/2}V(\eta, 0) d\eta + \int_0^t G_\eta(0, \tau; y, t) B^{-3/2}V(0, \tau) d\tau + \\ + B^{-1} \int_0^t \int_0^{+\infty} G(\eta, \tau; y, t) B^{-1/2}F(\eta, \tau) d\eta d\tau.$$

Откуда и следует формула (8). ■

Теперь выясним, каким условиям достаточно подчинить начальную $\Phi(y)$ и граничную $\mathcal{M}(t)$ функции и свободный член $F(y, t)$ чтобы формула (8) давала решение первой краевой задачи (1₋) - (3).

Теорема 2. Пусть значения начальной $\Phi(y)$ и граничной $\mathcal{M}(t)$ функций принадлежат множеству $\mathcal{D}(B^{5/2})$, а значения $F(y, t) \in \mathcal{D}(B^{3/2})$, $F_y(y, t) \in \mathcal{D}(B^{1/2})$, и справедливы оценки норм непрерывных функций

$$\|B^{5/2}\Phi(y)\| \leq K \exp(hy^2), \quad K = \text{const}, \quad y \in \bar{R}_+^1, \quad h = \text{const} < \beta/4T;$$

$$\|B^{5/2}\mathcal{M}(t)\| \leq \lambda(t), \quad t \in [0, T];$$

$$\|B^{3/2}F(y, t)\|, \quad \|B^{1/2}F_y(y, t)\| \leq \Lambda(t) \exp(hy^2), \quad (y, t) \in \bar{R}_+^1 \times [0, T],$$

в которых $\lambda(t)$, $\Lambda(t)$ — непрерывные на $[0, T]$ функции, тогда решение первой краевой задачи (1₋) - (3) в каждой точке $(y, t) \in R_+^1 \times]0, T]$ дается формулой (8) и для него справедлива оценка нормы

$$\|V(y, t)\| \leq \frac{M^3}{\beta^2 \sqrt{\beta_h(t)}} \left[K + \int_0^t \Lambda(\tau) d\tau \right] E_h(t, y) + \frac{M^3}{\beta^{5/2}} \lambda_t \leq \\ \leq \frac{M^3}{\beta^2 \sqrt{\beta_h(T)}} \left[K + \int_0^T \Lambda(\tau) d\tau \right] E_h(T, y) + \frac{M^3}{\beta^{5/2}} \lambda_T, \quad (11)$$

в которой $\lambda_t = \max_{\tau \in [0, t]} \lambda(\tau)$.

□ Оценка (15) нормы функции (8) выводится из неравенства

$$\|V(y, t)\| \leq \frac{M^3 2\lambda_t}{\beta^2 \sqrt{\pi}} \int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} \exp(-\beta\tau^2) d\tau + \\ + \frac{M^2(1+M)}{\beta \sqrt{\pi}} \exp(hy^2) \left[\frac{MK}{\beta} + \int_0^t \Lambda(\tau) d\tau \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(\beta - 4th)\eta^2 + 4hy\sqrt{t}\eta] d\eta,$$

используя значения табличных интегралов [8, с. 321].

Покажем, что функция (8) удовлетворяет уравнению (1₋). Для этого, в силу пятого свойства в вышеприведенном списке свойств фундаментального оператор - решения (4), достаточно проверить, что условия теоремы 2 обеспечивают возможность вычисления



частных производных функции $V(y, t)$ дифференцированием под знаком интеграла. А это следует, применяя вспомогательную оценку

$$\int_0^{+\infty} s^m \exp(-ar^2 + 2br) dr \leq \frac{2^{m-1}}{a^{(m+1)/2}} \left[\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) + \sqrt{\pi} \left(\frac{b^2}{a}\right)^{m/2} \right] \exp\left(\frac{b^2}{a}\right), \quad a > 0,$$

из соотношений

1⁰) для нормы частной производной по переменной y

$$\begin{aligned} & \|V_y(y, t)\| = \\ & = \left\| -\frac{1}{4\sqrt{\pi}t^{3/2}} \int_0^{+\infty} (y + \eta) U\left(\frac{(y - \eta)^2}{4t}; -B\right) \left[\frac{y - \eta}{y + \eta} + U\left(\frac{y\eta}{t}; -B\right) \right] B^{3/2} \Phi(\eta) d\eta + \right. \\ & \quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t - \tau)}; -B\right) B^{1/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t - \tau)^{3/2}} - \\ & \quad - \frac{y^2}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t - \tau)}; -B\right) B^{3/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t - \tau)^{5/2}} + \\ & \quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{t - \tau} \int_0^{+\infty} d\eta \int_{\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}}^{\frac{(y+\eta)^2}{4(t-\tau)}} \left[\frac{1}{2\sqrt{s}} U(s; -B) B^{1/2} F(\eta, \tau) - \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{s} U(s; -B) B^{3/2} F(\eta, \tau) \right] ds \left. \right\| \leq \\ & \leq \frac{M^2(1+M)K}{t\beta\sqrt{\pi}\beta_h(t)} \left[\frac{\beta\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta_h(t)}} + \frac{1}{2}\sqrt{t} \right] E_h(T, y) + \frac{M^2(1+M)}{\beta^{5/2}y} \lambda_t + \frac{4M}{\sqrt{\pi}\beta_h(t)} \int_0^t \Lambda(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \times \\ & \quad \times \left\{ \frac{M}{2\beta} \left(1 + \frac{2hy\sqrt{\pi t}}{\sqrt{\beta_h(t)}} \right) + \frac{4}{\beta_h(t)} \left[1 + \frac{8h^3y^3t\sqrt{\pi t}}{\beta_h(t)\sqrt{\beta_h(t)}} \right] \right\} E_h(T, y); \end{aligned}$$

2⁰) для нормы частной производной второго порядка по переменной y

$$\begin{aligned} & \|V_{yy}(y, t)\| = \left\| -\frac{1}{4\sqrt{\pi}t^{3/2}} \int_0^{+\infty} U\left(\frac{(y - \eta)^2}{4t}; -B\right) \left[I - U\left(\frac{y\eta}{t}\right) \right] B^{3/2} \Phi(\eta) d\eta + \right. \\ & \quad + \frac{1}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}} \int_0^{+\infty} (y + \eta)^2 U\left(\frac{(y - \eta)^2}{4t}; -B\right) \left[\frac{(y - \eta)^2}{(y + \eta)^2} I - U\left(\frac{y\eta}{t}\right) \right] B^{5/2} \Phi(\eta) d\eta + \\ & \quad + \frac{y^3}{8\sqrt{\pi}} \int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t - \tau)}; -B\right) B^{5/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t - \tau)^{7/2}} - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{3y}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t U \left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}; -B \right) B^{3/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} \left[U \left(\left(\eta + \frac{y}{\sqrt{t-\tau}} \right)^2; -B \right) B^{1/2} F(y + 2\sqrt{t-\tau}\eta, \tau) - \right. \\
& - 2 \left(\eta + \frac{y}{\sqrt{t-\tau}} \right)^2 U \left(\left(\eta + \frac{y}{\sqrt{t-\tau}} \right)^2; -B \right) B^{3/2} F(y + 2\sqrt{t-\tau}\eta, \tau) \left. \right] d\eta + \\
& + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} [\eta U(\eta^2; -B) + \\
& + \left(\eta + \frac{y}{\sqrt{t-\tau}} \right) U \left(\left(\eta + \frac{y}{\sqrt{t-\tau}} \right)^2; -B \right)] B^{1/2} F_y(y + 2\sqrt{t-\tau}\eta, \tau) d\eta \Big\| \leq \\
& \leq \frac{M}{\sqrt{\beta_h(t)}} \left\{ \frac{(1+M)K}{t} \left\{ \frac{M}{2\beta} + \frac{1}{t} \left[y^2 + \frac{4y\sqrt{t}}{\sqrt{\beta_h(t)}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{2hy\sqrt{t}}{\sqrt{\beta_h(t)}} \right) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{2t}{\beta_h(t)} \left(1 + \frac{8h^2y^2t}{\beta_h(t)} \right) \right] \right\} \right\} E_h(T, y) + \frac{3M}{y} \left(1 + \frac{M}{\beta y} \right) \lambda_t + \\
& + \frac{M}{\beta_h(t)} \left[\left(\frac{2M}{\beta\sqrt{\pi}y} + 3 \right) \left(1 + \frac{2hy\sqrt{\pi t}}{\sqrt{\beta_h(t)}} \right) + \frac{4}{\sqrt{\beta_h(t)}y} \left(1 + \frac{8h^2y^2t}{\beta_h(t)} \right) \right] \int_0^t \Lambda(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} E_h(T, y);
\end{aligned}$$

3⁰) для нормы частной производной по переменной t

$$\begin{aligned}
\|V_t(y, t)\| &= \left\| -\frac{1}{4\sqrt{\pi}t^{3/2}} \int_0^{+\infty} U \left(\frac{(y-\eta)^2}{4t}; -B \right) \left[I - U \left(\frac{y\eta}{t} \right) \right] B^{1/2} \Phi(\eta) d\eta + \right. \\
& + \frac{1}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}} \int_0^{+\infty} (y+\eta)^2 U \left(\frac{(y-\eta)^2}{4t}; -B \right) \left[\frac{(y-\eta)^2}{(y+\eta)^2} I - U \left(\frac{y\eta}{t} \right) \right] B^{3/2} \Phi(\eta) d\eta + \\
& + \frac{y^3}{8\sqrt{\pi}} \int_0^t U \left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}; -B \right) B^{3/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{7/2}} - \\
& - \frac{3y}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t U \left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}; -B \right) B^{1/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}} +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\eta^2; -B) B^{-1/2} F(y, t) d\eta - \frac{y}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \times \\
 & \times \int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} \left(\eta + \frac{y}{\sqrt{t-\tau}} \right) U \left(\left(\eta + \frac{y}{\sqrt{t-\tau}} \right)^2; -B \right) B^{1/2} F(y + 2\sqrt{t-\tau}\eta, \tau) d\eta + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} \eta U(\eta^2; -B) \left[I - \right. \\
 & \left. - U \left(\frac{y}{\sqrt{t-\tau}} \left(2\eta + \frac{y}{\sqrt{t-\tau}} \right); -B \right) \right] B^{-1/2} F_y(y + 2\sqrt{t-\tau}\eta, \tau) d\eta \Big\| \leq \\
 & \leq \frac{M^2 E_h(T, y)}{\beta \sqrt{\beta_h(t)}} \left\{ \frac{(1+M)K}{t} \left\{ \frac{M}{2\beta} + \frac{1}{t} \left\{ y^2 \left[1 + \frac{8\sqrt{\pi}ht}{\beta_h(t)} + \frac{16h^2t}{\beta_h^2(t)} \right] + \frac{4y\sqrt{t}}{\sqrt{\beta_h(t)}} + \frac{2}{\beta_h(t)} \right\} \right\} + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{\sqrt{\pi\beta_h(t)}} \int_0^t \Lambda(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \times \right. \\
 & \left. \times \left\{ \frac{8}{\beta_h(t)} \left[1 + \frac{8\sqrt{\pi}h^3y^3t^{3/2}}{\beta_h^{3/2}(t)} \right] + (1+M) \left(1 + \frac{2\sqrt{\pi}hy\sqrt{t}}{\sqrt{\beta_h(t)}} \right) \right\} \right\} + \frac{3M^2}{\beta y} \left(1 + \frac{M}{\beta y} \right) \lambda_t.
 \end{aligned}$$

Перепиcывая внутренний интеграл в последнем слагаемом в представлении производной $V_{yy}(y, t)$ в виде

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\frac{y}{2\sqrt{t-\tau}}}^{+\infty} \left[\eta U(\eta^2; -B) + \left(\eta + \frac{y}{\sqrt{t-\tau}} \right) U \left(\left(\eta + \frac{y}{\sqrt{t-\tau}} \right)^2; -B \right) \right] \times \\
 & \times B^{1/2} F_y(y + 2\sqrt{t-\tau}\eta, \tau) d\eta = \\
 & = \int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} \eta \left[U(\eta^2; -B) - U \left(\left(\eta + \frac{y}{\sqrt{t-\tau}} \right)^2; -B \right) \right] B^{1/2} F_y(y + 2\sqrt{t-\tau}\eta, \tau) d\eta + \\
 & + \int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} \left(\eta + \frac{y}{2\sqrt{t-\tau}} \right) U \left(\left(\eta + \frac{y}{\sqrt{t-\tau}} \right)^2; -B \right) B^{1/2} F_\eta(y + 2\sqrt{t-\tau}\eta, \tau) d\eta
 \end{aligned}$$

и интегрируя по частям второй интеграл в правой части последнего равенства, убеждаемся, что

$$V_t - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\eta^2; -B) B^{-1/2} F(y, t) d\eta = V_t - B^{-1} F$$



и V_{yy} отличаются только показателями степеней оператора B , причем $B(V_t - B^{-1}F) = V_{yy}$, т.е. функция $V(y, t)$, определяемая формулой (8), является решением уравнения (1₋).

Осталось показать выполнение начального (2) и краевого (3) условий.

Обозначим через $V_\Phi(y, t)$, $V_M(y, t)$ и $V_F(y, t)$ соответственно первое, второе и третье слагаемые в формуле (8): $V(y, t) = V_\Phi(y, t) + V_M(y, t) + V_F(y, t)$.

Так как

$$\|V_M(y, t) + V_F(y, t)\| \leq \frac{M^3 2}{\beta^2 \sqrt{\pi}} \lambda_t \int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} \exp(-\beta\tau^2) d\tau + \frac{M^2(1+M)}{\beta\sqrt{\beta_h(T)}} E_h(T, y) \int_0^t \Lambda(\tau) d\tau,$$

то $V_M(y, t) + V_F(y, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Поэтому, чтобы проверить выполнение начального условия (2) для функции $V(y, t)$, достаточно установить, что $V_\Phi(y, t) \rightarrow \Phi(y)$ при $t \rightarrow 0$. Используя формулу (6) и то, что интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{y^2/(4t)}^{+\infty} U(s; -B) B^{1/2} \Phi(y) \frac{ds}{\sqrt{s}}$$

есть бесконечно малая величина $o(t)$ при $t \rightarrow 0$, для всех достаточно малых значений t имеем

$$\begin{aligned} \|V_\Phi(y, t) - \Phi(y)\| &= \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y^2/(4t)} U(s; -B) B^{1/2} \Phi(y) \frac{ds}{\sqrt{s}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} U(s; -B) B^{1/2} \Phi(y) \frac{ds}{\sqrt{s}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left[U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t}; -B\right) - U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4t}; -B\right) \right] [B^{1/2} \Phi(\eta) - B^{1/2} \Phi(y)] d\eta \right\| \leq \\ &\leq o(t) + \frac{M(1+M)}{\sqrt{\pi}} \int_{-y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} \exp(-\beta\eta^2) \|B^{1/2} \Phi(y + 2\sqrt{t}\eta) - B^{1/2} \Phi(y)\| d\eta \leq \\ &\leq o(t) + \frac{M^3(1+M)}{\beta^2 \sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\eta_0}^{\eta_0} \exp(-\beta\eta^2) d\eta \max_{|\eta| \in \eta_0} \|B^{5/2} \Phi(y + 2\sqrt{t}\eta) - B^{5/2} \Phi(y)\| + \right. \\ &\quad \left. + K \exp(hy^2) \left(\int_{-\infty}^{-\eta_0} + \int_{\eta_0}^{+\infty} \right) \left[\exp(-\beta\eta^2) + \exp(-\beta_h(T)\eta^2 + 4hy\sqrt{T}\eta) \right] d\eta \right\} < \varepsilon, \end{aligned}$$

где η_0 — достаточно большое, а ε — сколь угодно малое положительные числа.



Проверке выполнения для функции $V(y, t)$ краевого условия (3) предположим оценку нормы:

$$\begin{aligned} \|V_\Phi(y, t) + V_F(y, t)\| &= \left\| \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} B^{1/2} \int_0^{+\infty} U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t}; -B\right) \left[I - U\left(\frac{y\eta}{t}; -B\right) \right] \Phi(\eta) d\eta + \right. \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} B^{-1/2} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}; -B\right) \left[I - U\left(\frac{y\eta}{t-\tau}; -B\right) \right] F(\eta, \tau) d\eta \left. \right\| \leq \\ &\leq \frac{M^2}{\sqrt{\pi}} \exp(hy^2) \left\{ \left[\frac{K}{\sqrt{t}} \left(2\sqrt{t} \int_0^{y^2/(4t)} + y \int_{y^2/(4t)}^{+\infty} \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \left(2\sqrt{t} \int_0^{y^2/[4(t-\tau)]} + y \int_{y^2/[4(t-\tau)]}^{+\infty} \right) \right] \exp\left(-\beta_h(T)s + 4hy\sqrt{T}s\right) ds \right\}, \end{aligned}$$

из которой следует, что $V_\Phi(y, t) + V_F(y, t) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0+$.

Используя то, что интеграл

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/(4\sqrt{t})} U(s^2; -B) B^{1/2} \mathcal{M}(t) ds$$

есть бесконечно малая величина $o(y)$ при $y \rightarrow 0$, после замены $y/(2\sqrt{t-\tau}) = s$ в интеграле, определяющем $V_M(y, t)$, для всех достаточно малых $y > 0$, имеем

$$\begin{aligned} \|V_M(y, t) - \mathcal{M}(t)\| &\leq o(y) + \left\| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/(4\sqrt{t})}^{+\infty} U(s^2; -B) \left[B^{1/2} \mathcal{M}\left(t - \frac{y^2}{4s^2}\right) - B^{1/2} \mathcal{M}(t) \right] ds \right\| \leq \\ &\leq o(y) + \frac{2M^3}{\beta^2 \sqrt{\pi}} \left\{ [\lambda(t) + \lambda_T] \left(\int_{y/(4\sqrt{t})}^{1/s_0} + \int_{s_0}^{+\infty} \right) \exp(-\beta s^2) ds + \right. \\ &\left. + \max_{s \in [1/s_0, s_0]} \left\| B^{5/2} \mathcal{M}\left(t - \frac{y^2}{4s^2}\right) - B^{5/2} \mathcal{M}(t) \right\| \int_{1/s_0}^{s_0} \exp(-\beta s^2) ds \right\} < \varepsilon, \end{aligned}$$

где s_0 — достаточно большое, а ε — сколь угодно малое положительные числа. ■

4. Первая краевая задача с оператором B , порождающим полугруппу с нулевым типом. В формуле (8) решения первой краевой задачи для уравнения (1₋) фигурируют дробные степени оператора B . Представление (7) отрицательной дробной степени $B^{-\nu}$, $0 < \nu < 1$, через полугруппу $U(\cdot; -B)$ справедливо, если тип полугруппы $U(\cdot; -B)$ — отрицательный. Воспользоваться этим представлением для отрицательной дробной степени оператора B , для которого $-B$ является производящим оператором



сильно непрерывной полугруппы $U(\cdot; -B)$ класса C_0 с нулевым типом, нельзя, так как интеграл (7) может оказаться расходящимся на бесконечности без дополнительных предположений относительно полугруппы (и, значит, её производящего оператора) или банахова пространства. Так как производящие операторы задаются рассматриваемым дифференциальным уравнением, то, чтобы сохранить представление (7), перейдем на подмножество банахова пространства E . Обозначим через E_ν , $\nu > 0$, подмножество ¹⁾ пространства E , для элементов e которого справедлива оценка $\|U(\tau; -B)e\| \leq \omega_e(\tau)$, $e \in E_\nu$, $\tau \geq 0$, где мажоранта $\omega_e(\tau)$ из пространства $L_{1,\nu-1}$, здесь $L_{1,\rho}$ — пространство функций, абсолютно интегрируемых на полуоси \overline{R}_+^1 с весом τ^ρ :

$$\|\omega_e\|_\rho = \int_0^{+\infty} \tau^\rho |\omega_e(\tau)| d\tau < \infty.$$

Пусть $-B$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы класса C_0 с нулевым типом, тогда оператор $-B_\delta = -\delta I - B$, $\delta > 0$, является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы с отрицательным типом $U(t; -B_\delta) = \exp(-\delta t) U(t; -B)$, поэтому отрицательные дробные степени $B_\delta^{-\nu}$, $\nu > 0$, представляются формулой (7) через полугруппу $U(t; -B_\delta)$. При этом существует предел $B_\delta^{-\nu} e$, $e \in E_\nu$, при $\delta \rightarrow 0+$ (так как существует мажоранта $\omega_e(\tau)$: $\|\exp(-\delta\tau) U(\tau; -B)e\| \leq \omega_e(\tau) \in L_{1,\nu-1}$), который и задает на элементах e подмножества E_ν банахова пространства E отрицательную дробную степень $B^{-\nu}$, когда полугруппа $U(t; -B)$ имеет нулевой тип:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} B_\delta^{-\nu} e = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} s^{\nu-1} \exp(-\delta s) U(s; -B)e ds = B^{-\nu} e, \quad \nu > 0, e \in E_\nu. \quad (12)$$

Итак, формула (16) дает представление

$$B^{-\nu} e = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} s^{\nu-1} U(t; -B) e ds,$$

$\nu > 0$, $e \in E_\nu$, отрицательной дробной степени оператора B на элементах $e \in E_\nu$ через полугруппу $U(t; -B)$. В этом случае ²⁾, если $e \in \mathcal{D}(B^\nu)$, $0 < \nu < 1$, и $e, B^\nu e \in E_\nu$, то на таких элементах оператор $B^{-\nu}$ является обратным к оператору B^ν : $B^{-\nu} B^\nu e = B^\nu B^{-\nu} e = e$, $0 < \nu < 1$, $e \in \mathcal{D}(B^\nu) \cap E_\nu$, $B^\nu e \in E_\nu$.

¹⁾Покажем, что множества E_ν , $\nu > 0$, не пустые, например, в $E = C(\overline{R}_+^1)$. Пусть $B = -d/dx$ и $g_\alpha(x) = (1+x^\alpha)^{-1}$, $\alpha > 0$, тогда $\|U(\tau; \frac{d}{dx}) g_\alpha(x)\|_C = \sup_{x \in \overline{R}_+^1} \left| \frac{1}{1+(x+\tau)^\alpha} \right| = \frac{1}{1+\tau^\alpha} = \psi_\alpha(\tau)$, $\tau \geq 0$. Функции $\psi_\alpha(\tau)$ из пространства $L_{1,\nu-1}$: $\|\psi_\alpha(\tau)\|_{\nu-1} = \int_0^{+\infty} \tau^{\nu-1} \frac{d\tau}{1+\tau^\alpha} = \frac{\pi}{\alpha \sin(\nu\pi/\alpha)} < \infty$, $\alpha > \nu > 0$ [8, с. 306]. Значит, $g_\alpha(x) \in E_\nu \subset C(\overline{R}_+^1)$ при $\alpha > \nu$.

²⁾Для подмножеств E_ν банахова пространства E и, таким образом определенной на подмножествах E_ν , отрицательной дробной степени оператора B справедливы утверждения: 1) $E_\nu \subset E_r$, если $r < \nu$; 2) пусть для элемента $e \in \mathcal{D}(B^\nu)$ выполняется $e, B^\nu e \in E_r$, тогда $B^\delta e \in E_r$ при $0 < \delta < \nu$; 3) пусть $e \in E_\nu$, тогда $B^{-r} e \in E_{\nu-r}$, $0 < r < \nu$; 4) если $e \in E_{\nu+r}$, $0 < r, \nu$, то $B^{-r} B^{-\nu} e = B^{-(r+\nu)} e$; 5) пусть $e \in \mathcal{D}(B^\nu)$, $\nu > 0$, и $e, B^\nu e \in E_r$, $r > 0$, тогда $B^{-r} B^\nu e = B^\nu B^{-r} e$; $B^{-r} B^\nu e = B^{\nu-r} e$ при $\nu > r$; $B^{-r} B^\nu e = B^{-(r-\nu)} e$ при $\nu < r$.



Если $E = C(\overline{R_+^1})$, то отрицательная степень оператора $B = -d/dx$ представляется [6, с. 42] через правосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля:

$$\left(-\frac{d}{dx}\right)^{-1/2} \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \psi(x+s) \frac{ds}{\sqrt{s}} = \left(\mathbf{I}_{\infty-}^{1/2} \psi\right)(x), \quad (13)$$

для функций $\psi(x)$ из подмножества $E_{1/2}$ пространства $C(\overline{R_+^1})$ удовлетворяющих оценке $\sup_{x \in \overline{R_+^1}} \psi(x+\tau) \leq \omega(\tau)$, в которой мажоранта $\omega(\tau)$ из весового пространства $L_{1,-1/2}$.

Пусть $\Psi(y, t)$ — функция со значениями в банаховом пространстве E . Будем говорить, что функция $\Psi(y, t)$ равномерно по не временным переменным y принадлежит классу CE_ν , $\nu > 0$, и писать $\Psi(y, t) \in CE_\nu$, если она непрерывна по совокупности переменных в области задания и удовлетворяет оценке $\sup_y \|U(\tau; -B) \Psi(y, t)\| \leq \lambda(t) \psi(\tau)$, $\tau \geq 0$, где $\lambda(t)$, $\psi(\tau)$ — непрерывные функции, причем, $\psi(\tau) \in L_{1,\nu-1}$, $\nu > 0$. Если функция $\Psi(y, t)$ не зависит от временной переменной t : $\Psi(y, t) = Z(y)$, то принадлежность функции $Z(y) \in CE_\nu$ означает, что выполнена оценка $\sup_y \|U(\tau; -B) Z(y)\| \leq \psi(\tau)$, $\tau \geq 0$, в которой функция $\psi(\tau) \in L_{1,\nu-1}$. Если функция $Z(y)$ — постоянная, т.е. $Z(y) = e$, то принадлежность её классу CE_ν означает, что $e \in E_\nu$.

Если функция $\Psi(y, t)$ принимает значения из множества $\mathcal{D}(B^\nu)$ и принадлежит классу CE_ν , то справедливо интегральное представление

$$\Psi(y, t) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} \tau^{\delta-1} U(\tau; -B) B^\delta \Psi(y, t) d\tau, \quad 0 < \delta \leq \nu,$$

которое часто используется в дальнейшем.

Рассмотрим теперь вспомогательную первую краевую задачу для уравнения

$$B_\delta V_t = V_{yy} + F, \quad t \in]0, T], \quad y \in R_+^1, \quad (14)$$

в котором $B_\delta = \delta I + B$, $\delta > 0$, а оператор $-B$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы класса C_0 с нулевым типом. Согласно теоремам 1, 2, для каждого положительного δ решение $V_\delta(y, t)$ первой краевой задачи (18), (2), (3) дается формулой (8) в которой оператор B заменяется на B_δ :

$$\begin{aligned} V_\delta(y, t) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left[\exp\left(-\delta \frac{(y-\eta)^2}{4t}\right) U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t}; -B\right) - \right. \\ & \left. - \exp\left(-\delta \frac{(y+\eta)^2}{4t}\right) U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4t}; -B\right) \right] (\delta I + B)^{1/2} \Phi(\eta) d\eta + \\ & + \frac{y}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left(-\delta \frac{y^2}{4(t-\tau)}\right) U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}; -B\right) (\delta I + B)^{1/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} \left[\exp\left(-\delta \frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right) U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}; -B\right) - \right. \\
 & \left. - \exp\left(-\delta \frac{(y+\eta)^2}{4(t-\tau)}\right) U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4(t-\tau)}; -B\right) \right] (\delta I + B)^{-1/2} F(\eta, \tau) d\eta. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Используя в последнем слагаемом формулы (15) представление

$$(\delta I + B)^{-1/2} F(\eta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-\delta s) U(s; -B) F(\eta, \tau) \frac{ds}{\sqrt{s}},$$

формальный предел при $\delta \rightarrow 0$ функции $V_\delta(y, t)$ запишем в виде

$$\begin{aligned}
 V(y, t) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left[U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t}; -B\right) - U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4t}; -B\right) \right] B^{1/2} \Phi(\eta) d\eta + \\
 & + \frac{y}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}; -B\right) B^{1/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} \left[U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}; -B\right) - U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4(t-\tau)}; -B\right) \right] d\eta \times \\
 & \times \int_0^{+\infty} U(s; -B) F(\eta, \tau) \frac{ds}{\sqrt{s}}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть

I) функции $\Phi(y)$, $\mathcal{M}(t)$ принимают значения из множества $\mathcal{D}(B^{5/2})$, а функции $F(y, t)$ и $F_y(y, t)$ – из $\mathcal{D}(B)$;

II) для непрерывных функций $\Phi(y)$, $\mathcal{M}(t)$, $F(y, t)$ справедливы соотношения:

- 1) $\Phi(y)$, $\mathcal{M}(t) \in CE_{1/2}$, $F(y, t) \in CE_1$;
- 2) $B^{3/2}\Phi(y)$, $B^{5/2}\Phi(y)$, $B^{1/2}\mathcal{M}(t)$, $BF(y, t)$, $F_y(y, t)$, $BF_y(y, t) \in CE_{3/2}$;
- 3) $B^{3/2}\mathcal{M}(t)$, $B^{5/2}\mathcal{M}(t) \in CE_{5/2}$.

Тогда решение $V_\delta(y, t)$ вспомогательной задачи (18), (2), (3) при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по $(y, t) \in \overline{R}_+^1 \times [0, T]$ стремится к решению $V(y, t)$ первой краевой задачи (1₀) – (3). Решение $V(y, t)$ дается формулой (23) и для его нормы справедлива оценка

$$\|V(y, t)\| \leq \frac{1+M}{\sqrt{\pi}} \left[\|\omega\|_{-1/2} + \frac{\lambda_t}{1+M} \|\sigma\|_{-1/2} + \sqrt{\pi} \|\gamma\|_0 \int_0^t \chi(\tau) d\tau \right], \quad (17)$$

в которой функции $\omega(\tau)$, $\lambda(t)$, $\sigma(\tau)$, $\chi(t)$, $\gamma(\tau)$ определяются неравенствами

$$\|U(\tau; -B) B^{1/2} \Phi(y)\| \leq \omega(t), \quad \|U(\tau; -B) B^{1/2} \mathcal{M}(t)\| \leq \lambda(t) \sigma(\tau),$$



$$\|U(\tau; -B)F(y, t)\| \leq \chi(t)\gamma(\tau). \tag{18}$$

□ Так как по условию $B^{3/2}\Phi(y) \in CE_{3/2} \subset CE_{1/2}$ и $\Phi(y) \in CE_{1/2}$, то функция $B^{1/2}\Phi(y) \in CE_{1/2}$. Используя принадлежность функций $B^{1/2}\Phi(y)$, $B^{1/2}\mathcal{M}(t)$ классу $CE_{1/2}$, а функции $F(y, t)$ — классу CE_1 , т.е. используя выполнение для функций $\omega(\tau)$, $\sigma(\tau)$, $\gamma(\tau)$ из (25) соотношений $\omega(\tau), \sigma(\tau) \in L_{1,-1/2}$, $\gamma(\tau) \in L_{1,0}$, оценим норму функции $V(y, t)$, определяемой формулой (23):

$$\begin{aligned} \|V(y, t)\| &\leq \frac{1+M}{\sqrt{\pi}} \int_{-y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} \omega(\eta^2) d\eta + \frac{2\lambda_t}{\sqrt{\pi}} \int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} \sigma(s^2) ds + \\ &+ \frac{1+M}{2\pi} \int_0^t \chi(t-\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_0^{+\infty} d\eta \int_{(y-\eta)^2/(4\tau)}^{+\infty} \gamma(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi - (y-\eta)^2/(4\tau)}}. \end{aligned}$$

В первых двух слагаемых в правой части последнего неравенства увеличиваем область интегрирования и, затем, производим замену переменных интегрирования, а в последнем меняем порядок интегрирования и, затем, оцениваем внутренний интеграл:

$$\|V(y, t)\| \leq \frac{1+M}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \omega(s) \frac{ds}{\sqrt{s}} + \frac{\lambda_t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sigma(s) \frac{ds}{\sqrt{s}} + (1+M) \int_0^t \chi(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} \gamma(\xi) d\xi.$$

Откуда и следует оценка нормы (24).

Выполнение для функции (23) начального условия (2) следует из того, что для всех достаточно малых значений $t > 0$, применяя, в силу принадлежности $\Phi(y)$ классу $CE_{1/2}$, представление

$$\Phi(y) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\eta^2; -B) B^{1/2}\Phi(y) d\eta,$$

имеем

$$\begin{aligned} \|V(y, t) - \Phi(y)\| &\leq \frac{\lambda_t}{\sqrt{\pi}} \int_{y^2/(4t)}^{+\infty} \sigma(s) \frac{ds}{\sqrt{s}} + (1+M) \|\gamma_0\|_0 \int_0^t \chi_0(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ 2\eta_0 M \max_{\eta \in [-\eta_0, \eta_0]} \left\| B^{1/2}\Phi(y + 2\eta\sqrt{t}) - B^{1/2}\Phi(y) \right\| + \right. \\ &\left. + \left[2 \left(\int_{-\infty}^{-\eta_0} + \int_{\eta_0}^{+\infty} \right) + \int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} \right] \omega(\eta^2) d\eta \right\} < \varepsilon, \end{aligned}$$

где ε — сколь угодно малое, а η_0 — достаточно большие положительные числа.

Для проверки краевого условия (3), для всех достаточно малых значений $y > 0$, оценим норму разности $V(y, t) - \mathcal{M}(t)$, в которой $V(y, t)$ определяется формулой (23):



$$\begin{aligned}
\|V(y, t) - \mathcal{M}(t)\| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} d\eta \int_{\eta^2}^{(\eta+y/\sqrt{t})^2} \|U(s; -B) B^{3/2} \Phi(y + 2\eta\sqrt{t})\| ds + \\
&+ \left\| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/(2\sqrt{t})} U(s^2; -B) B^{1/2} \mathcal{M}(t) ds \right\| + \\
&+ \left\| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} U(s^2; -B) \left[B^{1/2} \mathcal{M}\left(t - \frac{y^2}{4s^2}\right) - B^{1/2} \mathcal{M}(t) \right] ds \right\| + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} d\eta \int_{\eta^2}^{(\eta+y/\sqrt{t-\tau})^2} \|U(s; -B) B^{1/2} F(y + 2\eta\sqrt{t-\tau}, \tau)\| ds. \quad (19)
\end{aligned}$$

При записи последнего слагаемого в правой части (26) воспользовались тем, что функции $F(y, t) \in CE_1$ и $BF(y, t) \in CE_{3/2}$ принадлежат классу $CE_{1/2} \supset CE_1 \supset CE_{3/2}$ и, значит, справедливы равенства

$$\begin{aligned}
BB^{-1/2}F(y, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} B \int_0^{+\infty} U(s; -B) F(y, t) \frac{ds}{\sqrt{s}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} U(s; -B) BF(y, t) \frac{ds}{\sqrt{s}} = B^{1/2}F(y, t),
\end{aligned}$$

в которых функция $B^{1/2}F(y, t) \in CE_1$. Действительно, применяя оценку

$$\|U(\tau; -B) BF(y, t)\| \leq \chi_1(t) \gamma_1(\tau),$$

где $\gamma_1(\tau) \in L_{1,1/2}$, имеем

$$\begin{aligned}
\|U(\tau; -B) B^{1/2}F(y, t)\| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \|U(\tau + s; -B) BF(y, t)\| \frac{ds}{\sqrt{s}} \leq \\
&\leq \frac{\chi_1(t)}{\sqrt{\pi}} \int_{\tau}^{+\infty} \gamma_1(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi - \tau}} \equiv \chi_1(t) J(\tau),
\end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} J(\tau) d\tau &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\tau}^{+\infty} \gamma_1(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi - \tau}} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\xi} \gamma_1(\xi) d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \|\gamma_1\|_{1/2} < +\infty.
\end{aligned}$$



Используя принадлежность функций $B^{3/2}\Phi(y)$ и $B^{1/2}F(y, t)$ классу $CE_{3/2} \subset CE_1$, т.е. неравенства

$$\|U(\tau; -B) B^{3/2}\Phi(y)\| \leq \omega_{3/2}(\tau), \quad \|U(\tau; -B) B^{1/2}F(y, t)\| \leq \chi_{1/2}(t) \gamma_{1/2}(\tau),$$

оценим вспомогательные интегралы

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} d\eta \int_{\eta^2}^{(\eta+y/\sqrt{t})^2} \omega_{3/2}(s) ds = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{y^2/(4t)} \omega_{3/2}(s) ds \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} d\eta + \int_{y^2/(4t)}^{+\infty} \omega_{3/2}(s) ds \int_{\sqrt{s-y/\sqrt{t}}}^{\sqrt{s}} d\eta \right] \leq \\ & \leq \frac{y}{\sqrt{\pi t}} \left[\int_0^{y^2/(4t)} \omega_{3/2}(s) ds + \int_{y^2/(4t)}^{+\infty} \omega_{3/2}(s) ds \right] = \frac{y}{\sqrt{\pi t}} \|\omega_{3/2}\|_0 = j_1(y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \chi_{1/2}(\tau) d\tau \int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} d\eta \int_{\eta^2}^{(\eta+y/\sqrt{t-\tau})^2} \gamma_{1/2}(s) ds \leq \\ & \leq \frac{y}{\sqrt{\pi}} \|\gamma_{1/2}\|_0 \int_0^t \chi_{1/2}(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = j_2(y); \end{aligned}$$

$$3) \quad \left\| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/(2\sqrt{t})} U(s^2; -B) B^{1/2}\mathcal{M}(t) ds \right\| \leq y \frac{M}{\sqrt{\pi t}} \|B^{1/2}\mathcal{M}(t)\| = j_3(y);$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & \left\| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} U(s^2; -B) \left[B^{1/2}\mathcal{M}\left(t - \frac{y^2}{4s^2}\right) - B^{1/2}\mathcal{M}(t) \right] ds \right\| \leq \\ & \leq \frac{2Ms_0}{\sqrt{\pi}} \max_{s \in [1/s_0, s_0]} \left\| B^{1/2}\mathcal{M}\left(t - \frac{y^2}{4s^2}\right) - B^{1/2}\mathcal{M}(t) \right\| + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{1/s_0^2} + \int_{s_0^2}^{+\infty} \right) \sigma(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} [\lambda(t) + \lambda_t] = j_4(y). \end{aligned}$$

Применяя полученные оценки, из (26) выводим справедливость краевого условия:

$$\|V(y, t) - \mathcal{M}(t)\| \leq \sum_{k=1}^4 j_k(y) < \varepsilon,$$

где ε — сколь угодно малое, а s_0 — достаточно большое положительные числа.



Теперь покажем, что функция (23) является пределом при $\delta \rightarrow 0$ решения $V_\delta(y, t)$ вспомогательной задачи (18), (2), (3). Для всех достаточно малых значений $\delta > 0$, обозначая $E_\delta(r, B) = U(r; -B) \left[e_\delta(r) B^{1/2} + \exp(-\delta r) (B_\delta^{1/2} - B^{1/2}) \right]$, $e_\delta(r) = \exp(-\delta r) - 1$, $Q_\delta(r, B) = e_\delta(r) U(r; -B)$, используя неравенства

$$\|U(\tau; -B) \varphi(x)\| \leq \omega_0(\tau), \quad \|U(\tau; -B) \mu(t)\| \leq \lambda_0(t) \sigma_0(\tau),$$

в которых $\omega_0(\tau), \sigma_0(\tau) \in L_{1,-1/2}$, и учитывая оценку [1, с. 155] $\|B_\delta^\nu e - B^\nu e\| \leq c\delta^\nu \|e\|$, $e \in \mathcal{D}(B^\nu)$, $0 < \nu < 1$, $c = \text{const}$, имеем

$$\begin{aligned} \|V_\delta(y, t) - V(y, t)\| &= \left\| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} E_\delta(\eta^2, B) \mathcal{M}\left(t - \frac{y^2}{4\tau^2}\right) d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^t d\tau \int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} d\eta \times \right. \\ &\times \int_0^{+\infty} \left[Q_\delta(s + \eta^2, B) - Q_\delta\left(s + \left(\eta + \frac{y}{\sqrt{t-\tau}}\right)^2, B\right) \right] F(y + 2\eta\sqrt{t-\tau}, \tau) \frac{ds}{\sqrt{s}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} \left[E_\delta(\eta^2, B) - E_\delta\left(\left(\eta + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)^2, B\right) \right] \Phi(y + 2\eta\sqrt{t}) d\eta \left. \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\|\omega\|_{-1/2} e_\delta(\xi_0) + 2 \int_{\xi_0}^{+\infty} \omega(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} + c\sqrt{\delta} \|\omega_0\|_{-1/2} \right] + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \max\{\lambda_t; \lambda_{0,t}\} \left[\|\sigma\|_{-1/2} e_\delta(\xi_0) + 2 \int_{\xi_0}^{+\infty} \sigma(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} + c\sqrt{\delta} \|\sigma_0\|_{-1/2} \right] + \\ &+ \left[\|\gamma_0\|_0 e_\delta(\xi_0) + 2 \int_{\xi_0}^{+\infty} \gamma_0(\xi) d\xi \right] \int_0^t \chi_0(\tau) d\tau < \varepsilon, \end{aligned}$$

где $e_\delta(\xi_0) = \max_{\xi \in [0, \xi_0]} |e_\delta(\xi)|$, $\lambda_{\alpha,t} = \max_{\tau \in [0,t]} \lambda_\alpha(\tau)$, а ε — сколь угодно малое и ξ_0 — достаточно большое положительные числа.

Осталось показать, что предельная функция $V(y, t)$ является решением дифференциального уравнения (1₀).

Вычислим и оценим нормы частных производных функции (23):

1⁰). для частной производной первого порядка по переменной y имеем формулу и, используя принадлежность $B^{3/2}\mathcal{M}(t)$ классу $CE_{5/2} \subset CE_{3/2}$, т.е. неравенство

$$\|U(\tau; -B) B^{3/2}\mathcal{M}(t)\| \leq \lambda_{3/2}(t) \sigma_{3/2}(\tau),$$

в котором $\sigma_{3/2}(\tau) \in L_{1,1/2}$, оценку нормы

$$\|V_y(y, t)\| = \left\| \frac{-1}{4t\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left[(y - \eta) U\left(\frac{(y - \eta)^2}{4t}; -B\right) - \right. \right.$$



$$\begin{aligned}
 & - (y + \eta) U \left(\frac{(y + \eta)^2}{4t}; -B \right) \Big] B^{3/2} \Phi(\eta) d\eta - \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{d\tau}{(t - \tau)^{3/2}} \int_0^{+\infty} \left[(y - \eta) U \left(\frac{(y - \eta)^2}{4(t - \tau)}; -B \right) - (y + \eta) U \left(\frac{(y + \eta)^2}{4(t - \tau)}; -B \right) \right] d\eta \times \\
 & \times \int_0^{+\infty} U(s; -B) BF(\eta, \tau) \frac{ds}{\sqrt{s}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t U \left(\frac{y^2}{4(t - \tau)}; -B \right) B^{1/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t - \tau)^{3/2}} - \\
 & - \frac{y^2}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t U \left(\frac{y^2}{4(t - \tau)}; -B \right) B^{3/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t - \tau)^{5/2}} \Big\| \leq \\
 & \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} \|\omega_{3/2}\|_0 + \frac{\max\{\lambda_t; \lambda_{3/2,t}\}}{y} (\|\sigma\|_{-1/2} + \|\sigma_{3/2}\|_{1/2}) + \|\gamma_1\|_0 \int_0^t \chi_1(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} \right].
 \end{aligned}$$

2⁰). для частной производной второго порядка по y имеем формулу и, используя неравенства

$$\begin{aligned}
 \|U(\tau; -B) B^{5/2} \Phi(y)\| & \leq \omega_{5/2}(\tau), \quad \|U(\tau; -B) B^{5/2} \mathcal{M}(t)\| \leq \lambda_{5/2}(t) \sigma_{5/2}(\tau), \\
 \|U(\tau; -B) B^{1/2} F_y(y, t)\| & \leq \chi_{1/2}^1(t) \gamma_{1/2}^1(\tau),
 \end{aligned}$$

в которых $\omega_{5/2}(\tau), \gamma_{1/2}^1(\tau) \in L_{1,3/2}, \sigma_{5/2}(\tau) \in L_{1,5/2}$, оценку нормы

$$\begin{aligned}
 \|V_{yy}(y, t)\| & = \left\| -\frac{1}{2t\sqrt{\pi}} \left[\int_{-y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} U(\eta^2; -B) B^{3/2} \Phi(y + 2\eta\sqrt{t}) d\eta - \right. \right. \\
 & - \left. \int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} U(\eta^2; -B) B^{3/2} \Phi(-y + 2\eta\sqrt{t}) d\eta \right] + \\
 & + \frac{1}{t\sqrt{\pi}} \left[\int_{-y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} \eta^2 U(\eta^2; -B) B^{5/2} \Phi(y + 2\eta\sqrt{t}) d\eta - \right. \\
 & - \left. \int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} \eta^2 U(\eta^2; -B) B^{5/2} \Phi(-y + 2\eta\sqrt{t}) d\eta \right] - \\
 & - \frac{12}{y^2\sqrt{\pi}} \int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} s^2 U(s^2; -B) B^{3/2} \mathcal{M}\left(t - \frac{y^2}{4s^2}\right) ds + \\
 & + \frac{8}{y^2\sqrt{\pi}} \int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} s^4 U(s^2; -B) B^{5/2} \mathcal{M}\left(t - \frac{y^2}{4s^2}\right) ds -
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} U(s^2; -B) B^{1/2} F\left(0, t - \frac{y^2}{4s^2}\right) ds + \\
& + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \left[\int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} \eta U(\eta^2; -B) B^{1/2} F_y(y + 2\eta\sqrt{t-\tau}, \tau) d\eta + \right. \\
& \quad \left. + \int_{y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} \eta U(\eta^2; -B) B^{1/2} F_y(-y + 2\eta\sqrt{t-\tau}, \tau) d\eta \right] \Big\| \leq \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} \|\omega_{3/2}\|_{-1/2} + \|\omega_{5/2}\|_{1/2} \right] + \frac{2}{y^2} \left[3\lambda_{3/2,t} \|\sigma_{3/2}\|_{1/2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\lambda_{5/2,t} \|\sigma_{5/2}\|_{3/2} \right] + \chi_{1/2,t} \|\gamma_{1/2}\|_{-1/2} + \|\gamma_{1/2}^1\|_0 \int_0^t \chi_{1/2}^1(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right\},
\end{aligned}$$

где обозначено $\chi_{\alpha,t} = \max_{\tau \in [0,t]} \chi_{\alpha}(\tau)$.

3⁰). Прежде чем вычислять частную производную $V_t(y, t)$, преобразуем (обозначив $\tilde{\mathcal{M}}(y, t)$) второе слагаемое из правой части формулы (23):

$$\tilde{\mathcal{M}}(y, t) = \frac{y}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\xi \int_0^\xi U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}; -B\right) B^{1/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}}.$$

Вычислим частную производную по переменной t функции $\tilde{\mathcal{M}}(y, t)$ и оценим её норму

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathcal{M}}_t(y, t)\| &= \left\| \frac{y}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}; -B\right) B^{1/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{x^3}{8\sqrt{\pi}} \int_0^t d\xi \int_0^\xi U\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}; -B\right) B^{3/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{9/2}} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{5y}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t d\xi \int_0^\xi U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}; -B\right) B^{1/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{7/2}} \right\| \leq \\
& \leq \frac{y}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \sigma\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}\right) \frac{\lambda(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{5/2}} + \\
& + \frac{y^3 N}{8\sqrt{\pi}} \int_0^t d\xi \int_0^\xi \sigma_{3/2}\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}\right) \frac{\lambda_{3/2}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{9/2}} + \frac{5x}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t d\xi \int_0^\xi \sigma\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}\right) \frac{\lambda(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{7/2}}.
\end{aligned}$$

Откуда, заменяя переменные интегрирования: $x/2\sqrt{t-\tau} = s$, $d\tau/(t-\tau)^{5/2} = 16s^2 ds/x^3$, $d\tau/(t-\tau)^{7/2} = 64s^4 ds/x^5$, $d\tau/(t-\tau)^{9/2} = 256s^6 ds/x^7$, и оценивая подынтегральные функции, получим

$$\|\tilde{\mathcal{M}}_t(y, t)\| \leq \frac{1}{y^2 \sqrt{\pi}} \left[14\lambda_t \|\sigma\|_{1/2} + 4\lambda_{3/2,t} \|\sigma_{3/2}\|_{3/2} \right].$$



Во втором и третьем слагаемых из представления $\tilde{\mathcal{M}}_t(t, x)$ меняем порядок интегрирования и, после приведения подобных, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}_t(y, t) = & -\frac{3y}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}; -B\right) B^{1/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}} + \\ & + \frac{y^3}{8\sqrt{\pi}} \int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}; -B\right) B^{3/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{7/2}}. \end{aligned}$$

Учитывая найденное значение $\tilde{\mathcal{M}}_t(t, x)$, имеем

$$\begin{aligned} V_t(y, t) = & -\frac{1}{4\sqrt{\pi}t^{3/2}} \int_0^{+\infty} \left[U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t}; -B\right) - U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4t}; -B\right) \right] B^{1/2} \Phi(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}} \int_0^{+\infty} \left[(y-\eta)^2 U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t}; -B\right) - (y+\eta)^2 U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4t}; -B\right) \right] B^{3/2} \Phi(\eta) d\eta - \\ & + \tilde{\mathcal{M}}_t(t, x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\eta^2; -B) d\eta \int_0^{+\infty} U(s; -B) F(y, t) \frac{ds}{\sqrt{s}} - \\ & - \frac{2y}{\pi} \int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}; -B\right) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \int_0^{+\infty} U(s; -B) F(0, \tau) \frac{ds}{\sqrt{s}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^t \left[\int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} \eta U(\eta^2; -B) d\eta \int_0^{+\infty} U(s; -B) F_y(y + 2\eta\sqrt{t-\tau}, \tau) \frac{ds}{\sqrt{s}} - \right. \\ & \left. - \int_{y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} \eta U(\eta^2; -B) d\eta \int_0^{+\infty} U(s; -B) F_y(-y + 2\eta\sqrt{t-\tau}, \tau) \frac{ds}{\sqrt{s}} \right] \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (20) \end{aligned}$$

Используя неравенство $\|U(\tau; -B) F_y(y, t)\| \leq \chi_0^1(t) \gamma_0^1(\tau)$, в котором $\gamma_0^1(\tau) \in L_{1,1/2}$, оценке нормы частной производной $V_t(y, t)$ предположим оценку нормы суммы последних трех слагаемых (обозначим $\tilde{F}_t(y, t)$) в правой части формулы (20):

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}_t(y, t)\| \leq & \frac{\chi(t)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_0^{+\infty} \gamma(s + \eta^2) \frac{ds}{\sqrt{s}} + \frac{y}{2\pi} \int_0^t \frac{\chi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \int_0^{+\infty} \gamma\left(s + \frac{y^2}{4(t-\tau)}\right) \frac{ds}{\sqrt{s}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^t \left[\int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} |\eta| d\eta \int_0^{+\infty} \gamma(s + \eta^2) \frac{ds}{\sqrt{s}} + \int_{y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} \eta d\eta \int_0^{+\infty} \gamma(s + \eta^2) \frac{ds}{\sqrt{s}} \right] \frac{\chi(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \leq \end{aligned}$$



$$\leq [\chi(t) + \chi_t] \|\gamma\|_0 + \frac{2}{\pi} \|\gamma_0^1\|_{1/2} \int_0^t \chi_0^1(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

где обозначено $\chi_t = \max_{\tau \in [0, t]} \chi(\tau)$.

Теперь, используя оценки норм функций $\tilde{M}_t(y, t)$, $\tilde{F}_t(y, t)$ и ранее полученные оценки норм $V(y, t)$ и $V_{yy}(y, t)$, имеем

$$\begin{aligned} \|V_t(y, t)\| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{2t} \|\omega\|_{-1/2} + \|\omega_{3/2}\|_{1/2} + \frac{2}{y^2} \left(3\lambda_t \|\sigma\|_{1/2} + 2\lambda_{1,t} \|\sigma_{3/2}\|_{3/2} \right) \right] + \\ &+ [\chi(t) + \chi_t] \|\gamma\|_0 + \frac{2}{\pi} \|\gamma_0^1\|_{1/2} \int_0^t \chi_0^1(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \end{aligned}$$

4⁰). Сравнивая между собой результаты пунктов 2), 3), осталось заметить, что

$$\begin{aligned} BV_t(y, t) &= V_{yy}(y, t) + \frac{1}{\pi} B \int_{-\infty}^{+\infty} U(\eta^2; -B) d\eta \int_0^{+\infty} U(s; -B) F(y, t) \frac{ds}{\sqrt{s}} = \\ &= V_{yy}(y, t) + F(y, t). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5. Пример решения первой краевой задачи. Пусть в уравнении (1) оператор $B = -d/dx$ действует в банаховом пространстве $C(\bar{R}_+^1)$. Полагая, что начальная $\varphi = \varphi(x, y)$ и граничная $\mu = \mu(x, t)$ функции, свободный член $f = f(x, y, t)$ и искомое решение $v = v(x, y, t)$ для всех значений $(y, t) \in \bar{R}_+^1 \times [0, T]$ по переменной $x \in \bar{R}_+^1$ принадлежат пространству $C(\bar{R}_+^1)$, рассмотрим смешанную задачу

$$v_{xt} + v_{yy} + f(x, y, t) = 0, \quad x \in \bar{R}_+^1, \quad y \in R_+^1, \quad t \in]0, T], \quad (21)$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{R}_+^1 \times \bar{R}_+^1, \quad (22)$$

$$v|_{y=0} = \mu(x, t), \quad (x, t) \in \bar{R}_+^1 \times [0, T], \quad (23)$$

где $\varphi(x, 0) = \mu(x, 0)$, $x \in \bar{R}_+^1$.

В рассматриваемом случае для выполнения условий теоремы 3 достаточно, чтобы

1) частные производные по переменной x до третьего порядка включительно начальной $\varphi(x, y)$ и граничной $\mu(x, t)$ функций принадлежали по x пространству $C(\bar{R}_+^1)$ и

$$\sup_{y \in \bar{R}_+^1} \{ \|\varphi(x + \tau, y)\|_C, \|\varphi_x(x + \tau, y)\|_C \} \leq \omega(\tau),$$

$$\sup_{y \in \bar{R}_+^1} \{ \|\varphi_{xx}(x + \tau, y)\|_C, \|\varphi_{xxx}(x + \tau, y)\|_C \} \leq \omega_1(\tau),$$



$$\|\mu(x + \tau, t)\|_C \leq \lambda(t) \sigma(\tau), \quad \|\mu_x(x + \tau, t)\|_C \leq \lambda_1(t) \sigma_1(\tau),$$

$$\|\mu_{xx}(x + \tau, t)\|_C, \|\mu_{xxx}(x + \tau, t)\|_C \leq \lambda_2(t) \sigma_2(\tau), \tag{24}$$

где $\lambda(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ — непрерывные при $t \in [0, T]$ функции, причем $\omega(\tau)$, $\sigma(\tau) \in L_{1,-1/2}$, $\omega_1(\tau)$, $\sigma_1(\tau) \in L_{1,1/2}$, $\sigma_2(\tau) \in L_{1,3/2}$;

2) частные $f_x(x, y, t)$, $f_y(x, y, t)$ и смешанная $f_{xy}(x, y, t)$ производные свободного члена $f(x, y, t)$, принадлежали по переменной x пространству $C(\overline{R}_+^1)$ и

$$\sup_{y \in \overline{R}_+^1} \{ \|f(x + \tau, y, t)\|_C \} \leq \chi(t) \gamma(\tau),$$

$$\sup_{y \in \overline{R}_+^1} \{ \|f_x(x + \tau, y, t)\|_C, \|f_y(x + \tau, y, t)\|_C, \|f_{xy}(x + \tau, y, t)\|_C \} \leq \chi_1(t) \gamma_1(\tau), \tag{25}$$

где $\chi(t)$, $\chi_1(t)$ — непрерывные при $t \in [0, T]$ функции, причем $\gamma(\tau) \in L_{1,0}$, $\gamma_1(\tau) \in L_{1,1/2}$.

При выполнении условий (24), (35), согласно формуле (23), используя представления (5), (17) дробных степеней оператора $-d/dx$ в пространстве $C(\overline{R}_+^1)$, решение смешанной задачи (30)-(32), запишется в явном виде

$$\begin{aligned} v(x, y, t) = & \frac{1}{4\pi\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} d\eta \int_0^{+\infty} \left[\varphi\left(x + \frac{(y-\eta)^2}{4t}, \eta\right) - \varphi\left(x + s + \frac{(y-\eta)^2}{4t}, \eta\right) - \right. \\ & \left. - \varphi\left(x + \frac{(y+\eta)^2}{4t}, \eta\right) + \varphi\left(x + s + \frac{(y+\eta)^2}{4t}, \eta\right) \right] \frac{ds}{s^{3/2}} + \\ & + \frac{y}{4\pi} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \int_0^{+\infty} \left[\mu\left(x + \frac{y^2}{4(t-\tau)}, \tau\right) - \mu\left(x + s + \frac{y^2}{4(t-\tau)}, \tau\right) \right] \frac{ds}{s^{3/2}} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} d\eta \int_0^{+\infty} \left[f\left(x + s + \frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}, \eta, \tau\right) - \right. \\ & \left. - f\left(x + s + \frac{(y+\eta)^2}{4(t-\tau)}, \eta, \tau\right) \right] \frac{ds}{\sqrt{s}} \end{aligned}$$

и для него справедлива оценка

$$\sup_{(x,y) \in \overline{R}_+^1 \times \overline{R}_+^1} |v(x, y, t)| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\|\omega\|_{-1/2} + \frac{\max_{\tau \in [0,t]} \lambda(\tau)}{2} \|\sigma\|_{-1/2} + \sqrt{\pi} \|\gamma\|_0 \int_0^t \chi(\tau) d\tau \right].$$



Литература

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / М.: Наука, 1967. – 464 с.
2. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория / М.: ИЛ, 1962. – 895 с.
4. Иосида К. Функциональный анализ / М.: Мир, 1967. – 624 с.
5. Berens H., Butzer P.L., Westphal U. Representation of fractional powers of infinitesimal generators of semigroups // Bull.Amer.Math.Soc. – 1968. – 74. – P.191-196.
6. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
7. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.: Наука, 1966. – 500 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

EXPLICIT SOLUTION OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE ANALOGUE OF HEAT EQUATION IN BANACH SPACE

Kh.G. Umarov

Chechen State University,
Sheripov Str., 32, 364907, Grozny, Russia, e-mail: umarov50@mail.ru

Abstract. The explicit solution of initial-boundary value problem in the Banach space for the abstract heat equation with operator coefficient is obtained by the classical scheme using an operator-valued analogue of fundamental solution. Abstract constructions are illustrated in the space of continuous functions on non-negative half-axis when there is the limit at infinity for each of them.

Key words: strongly continuous semi-groups of operators, partial differential equations, Banach's space.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА,
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MSC 78A45

МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ
В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА СИСТЕМЕ ЗАМКНУТЫХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Ю.Н. Бахмат

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина,
пл. Свободы, 4, 308015, Харьков, Украина e-mail: bakhmat23@gmail.com

Аннотация. Построена математическая модель дифракции Н-поляризованной электромагнитной волны на системе идеально проводящих цилиндрических поверхностей (направляющие окружности или эллипсы). Построена дискретная математическая модель указанной задачи на базе метода дискретных особенностей и на ее основе исследована двумерная задача. Проведен численный эксперимент.

Ключевые слова: краевая задача, теория дифракции, граничные интегральные уравнения, метод дискретных особенностей.

Введение. Цель работы — построение дискретной математической модели дифракции Н-поляризованной электромагнитной волны на системе замкнутых цилиндрических поверхностей. Направляющие цилиндрических поверхностей — окружности или эллипсы. Для построения дискретной математической модели и для сведения краевой задачи к гипер сингулярному интегральному уравнению используется метод потенциалов. Для построения дискретной математической модели и проведения численного эксперимента применен метод дискретных особенностей. Численный эксперимент был проведен в отдельных частных случаях, где построены диаграммы направленности модуля комплексной амплитуды рассеянного поля.

1. Постановка задачи. Рассмотрение ведется в декартовой системе координат на плоскости X_1OX_2 , в которой расположены направляющие цилиндрических поверхностей — окружности или эллипсы. Обозначим

$$L = \bigcup_{q=0}^l L_q, \quad (1)$$

где L_q — направляющие цилиндрических поверхностей (круговых или эллиптических цилиндров), образующие которых параллельны OX_3 . Рассматривается пересечение плоскостью, параллельной плоскости X_1OX_2 . Параметрические уравнения направляющих цилиндрических поверхностей имеют вид:

$$\begin{cases} x_{1,q} = x_1(\varphi) + q \cdot a; \\ x_{2,q} = x_2(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad q = 0, 1, \dots, l. \end{cases} \quad (2)$$



В случае, когда направляющая окружность:

$$\begin{cases} x_{1,q} = r \cdot \cos \phi + q \cdot a; \\ x_{2,q} = r \cdot \sin \phi, \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad q = 0, 1, \dots, l. \end{cases} \quad (2.1)$$

а в случае, когда направляющая эллипс:

$$\begin{cases} x_{1,q} = r \cdot \cos \phi + q \cdot a; \\ x_{2,q} = b \cdot \sin \phi, \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad q = 0, 1, \dots, l. \end{cases} \quad (2.2)$$

Обозначим

$$\Omega = \bigcup_{q=0}^l \text{int } L_q. \quad (3)$$

Падающая плоская монохроматическая волна (зависимость от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$), комплексную амплитуду которой обозначили $u_0(\bar{x})$, и, соответственно, $u(\bar{x})$ — комплексная амплитуда рассеянного поля:

$$u_0(\bar{x}) = e^{i(\bar{\kappa}, \bar{x})}, \quad \bar{\kappa} = \kappa(\sin \alpha, -\cos \alpha), \quad \alpha = 0. \quad (4)$$

Падающее и рассеянное поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u(\bar{x}) + \kappa^2 u(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \mathbb{C}\Omega, \quad (5)$$

$\kappa^2 = \varepsilon \cdot \mu \cdot \omega^2$, где ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость среды соответственно.

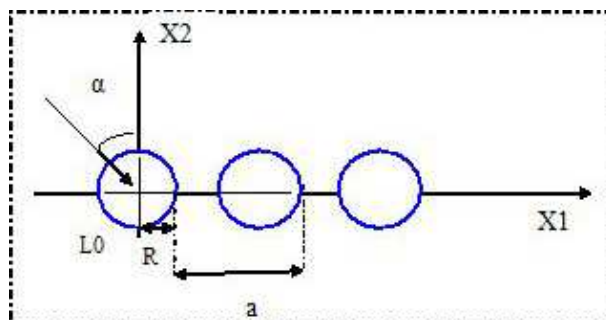


Рис. 1.

Рассматривается внешняя краевая задача, рассеянное поле удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда [1]:

$$\begin{cases} u(\bar{x}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), & r \rightarrow \infty; \\ \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial n} - i \cdot k \cdot u(\bar{x}) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), & r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (6)$$



В случае Н-поляризации, на поверхности идеально проводящих цилиндров выполняется граничное условие Неймана:

$$\frac{\partial u_0(\bar{x})}{\partial n} + \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial n} = 0, \quad \bar{x} = (x_1, x_2) \in L. \quad (7)$$

Рассеянное поле ищем в виде потенциала двойного слоя [3]:

$$u(\bar{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_L v(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} G(\bar{x}, \bar{y}) ds_x, \quad \bar{y} \in \mathbb{C}\bar{\Omega}, \quad (8)$$

где

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\kappa|\bar{x} - \bar{y}|). \quad (9)$$

Векторы электромагнитного поля представляются в виде:

$$E(\bar{x}, t) = E(\bar{x}) \cdot e^{-i\omega t}, \quad H(\bar{x}, t) = H(\bar{x}) \cdot e^{-i\omega t},$$

где

$$H(\bar{x}) = (0, 0, H_z(\bar{x})), \quad H_z = u(\bar{x}),$$

$$E(\bar{x}) = (E_x, E_y, 0), \quad E_x = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x_2}, \quad E_y = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x_1}.$$

Поставлена краевая задача во внешности Ω . Ищем $u(\bar{x})$, через которую выражаются все компоненты электромагнитного поля.

2. Дискретная математическая модель. Перейдем к граничному интегральному уравнению. Рассмотрим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n} u(\bar{y} + \varepsilon \bar{n}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{2\pi} \int_L v(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} G(\bar{x}, \bar{y} + \varepsilon \bar{n}) ds, \quad (\bar{y} + \varepsilon \bar{n}) \in \mathbb{C}\bar{\Omega},$$

где \bar{n} — нормаль к области Ω . Используя граничные условия Неймана, получили

$$-\frac{\partial}{\partial n} u_0(\bar{y}) = \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{2\pi} \int_L v(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} G(\bar{x}, \bar{y}) ds, \quad \bar{y} \in L. \quad (10)$$

Интегральное уравнение (10) содержит сингулярный интеграл с логарифмическим ядром и гиперсингулярный интеграл, который нужно понимать в смысле конечной части по Адамару [1].

Пусть заданная 2π -периодическая функция $f(\phi)$, такая что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существуют интегралы

$$\int_0^{\phi_0 - \varepsilon} \frac{f(\phi) d\phi}{2 \sin^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}}, \quad \int_{\phi_0 + \varepsilon}^{2\pi} \frac{f(\phi) d\phi}{2 \sin^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}}$$



и существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{\phi_0 - \varepsilon} \frac{f(\phi) d\phi}{2 \sin^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} + \int_{\phi_0 + \varepsilon}^{2\pi} \frac{f(\phi) d\phi}{2 \sin^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} - \frac{4f(\phi_0)}{\varepsilon} \right),$$

тогда этот предел называют интегралом в смысле конечной части по Адамару и пишут

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\phi) d\phi}{2 \sin^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{\phi_0 - \varepsilon} \frac{f(\phi) d\phi}{2 \sin^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} + \int_{\phi_0 + \varepsilon}^{2\pi} \frac{f(\phi) d\phi}{2 \sin^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} - \frac{4f(\phi_0)}{\varepsilon} \right).$$

Перейдем от криволинейного интеграла первого рода к определенному интегралу. Введем параметризацию контуров $x_q(\phi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$ таким образом, чтобы $\varphi = \frac{2\pi s}{|L_q|}$, где s – натуральный параметр, $|L_q|$ – длина контура L_q . И пусть на контуре L_{q_0} подинтегральная функция имеет указанные выше особенности. Тогда (10) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial n} u_0(\bar{y}_{q_0}(\phi)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} G(\bar{x}_{q_0}(\phi_0), \bar{y}_{q_0}(\phi_0)) \cdot v(\bar{x}_{q_0}(\phi)) d\phi + \\ &+ \sum_{q=0, q \neq q_0}^l \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} G(\bar{x}_q(\phi), \bar{y}_{q_0}(\phi_0)) \cdot v(\bar{x}_q(\phi)) d\phi. \end{aligned} \quad (11)$$

Первый интеграл имеет указанные выше особенности, выделим их:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{v(\bar{x}_{q_0}(\phi)) d\phi}{2 \cdot \sin^2 \frac{\phi_0 - \phi}{2}} - \left(\frac{\kappa \cdot |L_{q_0}|}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\phi_0 - \phi}{2} \right| \cdot v(\bar{x}_{q_0}(\phi)) d\phi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_1(\phi, \phi_0) \cdot v(\bar{x}_{q_0}(\phi)) d\phi + \\ &+ \sum_{q=0, q \neq q_0}^l \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|L_{q_0}|}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} G(\bar{x}_q(\phi), \bar{y}_{q_0}(\phi_0)) \cdot v(\bar{x}_q(\phi)) d\phi = -\frac{|L_{q_0}|}{\pi} \frac{\partial u_0(\bar{x}_{q_0}(\phi_0))}{\partial n_0}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(\phi, \phi_0) &= \pi i \left(\frac{|L_{q_0}|}{2\pi} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial n_0 \partial n} H_0^{(1)}(\kappa |\bar{x}_{q_0}(\phi_0) - \bar{x}_{q_0}(\phi)|) - \frac{1}{2 \cdot \sin^2 \frac{\phi_0 - \phi}{2}} + \\ &+ \left(\frac{\kappa \cdot |L_{q_0}|}{2\pi} \right)^2 \ln \left| \sin \frac{\phi_0 - \phi}{2} \right|, \end{aligned} \quad (13)$$



$$Q_1(\phi_0, \phi_0) = \frac{2 |\bar{x}''_{q_0}(\phi_0)| \pi^2}{3 |L_{q_0}|^2} - \frac{1}{6} + \left(\frac{\kappa \cdot |L_{q_0}|}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{3}{2} - 4c - \ln \frac{\kappa |L_{q_0}|}{2\pi} + \frac{\pi i}{2} \right). \quad (14)$$

Получено граничное интегральное уравнение, в левой части которого сумма гиперсингулярного интеграла, интеграла с логарифмической особенностью в ядре, а также интеграла с гладким ядром.

Далее в работе построена дискретная математическая модель рассматриваемой задачи. Сначала формулируется задача для приближенного решения в форме граничного интегрального уравнения — интерполяционного полинома, который нужно определить. Заменяем все гладкие функции (12) соответствующими тригонометрическими интерполяционными полиномами [2]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(P_n^{(1)}v)(\bar{x}_{q_0}(\phi))d\phi}{2 \cdot \sin^2 \frac{\phi_0 - \phi}{2}} - \left(\frac{\kappa \cdot |L_{q_0}|}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\phi_0 - \phi}{2} \right| \cdot (P_n^{(1)}v)(\bar{x}_{q_0}(\phi))d\phi + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_n^{(2)}P_n^{(1)}Q_1)(\phi, \phi_0) \cdot (P_n^{(1)}v)(\bar{x}_{q_0}(\phi) + \\ & + \sum_{q=0, q \neq q_0}^l \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|L_{q_0}|}{\pi} \left(P_n^{(2)}P_n^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} G \right) (\bar{x}_q(\phi), \bar{y}_{q_0}(\phi_0)) \cdot (P_n^{(1)}v)(\bar{x}_q(\phi))d\phi = \\ & = - \frac{|L_{q_0}|}{\pi} \left(P_n^{(2)} \frac{\partial u_0}{\partial n_0} \right) (\bar{x}_{q_0}(\phi_0)), \end{aligned} \quad (15)$$

$$(P_n^{(i)}g)(\varphi) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} g(\varphi_k^{(i,n)}) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\varphi - \varphi_k^{(i,n)})}{\sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_k^{(i,n)})}, \quad (15')$$

$$\varphi_k^{(1,n)} = \varphi_k^n = \frac{2\pi k}{2n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n,$$

$$\varphi_j^{(2,n)} = \varphi_{0j}^n = \frac{2j+1}{2n+1}\pi, \quad j = 0, 1, \dots, 2n.$$

Воспользовавшись интерполяционными квадратурными формулами [2], узлами которых являются указанные выше наборы точек, а в качестве точек коллокации взяли второй набор точек, получили систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} v(\bar{x}_{q_0}(\phi_k^n)) \left(\frac{\sin^2 \frac{n}{2}(\phi_{0j}^n - \phi_k^n)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\phi_{0j}^n - \phi_k^n)} - \frac{n \cdot \sin(n + \frac{1}{2})(\phi_{0j}^n - \phi_k^n)}{\sin \frac{1}{2}(\phi_{0j}^n - \phi_k^n)} \right) + \\ & + \left(\frac{\kappa |L_{q_0}|}{2\pi} \right)^2 \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} v(\bar{x}_{q_0}(\phi_k^n)) \left(\ln 2 + \sum_{p=1}^n \frac{\cos p(\phi_{0j}^n - \phi_k^n)}{p} \right) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} v(\bar{x}_{q_0}(\phi_k^n)) \cdot Q_1(\bar{x}_{q_0}(\phi_k^n), \bar{x}_{q_0}(\phi_{0j}^n)) + \\
& + \sum_{q=0, q \neq q_0}^l \frac{|L_{q_0}|}{\pi} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} v(\bar{x}_q(\phi_k^n)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial n_0 \partial n} G(\bar{x}_q(\phi_k^n), \bar{x}_{q_0}(\phi_{0j}^n)) = \\
& = -\frac{L_{q_0}}{\pi} \frac{\partial}{\partial n} u_0(\bar{x}_{q_0}(\phi_{0j}^n)), \quad j = 0, 1, \dots, 2n, \quad q_0 = 0, 1, \dots, l. \quad (16)
\end{aligned}$$

3. Комплексная амплитуда рассеянного поля. Рассеянное поле представлено в виде потенциала (4). Перейдем от криволинейного интеграла первого рода к определенному интегралу. Тогда (4) перепишем:

$$u(\bar{y}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q=0}^l \int_0^{2\pi} Q_{1q}(\phi, \bar{y}) \cdot v(\bar{x}_q(\phi)) d\phi, \quad \bar{y} \in \mathbb{C}\bar{\Omega}, \quad (17)$$

где

$$Q_{1q}(\phi, \bar{y}) = -\frac{\pi \cdot i}{2} H_1^{(1)}(\kappa |\bar{x}_q(\phi) - \bar{y}|), \quad q = 0, 1, \dots, l.$$

Заменяя все гладкие функции тригонометрическими интерполяционными полиномами [2], используя соответственные квадратурные формулы, окончательно имеем:

$$u(\bar{y}) = \frac{1}{2n+1} \sum_{q=0}^l \sum_{k=0}^{2n} Q_{1q}(\bar{x}_q(\phi_k^n), \bar{y}) \cdot v(\bar{x}_q(\phi_k^n)), \quad \bar{y} \in \mathbb{C}\bar{\Omega}, \quad (18)$$

где значения $v(\bar{x}_q(\phi_k^n))$ — решения системы (16), а $|u(\bar{y})|$ — амплитуда рассеянного поля.

4. Диаграмма направленности рассеянного поля в случае трех круговых цилиндров. Рассеянное поле представлено в виде потенциала (4). Рассмотрим случай, когда направляющие цилиндров — окружности радиуса R , центры которых лежат на оси абсцисс, и расстояние между центрами окружностей равно a , цилиндры не пересекаются. Тогда параметризацию контуров запишем следующим образом:

$$\begin{cases} x_{1,q} = R \cdot \cos \phi + q \cdot a; \\ x_{2,q} = R \cdot \sin \phi, \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad q = 0, 1, 2; \end{cases} \quad (19)$$

и пусть

$$\begin{cases} y_1 = r \cdot \cos \phi_0; \\ y_2 = r \cdot \sin \phi_0, \quad \phi \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Так как $\bar{y} \in \mathbb{C}\bar{\Omega}$, то предположим, что $r \gg R$. Рассмотрим

$$|\bar{x}_q - \bar{y}|^2 = R^2 + r^2 - 2rR \cdot \cos(\phi - \phi_0) + 2aq \cdot (R \cdot \cos \phi - r \cdot \cos \phi_0), \quad (20)$$



$$\frac{\partial}{\partial n_x} G(\bar{x}, \bar{y}) = \kappa \frac{\pi i}{2} \cdot H_1^{(1)}(\kappa|\bar{x} - \bar{y}|) \frac{(\bar{n}_x, \bar{y} - \bar{x})}{|\bar{x} - \bar{y}|}. \quad (21)$$

Теперь перейдем к определенным интегралам в (4) и обозначим $u(\bar{y}) = U(r, \phi_0)$, имеем

$$U(r, \phi_0) = \sum_{q=0}^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa \frac{\pi i}{2} H_1^{(1)}(\kappa|\bar{x}_q(\phi) - \bar{y}(\phi_0)|) \frac{(\bar{n}_x, \bar{y}(\phi_0) - \bar{x}_q(\phi))}{|\bar{x}_q(\phi) - \bar{y}(\phi_0)|} R \cdot v(\bar{x}_q(\phi)) d\phi. \quad (22)$$

При этом асимптотическое поведение функции Ханкеля первого рода на бесконечности [5]:

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}, \quad z \rightarrow +\infty. \quad (23)$$

Диаграмма направленности рассеянного поля определяется формулой [1]:

$$D_H(\phi_0) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{U(r, \phi_0)}{\sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i(\kappa r - \frac{\pi}{4})}}. \quad (24)$$

Таким образом, найдя предел (24), получили диаграмму направленности комплексной амплитуды рассеянного поля:

$$D_H(\phi_0) = \frac{i\pi R}{4\pi\sqrt{\kappa}} \sum_{q=0}^2 \int_0^{2\pi} \left(-\kappa \cdot i \cdot e^{-i\kappa(R \cdot \cos(\phi - \phi_0) + 2aq \cdot \cos \phi_0)} \cos(\phi - \phi_0) \right) v(\bar{x}_q(\phi)) d\phi. \quad (25)$$

Обозначим

$$g_q(\phi, \phi_0) = -\kappa \cdot i \cdot e^{-i\kappa(R \cdot \cos(\phi - \phi_0) + 2aq \cdot \cos \phi_0)} \cos(\phi - \phi_0). \quad (26)$$

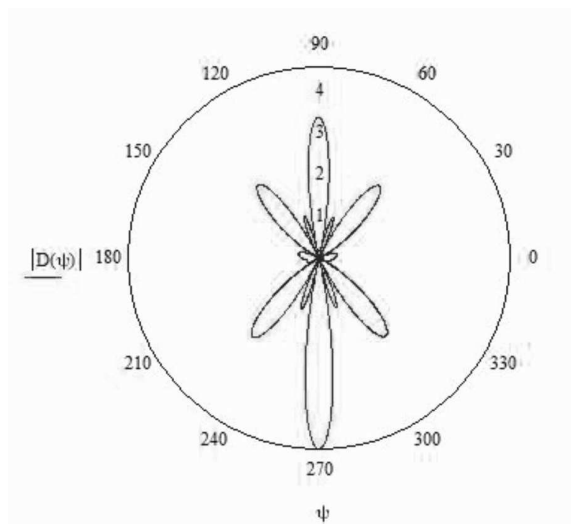
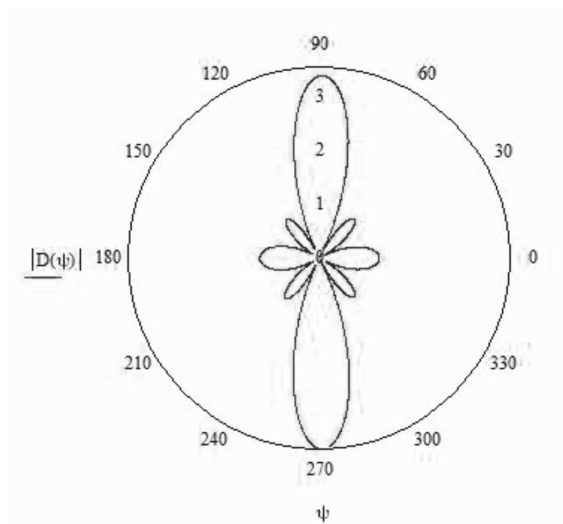
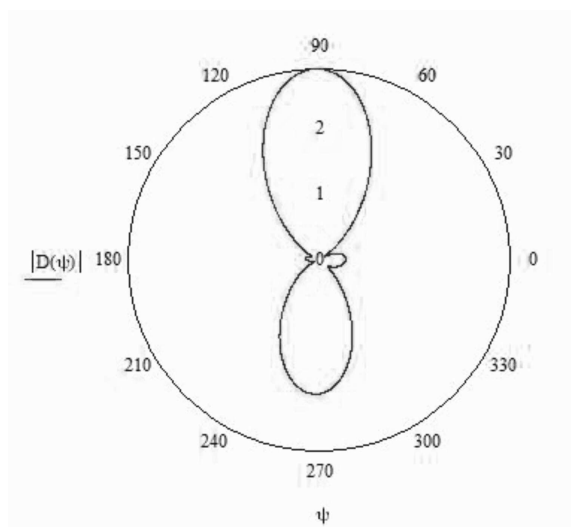
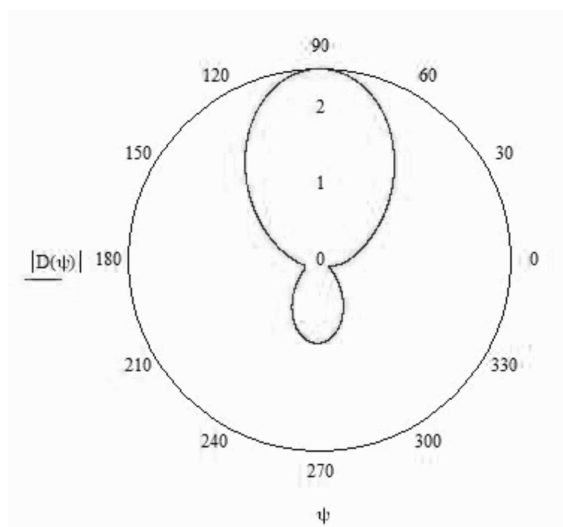
Заменяя функции $g_q(\phi, \phi_0)$ и $v(\bar{x}_q(\phi))$ соответствующими интерполяционными тригонометрическими полиномами (15') и используя соответственную квадратурную формулу [2], мы получим

$$D_H(\phi_0) = \frac{i\pi R}{4\pi\sqrt{\kappa}} \sum_{q=0}^2 \sum_{k=0}^{2n} g_q(\phi_k^n, \phi_0) v(\bar{x}_q(\phi_k^n)). \quad (27)$$

Был проведен численный эксперимент по дискретной математической модели и построены диаграммы направленности.

Выводы. Таким образом, в работе приведена математическая модель задачи дифракции электромагнитных волн на системе цилиндрических поверхностей на базе граничных интегральных уравнений соответственной краевой задачи для стационарного волнового уравнения. Построена дискретная математическая модель рассматриваемой задачи с использованием метода дискретных особенностей. Приведены результаты численного эксперимента и построены диаграммы направленности для модуля комплексной амплитуды рассеянного поля в дальней зоне в отдельных случаях.

Результаты численного эксперимента.

Рис. 2. Диаграмма направленности, $R=1$,
 $a=3$, $\kappa = \pi$, $\alpha = 0$.Рис. 3. Диаграмма направленности, $R=1$,
 $a=3$, $\kappa = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = 0$.Рис. 4. Диаграмма направленности, $R=1$,
 $a=3$, $\kappa = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = 0$.Рис. 5. Диаграмма направленности, $R=1$,
 $a=3$, $\kappa = \frac{\pi}{6}$, $\alpha = 0$.

Литература

1. Бахмат Ю.М. Дискретна математична модель задачі дифракції на системі замкнених циліндричних поверхонь (випадок Е-поляризації) // Вестник Херсонського національного технічного університету. – 2013. – Вып.2 (47). – С.47-50.
2. Gandel' Yu.V. Boundary-Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – 171, №1. – Springer Science+Business Media, Inc. – P.74-88.
3. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.М. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн / Учебное пособие. Часть 2 / Харьков: ХГУ, 1992. – 145 с.



4. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / Учебное пособие / Харьков: ХНУ, 2002. – 92 с.
5. Гандель Ю.В., Душкин В.Д. Математические модели двумерных задач дифракции: Сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей / Х.: АВВ МВСУ, 2012. – 544 с.
6. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
7. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / Киев: Наук.думка, 1984. – 344 с.
8. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган / М.: Наука, 1979. – 832 с.

METHOD OF DISCRETE SINGULARITIES IN DIFFRACTION PROBLEMS OF CLOSED CYLINDRICAL SURFACES

Yu.N. Bakhmat

Karazin Kharkiv National University,
Svobody Sq. 4, Khavkiv, 61022, Ukraine, e-mail: bakhmat23@gmail.com

Abstract. In frameworks of the mathematical model of diffraction the boundary value problem of the scattering of H-polarized electromagnetic waves on the system of closed ideally conducting cylindrical surfaces (guides — circles or ellipses) is studied. The discrete mathematical model based on discrete singularities has been built for diffraction problems pointed out. The two-dimensional problem is investigated using the numerical experiment.

Key words: boundary-value problems, diffraction theory, boundary integral equations, method of discrete singularities.



MSC 78A40

КОГЕРЕНТНОЕ РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА ПЕРЕСЕКАЮЩЕГО МИШЕНЬ ИЗ АМОРФНОЙ И КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛАСТИН

С.В. Блажевич, Р.А. Загороднюк, А.В. Носков, О.Н. Сатлер

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: noskov_a@bsu.edu.ru

Аннотация. В рамках динамической теории дифракции построена теория когерентного рентгеновского излучения релятивистского электрона, пересекающего комбинированную среду, состоящую из аморфной и кристаллической пластин. В теории учитывается асимметрия отражения поля относительно поверхности мишени, определяемая углом между атомными плоскостями и поверхностью мишени. Получены и исследованы выражения, описывающие спектрально угловую плотность параметрического рентгеновского и дифрагированного переходного излучений в этой среде.

Ключевые слова: релятивистский электрон, динамическая дифракция, дифрагированное переходное излучение.

Введение. Процесс когерентного рентгеновского излучения релятивистского электрона всегда рассматривался отдельно в кристалле и аморфной среде. При этом в аморфной среде при пересечении ее равномерно движущимся релятивистским электроном возникает только переходное излучение [1], генерируемое вблизи направлении скорости электрона. Когда же быстрая заряженная частица пересекает монокристалл, ее кулоновское поле рассеивается на системе параллельных атомных плоскостей кристалла, порождая параметрическое рентгеновское излучения (ПРИ) [2-4]. При пересечении заряженной частицей поверхности кристаллической пластинки возникает переходное излучение (ПИ), которое затем дифрагируется на системе параллельных атомных плоскостей кристалла, образуя дифрагированное переходное излучение (ДПИ) [5], фотоны которого вместе с фотонами ПРИ движутся в направлении рассеяния Брэгга. В настоящее время существуют два подхода для описания процесса ПРИ: кинематический [6,7] и динамический [3,4,8]. Следует отметить, что дифрагированное переходное излучения само является динамическим эффектом, а именно эффектом динамической дифракции. Отметим, что кинематический подход учитывает взаимодействия каждого атома только с первичной, или преломленной волной в кристалле. В этом подходе, в отличие от динамического, пренебрегают взаимодействием атома с тем волновым полем, которое создается в кристалле совокупным рассеянием на всех других атомах, то есть не учитывается многоволновое рассеяние, в частности, взаимодействие элементарных волн с преломленной, а также отражения волн между атомными плоскостями. Процесс когерентного рентгеновского излучения релятивистских электронов в кристалле в рамках динамической теории дифракции рентгеновских волн развит в работах [9-14].

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (проектная часть государственного задания №3.500.2014/К в сфере научной деятельности).



Необходимо отметить, что в работах [9-11] рассматривается когерентное рентгеновское излучение в частном случае симметричного отражения, когда отражающая система атомных плоскостей кристалла расположена параллельно поверхности мишени в случае геометрии рассеяния Брэгга и перпендикулярно в случае геометрии рассеяния Лауэ. В работах [12-14] развита динамическая теория когерентного рентгеновского излучения релятивистских электронов в кристалле в общем случае асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени, когда система параллельных отражающих слоев мишени может располагаться под произвольным углом к поверхности мишени.

В настоящей работе впервые рассматривается процесс когерентного излучения релятивистского электрона, пересекающего комбинированную среду, состоящую из аморфной и кристаллической пластин.

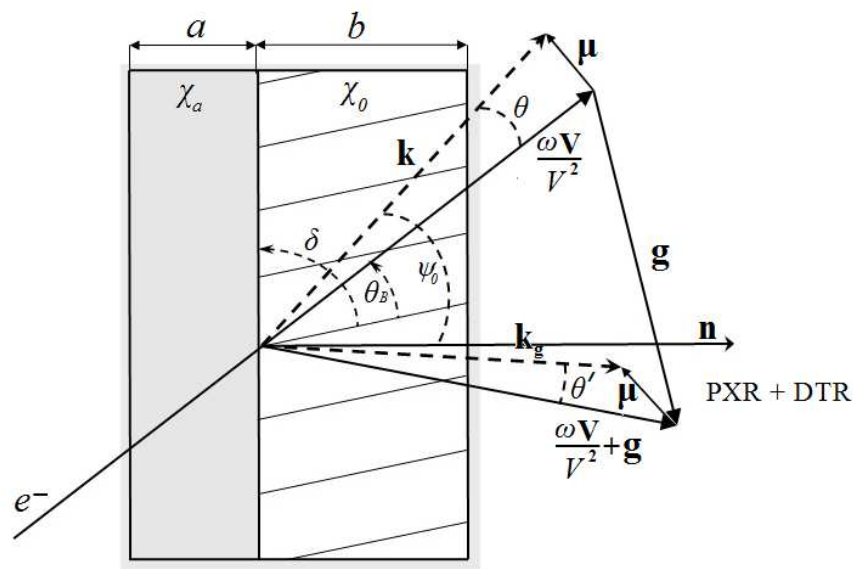


Рис. 1. Геометрия процесса излучения и система обозначений используемых величин; θ и θ' – углы излучения, θ_B – угол Брэгга (угол между скоростью электрона V и атомными плоскостями), δ – угол между поверхностью и рассматриваемыми атомными плоскостями кристалла, \mathbf{k} и \mathbf{k}_g – волновые вектора подающего и дифрагированного фотона.

1. Амплитуда излучения. Рассмотрим релятивистский электрон, пересекающий со скоростью V комбинированную структуру, состоящую из аморфной и кристаллической пластин рис. 1 с толщинами соответственно a и b . При пересечении релятивистским электроном первой (вакуум-аморфная среда) и второй (аморфная среда-кристалл) границы мишени возникает переходное излучение, которое далее дифрагирует в кристаллической пластине на системе параллельных атомных плоскостей в направлении рассеяния Брэгга (в направлении волнового вектора $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$ (см. рис. 1)), порождая дифрагированное переходное излучение, выходящее через третью границу кристалл-вакуум вместе с параметрическим рентгеновским излучением, возникающим в кри-



сталлической пластинке. В зависимости от параметров аморфного слоя и угла падения электрона на мишень возможна конструктивная или деструктивная интерференция волн ПИ, возбужденных на первых двух границах, дающих вклад в выход ДПИ. Распространение рентгеновских волн в кристаллической среде будем рассматривать в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции.

Рассмотрим Фурье-образ электрического поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}) dt d^3\mathbf{r} \quad (1)$$

найдем его из уравнения Максвелла

$$(k^2 - \omega^2(1 + \chi_0))\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)) - \omega^2 \sum_{\mathbf{g}}' \chi_{-\mathbf{g}} \mathbf{E}(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega) = 4\pi i \omega \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) \quad (2)$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi e \mathbf{V} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V})$ – плотность тока электрона.

Так как возбуждаемое электромагнитное поле является практически поперечным в рентгеновском диапазоне частот, то падающая $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ и дифрагированная $\mathbf{E}(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega)$ в кристалле электромагнитные волны, определяются двумя амплитудами с разными значениями поперечной поляризации

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) &= E_0^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{e}_0^{(1)} + E_0^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{e}_0^{(2)}, \\ \mathbf{E}(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega) &= E_g^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{e}_1^{(1)} + E_g^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{e}_1^{(2)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где вектора $\mathbf{e}_0^{(1)}$ и $\mathbf{e}_0^{(2)}$ перпендикулярны вектору \mathbf{k} , а векторы $\mathbf{e}_1^{(1)}$ и $\mathbf{e}_1^{(2)}$ перпендикулярны вектору $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$. Векторы $\mathbf{e}_0^{(2)}$, $\mathbf{e}_1^{(2)}$, лежат в плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_g (π -поляризация), а вектора $\mathbf{e}_0^{(1)}$ и $\mathbf{e}_1^{(1)}$ перпендикулярны ей (δ -поляризация); \mathbf{g} – вектор обратной решетки, определяющий систему отражающих атомных плоскостей кристалла. В рамках двух волнового приближения динамической теории дифракции уравнение (2) сводится к хорошо известной системе уравнений [15]:

$$\begin{cases} (\omega^2(1 + \chi_0) - k^2)E_0^{(s)} + \omega^2 \chi_{-\mathbf{g}} C^{(s)} E_g^s = 8\pi^2 i e \omega \theta V P^{(s)} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}), \\ \omega^2 \chi_{\mathbf{g}} C^{(s)} E_0^{(s)} + (\omega^2(1 + \chi_0) - k_g^2)E_g^{(s)} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $\chi_{\mathbf{g}}$, $\chi_{-\mathbf{g}}$ – коэффициенты Фурье разложения диэлектрической восприимчивости кристалла по векторам обратной решетки \mathbf{g} ,

$$\chi(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} (\chi'_{\mathbf{g}}(\omega) + i\chi''_{\mathbf{g}}(\omega)) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}). \quad (5)$$

Величины $C^{(s)}$ и $P^{(s)}$ в системе (4) определены следующим образом:

$$\begin{aligned} {}^{(s)} &= \mathbf{e}_0^{(s)} \mathbf{e}_1^{(s)}, & C^{(1)} &= 1, & C^{(2)} &= \cos 2\theta_B, \\ P^{(s)} &= \mathbf{e}_0^{(s)} (\boldsymbol{\mu}/\mu), & P^{(1)} &= \sin \varphi, & P^{(2)} &= \cos \varphi', \end{aligned} \quad (6)$$



где $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{k} - \omega \mathbf{V}/V^2$ – составляющая импульса виртуального фотона, перпендикулярная скорости частицы \mathbf{V} ($\mu = \omega\theta/V$, где $\theta \ll 1$ – угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{V}), θ_B – угол Брэгга, φ – азимутальный угол излучение, отсчитывается от плоскости, образованной векторами скорости \mathbf{V} и вектором обратной решетки \mathbf{g} в кристалле. Длину вектора \mathbf{g} можно выразить через угол Брэгга и частоту Брэгга $\omega_B : g = 2\omega_B \sin \theta_B/V$. Угол между вектором $\omega \mathbf{V}/V^2$ и волновым вектором падающей волны \mathbf{k} обозначен θ , а угол между вектором $\omega \mathbf{V}/V^2 + \mathbf{g}$ и волновым вектором дифрагированной волны \mathbf{k}_g обозначен θ' . Система уравнений (4) при параметре $s = 1$ описывает поля σ – поляризованные, а при $s = 2$, π – поляризованные.

Решим следующее из системы (4) дисперсионное уравнения

$$(\omega^2(1 + \chi_0) - k^2)(\omega^2(1 + \chi_0) - k_g^2) - \omega^4 \chi_{-g} \chi_g C^{(s)^2} = 0, \quad (7)$$

стандартными методами динамической теории дифракции рентгеновских волн в кристаллах [16]. Будем искать длины волновых векторов k и k_g фотонов в кристалле в виде

$$k = \omega \sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_0, \quad (8)$$

$$k_g = \omega \sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_g, \quad (9)$$

Так как в области рентгеновских частот диэлектрические восприимчивости рассматриваемых сред малы ($|\chi_a| \ll 1$, $|\chi_0| \ll 1$), то их удобно рассматривать в виде

$$k = \omega \left(1 + \frac{\chi_0}{2}\right) + \lambda_0, \quad (10)$$

$$k_g = \omega \left(1 + \frac{\chi_0}{2}\right) + \lambda_g. \quad (11)$$

Динамические добавки λ_0 и λ_g для рентгеновских волн связаны соотношением (23)

$$\lambda_g = \frac{\omega\beta}{2} + \lambda_0 \frac{\gamma_g}{\gamma_0}. \quad (12)$$

Так как динамические добавки малы $|\lambda_0| \ll \omega$, $|\lambda_g| \ll \omega$, то можно пренебречь квадратичными по λ_0 и λ_g членами при подставке (10) и (11) в (7), при этом получим по два решения для падающей и дифрагированной волн

$$\lambda_g^{(1,2)} = \frac{\omega}{4} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\chi_g \chi_{-g} C^{(s)^2} \frac{\gamma_g}{\gamma_0}} \right), \quad (13)$$

$$\lambda_0^{(1,2)} = \omega \frac{\gamma_0}{4\gamma_g} \left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\chi_g \chi_{-g} C^{(s)^2} \frac{\gamma_g}{\gamma_0}} \right), \quad (14)$$

где $\beta = \alpha - \chi_0(1 - \gamma_g/\gamma_0)$, $\alpha = (k_g^2 - k^2)/\omega^2$, $\gamma_0 = \cos \psi_0$, $\gamma_g = \cos \psi_g$, ψ_0 – угол между волновым вектором падающей волны \mathbf{g} и вектором нормали к поверхности пластинки \mathbf{n} , ψ_g – угол между волновым вектором \mathbf{k}_g и вектором \mathbf{n} (см. рис. 1). Так как динамические добавки малы, то можно показать, что $\theta \approx \theta'$ (см. рис. 1), и поэтому в дальнейшем угол



θ' будем обозначать как θ . Для дальнейшего решения задачи длину волнового вектора свободных фотонов в аморфной среде

$$k_a = \omega \sqrt{1 + \chi_a} \quad (15)$$

удобно представить в следующем виде

$$k_a = \omega \left(1 + \frac{\chi_0}{2} \right) + \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \left(\lambda'_g - \frac{\omega\beta}{2} \right), \quad (16)$$

где

$$\lambda'_g = \lambda_g^* - \frac{\gamma_g}{\gamma_0} \omega \left(\frac{\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi_a}{2} \right), \quad \lambda_g^* = \frac{\omega\beta}{2} + \frac{\gamma_g}{\gamma_0} \lambda_0^*, \quad \lambda_0^* = \omega \left(\frac{\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi_0}{2} \right), \quad (17)$$

а свободного излученного фотона в направлении рассеяния Брэгга в виде

$$k_0 = \omega \left(1 + \frac{\chi_0}{2} \right) + \lambda_g'', \quad (18)$$

где $\lambda_g'' = -\omega\chi_0/2$. Используя введенные обозначения и систему уравнений (4), запишем выражения для полей. В вакууме впереди мишени поле состоит из псевдофотонов падающего на мишень кулоновского поля релятивистского электрона

$$E_0^{(s)vacI} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \left[\frac{\gamma_0}{\gamma_g} \left(\beta \frac{\gamma_0}{\gamma_g} - \chi_0 - \frac{2}{\omega} \cdot \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \lambda_g \right) \right]^{-1} \delta(\lambda_g - \lambda_g^*). \quad (19)$$

В аморфной среде поле состоит из кулоновского поля электрона и поля излученных свободных фотонов $E_a^{(s)}$

$$E_0^{(s)sr} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \left[\frac{\gamma_0}{\gamma_g} \left(\beta \frac{\gamma_0}{\gamma_g} + \chi_a - \chi_0 - \frac{2}{\omega} \cdot \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \lambda_g \right) \right]^{-1} \delta(\lambda_g - \lambda_g^*) + E_a^{(s)} \delta(\lambda_g - \lambda'_g). \quad (20)$$

В кристалле для падающей и дифрагированной волны поле состоит из кулоновского поля релятивистского электрона и полей двух свободных распространяющихся в кристалле рентгеновских волн

$$E_0^{(s)cr} = -\frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \cdot \frac{\omega^2 \beta + 2\omega \frac{\gamma_g}{\gamma_0} \lambda_0}{4 \frac{\gamma_g}{\gamma_0} (\lambda_0 - \lambda_0^{(1)}) (\lambda_0 - \lambda_0^{(2)})} \delta(\lambda_0 - \lambda_0^*) + \\ + E_0^{(s)(1)} \delta(\lambda_0 - \lambda_0^{(1)}) + E_0^{(s)(2)} \delta(\lambda_0 - \lambda_0^{(2)}), \quad (21)$$

$$E_g^{(s)cr} = -\frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \cdot \frac{\omega^2 \chi_g C^{(s)}}{4 \frac{\gamma_0^2}{\gamma_g^2} (\lambda_g - \lambda_g^{(1)}) (\lambda_g - \lambda_g^{(2)})} \delta(\lambda_g - \lambda_g^*) + \\ + E_g^{(s)(1)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^{(1)}) + E_g^{(s)(2)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^{(2)}). \quad (22)$$



Необходимо отметить, что падающее и дифрагированное поле в кристалле связано следующим из второго уравнения системы (4) соотношением:

$$E_0^{(s)cr} = \frac{2\omega\lambda_g}{\omega^2\chi_g C^{(s)}} E_g^{(s)cr}. \quad (23)$$

Излученное поле в вакууме за мишенью в направлении рассеяния Брэгга будет иметь следующий вид:

$$E_g^{(s)vacII} = E_g^{(s)Rad} \delta(\lambda_g - \lambda_g''). \quad (24)$$

Для определения амплитуды поля излучения $E_g^{(s)Rad}$ воспользуемся граничными условиями на трех границах рассматриваемой комбинированной мишени

$$\begin{aligned} \int E_0^{(s)vacI} d\lambda_g &= \int E_0^{(s)sr} \delta\lambda_g, \\ \int E_0^{(s)sr} e^{i\frac{\lambda_g}{\gamma_g} a} d\lambda_g &= \int E_0^{(s)cr} e^{i\frac{\lambda_g}{\gamma_g} a} d\lambda_g, \\ \int E_g^{(s)cr} e^{i\frac{\lambda_g}{\gamma_g} a} d\lambda_g &= 0, \\ \int E_g^{(s)cr} e^{i\frac{\lambda_g}{\gamma_g} (a+b)} d\lambda_g &= \int E_g^{(s)vacII} e^{i\frac{\lambda_g}{\gamma_g} (a+b)} d\lambda_g, \end{aligned} \quad (25)$$

для поля излучения получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} E_g^{(s)Rad} &= \frac{8\pi^2 i e V \theta P^{(s)}}{\omega} \cdot \frac{\omega^2 \chi_g C^{(s)}}{2\omega \frac{\gamma_0}{\gamma_g} (\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^{(2)})} \exp \left[i \left(\frac{\omega \chi_0}{2} (a+b) + \lambda_g^* b \right) / \gamma_g \right] \times \\ &\times \left[\left(\frac{1}{\chi_o - \theta^2 - \gamma^{-2}} + \frac{\omega}{2\frac{\gamma_0}{\gamma_g} (\gamma_g^* - \gamma_g^{(1)})} \right) e^{i\frac{\lambda_g^*}{\gamma_g} a} \left(e^{i\frac{\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^*}{\gamma_g} b} - 1 \right) - \right. \\ &- \left(\frac{1}{\chi_o - \theta^2 - \gamma^{-2}} + \frac{\omega}{2\frac{\gamma_0}{\gamma_g} (\gamma_g^* - \gamma_g^{(2)})} \right) e^{i\frac{\lambda_g^*}{\gamma_g} a} \left(e^{i\frac{\lambda_g^{(2)} - \lambda_g^*}{\gamma_g} b} - 1 \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{\chi_a - \theta^2 - \gamma^{-2}} - \frac{1}{\chi_o - \theta^2 - \gamma^{-2}} \right) e^{i\frac{\lambda_g^*}{\gamma_g} a} \left(e^{i\frac{\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^*}{\gamma_g} b} - e^{i\frac{\lambda_g^{(2)} - \lambda_g^*}{\gamma_g} b} \right) + \\ &\left. + \left(\frac{1}{\theta + \gamma^{-2} - \chi_a} - \frac{1}{\theta + \gamma^{-2}} \right) e^{i\frac{\lambda_g^*}{\gamma_g} a} \left(e^{i\frac{\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^*}{\gamma_g} b} - e^{i\frac{\lambda_g^{(2)} - \lambda_g^*}{\gamma_g} b} \right) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как в настоящей работе рассмотрение процесса излучения релятивистского электрона в комбинированной среде, состоящей из аморфной и кристаллической пластин, ограничено прямолинейным движением электрона, то два механизма излучения вносят вклад в суммарный выход излучения: DTR и PXR. Выделим из общей амплитуды когерентного излучения (26) амплитуды двух различных механизмов излучения, записав их в виде двух слагаемых:

$$E_g^{(s)Rad} = E_{PXR}^{(s)} + E_{DTR}^{(s)}, \quad (27)$$



$$E_{PXR}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \cdot \frac{\omega^2 \chi_{\mathbf{g}} C^{(s)}}{2\omega \frac{\gamma_0}{\gamma_{\mathbf{g}}} (\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^{(2)})} \exp \left[i \left(\frac{\omega \chi_o}{2} + \lambda_g^* \right) \frac{a+b}{\gamma_g} \right] \times$$

$$\times \left[\left(\frac{1}{\chi_0 - \theta^2 - \gamma^{-2}} + \frac{\omega}{2 \frac{\gamma_0}{\gamma_{\mathbf{g}}} (\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)})} \right) \left(e^{i \frac{\lambda_{\mathbf{g}}^{(1)} - \lambda_{\mathbf{g}}^* b}{\gamma_{\mathbf{g}}}} - 1 \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{\chi_0 - \theta^2 - \gamma^{-2}} + \frac{\omega}{2 \frac{\gamma_0}{\gamma_{\mathbf{g}}} (\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)})} \right) \left(e^{i \frac{\lambda_{\mathbf{g}}^{(2)} - \lambda_{\mathbf{g}}^* b}{\gamma_{\mathbf{g}}}} - 1 \right) \right], \quad (28)$$

$$E_{DTR}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \cdot \frac{\omega^2 \chi_{\mathbf{g}} C^{(s)} \left(e^{i \frac{\lambda_{\mathbf{g}}^{(1)} - \lambda_{\mathbf{g}}^* b}{\gamma_{\mathbf{g}}}} - e^{i \frac{\lambda_{\mathbf{g}}^{(2)} - \lambda_{\mathbf{g}}^* b}{\gamma_{\mathbf{g}}}} \right)}{2\omega \frac{\gamma_0}{\gamma_{\mathbf{g}}} (\lambda_{\mathbf{g}}^{(1)} - \lambda_{\mathbf{g}}^{(2)})} e^{i \left(\frac{\omega \chi_o}{2} + \lambda_{\mathbf{g}}^* \right) \frac{a+b}{\gamma_{\mathbf{g}}}} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_a} - \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2}} \right) e^{-i \frac{\omega a}{2\gamma_0} (\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_a)} + \left(\frac{1}{\chi_a - \theta^2 - \gamma^{-2}} - \frac{1}{\chi_0 - \theta^2 - \gamma^{-2}} \right) \right]. \quad (29)$$

Выражение (28) представляет амплитуду поля PXR релятивистского электрона в комбинированной среде, которое возникает при пересечении электроном кристаллической пластины, расположенной за аморфной средой. Слагаемые в квадратных скобках соответствуют двум рентгеновским волнам, возбуждаемым в кристаллической среде в направлении рассеяния Брэгга.

Выражение (29) описывает амплитуду дифрагированного переходного излучения в комбинированной структуре, которое включает в себя переходное излучение, возникающее на первой и второй границе, далее дифрагированное на системе параллельных атомных плоскостей кристаллической пластинки. Первое слагаемое в квадратных скобках выражения (29) относится к переходному излучению, возникающему при пересечении релятивистским электроном границы между вакуумом и аморфной средой, а второе относится к переходному излучению, возбуждаемому на второй границе (между аморфной средой и кристаллом). Так как выражения для амплитуд процессов излучения PXR и DTR получены из общей амплитуды когерентного излучения, то они позволяют исследовать влияние интерференции PXR и DTR на результирующее излучение их мишени, а также влияние интерференции переходных излучений от разных границ комбинированной среды на DTR.

Для дальнейшего анализа излучения, динамические добавки (13) представим в следующем виде:

$$\lambda_g^{(1,2)} = \frac{\omega |\chi'_{\mathbf{g}}| C^{(s)}}{2} \left(\xi^{(s)} - \frac{i\rho^{(s)}(1-\varepsilon)}{2} \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon - 2i\rho^{(s)} \left(\frac{(1-\varepsilon)}{2} \xi^{(s)} + \kappa^{(s)} \varepsilon \right) - \rho^{(s)2} \left(\frac{(1-\varepsilon)^2}{4} + \kappa^{(s)2} \varepsilon \right)} \right), \quad (30)$$



где

$$\xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1 - \varepsilon}{2\nu^{(s)}}, \quad \eta^{(s)}(\omega) = \frac{2 \sin^2 \theta_B}{V^2 |\chi'_g| C^{(s)}} \left(1 - \frac{\omega(1 - \theta \cos \varphi \cot \theta_B)}{\omega_B} \right) \quad (31)$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma_{\mathbf{g}}}{\gamma_0} = \frac{\cos \psi_{\mathbf{g}}}{\cos \psi_0}, \quad \rho^{(s)} = \frac{\chi''_0}{|\chi'_g| C^{(s)}}, \quad \kappa^{(s)} = \frac{\chi''_{\mathbf{g}} C^{(s)}}{\chi''_0}.$$

Так как в области рентгеновских частот выполняется неравенство $2 \sin^2 \theta_B / V^2 |\chi'_g| C^{(s)} \gg 1$, то $\eta^{(s)}(\omega)$ является быстрой функцией от частоты, и поэтому для дальнейшего анализа спектров PXR и DTR очень удобно рассматривать $\eta^{(s)}(\omega)$ как спектральную переменную, характеризующую частоту ω .

Важным параметром в выражении (30) является параметр ε , который представим в виде

$$\varepsilon = \frac{\sin(\delta + \theta_B)}{\sin(\delta - \theta_B)} \quad (32)$$

и определяет степень асимметрии отражения поля в кристалле относительно поверхности мишени. Здесь θ_B – угол между скоростью электрона и системой параллельных атомных плоскостей кристалла, δ – угол между поверхностью мишени и отражающими плоскостями. Необходимо отметить, что угол падения электрона на поверхность мишени $\delta - \theta_B$ увеличивается при уменьшении параметра ε . Отметим, что в симметричном случае волновые векторы падающих и дифрагированных фотонов составляют с поверхностью пластинки равные углы, а в случае асимметричного отражения неравные. При этом в симметричном случае $\varepsilon = 1$ и $\delta = \pi/2$, а в асимметричном $\varepsilon \neq 1$ и $\delta \neq \pi/2$.

Подставляя выражения (30) в (28) и (29), представим выражения амплитуд полей PXR и DTR в следующем виде:

$$E_{PXR}^{(s)} = \frac{4\pi^2 i e V}{\omega} \frac{\theta P^{(s)}}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_0} \times$$

$$\times \left(\frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon} - i\varepsilon\rho^{(s)}(\Delta^{(2)} - 1)}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon} - i\frac{\varepsilon\rho^{(s)}}{2}(\Delta^{(2)} - \Delta^{(1)})} \cdot \frac{1 - e^{-iB^{(s)}\left(\rho^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon}\right) - B^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(2)}}}{\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} - i\rho^{(s)}\Delta^{(2)}} - \right. \quad (33)$$

$$\left. - \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon} - i\varepsilon\rho^{(s)}(\Delta^{(1)} - 1)}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon} - i\frac{\varepsilon\rho^{(s)}}{2}(\Delta^{(2)} - \Delta^{(1)})} \cdot \frac{1 - e^{-iB^{(s)}\left(\rho^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon}\right) - B^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(1)}}}{\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} - i\rho^{(s)}\Delta^{(1)}} \right) \times$$

$$\times e^{i\left(\frac{\omega\chi_0}{2} + \lambda_{\mathbf{g}}^*\right) \frac{a+b}{\gamma_{\mathbf{g}}}},$$



$$\begin{aligned}
 E_{DTR}^{(s)} = & \frac{4\pi^2 i e V}{\omega} \theta P^{(s)} \left[\left(\frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2}} - \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_a} \right) e^{-i \frac{\omega \alpha}{2\gamma_0} (\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_a)} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_a} - \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_0} \right) \right] \times \frac{\varepsilon}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon} - i \frac{\varepsilon \rho^{(s)}}{2} (\Delta^{(2)} - \Delta^{(1)})} \times \\
 & \times \left(e^{-i B^{(s)} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) - B^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(1)}} - e^{-i B^{(s)} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) - B^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(2)}} \right) \times \\
 & \times e^{i \left(\frac{\omega \chi_0}{2} + \lambda_g^* \right) \frac{a+b}{\gamma_g}},
 \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta^{(2)} = & \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} + \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} + \frac{\kappa^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)} + \varepsilon}}, \quad \Delta^{(1)} = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} - \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} - \frac{\kappa^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)} + \varepsilon}}, \\
 \sigma^{(s)} = & \frac{1}{|\chi'_g| C^{(s)}} \left(\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_0 \right) \equiv \frac{1}{\nu^{(s)}} \left(\frac{\theta^2}{|\chi'_0|} + \frac{1}{\gamma^2 |\chi'_0|} + 1 \right), \\
 \nu^{(s)} = & \frac{\chi'_g C^{(s)}}{\chi'_0}, \quad B^{(s)} = \frac{\omega |\chi'_g| C^{(s)} b}{2 \gamma_0}.
 \end{aligned} \quad (35)$$

Параметр $B^{(s)}$ можно представить в виде

$$B^{(s)} = \frac{1}{2 \sin(\delta - \theta_B)} \cdot \frac{b}{L_{ext}^{(s)}}, \quad (36)$$

откуда видно, что он равен половине пути электрона в кристаллической пластинке, выраженной в длинах экстинкции $L_{ext}^{(s)} = [\omega |\chi'_g| C^{(s)}]^{-1}$.

Выход PXR формируется в основном только одной из ветвей, соответствующей второму слагаемому в (33). Как нетрудно убедиться непосредственно, только в этом слагаемом обращается в нуль реальная часть знаменателя. Решение соответствующего уравнения

$$\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} = 0, \quad (37)$$

определяет частоту ω_* , в окрестности которой сосредоточен спектр фотонов PXR, излучаемых под фиксированным углом наблюдения.

3. Спектрально-угловая плотность излучения. Подставляя (33) и (34) в хорошо известное [19-22] выражение для спектрально-угловой плотности рентгеновского излучения

$$\omega \frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} = \omega^2 (2\pi)^{-6} \sum_{s=1}^2 |E^{(s)Rad}|^2, \quad (38)$$

получим выражения, описывающие спектрально-угловые плотности PXR и DTR релятивистского электрона в комбинированной среде аморфная среда-кристалл

$$\omega \frac{d^2 N_{PXR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} P^{(s)2} \frac{\theta^2}{(\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_0)^2} R_{PXR}^{(s)}, \quad (39)$$



$$R_{PXR}^{(s)} = \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}\right)^2 \times \frac{1 + \exp(-2B^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(1)}) - 2\exp(-B^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(1)}) \cos\left(B^{(s)}\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}{\varepsilon}\right)\right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2 + \rho^{(s)2}\Delta^{(1)2}}, \quad (40)$$

$$\omega \frac{d^2 N_{DTR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} P^{(s)2} G(\theta) R_{DTR}^{(s)}, \quad (41)$$

$$G(\theta) = \theta^2 \left(\frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2}} - \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_a}\right)^2 \exp\left(-\frac{\omega \chi''_a}{\gamma_0} a\right) + \theta^2 \left(\frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_a} - \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_0}\right)^2 + 2\theta^2 \left(\frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2}} - \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_a}\right) \left(\frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_a} - \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_0}\right) \times \cos\left(\frac{\omega a}{2\gamma_0} (\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_a)\right) \exp\left(-\frac{\omega \chi''_a}{2\gamma_0} a\right), \quad (42)$$

$$R_{DTR}^{(s)} = \frac{\varepsilon^2}{\xi(\omega)^2 + \varepsilon} \left[\exp\left(-2B^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(1)}\right) + \exp\left(-2B^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(2)}\right) - 2 \cdot \exp\left(-B^{(s)}\rho^{(s)}\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}\right) \cdot \cos\left(\frac{2B^{(s)}\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}{\varepsilon}\right) \right]. \quad (43)$$

В полученных выражениях функции $R_{PXR}^{(s)}$ и $R_{DTR}^{(s)}$ представляют соответственно спектры PXR и DTR, которые описывают в рамках динамической теории дифракции прохождение свободных и связанных рентгеновских фотонов через кристаллическую пластину. При этом в спектр DTR вносит вклад две возбужденные в кристалле рентгеновские волны с соответствующими линейными коэффициентами поглощения

$$\mu_1^{(s)} = \omega \chi''_0 \varepsilon \Delta^{(1)} \equiv \frac{\varepsilon}{L_{ext}} \rho^{(s)} \Delta^{(1)}, \quad \mu_2^{(s)} = \omega \chi''_0 \varepsilon \Delta^{(2)} \equiv \frac{\varepsilon}{L_{ext}} \rho^{(s)} \Delta^{(2)}, \quad (44)$$

а в спектр PXR только одна волна с коэффициентом поглощения $\mu_1^{(s)}$.

Выражение (42) $G(\theta)$ описывает угловую часть дифрагированного переходного излучения, оно состоит из трех слагаемых. Первое слагаемое соответствует переходному излучению, возникающему при пересечении релятивистским электроном первой границы, которое далее проходит через аморфную среду и дифрагирует в брэгговском направлении в кристаллической пластине; второе слагаемое соответствует ПИ, возникающему на второй границе (между аморфной средой и кристаллом), которое также дифрагирует в кристаллической пластине, а третье слагаемое описывает их интерференцию.

Полученные в рамках динамической теории дифракции выражения [39-43] описывающие спектрально – угловые распределения PXR и DTR релятивистского электрона



в комбинированной среде, являются главным результатом настоящей работы. Данные выражения учитывают асимметрию отражения (параметр ε) поля в кристаллической пластинке относительно поверхности мишени. Для дальнейшего анализа спектрально-угловых свойств PXR и DTR представим выражения [39-43] в следующем удобном виде

$$\omega \frac{d^2 N_{PXR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{P^{(s)^2}}{|\chi'_0|} T_{PXR}^{(s)}, \quad (45)$$

$$T_{PXR}^{(s)} = \frac{\theta^2}{|\chi'_0|} \frac{1}{(\Gamma + 1)^2} R_{PXR}^{(s)}, \quad (46)$$

$$\omega \frac{d^2 N_{DTR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{P^{(s)^2}}{|\chi'_0|} T_{DTR}^{(s)}, \quad (47)$$

$$T_{DTR}^{(s)} = G'(\theta) R_{DTR}^{(s)}, \quad (48)$$

$$G'(\theta) = \frac{\theta^2}{|\chi'_0|} \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma_a} \right)^2 \exp\left(-2B^{(s)} \cdot \rho^{(s)} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{\chi''_a}{\chi''_0}\right) + \frac{\theta^2}{|\chi'_0|} \left(\frac{1}{\Gamma_a} - \frac{1}{\Gamma + 1} \right)^2 + \\ + 2 \frac{\theta^2}{|\chi'_0|} \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma_a} \right) \left(\frac{1}{\Gamma_a} - \frac{1}{\Gamma + 1} \right) \cos\left(B^{(s)} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\nu^{(s)}} \Gamma_a\right) \exp\left(-B^{(s)} \cdot \rho^{(s)} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{\chi''_a}{\chi''_0}\right), \quad (49)$$

где $\Gamma = \frac{\theta^2}{|\chi'_0|} + \frac{1}{\gamma^2 |\chi'_0|}$, $\Gamma_a = \frac{\theta^2}{|\chi'_0|} + \frac{1}{\gamma^2 |\chi'_0|} + \frac{\chi'_a}{\chi'_0}$. При переходе от выражения (42) к выражению (49) использовались очевидные соотношения

$$\frac{\omega \chi''_a}{2\gamma_0} a = B^{(s)} \cdot \rho^{(s)} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{\chi''_a}{\chi''_0}, \quad (50)$$

$$\frac{\omega a}{2\gamma_0} (\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_a) = B^{(s)} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\nu^{(s)}} \left(\frac{\theta^2}{|\chi'_0|} + \frac{1}{\gamma^2 |\chi'_0|} + \frac{\chi'_a}{\chi'_0} \right).$$

Параметры первого аморфного слоя выражаются через параметры кристаллического слоя и соотношения параметров обоих слоев: a/b , χ'_a/χ'_0 , χ''_a/χ''_0 . Вместо угла наблюдения θ , удобнее использовать нормированный на величину $\sqrt{|\chi'_0|}$ угол наблюдения, то есть параметр $\theta/\sqrt{|\chi'_0|}$. Отметим, что диэлектрическая восприимчивость в рассматриваемой нами рентгеновской области частот описывается выражением $\chi_a = \chi'_a + i\chi''_a$, $\chi'_a = -\omega_a^2/\omega^2$, $\omega_a^2 = 4\pi Z_a e^2 n_a/m$, где Z_a – число электронов в атоме; n_a – плотность атомов. Отсюда следует соотношение $\chi'_a/\chi'_0 = Z_a n_a/Z_0 n_0$, т.е. соотношение диэлектрических восприимчивостей аморфной и кристаллической частей мишени пропорционально отношению плотностей их материалов.

4. Тонкая непоглощающая мишень. Рассмотрим свойства излучения для сравнительно простого случая тонкой мишени, когда коэффициентами поглощения можно пренебречь, то есть положить $\rho^{(s)} = 0$. В этом случае спектрально-угловые распределения выходов ПРИ и ДПИ, следующие из [45-49] переходят в выражения

$$\omega \frac{d^2 N_{PXR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{P^{(s)^2}}{|\chi'_0|} T_{PXR}^{(s)}, \quad (51)$$



$$T_{PXR}^{(s)} = \frac{\theta^2}{|\chi'_0|} \frac{1}{(\Gamma + 1)^2} R_{PXR}^{(s)}, \quad (52)$$

$$R_{PXR}^{(s)} = 4 \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}} \right)^2 \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{B^{(s)}}{2} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) \right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2}, \quad (53)$$

$$\omega \frac{d^2 N_{DTR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{P^{(s)^2}}{|\chi'_0|} T_{DTR}^{(s)}, \quad (54)$$

$$T_{DTR}^{(s)} = T_{DTR}^{1(s)} + T_{DTR}^{2(s)} + T_{DTR}^{int(s)}, \quad (55)$$

$$T_{DTR}^{1(s)} = \frac{\theta^2}{|\chi'_0|} \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma_a} \right)^2 R_{DTR}^{(s)}, \quad (56)$$

$$T_{DTR}^{2(s)} = \frac{\theta^2}{|\chi'_0|} \left(\frac{1}{\Gamma_a} - \frac{1}{\Gamma + 1} \right)^2 R_{DTR}^{(s)}, \quad (57)$$

$$T_{DTR}^{int(s)} = 2 \frac{\theta^2}{|\chi'_0|} \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma_a} \right) \left(\frac{1}{\Gamma_a} - \frac{1}{\Gamma + 1} \right) \cos \left(B^{(s)} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\nu^{(s)} \Gamma_a} \right) R_{DTR}^{(s)}, \quad (58)$$

$$R_{DTR}^{(s)} = \frac{4\varepsilon^2}{\xi^2 + \varepsilon} \sin^2 \left(\frac{B^{(s)} \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}{\varepsilon} \right). \quad (59)$$

В (54) выражение для $T_{DTR}^{(s)}$ описывающее спектрально-угловую плотность дифрагированного переходного излучения, представлено в виде суммы слагаемых, описывающих дифрагированные излучения от первой и второй границ, соответственно $T_{DTR}^{1(s)}$ и $T_{DTR}^{2(s)}$, а также их интерференционное слагаемое $T_{DTR}^{int(s)}$.

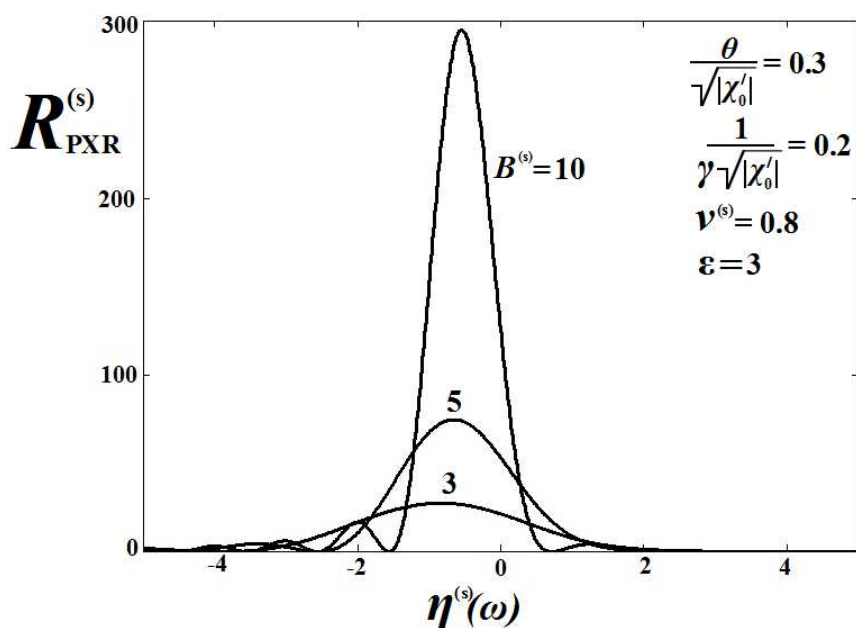


Рис. 2. Спектры ПРИ для разных толщин кристаллической пластины.



Рассмотрим спектр ПРИ релятивистского электрона, пересекающего комбинированную среду, описываемый функцией $R_{PXR}^{(s)}$ см. (53). Можно видеть, что спектр зависит от толщины только кристаллической составляющей мишени, и не зависит от толщины аморфной. Этот спектр можно наблюдать под фиксированным углом наблюдения θ . Кривые, описывающие спектр ПРИ, построенные по формуле (53), представлены на рис. 2. Эти кривые демонстрируют рост амплитуды спектра при увеличении толщины кристаллической мишени b , входящей в параметр $B^{(s)}$. Кривые, представленные на рис. 2, как и все рассматриваемые далее, построены для конкретного значения параметра асимметрии отражения $\varepsilon = 3$, определяющего угол δ между системой параллельных атомных плоскостей кристалла и поверхностью мишени при фиксированном угле θ_B .

Далее рассмотрим влияние диэлектрических свойств аморфной мишени на дифрагированное переходное излучение. На рис. 3 представлены кривые, описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ, построенные по формулам (52) и (54) при фиксированных значениях угла наблюдения θ , Лоренц-фактора электрона γ и параметров кристаллической пластины. При этом толщина аморфной и кристаллической пластин выбрана одинаковой $a/b = 1$. Из рисунка следует существенное увеличение плотности ДПИ при увеличении соотношения $\chi'_a/\chi'_0 = Z_a n_a / Z_0 n_0$, то есть при увеличении плотности материала аморфной среды. При этом спектрально-угловая плотность ПРИ не изменяется. Таким образом, изменяя материал аморфной среды можно повысить спектрально-угловую плотность ДПИ, не увеличивая энергии электрона, при этом формулы, полученные в настоящей работе, позволяют рассчитать величины спектрально-угловой плотности ДПИ и ПРИ в зависимости от параметров мишени.

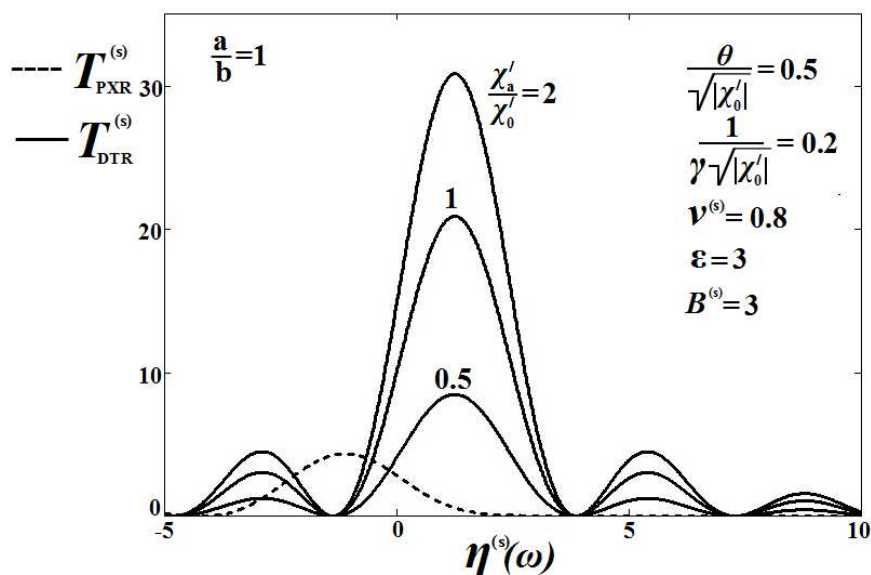


Рис. 3. Спектр ПРИ и спектры ДПИ для разных аморфных сред (различных соотношений χ'_a/χ'_0).

Вклады в спектрально-угловую плотность ДПИ переходных излучений, формируемых на первой и второй границах комбинированной среды и их интерференционного



слагаемого демонстрируют построенные по формулам [55-58] кривые, представленные на рис. 4 - 6.

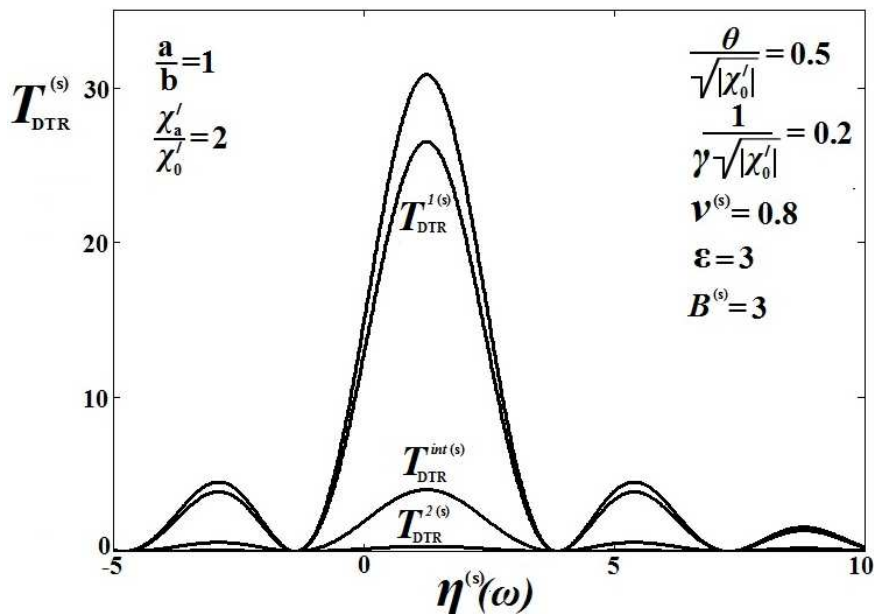


Рис. 4. Вклады в спектр ДПИ волн ПИ, возбуждаемых на первой и второй границе, и их интерференционного слагаемого.

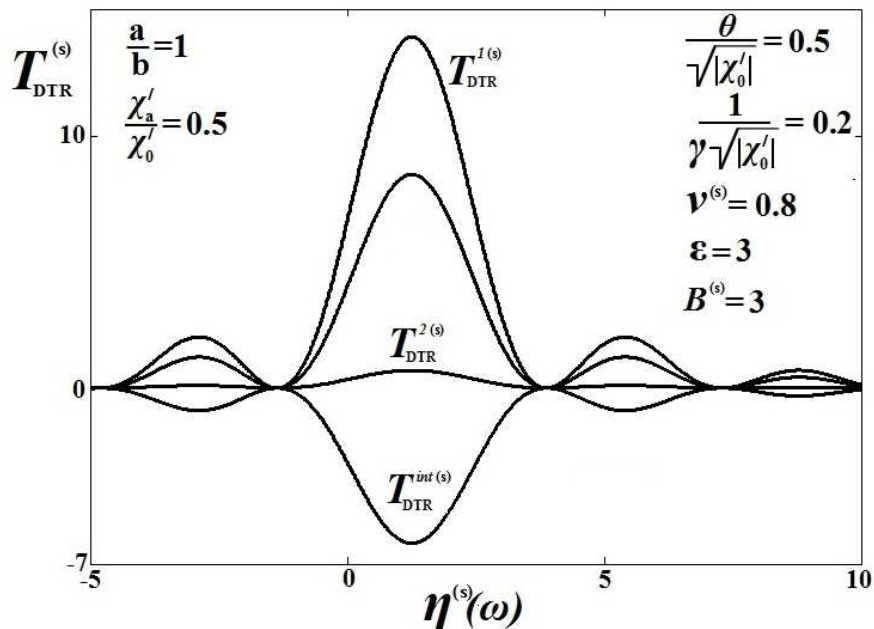


Рис. 5. То же, что на рис. 4, но для меньшего значения соотношения χ'_a/χ'_0 .

В частности, из рис. 4 видно, что в случае, когда аморфная среда является более плотной, чем кристаллическая, основной вклад в выход ДПИ дает волна, возбужденная на первой границе. При этом интерференционное слагаемое оказывается более



существенным, чем слагаемое, определяющее вклад волны, возбужденной на второй границе комбинированной среды.

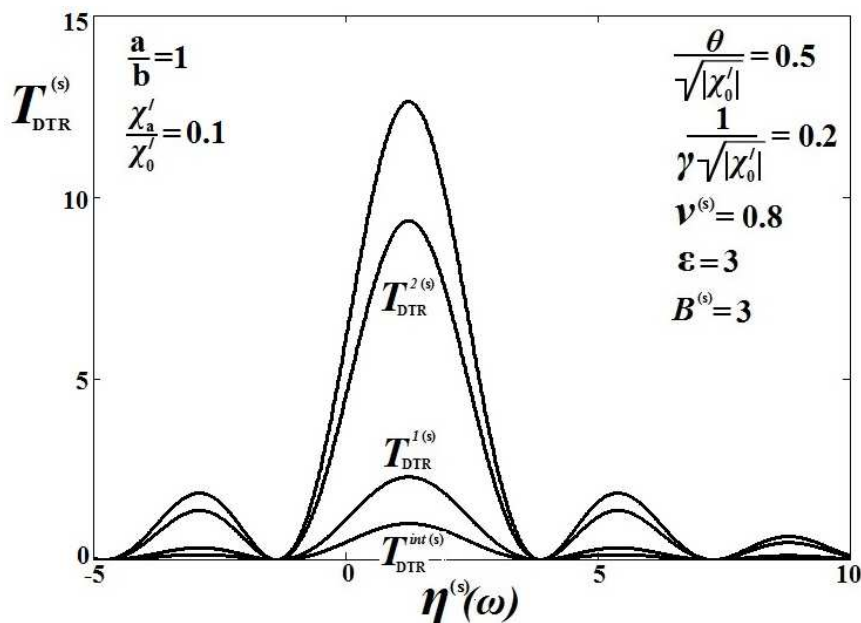


Рис. 6. То же, что на рис. 5, но для меньшего значения соотношения χ'_a/χ'_0 .

При уменьшении плотности аморфной среды интерференционное слагаемое может давать деструктивный вклад в спектрально-угловую плотность ДПИ (см. рис. 5). Если же плотность аморфной среды существенно уменьшить, вклад в суммарный ДПИ волны переходного излучения, возбужденной на второй границе, может стать подавляющим. Ко всем этим выводам можно прийти непосредственно, аналитически анализируя выражения [54-59]. Отметим, что изменение толщины аморфной среды a в случае тонкой непоглощающей мишени влияет, как следует из [54-59], только на интерференционное слагаемое и существенно повлиять на спектральную плотность не может.

Рассмотрим влияние аморфной среды, через параметр χ'_a/χ'_0 , на угловую плотность ДПИ. Для этого проинтегрируем выражения (51) и (54) по частотной функции $\eta^{(s)}(\omega)$.

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2 P^{(s)^2}}{8\pi^2 \sin^2 \theta_B} F_{PXR}^{(s)}(\theta), \quad (60)$$

$$F_{PXR}^{(s)}(\theta) = \nu^{(s)} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{PXR}^{(s)} d\eta^{(s)}(\omega), \quad (61)$$

$$\frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2 P^{(s)^2}}{8\pi^2 \sin^2 \theta_B} F_{DTR}^{(s)}(\theta), \quad (62)$$

$$F_{DTR}^{(s)}(\theta) = \nu^{(s)} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{DTR}^{(s)} d\eta^{(s)}(\omega). \quad (63)$$

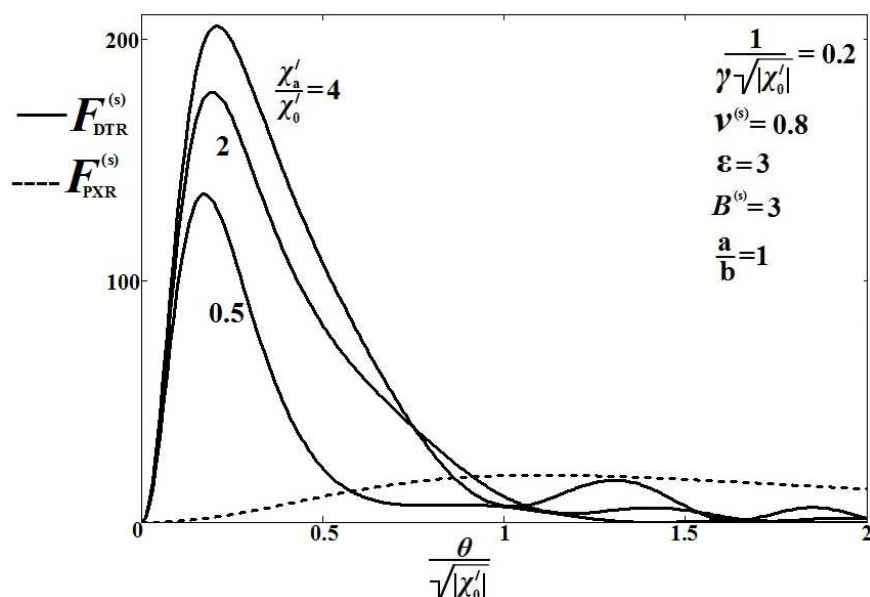


Рис. 7. Угловая плотность ПРИ и угловые плотности ДПИ для разных аморфных сред.

На рис. 7 построены кривые, описывающие угловые плотности ДПИ и ПРИ, из которых следует, что, как и для спектрально-угловой плотности, при фиксированном угле наблюдения (см. рис. 3), увеличение соотношения χ'_a/χ'_0 приводит к существенному росту угловой плотности ДПИ. Данный факт может быть использован при создании компактных, интенсивных альтернативных источников рентгеновского излучения на основе взаимодействия релятивистских электронов со сложными структурированными материалами.

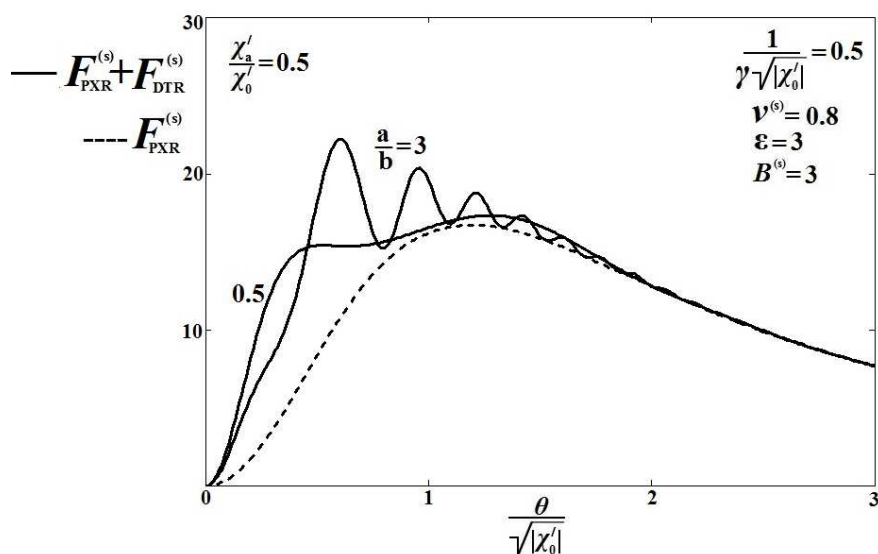


Рис. 8. Влияние ПИ из аморфной подложки, на угловую плотность ПРИ.

В случае меньших энергий излучающих электронов, когда вклад ПРИ в суммарное угловую плотность становится определяющим, ДПИ может привести к различным



деформациям или осцилляциям в угловой плотности суммарного когерентного излучения (см. рис. 8), в зависимости от соотношения a/b , определяющего толщину аморфной пластинки при фиксированной толщине b кристаллической пластинки. Этот факт также можно использовать при постановке реальных экспериментов, в которых аморфная среда выступает в качестве подложки ультратонкой кристаллической пластинки.

Заключение. В рамках динамической теории дифракции развита теория когерентного рентгеновского излучения релятивистского электрона, пересекающего комбинированную среду, состоящую из аморфной и кристаллической пластин. В работе на основе двух волнового приближения динамической теории дифракции получены выражения, описывающие спектральные угловые плотности параметрического рентгеновского и дифрагированного переходного излучений. Расчеты спектрально угловых распределений, проведенные на основе этих выражений, позволили показать, что при увеличении плотности аморфной среды по сравнению с плотностью кристаллической вклад ДПИ в суммарное излучение из комбинированной мишени возрастает, при этом вклад ПРИ не изменяется. Исследован вклад волн переходных излучений, возбуждаемых на первой и второй границе и их интерференционного слагаемого в суммарный выход ДПИ. Исследовано влияние переходного излучения из аморфной подложки, дифрагированного затем на системе параллельных атомных плоскостей кристаллической части мишени, на спектрально-угловые характеристики когерентного рентгеновского излучения из комбинированной мишени.

Литература

1. Гинзбург В.Л., Франк И.М. // ЖЭТФ. – 1946. – 16, С.15; Ginzburg V., Frank I. // J. Phys. (USSR). – 1945. – 9, С.353.
2. Тер-Микаэлян М.Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях / Ереван: АН АрмССР, 1969. – 460 с.
3. Гарибян Г.М., Ян Ши // ЖЭТФ. – 1971. – 61. – С.930.
4. Барышевский В.Г., Феранчук И.Д. // ЖЭТФ. – 1971. – 61, С.944.
5. Nasonov N. // Phys. Lett. A. – 1999. – 260, С.391.
6. Nitta H. // Phys. Lett. A. – 1991. – 158, С.270.
7. Feranchuk I.D., Ivashin A.V. // J. Physique. – 1985. – 46, С.1981.
8. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. // J. Physique. – 1983. – 44, С.913.
9. Nasonov N. // Physics Letters A. – 2001. – 292, С.146..
10. Nasonov N., Noskov A. // Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. – 2003. – 201, С.67.
11. Nasonov N.N., Zhukova P., Piestrup M.A., Park H. Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. – 2006. – 251, С.96.
12. Blazhevich S., Noskov A. // Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. – 2006. – 252, С.69.
13. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. – 2008. – 266, С.3770.
14. Blazhevich S., Noskov A. // ЖЭТФ. – 2009. – 136, С.1043.
15. Базылев В.А., Жеваго Н.К. Излучение быстрых частиц в веществе и внешних полях / М.: Наука, 1987. – 272 с.
16. Пинскер З.Г. Динамическое рассеяние рентгеновских лучей в идеальных кристаллах / М.: Наука, 1974. – 368 с.

**COHERENT X-RAY RADIATION OF RELATIVISTIC ELECTRON
INTERSECTING AMORPHOUS AND CRYSTAL PLATES****S.V. Blazhevich, R.A. Zagorodnyuk, A.V. Noskov, O.N. Satler**Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: noskov_a@bsu.edu.ru

Abstract. In frameworks of dynamical diffraction theory it is built the theory of coherent X-ray radiation of relativistic electron intersecting the combined medium that consists of amorphous and crystal plates. Theory takes into account the asymmetry of field reflection relative to the surface мишени. It is defined by the angle between atom planes and target surface. Expressions describing spectral angular density of parametric X-ray radiation and diffraction transition irradiation in the medium are obtained and investigated.

Key words: relativistic electron, dynamical diffraction, diffracting переходное radiation.



MSC 74C10

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ И ВЫПУЧИВАНИЕ. Часть II: СТЕРЖЕНЬ СПЛОШНОГО СЕЧЕНИЯ

В.И. Ванько, Е.С. Перелыгина

МГТУ им. Н.Э.Баумана,
ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, 105005, Россия, e-mail: vvanko@mail.ru

Аннотация. Изучаются процессы продольного изгиба и выпучивания в условиях ползучести материала стержня сплошного сечения. Упруго-пластические свойства материала стержня описываются произвольной диаграммой $\sigma \sim \varepsilon$. Численным экспериментом доказано, что исчерпание несущей способности стержня (нарушение корректности квазистатической постановки) происходит при условии равенства приложенной продольной силы и жесткости срединного сечения (в безразмерных параметрах).

Ключевые слова: стержень сплошного сечения, произвольная диаграмма $\sigma \sim \varepsilon$, ползучесть, корректность квазистатической постановки, несущая способность стержня.

1. Уравнения равновесия. Условие корректности квазистатической постановки. Пусть шарнирно опертый стержень симметричного поперечного сечения нагружается продольной силой, прикладываемой таким образом, что динамическими эффектами можно пренебречь, т. е. изучается квазистатический процесс. Зависимость для скорости деформации в точках стержня имеет вид:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + f'_\sigma \dot{\sigma} \varphi. \quad (1.1)$$

Точкой обозначаем производную по времени t , если изучаются процессы выпучивания, либо — дифференцирование по любому положительному монотонно возрастающему параметру в случае рассмотрения продольного изгиба; $f'_\sigma \dot{\sigma}$ — модуль Юнга; $f'_\sigma \dot{\sigma}$ — скорость пластической деформации; φ — скорость деформации ползучести. Функция $\varphi(\cdot)$ может зависеть от текущего напряжения в точке, от времени, а также — от параметров состояния, которые подчиняются соответствующим кинетическим уравнениям [2].

Принимаем обычные гипотезы, используемые в задачах о продольном изгибе стержней. Тогда уравнения равновесия запишутся следующим образом:

$$\int_F \sigma dF = P, \quad \int_F \sigma z dF = -P(v + v_{00}). \quad (1.2)$$

Здесь $\sigma(z, t)$ — напряжение в точках данного сечения; F — площадь поперечного сечения; z — координата по высоте поперечного сечения, отсчитываемая от центра масс сечения в плоскости изгиба в сторону «растянутых» внешних волокон; $v_{00}(x)$ —



начальное искривление стержня; $v(x, t)$ — дополнительный прогиб; x — координата по длине стержня, $0 \leq x \leq L$.

Используя гипотезу плоских сечений, получим уравнение, замыкающее систему (1.1), (1.2):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + z\kappa \quad \left(\kappa \approx \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \quad (1.3)$$

где $\varepsilon_0(x, t)$ — деформация в точках оси стержня; прогибы считаем малыми, т.е. решаем задачу в геометрически линейной постановке, $v(x, t) = L$.

Уже отмечалось (см. Часть I, [1]), что геометрически линейная постановка достаточна для большинства практически важных случаев [3].

Для системы (1.1)—(1.3) имеем: начальное условие краевые условия

$$v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0.$$

Выписанная система уравнений может быть разрешена в замкнутом виде только в частных случаях. Так, известны решения для упруго-идеально-пластического стержня [4], для линейно вязкого стержня [5], для стержня из материала, свойства которого описываются в виде комбинации линейной вязкости с идеальной пластичностью [6].

Отличительной особенностью учета пластических деформаций является то обстоятельство, что вид функции $f(\cdot)$ существенно зависит от истории нагружения в каждой точке стержня. Эта трудность является общей для большинства задач теории пластичности, в которых учитываются упрочнение, последующая упругая разгрузка, а также эффект Баушингера [2].

Воспользуемся методом расчета «по шагам» (метод последовательных нагружений или метод продолжения по параметру [7]), впервые для задач продольного изгиба и выпучивания предложенным в работах [8,9].

В дальнейшем рассматриваем два процесса: при анализе продольного изгиба *приращение* дается нагрузке, при исследовании выпучивания анализируется случай, когда стержень достаточно быстро нагружается силой P_0 (столь быстро, что ползучесть в процессе возрастания силы проявиться не успевает, однако динамическими эффектами можно пренебречь) и в дальнейшем *приращение* дается времени t .

В обоих случаях считаем, что известно напряженно-деформированное состояние в предыдущий, $(i - 1)$ -й момент по времени или по нагрузке. Тогда деформации и напряжения в момент i будут отличаться от деформаций и напряжений в момент $(i - 1)$ на малые величины $\Delta\varepsilon_i$ и $\Delta\sigma_i$.

Из уравнения (1.1) получим:

$$\Delta\varepsilon_i = \Delta\sigma_i \left(\frac{1}{E} + f'_\sigma \right) + \Delta\varepsilon_i, \quad (1.4)$$

где $\Delta\varepsilon_i = \varphi\Delta t_i$ — приращение деформации ползучести за время Δt_i при изучении процесса выпучивания.

Из (1.4) имеем:

$$\Delta\sigma_i = E^*(\Delta\varepsilon_i - \Delta\varepsilon_i), \quad (1.5)$$



причем в упругой области и при разгрузке $E^* = E$; при активном нагружении в пластической области

$$E^* = \frac{E}{1 + f'_\sigma E}.$$

Гипотеза плоских сечений (1.2) запишется в конечных приращениях в виде

$$\Delta \epsilon_i = \Delta \epsilon_i^0 + z \Delta \kappa_i. \quad (1.6)$$

Левые части уравнений равновесия (1.2) приводятся к следующим выражениям в приращениях:

$$\int_F \Delta \sigma_i dF = \int_F E^* (\Delta \epsilon_i^0 + z \Delta \varsigma_i - \Delta \epsilon_i) dF, \quad \int_F z \Delta \sigma_i dF = \int_F E^* (z \Delta \epsilon_i^0 + z^2 \Delta \varsigma_i - z \Delta \epsilon_i) dF.$$

Введем величину безразмерного «модуля пластичности» $\nu = E^*/E$. Тогда уравнения равновесия имеют вид:

$$E^* (I_0 \Delta \epsilon_i^0 + I_1 \Delta \varsigma_i - J_0) = \Delta P_i; \quad (1.7)$$

$$E^* (I_1 \Delta \epsilon_i^0 + I_2 \Delta \varsigma_i - J_1) = -P_{i-1} v_i - v_{i-1} \Delta P_i. \quad (1.8)$$

Здесь введены обозначения:

$$I_k = \int_F \nu z^k dF, \quad J_k = \int_F \nu z^k \Delta \epsilon_i dF, \quad k = 0, 1, 2.$$

Из уравнения (1.7) получим выражение для приращения деформации в точках оси стержня:

$$\Delta \epsilon_i^0 = \frac{1}{EI_0} \Delta P_i - \frac{I_1}{I_0} \Delta \varsigma_i + \frac{J_0}{I_0},$$

которое подставим в уравнение (1.8).

Получим уравнение относительно приращения прогиба Δv_i :

$$\left(I_2 - \frac{I_1^2}{I_0} \right) \frac{d^2 \Delta v_i}{dx^2} + \frac{P_{i-1}}{E} \Delta v_i = \frac{P_{i-1}}{E} \left(v_{i-1} + \frac{I_1}{I_0} \right) - \frac{J_0 I_1 - J_1 I_0}{I_0}. \quad (1.9)$$

Система уравнений (1.9), (1.5), (1.6) полностью решает задачу на каждом шаге. Для интегрирования этих уравнений стержень делим на n равных частей по длине и на m частей по высоте сечения, получаем mn узловых точек, в которых следим за напряженно-деформированным состоянием. Считаем, что в i -1 момент времени или нагружения известно состояние в каждом узле, т.е. известны матрицы величин $\{\sigma_{kj}\}_{i-1}$ и $\{\nu_{kj}\}_{i-1}$ т.д., а также $v_{i-1}(x)$. При приращении нагрузки или времени это состояние считается неизменным, в частности, неизменной остается матрица безразмерных модулей пластичности $\{\nu_{kj}\}_{i-1}$. Следовательно, в некотором k -ом поперечном сечении (по длине стержня) известно значение функции $\nu_{kj}(z)$ ($j = 1, z, k, m$). Поэтому, используя тот или иной метод интегрирования, можно вычислить все интегралы $I_p = \int_F \nu_{kj}(z) z^p dF$



($p = 0, 1$), входящие в уравнения системы (1.9), (1.5), (1.6). То же самое относится к интегралам J_0, J_1 , зависящим от функции $\Delta\epsilon_i(x, z)$ если задан конкретный закон ползучести.

Отсюда следует, что уравнение (1.9) есть обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с коэффициентами, зависящими от продольной координаты x ($0 \leq x \leq L$), причем значения коэффициентов заданы в n точках деления по длине.

Зная условия закрепления стержня, для уравнения (1.9) ставим краевую задачу. Краевые условия задаем в виде $\Delta v_i(0) = \Delta v_i(L) = 0$, т.е. рассматриваем шарнирно опертый стержень; форму начального искривления задаем в виде

$$v_0(x) = v_{00} \sin \frac{\pi x}{L} . \tag{1.10}$$

На нулевом шаге к стержню приложена такая сила P_0 , чтобы все узлы остались в состоянии упругости. Максимальное значение напряжения сжатия при этом достигается в точке $x = -L/2, z = -h$, см. рис. 1.

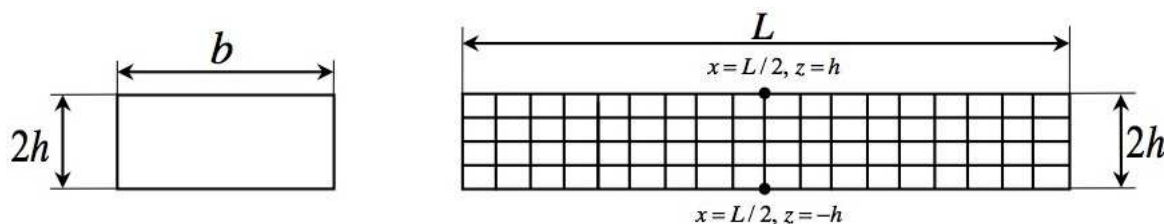


Рис. 1.

Считая, что дальнейшее упругое изгибание стержня происходит по полуволне синусоиды, получим ($\tilde{P} = P_0/P_3$):

$$v_0 \left(L/2, \tilde{P} \right) = \frac{\tilde{P} v_{00}}{1 - \tilde{P}} . \tag{1.11}$$

Деформацию точек упругой оси принимаем в виде

$$\epsilon_0 = \frac{P_0}{EF} ,$$

где F — площадь поперечного сечения ($F = \text{const}$). Тогда согласно (1.6) и (1.5):

$$\Delta\sigma_0 = \sigma_0(x, z) = E\Delta\epsilon(x, z) = E \left(\frac{P_0}{EF} + z \frac{d^2 v_0}{dx^2} \right) \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{P_0}{F} + h \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{E v_{00}}{1 - P_0/P_3} . \tag{1.12}$$

Из требования $\sigma_{\max} \leq \sigma_*$ найдем такую нагрузку P_1 , чтобы при $P > P_1$ в точке $(L/2, -h)$ впервые наступило состояние пластичности; напряжение в этой точке необходимо вычислять, используя модуль E^* . Находим распределения напряжений $\{\sigma_{kr}\}_0$ и модулей $\{\nu_{kr}\}_0$. Эти распределения являются отправными для следующего шага. На следующем шаге решается краевая задача для уравнения (1.9); используя метод конечных разностей [10], получаем $\Delta v_1(x)$ и вычисляем $\{\Delta\sigma_{kr}\}_1$. В каждой точке вычисляется



текущее напряжение $\sigma(x, z)$ и находится состояние нагружения: $\sigma \cdot \dot{\sigma} > 0$ или $\sigma \cdot \dot{\sigma} < 0$. По уровню напряженного состояния в каждой точке формируем матрицу модулей $\{\nu_{kr}\}_1$ и т.д.

Для конкретности считаем, что стержень имеет прямоугольное поперечное сечение, рис. 1: площадь сечения $F = 2bh$, момент инерции $I = 2bh^3/3$.

Вводим систему безразмерных параметров: действующую силу отнесем к эйлеровой силе $\tilde{P} = P/P_3$, $P_3 = \pi^2 EI/L^2$; напряжения — к эйлерову напряжению $\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_3$, $\sigma_3 = \pi^2 EI/L^2 F$; деформации — к эйлеровой деформации $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon_3$, $\varepsilon_3 = \pi^2 I/L^2 F$; прогиб отнесем к половине высоты $\tilde{v} = v/h$; введем безразмерные координаты $\xi = \pi x/L$ ($0 \leq \xi \leq 1$), $\eta = z/h$ ($-1 \leq \eta \leq 1$).

Тогда система уравнений (1.9), (1.5), (1.6) запишется в виде:

$$\frac{3}{2} \left(\tilde{I}_2 - \frac{\tilde{I}_1^2}{\tilde{I}_0} \right) \frac{d^2 \Delta \tilde{v}_i}{d\xi^2} + \tilde{P}_{i-1} \Delta \tilde{v}_i = -\Delta \tilde{P}_i \left(\tilde{v}_{i-1} + \frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_0} \right) - \frac{1}{2} \frac{\tilde{J}_0 \tilde{I}_1 - \tilde{J}_1 \tilde{I}_0}{\tilde{I}_0}. \quad (1.13)$$

Здесь фигурируют безразмерные интегралы:

$$\tilde{I}_k = \int_{-1}^1 \nu \eta^k d\eta, \quad \tilde{J}_k = \int_{-1}^1 \nu \frac{\Delta \epsilon}{\varepsilon_3} \eta^k d\eta \quad (\eta = 0, 1, 2). \quad (1.14)$$

Из уравнения (1.7) найдем выражение для деформации точек оси стержня:

$$(1.7) \Rightarrow \Delta \varepsilon_i^0 = \frac{\Delta P_i}{EI_0} - \frac{I_1}{I_0} \frac{d^2 \Delta v_i}{dx^2} + \frac{J_0}{I_0}.$$

Полученное выражение приводим к безразмерному виду (аналогично (1.13)):

$$\Delta \tilde{\varepsilon}_0 = 2 \frac{\Delta \tilde{P}_i}{\tilde{I}_0} - 3 \frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_0} \frac{d^2 \Delta \tilde{v}_i}{d\xi^2} + \frac{\tilde{J}_0}{\tilde{I}_0}. \quad (1.15)$$

Выражение для приращения напряжений после приведения к безразмерному виду запишем так:

$$(1.5) \Rightarrow \Delta \sigma_i = E_{i-1}^* \{ \Delta \varepsilon_i - \Delta \epsilon_i \} \Rightarrow \frac{1}{E} \Delta \sigma_i = \nu_{i-1} \{ \Delta \varepsilon_i^0 + z \Delta \varsigma_i - \Delta \epsilon_i \} \Rightarrow$$

$$\Delta \tilde{\sigma}_i = \nu_{i-1} \left\{ \Delta \tilde{\varepsilon}_0 + 3\eta \frac{d^2 \Delta \tilde{v}_i}{d\xi^2} - \Delta \tilde{\epsilon}_i \right\}. \quad (1.16)$$

Последовательность решения системы уравнений (1.13), (1.15), (1.16) такова: решив уравнение (1.13), найдем приращение прогиба $\Delta \tilde{v}_i(\xi_k)$ ($i = 1, \dots, n$) на i -том шаге нагружения; по соотношению (1.15) находим приращения деформации оси стержня $\tilde{\varepsilon}_0(\xi)$; наконец, используя (1.16), определяем приращения напряжений $\Delta \sigma_i(\xi_k, \eta_r)$; в узловых точках вычисляем величины напряжений в узловых точках и определяем состояния



нагружения или разгрузки в узловых точках по знаку произведения $\sigma_i \cdot \Delta\sigma_i$; формируем матрицу упруго-пластических модулей $\{\nu(\xi_k, \eta_r)\}_i$ для следующего, $(i + 1)$ -го шага нагружения и т.д.

В дальнейшем, рассматривая уравнения (1.13), (1.15), (1.16), значок «тильда» (\sim) над буквенными (безразмерными) символами опускаем.

Выпишем основные соотношения, внося выражение (1.15) в (1.16):

$$\frac{3}{2} \left(I_2 - \frac{I_1^2}{I_0} \right) \frac{d^2 \Delta v_i}{d\xi^2} + P_{i-1} \Delta v_i = -\Delta P_i \left(v_{i-1} + \frac{I_1}{I_0} \right) - \frac{1}{2} \frac{J_0 I_1 - J_1 I_0}{I_0}. \quad (1.17)$$

$$\Delta \epsilon_i = \nu_{i-1} \left\{ 2 \frac{\Delta P_i}{I_0} - 3 \left(\frac{I_1}{I_0} - \eta \right) \frac{d^2 \Delta v_i}{d\xi^2} + \left(\frac{J_0}{I_0} - \Delta \epsilon_i \right) \right\}. \quad (1.18)$$

Рассмотрим некоторые качественные особенности полученных соотношений.

Введем обозначение

$$I(\xi) = \frac{3}{2} \left(I_2 - \frac{I_1^2}{I_0} \right). \quad (1.19)$$

$I(\xi)$ представляет собой жесткость упруго-пластического стержня на изгиб; для идеально упругого стержня $I(\xi) \equiv 1$.

Так как все величины безразмерны, мы будем сравнивать приложенную силу с жесткостью стержня на изгиб. Упругий стержень «несет» нагрузку $P < P_3$ – в размерных величинах, поэтому $I(\xi) = 1 > P$.

Для стержня с линейным упрочнением

$$P_{ш} \leq I(\xi) < 1,$$

где $P_{ш} = E_t/E$ – безразмерное значение силы Шэнли. Для стержней с нелинейным упрочнением $I(\xi)$ может изменяться от значения, близкого к 0 до 1 в зависимости от диаграммы $\sigma \sim \epsilon$.

Уравнение (1.17) перепишем в виде

$$I(\xi) \frac{d^2 \Delta v_i}{d\xi^2} + P_i \Delta v_i = \psi_i(\xi), \quad (1.20)$$

где $\psi(\xi)$ – известная на каждом шаге функция.

Очевидно, что уравнение (1.20) в известном смысле эквивалентно уравнению продольного изгиба неоднородного стержня. В первом приближении, считая функцию $I(\xi)$ слабо зависящей от координаты ξ , примем для значения $I(\xi)$ среднее по ξ значение $I(\xi) = I^*$. Тогда, из решения упругой задачи, считая, что изгиб происходит по полуwave синусоиды $\Delta v_i = a_i \sin \xi$, получим методом коллокации по сечению $\xi = \pi/2$:

$$(1 - P_i) a_i = A, \quad (1.21)$$

где A зависит от ΔP_i или Δt_i .



Из (1.21) следует, что при выполнении условия

$$I - P_i = 0 \quad (1.22)$$

имеет место обращение в бесконечность скорости прогиба или самого прогиба.

Условие (1.22) характеризует критическое состояние стержня: стержень «несет» приложенную нагрузку пока выполняется условие

$$I - P_i > 0. \quad (1.23)$$

Это условие означает, что при квазистатическом нагружении нагрузка не должна превышать жесткость в «опасном» сечении [11, 12].

При расчетах на компьютере, когда задается шаг Δ_i или Δt_i , точно определить момент выполнения условия (1.22) практически невозможно. При этом на некотором шаге нагружения приращение Δv_i меняет знак, становится отрицательным. Параметры критического состояния оказываются заключенными в достаточно жестких границах.

Условие смены знака приращением Δv_i аналогично критерию выпучивания, введенному в работе [13]: квазистатическая постановка *корректна*, пока $\Delta v_i > 0$, либо $0 < v_i < \infty$.

Приведенные выше качественные особенности полностью подтверждаются проведенными численными расчетами [11, 14, 15]. Кроме того, расчеты показали, что при решении системы (1.17), (1.18) (без каких бы то ни было упрощений) и при использовании коллокации по срединному сечению (т.е. при «назначении» стержню постоянной по длине жесткости, равной текущей жесткости срединного сечения) параметры критического состояния практически совпадают с точностью до 2–3%.

Воспользуемся этим замечанием и будем считать, что на каждом шаге приращение прогиба можно аппроксимировать в виде

$$\Delta v_i = a_i \sin \xi.$$

В уравнении продольного изгиба

$$I^{(i)}(\xi) \frac{d^2 \Delta v_i}{d\xi^2} + P_i \Delta v_i = -\Delta P_i \left(v_{i-1} + \frac{I_1}{I_0} \right) \quad (1.24)$$

жесткость $I^{(i)}(\xi)$ и интегралы $I_k^{(i)}$ вычисляем в срединном сечении $\xi = \pi/2$.

Подставляя $\Delta v_i = a_i \sin \xi$ в уравнение (1.20), найдем приращение амплитуды прогиба на каждом шаге:

$$a_i = \frac{\Delta P_i (v_{i-1} + I_1 I_0^{-1})}{I^{(i)}\left(\frac{\pi}{2}\right) - P_i}. \quad (1.25)$$

Предположим, что материал стержня линейно упрочняется, причем эффект Баушингера не учитывается, рис. 2.

Считаем, что $P_{ш} > P_*$ ($P_{ш} = E_t/E$ — сила касательно-модульная, сила Шэнли; P_* — значение нагрузки, при которой в идеально прямом стержне достигается напряжение σ_* во всех его точках).

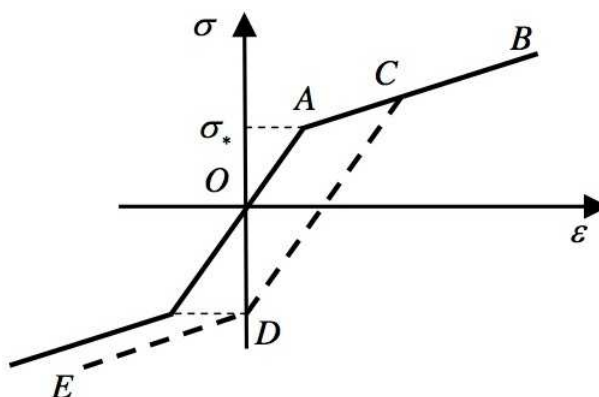


Рис. 2.

Найдем нагрузку P_1 , при которой в упругом стержне (с начальной погибью) в наиболее «напряженной» точке $(1/2\pi, -1)$ напряжение достигнет величины σ_* . Приращение кривизны геометрической оси упругого стержня с начальной погибью v_{00} в срединном сечении имеет значение в силу (1.25):

$$\Delta\varsigma = -P_1 v_{00} / (1 - P_1). \tag{1.26}$$

В случае упругих деформаций во всех точках стержня имеем следующие величины введенных параметров: $I_0 = 2, I_1 = 0, I_2 = 2/3; J_0 \equiv 0, \Delta\epsilon \equiv 0$.

Подставляя выражение кривизны сечения $\xi = \pi/2$ (1.26) в уравнение (1.18), получим уравнение относительно искомой нагрузки $P_1(\eta = -1)$:

$$P_1 + 3 \frac{P_1 v_{00}}{1 - P_1} = P_* \Rightarrow P_1^2 - (1 + P_* + 3v_{00})P_1 + P_* = 0 \Rightarrow$$

$$P_1^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left(1 + P_* + 3v_{00} \pm \sqrt{(1 + P_* + 3v_{00})^2 - 4P_*} \right). \tag{1.27}$$

Считаем, что начальный прогиб мал: $v_{00}^2 = v_{00} = 1$. Тогда полученное выражение (1.27) упрощается:

$$P_1^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left(1 + P_* + 3v_{00} \pm (1 - P_*) \sqrt{1 + 6v_{00} \frac{1 + P_*}{(1 - P_*)^2}} \right). \tag{1.28}$$

При выборе знака «+» перед радикалом получим $P_1 > 1$ – это решение не годится, так как $P < 1$.

Поэтому искомое значение P_1 соответствует знаку «-» перед радикалом. Имеем:

$$P_1 = P_* - \frac{3v_{00}P_*}{1 - P_*} \quad (P_1 < P_* < 1). \tag{1.29}$$

Найти точное значение силы P_2 , при котором и в точке $(1/2\pi, 1)$ будет достигнуто напряжение σ_* , т.е. все точки сечения $\xi = 1/2\pi$ выйдут в состояние (рис. 2), невозможно, так как на каждом шаге интегрирования жесткость I изменяется.



Очевидно, верхнюю оценку нагрузки P_2 получим, предположив, что вплоть до момента $\sigma(\pi/2, 1) = \sigma_*$ ($\sigma_* = P_*$ – безразмерные величины) сечение $\xi = 1/2\pi$ имеет жесткость $I = 1$. Тогда аналогичными выкладками, как это сделано выше, в силу (1.26), (1.18) получим:

$$P_2 - \frac{3P_2v_{00}}{1 - P_2} = P_* \Rightarrow P_1^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left(1 - 3v_{00} + P_* \pm \left((1 - P_*) - \frac{3v_{00}(1 + P_*)}{1 - P_*} \right) \right).$$

Выбирая знак «+», имеем

$$P_2 = P_* + \frac{3v_{00}P_*}{1 - P_*}. \quad (1.30)$$

Формулы (1.29) и (1.30) дают интервал, куда попадает нагрузка P_2 , при которой все точки сечения $\xi = \pi/2$ «выйдут» в состояние AB .

Пусть свойства материала, геометрия стержня (его гибкость – отношение длины к радиусу инерции сечения) и начальный прогиб v_{00} таковы, что сила касательного модуля больше силы P^* :

$$P_{III} = E_t/E > P^*. \quad (1.31)$$

Тогда все точки сечения $\xi = \pi/2$ «выйдут» в состояние AB прежде, чем приложенная сила достигнет значения касательно-модульной нагрузки.

Пусть $P \geq P^*$. При этом все точки сечения находятся на участке AB кривой $\sigma \sim \varepsilon$, и стержень работает как «упругий» с жесткостью

$$I = \frac{3}{2} \left(I_2 - \frac{I_1^2}{I_0} \right) = \nu = E_t/E.$$

Найдем силу P_3 , при которой в точке $(\pi/2, 1)$ начнется разгрузка.

Пусть $\sigma_2 = \sigma(\pi/2, 1)$ и $v_2 = v_{00}/(1 - P_2)$ – напряжение и прогиб, соответствующие силе P_2 . При $P = P_3$ напряжение в точке $(\pi/2, 1)$ достигает своего максимума. При $P \geq P_2$ имеем:

$$\sigma \left(\frac{\pi}{2}, 1 \right) = \sigma_2 + (P - P_2) - \frac{3(P - P_2)v_2}{\nu - P} \Rightarrow \left. \frac{d\sigma}{dP} \right|_{P=P_3} = 1 - \frac{3v_2}{\nu - P_3} \left(1 + \frac{P_3 - P_2}{\nu - P_3} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_3 = \nu - \sqrt{3v_2(\nu - P_2)} \Rightarrow P_3 = P_{III} - \sqrt{3v_2(P_{III} - P_2)} \Rightarrow \quad (1.32)$$

$$\Rightarrow \lim_{v_{00} \rightarrow 0} P_3 = P_{III}. \quad (1.33)$$

Таким образом, в точке $(\pi/2, 1)$ разгрузка начинается так: если $v_{00} \neq 0$, то при значении $P_3 < P_{III}$; если $v_{00} = 0$, то при $P = P_{III}$ (см. Часть I данной работы). В любом из этих случаев продольный изгиб без разгрузки возможен лишь при значении приложенной силы, меньшем касательно-модульной.

При распространении зоны разгрузки по глубине сечения жесткость $I(\xi = \pi/2)$ возрастает. При достижении силой значения P_{III} жесткость $I(\pi/2) > \nu = E_t/E$. Поэтому при переходе силы через касательно-модульное значение никаких особенностей на кривой «сила–прогиб» не наблюдается.



Рассмотрим подробно один частный случай. Пусть материал на растяжение работает как идеально упругий, т.е. в зоне разгрузки $\nu \equiv 1$ (схема Шэнли—Работнова [16, 17]). Граница зоны разгрузки характерна тем, что $\Delta\sigma/\Delta P = 0$ при $\eta = \vartheta$, так как точки $1 \geq \eta > \vartheta$ находятся в состоянии CD и для них $\Delta\sigma/\Delta P < 0$; точки $\vartheta > \eta \geq -1$ в состоянии AB и $\Delta\sigma/\Delta P > 0$ (рис. 2).

Предположим, что стержень работает в окрестности критического состояния, т.е. $\Delta\sigma/\Delta P \rightarrow \infty$ или $v_i \rightarrow \infty$.

Найдем соответствующие значения $\vartheta = \vartheta^*$ и $I(\pi/2)|_{\eta=\vartheta^*}$. Приращение кривизны, по (1.25), равно $-a_i$, поэтому из (1.18) (при $J_0 = 0$, $\Delta\epsilon_i = 0$):

$$\left. \frac{\Delta\sigma}{\Delta P} \right|_{\eta=\vartheta^*} = \nu \left[\frac{2}{I_0} + 3 \left(\frac{I_1}{I_0} - \vartheta^* \right) \frac{v_{i-1} + I_1 I_0^{-1}}{I - P_i} \right] = 0. \quad (1.34)$$

В окрестности критического состояния второе слагаемое в скобках полученного выражения (1.34) является бесконечно большой величиной, так как $(I - P_i) \rightarrow 0$. Сократив (1.34) на $\nu \neq 0$ и отбросив слагаемое $2/I_0$ имеем:

$$3 \left(\frac{I_1}{I_0} - \vartheta^* \right) \frac{v_{i-1} + I_1 I_0^{-1}}{I - P_i} = 0 \Rightarrow I_1 - I_0 \vartheta^* = 0$$

– уравнение относительно искомой величины ϑ^* .

Интегралы I_1 и I_0 , в силу сделанных предположений, вычисляются следующим образом:

$$I_1 = \int_{-1}^{\vartheta^*} \nu \eta d\eta + \int_{\vartheta^*}^1 \eta d\eta = \frac{1}{2} \left(\vartheta^{*2} (\nu - 1) + (1 - \nu) \right),$$

$$I_0 = \int_{-1}^{\vartheta^*} \nu \eta d\eta + \int_{\vartheta^*}^1 \eta d\eta = \vartheta^* (\nu - 1) + \nu + 1.$$

Таким образом, получаем уравнение для определения максимальной высоты зоны разгрузки:

$$I_1 - \vartheta^* I_0 = 0 \Rightarrow \vartheta^{*2} (\nu - 1) + 2\vartheta^* (1 + \nu) + (\nu - 1) = 0 \Rightarrow \vartheta_{1,2}^* = \frac{(1 \pm \sqrt{\nu})^2}{1 - \nu}. \quad (1.35)$$

Выбирая знак «минус» в числителе выражения (1.35) (так как $\vartheta^* < 1$), получим границу зоны разгрузки [12]:

$$\vartheta^* = \frac{1 - \sqrt{\nu}}{1 + \sqrt{\nu}} \quad (\nu = E_t/E). \quad (1.36)$$

Подставив значение ϑ^* в функцию $I(\eta)$, получим

$$I(\vartheta^*) = \frac{4\nu}{(1 + \sqrt{\nu})^2},$$



т.е. величину жесткости (в безразмерных параметрах), соответствующую модулю Кармана.

Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что $I'(\vartheta^*) = 0$, $I''(\vartheta^*) < 0$, и так как $I(\eta)$ монотонно возрастает при $\vartheta < 1$ то значение $\eta = \vartheta^*$ дает абсолютный максимум функции $I(\eta)$. Эти значения ϑ^* и $I(\vartheta^*)$ соответствуют величине зоны разгрузки и модулю, полученным при изучении устойчивости упруго-пластического стержня в постановке Кармана [17,18].

Однако для стержня из обычного упруго-пластического материала, рис. 2, значение $I(\vartheta^*)$ будет лишь верхней границей для значений жесткости (имеются в виду значения I , которые соответствуют $P > P_2$), так как в этом случае неизбежно появление пластических деформаций растяжения в точке $(\pi/2, 1)$. Действительно, в противном случае стержень будет работать по схеме Шэнли—Работнова, при этом в окрестности критического состояния: $\nu \rightarrow \infty$ и $|\Delta\sigma| \rightarrow \infty$, а это означает, что найдется такой конечный прогиб, при котором $\sigma(\pi/2, 1) = -\sigma_*$.

Таким образом, $I(\vartheta^*) > I(\vartheta)$, поэтому критическая сила P^* меньше силы Кармана P_k . Для стержневой модели Шэнли на этот факт было указано в работе [19]. Нетрудно показать, что критическое состояние осуществляется при конечном прогибе.

Проиллюстрируем все вышесказанное результатами решения уравнений (1.17), (1.18) ($J_0 = J_1 = 0$, $\Delta\epsilon_i = 0$). Эти уравнения решались без каких-либо упрощений способом, подробно описанным в [11, 12]. Материал стержня имел характеристики $P_* = \sigma_* = 0, 1$; $\nu_0 = P_{ш} = 0, 15$; $I(\vartheta^*) = P_k = 0, 3122$. Начальный прогиб $v_{00} = 0, 001$. Неравенство $P_{ш} > P_2$ удовлетворено.

При изменении силы от нулевого значения до $P = P_1$ весь стержень находится в упругом состоянии, $I(\xi) \equiv 1$. При силе $P > P_1$ жесткость *срединного* сечения стала падать, так как точка $\eta = -1$ и следующие за ней вышли в состояние AB (рис. 2). Наконец, при $P \approx P_2$ все точки стержня соответствуют состоянию , при этом $I(\xi) \equiv \nu = E_t/E$. На рис. 3,а показано состояние стержня, когда происходит «продольный изгиб без разгрузки», отмеченный впервые Шэнли [16]. Незаштрихованная область стержня на рис. 3 означает точки, которые находятся в состоянии AB . При силе $P = P_3$ в точке $(1/2\pi, 1)$ началась разгрузка, $I > \nu$. Появившаяся зона разгрузки, отмеченная горизонтальной штриховкой, увеличивает жесткость срединного сечения (см. рис. 3,б).

Отметим, что впервые, по-видимому, в работе [19] было отмечено, что продольный изгиб без разгрузки при $P \geq P_{ш}$ невозможен. Рис. 3,в показывает состояние стержня при $P = 0, 195$: высота зоны разгрузки $\vartheta = 0, 5$, жесткость $I = 0, 312$. Эти значения близки к теоретическим $\vartheta^* = 0, 442$ и $I(\vartheta^*) = P_k = 0, 3122$. Прогиб при этом $v = 0, 3$.

На рис. 3,г в точке $(\pi/2, 1)$ появилась зона пластических деформаций растяжения (вертикальная штриховка). Жесткость при этом уменьшается.

Жесткость сплошного стержня изменяется непрерывно, поэтому никаких особенностей в поведении стержня при появлении пластических деформаций растяжения в волокнах с выпуклой стороны стержня не наблюдается. Аналогичный вывод сделан в работе [20].

Сила возрастает, жесткость срединного сечения падает, так как зона пластических деформаций растяжения распространяется по высоте сечения. На рис. 3,г показано



состояние непосредственно перед критическим: $P = 0,213$, $I(\pi/2) = 0,216$.

На следующем шаге нагружения $I = P$, при этом при конечном прогибе $v^* = 0,49$, $P^* = 0,2135$, т.е. $P^* < P_k$. На рис. 4 показана характерная зависимость жесткости срединного сечения от приложенной нагрузки для стержня из линейно упрочняющегося материала при условии $P_{III} > P_*$. На рис. 4 сила P' есть безразмерное значение силы Шенли P_{III} .

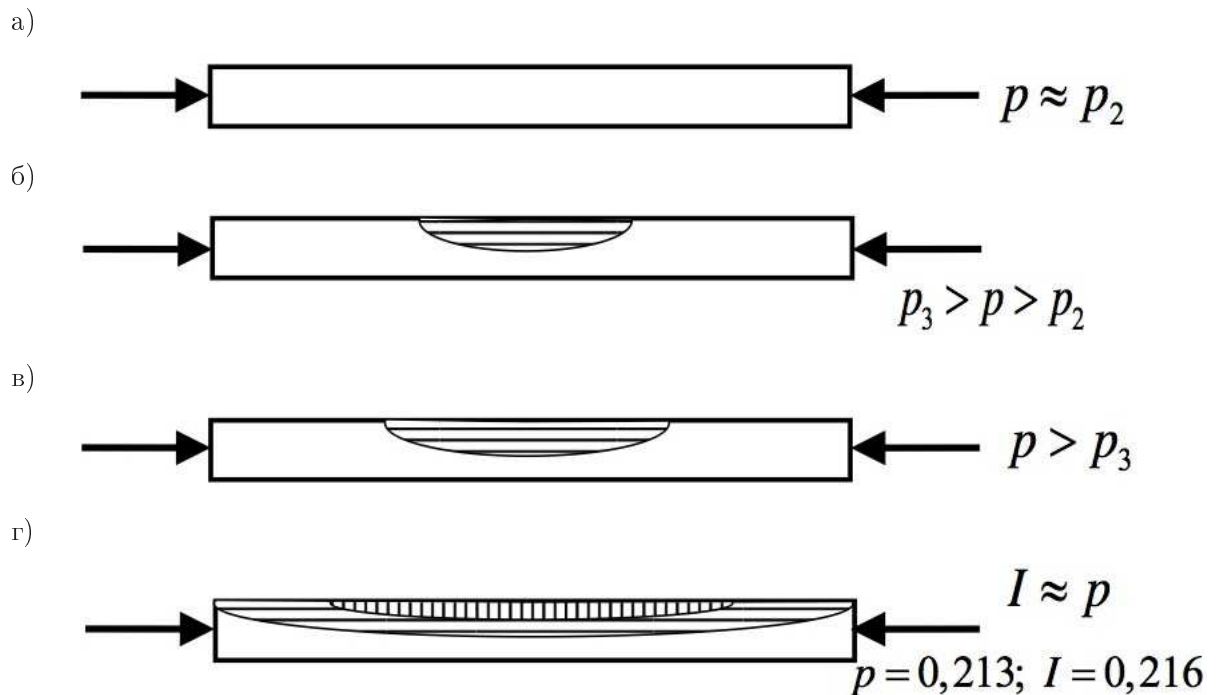


Рис. 3.

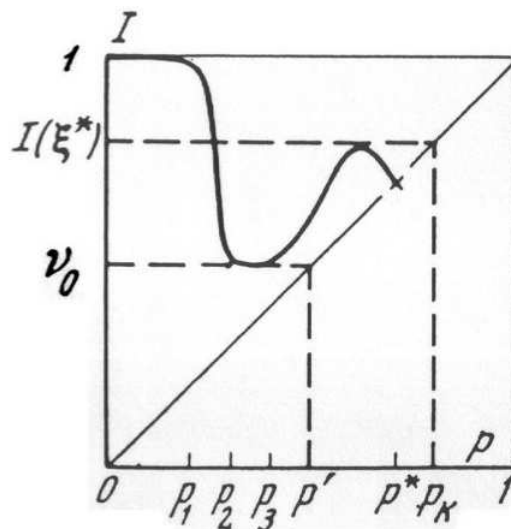


Рис. 4.



Отметим, что впервые в работах [20, 21] дан анализ продольного изгиба упруго-пластического стержня в связи с распространением по длине стержня и глубине поперечных сечений зоны пластических деформаций (при условии $P_{III} > P_*$). Однако определённого вывода о зависимости «жёсткость – сила», подобного неравенству (1.23): $I > P$, в упомянутых работах сделано не было.

Авторы всех известных работ (цитированных выше, Часть I, исключая [22]) изучали продольный изгиб стержня, материал которого имеет линейное упрочнение, при условии $P_{III} > P_*$ (хотя явно это во многих работах не оговаривается), в силу которого точки поперечных сечений переходят в пластическое состояние раньше, чем возрастающая сила достигнет касательно-модульного значения.

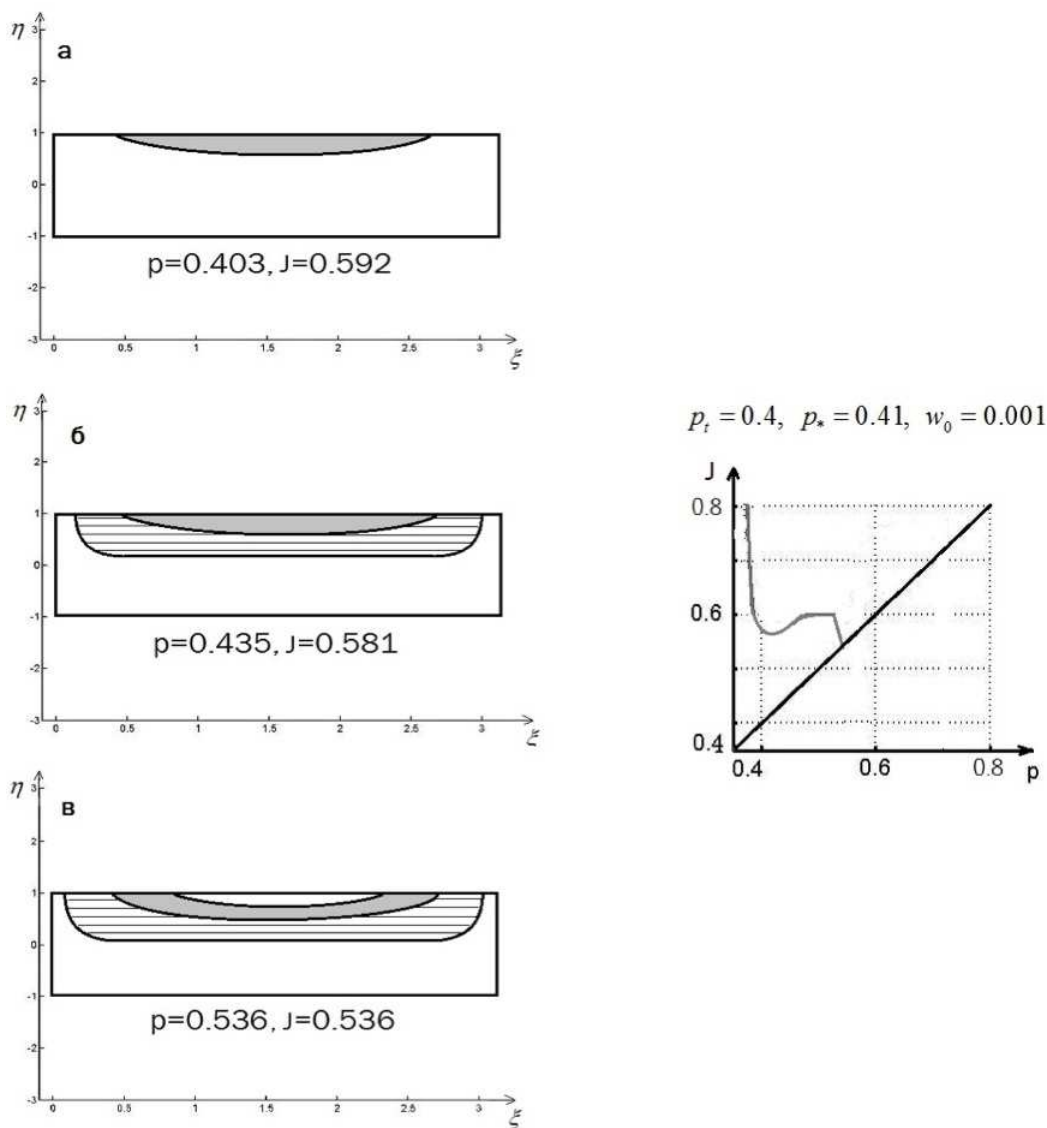


Рис. 5. $P_{III} = 0,4, P_* = 0,4, w_0 = v_\infty = 0,001$.

2. Материал стержня имеет произвольную диаграмму $\sigma : \varepsilon$. В статьях [14, 15]



согласно методике численного исследования, изложенной выше, рассмотрено поведение упругопластического стержня, материал которого имеет произвольную диаграмму $\sigma : \varepsilon$.

1) Материал стержня линейно упрочняется, $P_{III} \leq P_*$.

При условии $P_{III} \approx P_*$ точки стержня не переходят в состояние DE , рис. 2, и при увеличении разности $P_* - P_{III} > 0$ «не успевают» выйти в состояние вследствие резкого падения жёсткости срединного сечения. Проиллюстрируем сказанное графиками «жёсткость–сила» и картинками распространения пластичности по глубине сечений стержня (рис. 5 и 6).

На рис. 5а большая часть точек стержня перешла в состояние пластического нагружения (состояние AB – белая зона). На рис. 5б начинается разгрузка (состояние CD – зона с горизонтальной штриховкой). При этом часть точек стержня остаётся в зоне упругости (состояние OA – серая зона). На рис. 5в часть точек, которые оставались в зоне упругости OA , переходит в пластичность AB , от чего падает жесткость сечения $\xi = \pi/2$.

В результате происходит нарушение корректности квазистатической постановки: $P_i > I(\pi/2) \Rightarrow \Delta v_i < 0$.

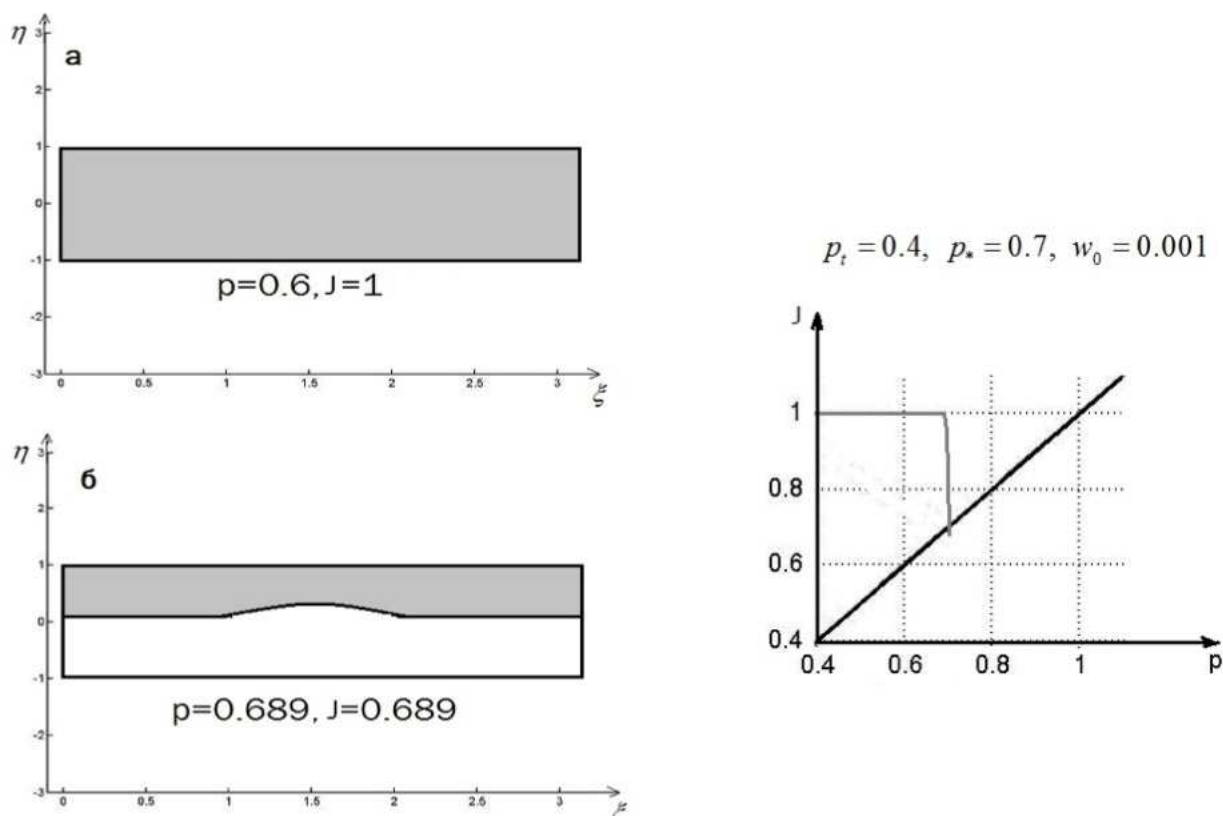


Рис. 6. $P_{III} = 0,4, P_* = 0,7, v_0 = 0,001$.

На рис. 6а все точки стержня находятся в упругой зоне OA – серая зона. Далее происходит переход части точек в пластичность (состояние AB – белая зона), что вызывает



резкое уменьшение жёсткости и нарушение корректности квазистатической постановки (рис. 6б и 6в)).

2) В цитированных выше статьях [14, 15] сделан вывод: при изучении продольного изгиба стержня, материал которого имеет произвольную диаграмму $\sigma : \varepsilon$, квазистатическая постановка корректна до тех пор, пока выполняется условие (1.23): $I > P$. При нарушении этого условия говорим об исчерпании несущей способности стержня.

3. Обсуждение классических результатов [29]. Л. Эйлер, заложивший основы теории продольного изгиба, вывел формулу критической силы, «силы колонны»:

$$P_{\text{Э}} = \pi^2 \frac{EI}{L^2} . \quad (3.1)$$

Рассмотрим упруго-пластический материал с линейным упрочнением, рис. 2. Предположим, что под действием продольной силы, приложенной к идеально прямому стержню (при условии $P_t > P_*$, P_t – сила касательного модуля, P_* – сила, соответствующая пределу пропорциональности), все его точки «вышли» в состояние AB . Тогда для вычисления критической силы в формуле (3.1) модуль E следует заменить модулем упрочнения (касательным модулем):

$$P_t = \pi^2 \frac{E_t I}{L^2} . \quad (3.2)$$

К этому в своё время пришёл Ф. Энгессер [30], но, под влиянием критики со стороны Ф.С. Ясинского [31], Энгессер вводит понятие приведённого модуля, в выражении которого учитывается упругая разгрузка. Для прямоугольного сечения приведённый модуль имеет вид:

$$E_k = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} . \quad (3.3)$$

Т. Карман в своей докторской диссертации распространил понятия касательного и приведённого модулей на материалы с произвольной диаграммой $\sigma : \varepsilon$. Были поставлены эксперименты по продольному изгибу, до сих пор являющиеся образцовыми [22].

Приводим интерпретацию идей Кармана, данную А.С. Вольмиром [23].

Объединим формулы (3.1)–(3.3):

$$P_{\text{кр}} = \pi^2 \frac{\tilde{E}I}{L^2} \Rightarrow \frac{P_{\text{кр}}}{F} = \sigma_{\text{кр}} = \pi^2 \frac{\tilde{E}}{\lambda^2} . \quad (3.4)$$

Здесь $F = \text{const}$ – площадь, м^2 ; $\lambda = L/r$ – гибкость стержня; r – радиус инерции сечения, м ; \tilde{E} может принимать значения: E , E_t , E_k .

Из (3.4) получим гибкость как функцию критического напряжения:

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{\tilde{E}}{\sigma_{\text{кр}}}} . \quad (3.5)$$

В [23] приведены данные об эксперименте по продольному изгибу дюралюминовых стержней прямоугольного сечения.



Пусть, например напряжение $\sigma_1(P_1/F)$ есть критическое (бифуркационное) напряжение для данного стержня. На диаграмме $\sigma : \varepsilon$ материала находим точку $(\sigma_1, \varepsilon_1)$, рис. 7, и в этой точке измеряем значение касательного модуля E_{t1} ; по формуле (3.3) определяем приведённый модуль E_{k1} .

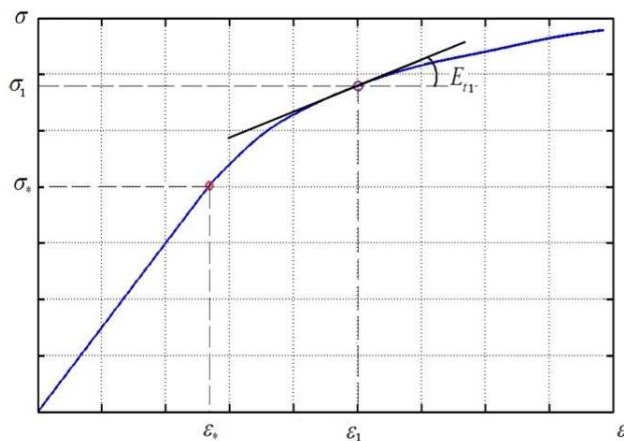


Рис. 7.

Далее вычисляются «критические» гибкости, соответствующие значениям найденных модулей:

$$\lambda_{t1} = \pi \sqrt{\frac{E_{t1}}{\sigma_1}}, \quad \lambda_{k1} = \pi \sqrt{\frac{E_{k1}}{\sigma_1}}. \quad (3.6)$$

Действуя подобным образом, можно построить графики $\sigma_{кр} : \lambda$, по которым для стержня данной гибкости можно оценить критическую силу. В литературе говорится о том, что экспериментальные точки $(\sigma_{кр}, \lambda)$ ложатся ближе к кривой $\sigma_{кр} : \lambda_t$, [22, 23, 24]. Заметим, что при построении кривых $\sigma_{кр} : \lambda$ начальный прогиб стержня не учитывается.

В работах [14, 15] приведены данные численных экспериментов, выполненных согласно описанному выше методу последовательных нагружений, для стержней с начальным прогибом (неизбежным в реальных условиях) для любых законов $\sigma : \varepsilon$. В работе [23] дана таблица значений $\sigma : \varepsilon$, соответствующая испытаниям на сжатие образцов из дюралюмина Д16Т.

Модуль упругости принят равным $E = 7.35 \times 10^{10} \text{Н/м}^2$ (в работе $E = 7.5 \times 10^9 \text{кгс/м}^2$); предел пропорциональности $\sigma_* = 1.96 \times 10^8 \text{Н/м}^2$ ($\sigma_* = 2 \times 10^7 \text{кгс/м}^2$).

Интерполируем кубическими сплайнами данные таблицы, чтобы получить более подробный график $\sigma : \varepsilon$ и в каждой точке вычисляем через разностную производную значение касательного модуля E_t . По формуле (3.3) получаем значения приведённого модуля E_k .

Зададим начальные прогибы $\{w_{0k}\}_{k=\overline{1,n}}$; по вычислительной методике, изложенной выше, [11, 12], определяем критические силы, т.е. силы, соответствующие исчерпанию несущей способности (наименьшие безразмерные силы, при которых нарушается условие $I > p$:

$$\{w_{0k}\}_{k=\overline{1,n}} \Rightarrow \{\tilde{p}_k\}_{k=\overline{1,n}}.$$



В силу определения безразмерной нагрузки имеем:

$$\tilde{p} = \frac{P_{кр}}{P_3} \Rightarrow P_{кр} = \tilde{p}P_3 = \tilde{p}\pi^2 \frac{EI}{L^2} = \tilde{p}\pi^2 \frac{EF}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \pi^2 \frac{\tilde{p}F}{\lambda^2}. \quad (3.7)$$

Задавая последовательность $\{\lambda_i\}$, получим по (3.7) значения критических напряжений для данного значения начального прогиба.

Для данного значения w_0 строится диаграмма $\sigma_{кр} : \lambda$. Полученная диаграмма «накладывается» на диаграммы работы [23]. В таблицах 1 и 2 показаны зависимости для «малого» и «большого» начальных прогибов.

Таблица 1

$$w_0 = 0.00001$$

λ	62,25	56,08	50,8	43,76	37,6	32,32	26,16	20
$\sigma_{кр} (\text{Н/м}^2 \times 10^{-8})$	1,87	2	2,12	2,38	2,49	2,64	2,88	3,05

Таблица 2

$$w_0 = 0.1$$

λ	62,2	56,08	50,8	43,76	37,6	32,32	26,16	20
$\sigma_{кр} (\text{Н/м}^2 \times 10^{-8})$	1,87	2,06	2,3	2,51	2,74	2,94	3,15	3,33

При сравнении наших зависимостей ($\sigma_{кр}, \lambda$) с построенными в [23] отмечаем тенденцию: при малых значениях w_0 точки графика ($\sigma_{кр}, \lambda$) в основном попадают на кривую ($\sigma_{кр}, \lambda_t$); при больших значениях w_0 точки ($\sigma_{кр}, \lambda$) попадают на кривую ($\sigma_{кр}, \lambda_k$), рис. 8.

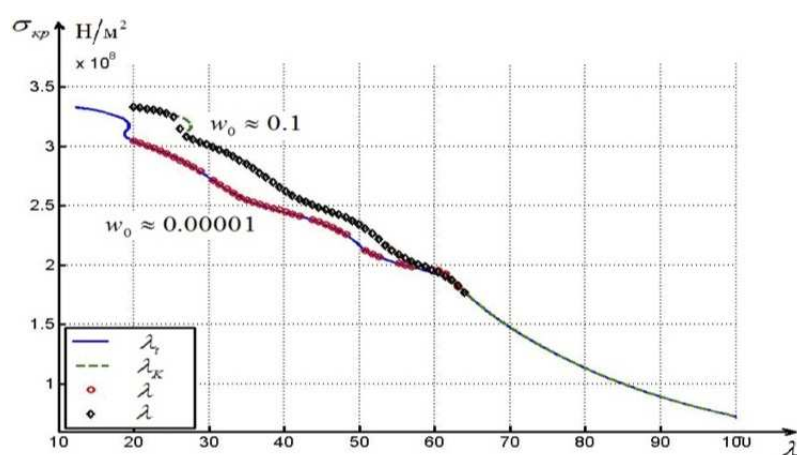


Рис. 8.

Отсюда заключаем: при малых значениях w_0 продольный изгиб происходит в основном без разгрузки (см. диаграмму $I : P$, рис. 9а); при больших w_0 – свою роль играет разгрузка в срединном сечении, рис. 9б.

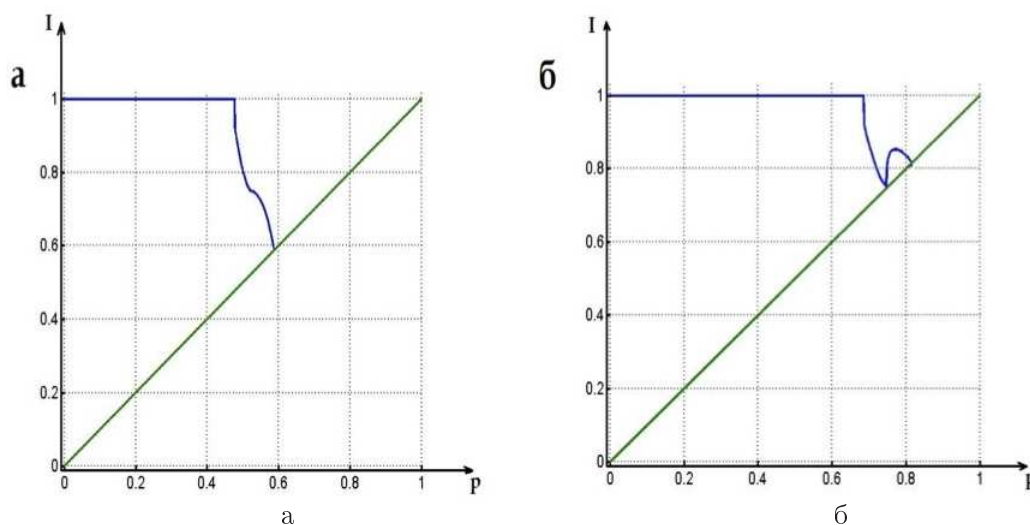


Рис. 9.

Подобная тенденция выявлена и при изменении скорости нагружения: при фиксированном w_0 и «быстром нагружении»: $\Delta p : 10^{-3}$ (здесь и далее под Δp подразумеваем минимальное по всем λ_t приращение безразмерной нагрузки) продольный изгиб протекает без разгрузки (жѐсткость срединного сечения постоянна, $I = 1$, затем монотонно падает) – концепция Шэнли [16], рис. 10а; при медленном нагружении, $\Delta p : 10^{-5}$, точки срединного сечения проходят все стадии диграммы $\sigma : \varepsilon$ – концепция Кармана, рис. 10в.

Обращаем внимание на следующее:

1). По сути своей касательно- и приведенно-модульный подходы аналогичны решению задачи методом коллокации по срединному сечению: по всему стержню считаем жѐсткости поперечных сечений по касательному или приведѐнному модулям.

2). В работах [11, 15] дано обоснование использования метода коллокации в задачах о продольном изгибе. В этом – объяснение факта совпадения диаграмм $(\sigma_{кр}, \lambda)$ с $(\sigma_{кр}, \lambda_t)$ или с $(\sigma_{кр}, \lambda_k)$.

Последнее зависит от начального прогиба и скорости нагружения.

3). Из определения устойчивости по Карману: во время изменения нагрузки принимаются меры к недопущению искривления и исследуется возможность бифуркации при постоянной нагрузке, [18].

Таким образом, в опытах Кармана скорость нагружения достаточно мала, поэтому точки $(\sigma_{кр}, \lambda)$ попадают на кривую $(\sigma_{кр}, \lambda_k)$, рис. 10в. При увеличении скорости нагружения, *продолжающееся нагружение*, [16], точки $(\sigma_{кр}, \lambda)$ группируются на кривой $(\sigma_{кр}, \lambda_t)$, рис. 10а.

Рис. 10б даёт представление о промежуточном случае: точки практически равномерно распределены между диаграммами $(\sigma_{кр}, \lambda_t)$ и $(\sigma_{кр}, \lambda_k)$.

4. Выпучивание в условиях ползучести. При изучении процесса выпучивания при ползучести за критерий «потери устойчивости» (достаточное условие) обычно принимается какая-то характерная особенность кривой «прогиб – время». Например, обращение прогиба в бесконечность при конечном времени [27], точка минимума [2],

точка перегиба [25, 26], обращение скорости прогиба в бесконечность (при конечном прогибе) [28]. Подробный обзор этих критериев содержится в монографиях [23, 24].

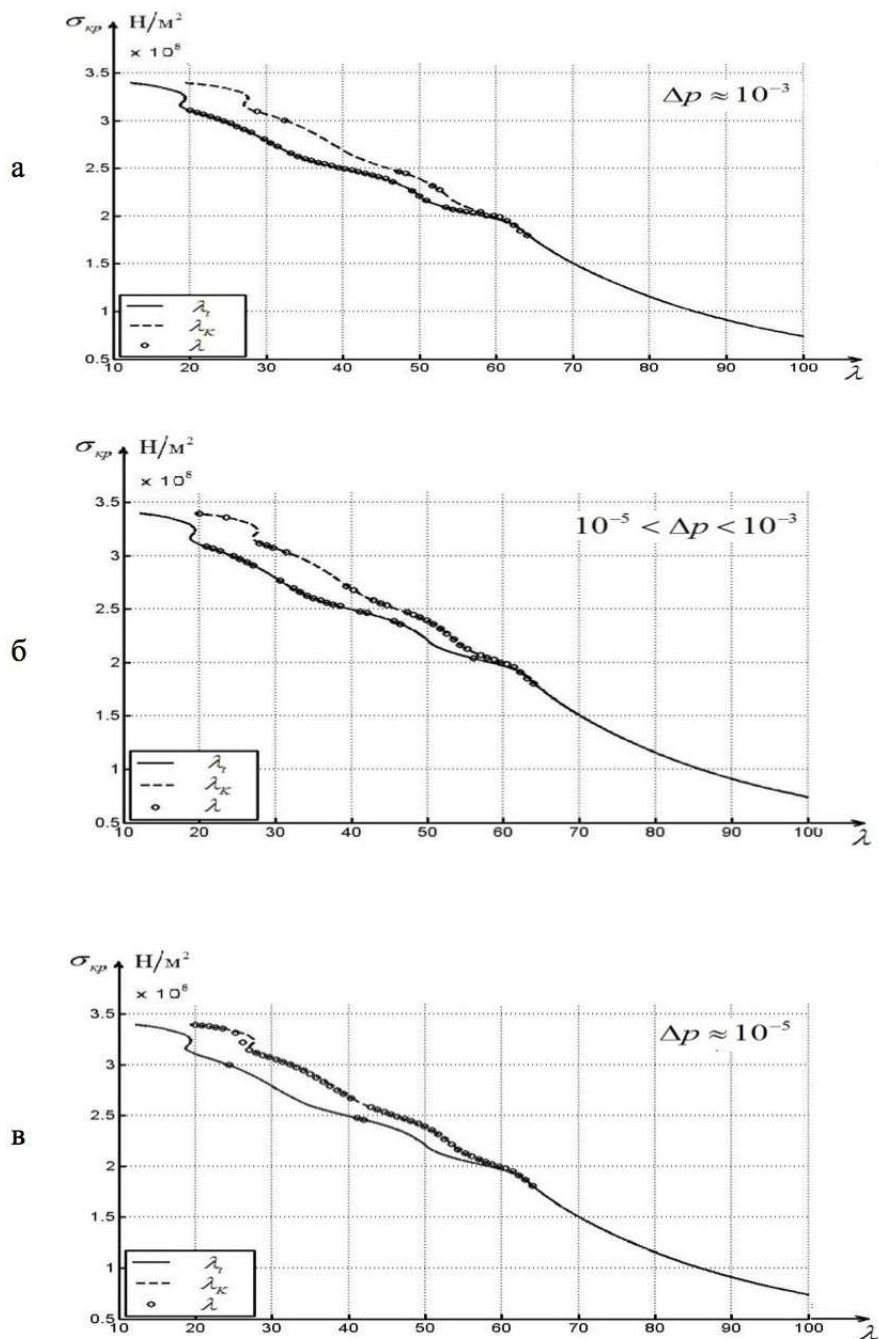


Рис. 10.

Пусть упруго-пластический стержень работает в условиях ползучести. Примем условие аддитивности для упругих, пластических и деформаций ползучести:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + f(\sigma) + \epsilon(\sigma, t). \quad (4.1)$$



Приложенная к стержню с начальной неправильностью $v_{00}(x)$ продольная сила квазистатически возрастает до значения p_0 . При этом стержень упруго-пластически нагружается, вычисляется его напряжённо-деформированное состояние (НДС) и достигнутый прогиб $v_0(x)$. Эти данные являются исходными для изучения процесса выпучивания под действием постоянной силы p_0 . Приводим основные результаты исследования, полученные в работе [11].

При линейном упрочнении и установившейся ползучести характерные зависимости «время–прогиб» (безразмерные величины) представлены на рис. 11.

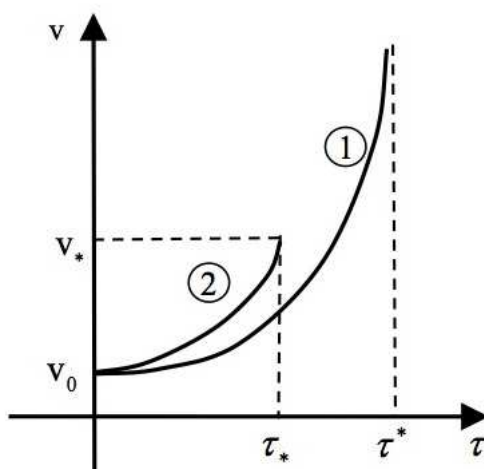


Рис. 11.

В этом случае различаются два вида характерных кривых $v : \tau$ в зависимости от соотношения между приложенной силой p_0 и касательно-модульной нагрузкой p_t (при условии $p_t > p_*$, для определённости).

При $p_t > p_0$ кривая $v : \tau$ имеет вертикальную асимптоту $\tau : \tau^*$, кривая 1, рис. 11; критическое время $\tau = \tau^*$ – «время жизни» конструкции. Здесь жёсткость на изгиб срединного сечения во всё время процесса больше приложенной силы: $I > p_0$.

При $p_0 > p_t$ имеются конечное время τ_* (критическое время) и конечный прогиб v_* : в точке (τ_*, v_*) скорость прогиба $\dot{v} \rightarrow \infty$. Точка (τ_*, v_*) характерна тем, что в ней $I = p_0$, т.е. нарушается корректность квазистатической постановки [13], рис. 11, кривая 2.

Результаты решения системы (1.17), (1.18) – значения v_* и τ_* отражены в небольших таблицах (4.2) и (4.4); $\sigma_* = p_* = 0,45$, скорость установившейся ползучести $\dot{\epsilon} = \sigma^7$.

1) Материал с линейным упрочнением: $\nu = E_t/E = 0,7$

$$\begin{aligned} p_0 &= 0,65 & 0,7 & 0,75 \\ v^* &= \infty & \infty & 0,71 \\ \tau^* &= 1,02 & 0,25 & 0,02 \end{aligned} \tag{4.2}$$

2) Материал с нелинейным упрочнением: $\epsilon = \sigma + A(\sigma - \sigma_T)^5$ ($A = 7/15$) (4.3)

$$\begin{aligned} p_0 &= 0,525 & 0,72 & 0,82 \\ v^* &= 1,12 & 0,46 & 0,22 \\ \tau^* &= 28,1 & 0,82 & 0,7 \end{aligned} \tag{4.4}$$



На рис. 12 показана кривая $v : \tau$, соответствующая процессу выпучивания стержня с упруго-пластической диаграммой $\sigma : \varepsilon$ (4.3) и законом ползучести по теории упрочнения [2]: $\dot{\varepsilon}\varepsilon^\alpha = \sigma^7$. На этой кривой ($\alpha = 1, p_0 = 0.72, v_{00} = 0.01$) имеются характерные точки: $\tau = \tau_1$ – точка перегиба графика; (τ^*, v^*) – точка, где выполняется условие $I = p_0$ и $\dot{v} \rightarrow \infty$.

Отметим, что с ростом показателя степени α отношение $\tau_1/\tau^* \rightarrow 1$, т.е. критерий $v''(\tau_1) = 0$ [25, 26] сближается с условием $I = p$.

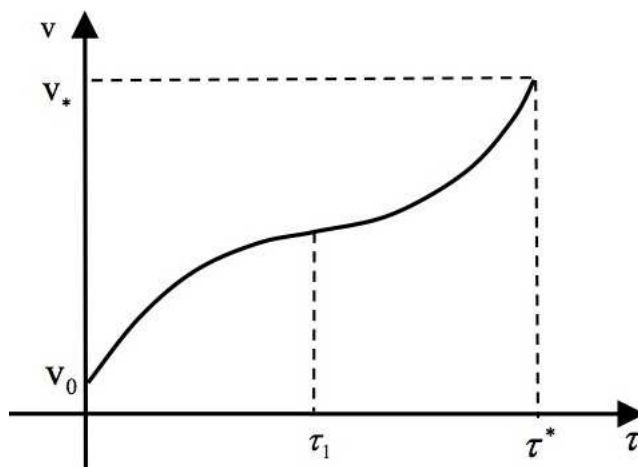


Рис. 12.

Итак, представленные в данной работе исследования показывают, что большинство известных «критериев устойчивости» как для упруго-пластического деформирования, так и для условий ползучести, имеют весьма ограниченную область применения, либо вообще не отражают никаких особенностей на кривых $v : p$ или $v : \tau$.

Условие $I > p$ можно считать наиболее общим условием, при выполнении которого квазистатическая постановка корректна (непротиворечива). Очевидно, что в общем случае необходимо решать задачу о продольном изгибе или выпучивании с учётом всей истории нагружения в каждой точке стержня. Однако расчёты показали, что процесс вычислений можно существенно упростить, используя метод коллокации.

Замечание. Отметим, что условие $I > p$ есть по сути развитие концепции Хоффа-Веубеке [27, 28]: при выпучивании стержня (в условиях ползучести) под действием постоянной силы жёсткость срединного сечения с течением времени непрерывно падает (см. зависимость $\sigma : \varepsilon$ (4.3)) и, наконец, в момент $\tau = \tau^*$ становится равной приложенной силе, т.е. любая приложенная сила становится в момент $\tau = \tau^*$ критической по Эйлеру.

Литература

1. Ванько В.И. Продольный изгиб и выпучивание. Часть I: Модель Шэнли // Научные ведомости. Математика. Физика. – 2014. – №5 (176); 34. – С.112-125.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / М.: Физматгиз, 1966. – 752 с.
3. Макаров Б.П. О поведении сжато-изогнутых стержней в пластической стадии // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1965. – №5. – С.35-37.



4. Ježek K. Die Tragfähigkeit des exzentrisch beanspruchten und des querbelasteten Druckstabes aus einem ideal plastischen Stahl // Sitzungsberichte der Academie der Wissenschaften in Wien. – Abteilung IIa. – 1934. – В.143; 7. – S.339-366.
5. Ржаницын А.Р. Процессы деформирования конструкций из упруго-вязких элементов // ДАН СССР. – 1946. – ЛП; №1. – С.25-27.
6. Багиров И., Шестериков С.А. Вязкоупругие идеальнотрещиновые стержни // МТТ. – 1966/ – №4. – С. 124–127.
7. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / М.: ГИТТЛ, 1957. – 476 с.
8. Lin T.-H. Creep stress and deflections of columns // JAS. – 1950. – 17, №3. – P.159– 172.
9. Libove C. Creep buckling of columns // JAS. – 1952. – 19, №7. – P.459–467.
10. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Часть I / М.: Наука. – 632 с.
11. Ванько В.И., Шестериков С.А. Продольный изгиб и выпучивание // МТТ. – 1967. – №2. – С.157–162.
12. Ванько В.И. Продольный изгиб упругопластического стержня // МТТ. – 1968. – №4. – С.171–174.
13. Ванько В.И. О критериях выпучивания в условиях ползучести // ПМТФ. – 1965. – №2. – С.127-130.
14. Перельгина Е.С. Математическое моделирование продольного изгиба стержня с произвольной диаграммой $\sigma \sim \varepsilon$ // Необратимые процессы в природе и технике: Труды VI Всеросс. Конф. – 2011, Часть II / М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана. – 342 с.
15. Перельгина Е.С. О продольном изгибе упругопластического стержня с произвольной диаграммой $\sigma \sim \varepsilon$ // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Спец. выпуск: Прикл. математика. – 2011. – С.177-184.
16. Shanley F. Inelastic column theory // JAS. – 1947. – 14; №5. – P.261-267.
17. Работнов Ю.Н. О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности // Инж. сборник. – 1952. – XI. – С.123-126.
18. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов / М.: Физматгиз, 1962. – 456 с.
19. Пановко Я.Г. О критической силе сжатого стержня за пределом пропорциональности // Инж. сб. – 1954. – XX. – С.160-163.
20. Лепик Ю.Р. О равновесии сжатых упруго-пластических стержней // ПММ. – 1957. – XXI. – С.101–108.
21. Лепик Ю.Р. Изучение послекритической стадии сжатого упруго-пластического стержня с учетом вторичных пластических деформаций // Уч. записки Тартуского гос. университета. Труды по математике и механике. – 1959. – Вып.73. – С.168–178.
22. Kármán Th., von Die Knickfestigkeit gerader Stübe // Physikalische Zeitschrift. – 1908. – В.8, S.136 (см. Kármán Th., von Collected Works. Vol. 1: 1902-1913 / London: Butter Worths Scientific Publications, 1956. – 531 с.).
23. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем / М.: Физматгиз, 1963. – 880 с.
24. Зубчанинов В.Г. Устойчивость / Учебное пособие. Часть 1 / Тверь: Тв. политехн. ин-т, 1995. – 200 с.
25. Шестериков С.А. О критериях устойчивости при ползучести // ПММ. – 1959. – 23;6. – С.1101-1106.
26. Куршин Л.М. Устойчивость стержней в условиях ползучести // ПМТФ. – 1961, – №6. – С.128-135.
27. Hoff N.J. Creep Buckling // The Aeronautical Quarterly. – 1956. – 7; №2. – P.1-20.
28. Veubeke F. Creep Buckling // Chapter 13 in Temperature effects in Aircraft Structures / N.-Y.: Pergamon Press, 1958. – 420 с.
29. Ванько В.И., Перельгина Е.С. Продольный изгиб упругопластического стержня: обсуждение классических результатов // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Серия «Естественные науки». Спец. выпуск Прикл. математика. Часть 2. – 2012. – С.9–15.
30. Engesser F. Über Knickfestigkeit // Schweiz. Bauzeitung. – 1895. – В.26; 24.



31. Jasinski F. Zu den Knickfragen // Schweiz. Bauzeitung. – 1895. – В.26;24 (см. Ясинский Ф.С. Избранные труды / М.: ГТИ, 1952. – 428 с.).

**LONGITUDINAL BEND AND SWELLING.
Part II: ROD OF COMPLETE CROSS SECTION**

V.I. Vanko, E.S. Perelygina

Bauman MSTU
2d Bauman St., 5, Moscow, 105005, Russia, e-mail: vvanko@mail.ru

Abstract. Processes of longitudinal bend and swelling of the rod with complete cross section are studied at the condition of material creep. Elastic-plastic properties of the rod material are described by an arbitrary diagram $\sigma \sim \varepsilon$. By the numeric experiment it is proved that the exhausting of bearing ability of the rod (the correctness destruction of quasistatic setting) occurs at the condition when applied longitudinal force is equal to the rigidity of the center cross section (at dimensionless parameters).

Key words: rod of complete cross section, diagram $\sigma \sim \varepsilon$, creep, correctness, quasistatic setting, rod bearing ability.



MSC 80A30

SPREADING OF A SATURATION FRONT OF HETEROGENEOUS CHEMICAL REACTION THROUGH AN AEROSOL CLOUD

*G.A. Khomenko, **P.O. Mchedlov-Petrosyan, ***W.B. Zimmerman

*Laboratoire d'Océanographie Côtière du Littoral, ELICO, Université du Littoral Côte d'Opale, MREN,
32, Avenue Foch, 62930, Wimereux, France;

**NSC Kharkov Institute of Physics and Technology, ITP,

1, Akademicheskaya Str. Kharkov, 61108, Ukraine, e-mail: peter.mchedlov@free.fr;

***University of Sheffield, Dept. of Chemical and Process Engineering,

Newcastle St., Sheffield S1 3JD, England

Abstract. A cloud of aerosol particles sediments in air containing reactants. On the basis of a macroscopic chemical and mass transfer model founded on the kinetic theory of heterogeneous reactions we analyzed the spreading of chemical reaction through the cloud of aerosol particles. In this paper we considered a binary reaction with one volatile and one non-volatile product at the surface of aerosol particles. If the finite saturation capacity with respect to non-volatile reaction product accumulated in the droplet is taken into account, the eventual deceleration of the reaction results in the propagation of a saturation front. The spatial distributions of concentrations and their evolution in time are determined, as well as the velocity of saturation front.

Key words: aerosol, droplet, heterogeneous chemical reaction, mass transfer.

1. Introduction. Heterogeneous chemical reactions are known to play an important role in a wide class of geophysical phenomena, including atmospheric processes [1]. This was first recognized in the late 1970s for the production of H_2SO_4 and HNO_3 in acid rain [2]. Their critical role for the depletion of stratospheric O_3 was established in the late 1980s [3]. While the “homogeneous” chemistry of most of the processes is quite well understood, their «heterogeneous» counterparts still remain the subject of considerable debate (see, e.g., [3], pp. 216-229). The term «heterogeneous» is used both for true heterogeneous reactions taking place at the surface of a particle or a liquid droplet and for the reactions that occur homogeneously in the dispersed condensed phase [1]. In the present work we consider the former type.

The theory of heterogeneous reactions of gas with individual liquid droplets is considered in many papers [4–6] and books [7] and [8]. This overall process includes several steps: mass transfer of reacting species in gaseous phase, adsorption or/and mass transport across the aerosol surface, chemical reaction at the surface, mass transport and the chemical reaction within the liquid droplets, possible evolution of volatile product species into the gas phase, and subsequent gas-phase mass transport of the evolved gaseous product. Some of the steps may become rate-limiting. In order to evaluate the rate of the overall process one needs to identify such a step (or steps) and to evaluate the rate of such step(s). If the mass-transport processes are essentially faster than the chemical reactions, then the rate of the overall process is governed essentially by chemical kinetics. In the opposite limit, for very fast reactions, the overall process is controlled by the rate of gas-phase mass transport [4].



Investigations in atmospheric physics and chemistry are often aimed at understanding and predicting space-time distributions of reactants and reaction products at macroscopic scales (at the scales much larger than the size of aerosol particles and their mutual distances) which is important for predicting air pollution at regional and global scales as well as for climatology. The importance of heterogeneous atmospheric reaction is now commonly recognized (see e.g. [9] and [8]). The first generation of global multiphase atmospheric models were termed equilibrium models [10,11]. However it was soon recognized [11,12] that no such equilibrium is ever attained. So the problem of treating the time-dependent mass exchange, uptake and production due to chemical reaction arises. The kinetic expressions, once obtained, usually are incorporated into elaborate global models, which include tens of reactants and hundreds of reactions. However, the fully nonlinear description of the chemical kinetics is computationally demanding and often introduces instabilities. Therefore, the treatment of heterogeneous reactions is typically simplified by the assumption of excess of one of the reactants [2,9,13,14].

In the present paper we apply a macroscopic approach proposed in the chemical reactor engineering context by [15–19] to describe the spatial-temporal distribution of reactants and the product for fast binary heterogeneous reactions in a cloud of liquid droplets. The theory has been experimentally validated in two phase liquid-liquid chemical reactors by [20,21]. The treatment here takes into account a second order fast irreversible reaction at the surface of the droplets, overall mass transfer due to bulk convection as well as due to turbulent diffusion. The heterogeneous character of the chemical reaction is taken into account by distinguishing the mean reactant concentration in the bulk fluid and the mean local concentrations at the surfaces of particles as macroscopic variables of the model. The resulting model, which is described in the next section, is non-linear, yet it admits an analysis by approximation theory in closed form. We show below for an example of a single binary heterogeneous reaction, that the reactant which is in a global excess still may be in local (at the reactive surface) deficit in some space-time domains if the local mass transfer between particles and gas phase is taken into account properly. If the finite capacity with respect to non-volatile reaction product accumulated in the droplet is taken into account, the eventual deceleration of the reaction results in the spreading of a saturation front. This qualitative effect is targeted in the present communication. The spatial distributions and their evolution in time of concentrations are determined, as well as the velocity of saturation front. Contrary to the common practice of dealing with a binary heterogeneous reaction, we do not *a priori* assume local excess of one of the reactants. Our analysis reveals coexistence of a spatial domain where one reactant is in local excess with another domain where the other reactant is in excess and the first one is depleted.

We applied our theory to a particular type of reaction where gaseous reactants are distributed in the air, but one of the reaction products is gaseous and the other one is non-volatile. The latter product is soluble and accumulates in the droplets. Reactions of this kind play an important role in the chain of reactions of ozone depletion in polar stratospheric clouds. As an example we considered the binary chemical reaction of chlorine nitrate ClONO_2 and HCl yielding the gaseous product Cl_2 , and the non-volatile product HNO_3 . These reactions are well known to be slow in the gaseous phase even at room



temperature; they become feasible only as a result of hydration on the surface of liquid droplets and the formation of ionic intermediates [3]. The particles are assumed to be of the kind normally referred to as polar stratospheric clouds type Ib, that is supercooled ternary $\text{H}_2\text{SO}_4/\text{HNO}_3/\text{H}_2\text{O}$ solutions. The non volatile product HNO_3 is taken up by droplets which finally turn into quasi-binary $\text{HNO}_3/\text{H}_2\text{O}$ droplets with close to 1:3 stoichiometry. This reaction is considered in the literature to be practically irreversible under stratospheric conditions [3].

The paper is organized as follows. In the section 1 we describe the macroscopic model that is applied in the section 3 to study macroscopic dynamics of spatial distributions of concentrations of the reactants and the reaction products when a cloud of liquid droplets sediments in the stratosphere. It is assumed that the binary reaction takes place on the surface of aerosol particles. If the finite solubility capacity of droplets is taken into account, the theory predicts formation of a stationary advancing reaction saturation front. In the section 4 we applied the theoretical results to the above mentioned stratospheric reaction and give numerical estimates for this case. We discuss in the same section the results obtained and the accuracy of approximations. The details of calculations are presented in Appendices A, B, and C.

2. The model. We consider an ensemble of identical droplets sedimenting in air with constant velocity determined by the balance of gravitational force and Stokes friction. Premixed reactants A_1 and A_2 , with concentrations c_1 and c_2 react on the surface of the liquid droplets, a single gaseous product A_3 with a concentration c_3 is injected to the air. Since the reaction is fast at the surface of aerosols and is slow in the bulk air, the heterogeneous nature of the reaction should be taken into account and will effect macroscopic dynamics.

At the scale of a single particle both molecular diffusion and convection contribute to the 3-dimensional mass transport between the local gas and the droplet, however, for the particular problem addressed in the present paper, mass transport at the particle scale is approximated by molecular diffusion. Thus the flux densities to/from the surface $j_i^{(s)}$ are driven by the difference between bulk c_i and surface $c_i^{(s)}$ concentrations

$$j_i^{(s)} = \kappa_i \left(c_i - c_i^{(s)} \right) , \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

where κ_i are the mass transfer coefficients. The bulk concentrations c_i are defined as concentrations of reagents and reaction product far away from the aerosol particles (that is at distances much larger than the particle size) and the surface concentrations $c_i^{(s)}$ are defined as values of the concentrations at the surface of aerosol particles. The difference between bulk and surface concentrations is maintained by chemical reaction at the surface. Concentrations c_i and $c_i^{(s)}$ are measured in mole fractions and therefore are non-dimensional.

To determine the fluxes of reactants to the particles, it is necessary to evaluate, in the vicinity of each particle, the distribution of concentrations, which approaches concentration $c_i^{(s)}$ at the surface and c_i far from the particle. Implicit in the definition of the mass transfer coefficients κ_i , both molecular diffusion and convection contribute to the mass transport between the local gas and the droplets, which move relative to the surrounding gas. For the particular example which is considered in the present paper, Stokes sedimentation



at low Reynolds and Péclet numbers of the small particles is assumed (see section 4). Equation (1) $j_i^{(s)}$ follows from the solution of the steady diffusion problem. The overall large-scale gradient introduces slight anisotropy, however for a purely diffusion problem the corresponding corrections will be of the order of the ratio: (particle size)/(scale of the overall gradients). To apply the model to larger particles or faster flow, known correlations for κ_i may be used [6,6,7] and [8]. We consider a dilute suspension of droplets following the estimate of the mean ratio of diameter to inter-drop spacing in clouds less than 10^{-2} [4]. Consequently, the local concentration distributions around a particle is unaffected by the presence of other particles.

For binary surface reaction of first order with respect to each reagent, the reaction rate R is given by the kinetic mass action law:

$$R = k \left(c_1^{(s)} c_2^{(s)} - \frac{1}{K} c_3^{(s)} \right), \quad (2)$$

where k is the reaction rate coefficient and K is the equilibrium constant. The latter equation implicitly assumes that the adsorption/desorption kinetics for reagents and product is fast and that it is not rate-limiting. Equation (2) also implies that the relative surface coverage is low. Discussion of the rate (2) is given in the Appendix A). For further discussion see also [19].

The rate of generation of the product at the surface (per unit of surface, per unit of time) equates to the absolute value of the flux density of the volatile product from the surface in a pseudo-steady-state. Due to stoichiometry, the flux density of the reagents to the surface is $j_1^{(s)} = j_2^{(s)} = -j_3^{(s)} = R$ or:

$$\kappa_1 \left(c_1 - c_1^{(s)} \right) = \kappa_2 \left(c_2 - c_2^{(s)} \right) = \kappa_3 \left(c_3^{(s)} - c_3 \right) = R. \quad (3)$$

The «microphysics» of the model is contained in this equation. In the present communication we assume the reaction to be fast, i.e. the external mass transfer in the gaseous phase to be rate-limiting, see [4,5] and [6]. This means that the ratio of the mass transfer coefficients κ to surface reaction rate constant k is large $\kappa/k \ll 1$ (since concentrations c_i are measured in dimensionless units, κ and k for the surface reaction are measured in the same units).

Our goal at this stage is to elaborate macroscopic equations to describe dynamics of concentrations at large scales. Therefore, we need to average out small scale phenomena at the single particle scale, but to take into account the mean effect of heterogeneous reaction to large scale dynamics. Thus, we need to introduce mean variables, averaged over an ensemble of particles. At this point we introduce the concept of *local concentration*. The local concentrations \tilde{c}_i of species result from averaging of surface concentration $c_i^{(s)}$ over all condensed phase particles of the same size in a physically small volume, positioned at a point with coordinates (x, y, z) , at the time t , that still contains a big number of aerosol particles. A size of this volume is supposed to be smaller than the typical scale of bulk gradients (cloud scale), but much larger than the droplet size. Thus, for a macroscopically nonuniform system, the local concentrations $\tilde{c}_i(t, x, y, z)$ are macroscopic variables, depending on macroscopic time and on large scale coordinates. We consider here an ensemble of identical particles,



that is monodisperse aerosols. In this case, the averaging procedure is simplified and one can associate the local concentrations \tilde{c}_i with mean values of surface concentrations $c_i^{(s)}$. That allows the next step – to average out surface concentrations in the mass action law (3) and to arrive at equations for macroscopic variables c_i and \tilde{c}_i only:

$$\kappa_1 (c_1 - \tilde{c}_1) = \kappa_2 (c_2 - \tilde{c}_2) = \kappa_3 (\tilde{c}_3 - c_3) = k \left(\tilde{c}_1 \tilde{c}_2 - \frac{1}{K} \tilde{c}_3 \right). \quad (4)$$

Now we turn to the macrophysics of the problem. At large scales (a cloud scale) the dynamics of bulk concentrations c_i is governed by three mass-conservation equations that take the form of the advection-diffusion equations with the source/sink term Φ_i in the right-hand side

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla c_i = D \nabla^2 c_i - \Phi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

where D is the dispersion coefficient and $\mathbf{U} = \text{const}$ is the velocity of superficial uniform flow in the frame of reference attached to the sedimenting droplets. At the cloud scale, that is at the scale which is much larger than the size of a single droplet, dispersion is due to turbulent mixing, so D may be identified as the turbulent diffusion coefficient and Φ_1, Φ_2 are sinks and Φ_3 is a source due to chemical reaction. The difference in scales allows us to treat the mesoscale (scale of a single particle) transport by introducing macroscopic distributed sink and source terms Φ_i in (5), phenomenologically averaging out mesoscale phenomena such as local mass transfer to and from the droplet surfaces. Using c_i and \tilde{c}_i introduced above, we write the sink and source terms in the conventional way

$$\Phi_i = S \kappa_i (c_i - \tilde{c}_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

where S is the reactive surface per unit volume.

For uniform overall flow the macroscopic transport is essentially one dimensional. Thus, bulk concentrations $c_i(t, z)$ and the local concentrations $\tilde{c}_i(t, z)$ depend on time and a single macroscopic coordinate z . This, particularly, is a reasonable approximation for sedimenting particles.

Substituting equations for the Φ_i (6) into (5) and taking into account the effective one-dimensionality of the macroscopic fluxes one arrives at

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial c_i}{\partial z} = D \frac{\partial^2 c_i}{\partial z^2} - S \kappa_i (c_i - \tilde{c}_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

where $\mathcal{U} = |\mathbf{U}|$ and z is a macroscopic coordinate in the direction of the uniform flow \mathbf{U} .

For further analysis it is convenient to put the equations in non-dimensional form. All concentrations are measured in mole fractions and are already non-dimensional. The characteristic time scale τ for the local mass transfer is $\tau = [S \kappa_2]^{-1}$. The characteristic length of turbulent diffusion during the time τ is $l = \sqrt{D\tau} = \sqrt{D/S \kappa_2}$. The intrinsic scale l appears in the problem due to distinction between the bulk and local concentrations. The dimensionless time and coordinate are $t' = t/\tau$; $x = z/l$ respectively. We define also the dimensionless parameters $\eta = k/\kappa_2$; $\nu_1 = \kappa_1/\kappa_2$; $\nu_2 = 1$; $\nu_3 = \kappa_3/\kappa_2$; and $p = \mathcal{U}l/D$. The



latter combination looks like a Péclet number; however, it is not a usual Péclet number, because D is not a molecular, but eddy diffusivity and the corresponding lengthscale l is not a geometrical size, but the intrinsic length characterizing the heterogeneous reaction. Finally, in the non-dimensional form, the basic system of equations reads:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t'} = \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - p \frac{\partial c_1}{\partial x} - \nu_1 (c_1 - \tilde{c}_1), \quad (8)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t'} = \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} - p \frac{\partial c_2}{\partial x} - (c_2 - \tilde{c}_2), \quad (9)$$

$$\frac{\partial c_3}{\partial t'} = \frac{\partial^2 c_3}{\partial x^2} - p \frac{\partial c_3}{\partial x} - \nu_3 (c_3 - \tilde{c}_3), \quad (10)$$

$$\nu_1 (c_1 - \tilde{c}_1) = (c_2 - \tilde{c}_2) = \nu_3 (\tilde{c}_3 - c_3) = \eta \left(\tilde{c}_1 \tilde{c}_2 - \frac{1}{K} \tilde{c}_3 \right). \quad (11)$$

This closed system (8)-(11) is strongly nonlinear due to the nonlinear coupling between the bulk and local concentrations introduced by the equation (11). The equations (8)-(11), with suitable initial and boundary conditions, are a differential algebraic system (DAE), with three partial differential equation (PDE) constraints and three nonlinear algebraic constraints. DAEs are notoriously stiff, requiring careful numerical integration schemes to avoid instability. The model in this form in the context of heterogeneous chemical reactors theory was introduced and analyzed in [15–19].

In present communication we consider a particular type of heterogeneous reaction of two gaseous reactants with two reaction products, one of them is gaseous and the other one is non-volatile. The latter product is soluble and accumulates in the droplets. It is reasonable to assume that the concentrations of the non-volatile product at the surface of the droplet and inside the droplet rapidly reach the thermodynamic equilibrium described, e.g., by Henry's law. When a non-volatile product of reaction accumulates within the droplet, the ratio of reverse to forward reaction rates is increased. Therefore, due to shift of thermodynamic equilibrium with respect to solubility, the forward reaction eventually stops. Instead of following a gradual change of the equilibrium, we introduce the assumption of a finite capacity of droplets, due to solubility limitations, which yields a physically similar effect. Supposing that a cloud of droplets has a finite capacity for the accumulated species per unit volume $Q = (\text{number of molecules, stored in a droplet}) \times (\text{number of droplets per unit volume})$, we assume quenching of the reaction when the actual amount of non-volatile product in the droplets reaches this value (see Fig. 1). Due to stoichiometry, the amount of non-volatile product is proportional to the consumed amount of each reactant. Mathematically, the finite solubility assumption results in the imposition of an additional integral condition:

$$N \int (c_2 - \tilde{c}_2) dt = Q \quad (12)$$

where the integral is taken over time to saturation and N is the number of molecules per unit volume in the atmosphere. Despite the «kinematic appearance» of this constraint, it originates from thermodynamic equilibrium.

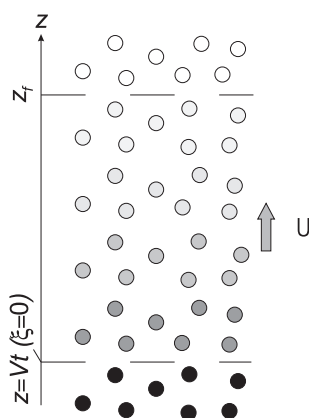


Fig. 1. Schematic presentation of the model: a uniform air flow with velocity U through a cloud of liquid particles. The downwards gradually increasing grayscale intensity corresponds to increasing content of non-volatile product. z_f is the far boundary of the reaction domain, where reaction starts; $z = Vt$ is the position of saturation front, where the reaction ceases.

Additionally, assuming that the macroscopic scale L over which concentration changes is much less than the extent of the spatial domain, we analyze our model over an infinite domain.

3. Propagating saturation front. In this section we study the propagation of the reaction front through a cloud of aerosol droplets. When the air flow, containing premixed reactants A_1 and A_2 , enters the cloud, the reaction starts at the surface of the droplets. After a certain time, due to the finite capacity of droplets, the reaction ceases. Therefore, one can subdivide the whole domain into three regions: one where reaction has not yet started, the reaction zone, and the region where particles are already saturated with a non-volatile product and thus there is no reaction despite of the presence of both reactants in the surrounding air. Introducing the non-dimensional velocity v of the saturation front, we make a coordinate transformation to the frame moving with this front (see Fig. 1). The velocity V in Fig. 1 is related to non-dimensional velocity v by $V = vl/\tau = v\sqrt{DS\kappa_2}$. Defining the new coordinate by $\xi = x - vt'$, and looking for stationary solutions in the moving frame, equations (8)-(10) for the reaction zone take the form

$$\frac{\partial^2 c_i}{\partial \xi^2} - s \frac{\partial c_i}{\partial \xi} = \nu_i (c_i - \tilde{c}_i) ; \quad i = 1, 2, 3, \tag{13}$$

where $s = p - v$ and due to our normalization $\nu_2 = 1$. It is worth noticing that a stationary solution exists only in this reference frame; both in the frame coupled with the particles and in the frame moving with the overall flow, the process is essentially non-stationary.

In the domains without reaction the governing equations are

$$\frac{\partial^2 c_i}{\partial \xi^2} - s \frac{\partial c_i}{\partial \xi} = 0 ; \quad i = 1, 2, 3. \tag{14}$$

The above equations should be supplemented by boundary conditions. In the domain $-\infty < \xi < 0$ the droplets are saturated by the non-volatile product. The spatial distribution



of concentrations is governed by the equations (14). The boundary conditions are

$$c_1|_{\xi \rightarrow -\infty} = c_1^\infty, \quad (15)$$

$$c_2|_{\xi \rightarrow -\infty} = c_2^\infty, \quad (16)$$

$$c_3|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0. \quad (17)$$

In the reaction zone, $0 < \xi < \xi^*$, the concentrations are governed by the equations (11) and (13). The far boundary of this domain ξ^* corresponds to the point where the bulk concentrations of all components equal their local (surface) concentrations, that is, the difference $\varphi = c_2 - \tilde{c}_2$ vanishes. For $\xi^* < \xi < \infty$ the concentrations are again governed by equations (14). For $\xi \rightarrow \infty$ all concentrations approach constant values. At $\xi = 0$ and $\xi = \xi^*$ the bulk concentrations and fluxes of all species are continuous.

In the present paper we consider an irreversible reaction, that is K , which is the ratio of reaction rate constants for the forward and reverse reactions tends to infinity. This means the limit $1/K \rightarrow 0$ in the kinetic mass action law, last equality in (11) reads

$$\nu_3 (\tilde{c}_3 - c_3) = \eta \tilde{c}_1 \tilde{c}_2. \quad (18)$$

As already mentioned above, we assume reaction to be fast as compared to the external mass transfer in the gaseous phase [4], [5] and [6]. This means that $\eta = k/\kappa_2$ tends to infinity $\eta \rightarrow \infty$ and the quasi-stationary surface constraint (18) at leading order reads

$$\tilde{c}_1 \tilde{c}_2 = 0. \quad (19)$$

This equation means that for fast irreversible reaction in vicinity of the surface of a droplet at least one of the reactants is *completely* depleted. This does not mean, of course, the quenching of the reaction but just the immediate consumption of the reactant that is locally in deficit as it arrives at the surface of the droplet. For a single component such a situation at the surface of an individual particle is referred to as the «ideally absorbing condition» [4]. For the fast irreversible binary *homogeneous* reaction in a liquid layer a similar approach was developed by [24].

The non-linear analytic solution for large, but finite K and for large and finite η are also available [15] and [19]. The evaluation of corrections to this theory becomes essential for multiple reactions systems.

The equations governing the concentration of the product c_3 are decoupled in the limit (19) from the equations governing concentrations of the reactants. Thus, the distribution of the product may be evaluated afterwards. In addition, the far boundary ξ^* of the reaction domain (i.e. z_f in laboratory frame, (see Fig. 1) is taken to infinity. Thus, only the reaction zone $0 < \xi < \infty$ and the «saturated» region where the reaction is switched off $-\infty < \xi < 0$ remain.

From the overall conservation of mass, see Appendix B, or alternatively, from smooth matching of solutions in reactive and non-reactive domains, it follows that s should be



positive. This implies that $v < p$, that is the saturation front moves slower than the flow. The general solutions of equations (14) in the non-reactive domain are

$$c_i = a_i \exp\{s \xi\} + c_i^\infty; \quad \xi < 0; \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

where a_1 and a_2 are constants to be determined from the smooth matching of the solutions in adjacent domains.

Let us consider some global corollaries of (19). As mentioned above, the local concentration of at least one reactant is completely depleted, while the bulk concentrations c_1, c_2 remain nonzero for any finite ξ ; the bulk concentration of the reagent which is in overall deficit (as compared to stoichiometric ratio) approaches zero in the limit $\xi \rightarrow \infty$. Obviously, either \tilde{c}_1 or \tilde{c}_2 may be zero everywhere, just because of an overall deficit of A_1 or A_2 respectively. However, the non-trivial possibility is the coexistence of domains of local depletion of different concentrations. This means that while in the vicinity of the surfaces of all particles in some macroscopic domain say, the reagent A_1 is depleted, in the adjacent macroscopic domain in the vicinity of the surfaces of all particles are depleted is the reagent A_2 . We show below that the necessary, but not sufficient condition for this to happen is the difference of the rates of local mass transfer. Generally, there are four possibilities:

1. A_1 is in excess everywhere, that is due to the deficit of A_2

$$\tilde{c}_2 = 0, \quad \tilde{c}_1(\xi) \neq 0, \quad 0 < \xi < \infty; \quad (21)$$

2. A_2 is in excess everywhere, that is due to the deficit of A_1

$$\tilde{c}_1 = 0, \quad \tilde{c}_2(\xi) \neq 0, \quad 0 < \xi < \infty; \quad (22)$$

3. Both reactants are completely depleted due to the reaction. Suppose, that the reactant A_1 is more depleted near the origin ($\xi = 0$), that is the local (in the vicinity of the particle surface) concentration \tilde{c}_1 equals to zero. The reactant A_2 is more depleted far away from the origin; in that domain the local concentration \tilde{c}_2 in the vicinity of the particle surface is zero. The self-consistency of these assumptions will be verified later. There must be a point $\xi = X$, such that

$$\tilde{c}_1 = 0, \quad \tilde{c}_2(\xi) \neq 0, \quad 0 < \xi < X, \quad (23)$$

$$\tilde{c}_1(\xi) \neq 0, \quad \tilde{c}_2 = 0, \quad X < \xi < \infty; \quad (24)$$

4. Again both reactants are essentially depleted, but now the reactant A_2 is more depleted near the origin ($\xi = 0$). For this case

$$\tilde{c}_1(\xi) \neq 0, \quad \tilde{c}_2 = 0, \quad 0 < \xi < X, \quad (25)$$



$$\tilde{c}_1 = 0, \quad \tilde{c}_2(\xi) \neq 0, \quad X < \xi < \infty. \quad (26)$$

Of course, only two of these possibilities are physically different, therefore we consider below only cases 1 and 3. We would like to note here that the non-linear basic system degenerates in this limit to piecewise-linear system in adjacent spatial domains in cases 3 and 4. Thus, the problem remains non-linear due to the matching of the solutions in the adjacent domains. The fully nonlinear analysis by [15], [19] reveals the piecewise solution to be the correct leading order approximation in both small parameters proportional to $1/K$ and $1/\eta$.

The cases 1 and 2 are simpler. The conditions (21) and (22), respectively, linearize the system. For the first case, for $\tilde{c}_2 = 0$, $\tilde{c}_1 \neq 0$, $0 < \xi < \infty$ equations (13) for $i = 1, 2$ read

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - s \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \varphi = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} - s \frac{\partial c_1}{\partial \xi} = \varphi. \quad (28)$$

where for this particular case $\varphi = c_2$.

The solutions to (27) and (28), are exponentially decaying. Performing the smooth matching at $\xi = 0$ for the solutions (20) and solutions of the system (27)-(28), we obtain for c_1 and c_2 finally

$$c_1 = c_1^\infty - \frac{\beta c_2^\infty}{\beta + s} \exp\{s \xi\}, \quad \xi < 0; \quad (29)$$

$$c_2 = c_2^\infty - \frac{\beta c_2^\infty}{\beta + s} \exp\{s \xi\}, \quad \xi < 0; \quad (30)$$

$$c_1 = \frac{s c_2^\infty}{\beta + s} \exp\{-\beta \xi\} + c_1^\infty - c_2^\infty, \quad \xi > 0, \quad (31)$$

$$c_2 = c_2^\infty \frac{s}{\beta + s} \exp\{-\beta \xi\}, \quad \xi > 0, \quad (32)$$

where $\beta = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + 1} - \frac{s}{2}$.

The above solutions exist for arbitrary positive $s = p - v$. However, the actual value of non-dimensional velocity of the saturation front v is determined by the finite capacity assumption (see Section 2). Let us consider droplets at the (macroscopic) point $x = 0$, where x is a coordinate in the frame of reference immobile with respect to droplets. The reaction starts at time $t'_{\text{start}} = -\infty$ and is turned off when the saturation front $\xi = 0 - vt' = 0$ arrives at this point, that is $t'_{\text{fin}} = 0$. Taking t'_{start} and t'_{fin} as integration limits in the equation (12) one gets

$$N \int_{-\infty}^0 \varphi(-v\tau') d\tau' = Q. \quad (33)$$



Changing the integration variable $\zeta = -v\tau'$ in (33) one obtains $vQ/N = \int_0^\infty \varphi(\zeta)d\zeta$. The integral may be evaluated either directly, using solution (32), or from the conservation of mass by integration of the equation (13) and (14) (see the Appendix B). This finally yields

$$v = \frac{p}{1 + \bar{Q}} ; \quad s = \frac{p}{1 + \bar{Q}^{-1}} , \quad (34)$$

where dimensionless $\bar{Q} = Q/Nc_2^\infty$. If the capacity of the droplets is large enough $\bar{Q} \gg 1$, then from eq. (34) it follows that $s \approx p$; however the velocity of the saturation front v is necessarily smaller.

To determine the range of parameters corresponding to the present case $\tilde{c}_1 \neq 0$ one has to calculate \tilde{c}_1 for $\xi > 0$ using the solution (32) and eq. (11):

$$\tilde{c}_1 = sc_2^\infty \frac{1}{\beta + s} \left(1 - \frac{1}{\nu_1} \right) \exp \{ -\beta\xi \} + c_1^\infty - c_2^\infty , \quad (35)$$

If $\nu_1 > 1$ then \tilde{c}_1 decreases with ξ and

$$\min \{ \tilde{c}_1 \} = c_1^\infty - c_2^\infty . \quad (36)$$

If $\nu_1 < 1$ then \tilde{c}_1 increases with ξ and

$$\min \{ \tilde{c}_1 \} = c_1^\infty - c_2^\infty \frac{\nu_1\beta + s}{\nu_1(\beta + s)} . \quad (37)$$

If $\min \{ \tilde{c}_1 \}$ becomes negative, the assumption of preferential depletion of the reactant A_2 in the whole domain (21), is violated either in the vicinity of $\xi = 0$ or at infinity, so either case 3 or case 4 must be considered. If such «exchange of depletion», or «crossover», takes place for $\xi > 0$, one has two subdomains. In each subdomain the method of solution is essentially the same; however the matching of solutions in both subdomains at the point $\xi = X$, is needed, see (23)-(26).

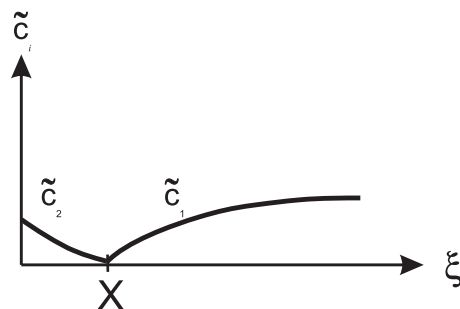


Fig. 2. Schematic presentation of the local concentrations \tilde{c}_1 and \tilde{c}_2 as functions of the coordinate ξ in the moving frame for the case 3.



For the third case, (see Fig. 2) in the subdomain $0 < \xi < X$, where $\tilde{c}_1 = 0$, $\tilde{c}_2(\xi) \neq 0$, one obtains

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} - s \frac{\partial c_1}{\partial \xi} - \nu_1 c_1 = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} - s \frac{\partial c_2}{\partial \xi} = \nu_1 c_1. \quad (39)$$

Solutions of these equations should be matched with (20) at $\xi = 0$.

In the subdomain $X < \xi < \infty$ concentrations c_1 and c_2 are governed by the equations (27)-(28). Their solutions should be matched with the solutions of (38) and (39) at the boundary $\xi = X$. Then X is determined by the transcendental equation:

$$\frac{\alpha_1^2(1 + \alpha_2\beta)e^{\alpha_2 X} + \alpha_2^2(\alpha_1\beta - 1)e^{-\alpha_1 X}}{s(1 - \nu_1)(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{\sigma}{\sigma - 1}, \quad (40)$$

where $\sigma = c_1^\infty/c_2^\infty$, $\alpha_1 = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \nu_1 + \frac{s}{2}}$ and $\alpha_2 = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \nu_1 - \frac{s}{2}}$. Thus, four conditions of smooth matching of the solutions at $\xi = X$ result in a single transcendental equation that we analyze numerically below. The complete solution to the problem (27), (28), (38), (39) and (40) with corresponding boundary conditions can now be easily written down; being cumbersome they are given in the Appendix C). This solution depends parametrically on X which is a root of the equation (40). For the existence of this case the parameter σ should satisfy

$$1 < \sigma < 1 + \frac{s\beta(1 - \nu_1)}{\nu_1}, \quad (41)$$

that is, the «faster» reagent should have lower value of the initial concentration, but this difference should not be too large.

4. Discussion and conclusions. The solution obtained describes propagation of a heterogeneous chemical reaction through a cloud of liquid droplets. The saturation front, that is the boundary of the region where the particles are already saturated, moves with a constant velocity v which is expressed through the uniform flow velocity p by equation (34) for cases 1 and 3 and equation (57) for cases 2 and 4. It also depends on the dimensionless capacity \bar{Q} of the droplets. The solutions are stationary in a frame moving with the velocity v with respect to the cloud of droplets; v is necessarily smaller than p .

The steady lag of the saturation front relative to overall flow translates into a steady widening of macroscopic reaction domain. Qualitatively this continuously decreases the observed local intensity of reaction. Consequently, the observed mean rate for a heterogeneous reaction producing a product stored in the particles, will be lower for an descending cloud of particles, than for a quiescent cloud. Thus we hypothesize that the observed confinement of the reactions of this type in polar stratospheric clouds to a definite altitude, which is rightly attributed to temperature, pressure and radiative conditions, may have an additional, purely dynamic cause.

The point $\xi = X$, which is also moving with the velocity v with respect to droplets, separates the region where the local concentration \tilde{c}_1 is depleted from the region where \tilde{c}_2 is



depleted. In the approximation of irreversible reaction ($K \rightarrow \infty$) both local concentrations \tilde{c}_1 and \tilde{c}_2 vanish at the X -point. We would like to emphasize that the position of this “switch-point” X is determined in a self-consistent way. X as solution of the equation (40) depends on σ , s and ν_1 . In Fig. 3 we present X as function of σ and s for fixed value of ν_1 .

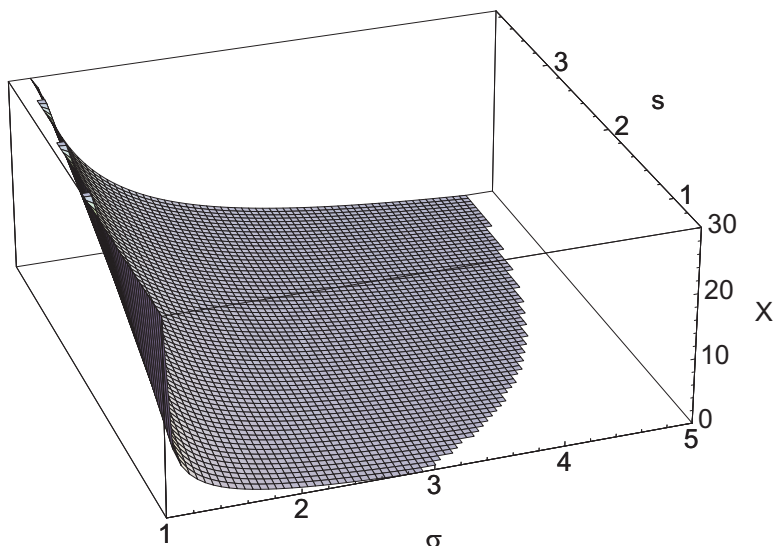


Fig. 3. Position of switch point X as function of concentration ratio σ and flow velocity s in moving frame for $\nu_1 = 0.2$.

It is easily seen from (41), that $\nu_1 < 1$ is the necessary though not sufficient condition for the existence of the *switch-point* X . Since $\nu_1 = \kappa_1/\kappa_2$ is the ratio of mass-transfer coefficients $\nu_1 \neq 1$ is a manifestation of the asymmetry in mesoscopic mass-transfer. An aerosol particle in the flow is surrounded by a boundary layer. Even though the boundary layer can be turbulent, in the near field of the surface there is always a laminar boundary layer in which the transport of the molecules is due to molecular diffusion which is different for different species, that is $\nu_1 \neq 1$. X as function of ν_1 at fixed values of σ and s is presented in Fig. 4.

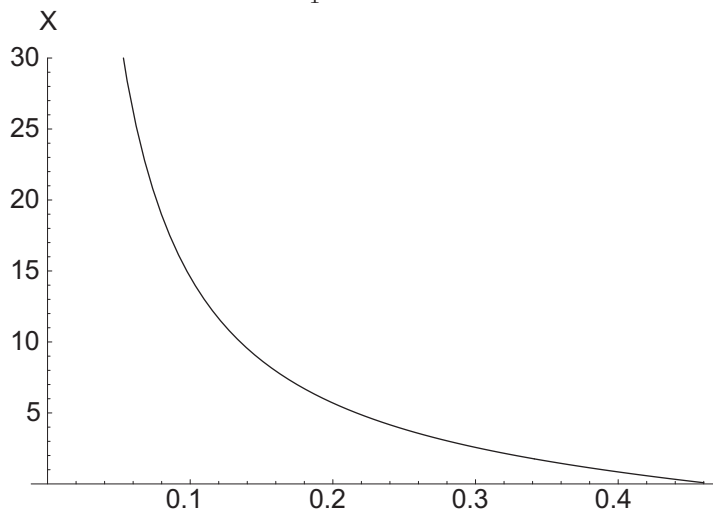


Fig. 4. Position of switch point X as function of the ratio of mass transfer coefficients ν_1 at fixed $\sigma = 2.0$ and $s = 2.5$.



The uptake of reactants and, respectively, the generation of the product are space/time dependent and fundamentally controlled by the existence of a switch point X . At the switch-point, the local excess of reactant A_2 is replaced by the local excess of reactant A_1 . For the case considered, the ratio of the initial concentrations c_1^∞/c_2^∞ of the reactants A_1 and A_2 exceeds the stoichiometric ratio. Therefore one is tempted to consider the reaction in the whole domain as quasi-first order with respect to A_2 . This would be equivalent to a traditional model, which neglects the change of the local concentration due to the «switch». However, the change of the regime has a dramatic effect on the distribution of the reaction product. Indeed, let us compare the modeling of the reaction with and without the switch point; the latter corresponds to traditional modeling.

The generation of the product (uptake of the reactants) is proportional to the integrals of supersaturation φ over reaction domain (see eq. (12) and (54)). To estimate the error in uptake of the reactants (or the yield of the reaction products) in the domain $[0, \xi_m]$, which is introduced by ignoring the switch, that is not considering the evolution of the local concentrations, it is expedient to consider the relative error E_{rel}

$$E_{\text{rel}}(\xi_m) = \left(\int_0^{\xi_m} \varphi^* d\xi - \int_0^{\xi_m} \varphi d\xi \right) / \int_0^{\xi_m} \varphi d\xi, \quad (42)$$

where φ^* is evaluated ignoring the existence of the switch, assuming the local excess of the reactant A_1 in the whole domain. The relative error E_{rel} as a function of ξ_m is shown in the Fig. 5.

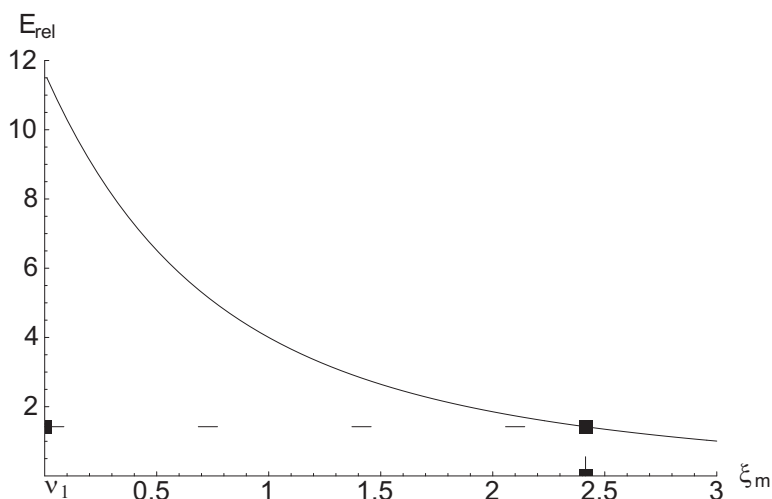


Fig. 5. The relative error E_{rel} as function of ξ_m at fixed values of $\sigma = 2.0$, $s = 2.0$ and $\nu_1 = 0.2$. The position $\xi_m = 1/\beta = 2.41$ and the corresponding value $E_{\text{rel}}(2.41) = 1.42$ are indicated.

If we ignore the switch and admit quasi-first order decay (40), the characteristic decay length of φ is $1/\beta$. So to estimate the lower bound of the error, we take $\xi_m = 1/\beta$ (see Fig. 5). For this special position the error is about 40%; however, for $\xi_m = 1$ the error increases



tenfold up to 400%. That is, even for the simple case of a single-reaction, neglecting local concentration changes may result in a substantial error in the uptake of reactants.

The dependence of $E_{\text{rel}}(\beta^{-1})$ as a function of parameters σ and s is presented in Fig. 6. This dependence clearly resembles the function $X(\sigma, s)$, presented in the Fig. 3. This is a manifestation of the importance of the crossover or switch point.

To estimate the value of $s = p/(1 + \bar{Q}^{-1})$, where \bar{Q} is a relative capacity of the droplets with respect to nonvolatile reaction product, we notice that the effect of saturation of the droplets on the overall distribution of concentration is substantial only if $\bar{Q} \gg 1$. Thus, as an estimate of s one can take $s \approx p$, where p is the non-dimensional relative velocity of droplets with respect to ambient air. Considering an ensemble of droplets sedimenting in the air one can estimate the velocity using the Stokes formula (see e.g. [4]).

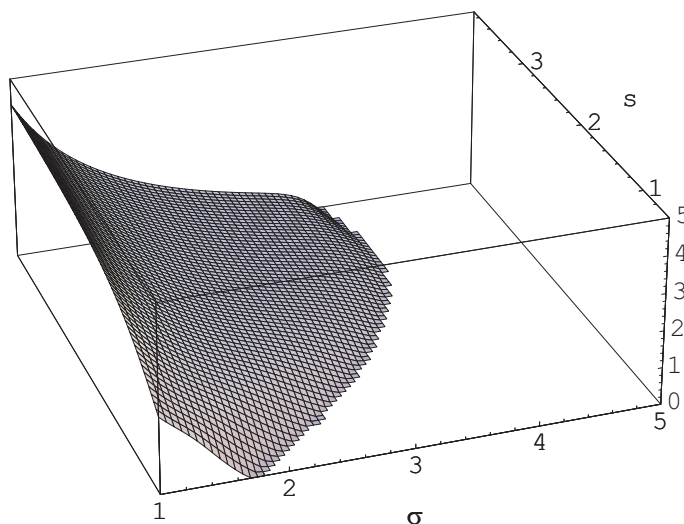


Fig. 6. Relative error $E_{\text{rel}}(1/\beta)$ as function of the σ and s at fixed value of $\nu_1 = 0.2$.

Now we give some estimates using known atmospheric data, for the example of the heterogeneous reaction of chlorine nitrate with hydrochloric acid at the surface of stratospheric aerosol particles. Assuming a free molecular regime for mass transfer (see e.g. [6]), the mass transfer coefficients κ_1 and κ_2 may be evaluated using the formula $\kappa = \alpha \bar{v}/4$, where α is the mass accommodation coefficient and $\bar{v} = \sqrt{8kT/\pi m_0}$. Here k is Boltzmann's constant, and m_0 is the mass of a molecule of species in question. Taking the value of $T = 222$ K at the altitude 25 km (see Appendix B in [8]) and assuming the values of mass accommodation coefficients of HCl and ClONO₂ as 0.1 and 0.03 respectively one arrives at the values of $\kappa_1 = 1.68$ and $\kappa_2 = 9.14$ m/s. The estimate of sedimentation velocity at the same altitude using the Stokes formula (see e.g. [4]) yields the value of order 10^{-4} m/s. To estimate the approximate value of $s \approx p$, where the non-dimensional velocity p is defined above as $p = U/\sqrt{S\kappa_2 D}$, we use the surface to volume ratio $S = 10^{-6}$ m²/m³ [13] and $D \approx 10^{-3}$ m²/s. Dole et al. [25] give the estimate of turbulent diffusion in the stratosphere as D less than 10^{-2} m²/s based on the measurement by atmospheric radar PROUST. Then s is of the order of one; the ratio $\nu_1 \approx 0.2$. We used values of this order of magnitude in the examples exhibited in Figs. 3-6.



To avoid misunderstanding we would like to point out that the above numerical estimates, based on particular atmospheric data, reveal the importance of the exchange of local depletion and estimate a possible error introduced by ignoring the detailed evolution of the local concentrations in space/time evolving systems.

On the other hand, the spreading of the saturation front, and as a consequence «smearing» of reaction over a wider spatial domain in a descending layer of particles, is quite a «coarse» effect for a mass-transfer-limited reaction of the above mentioned type, based on conservation of mass and on the interplay of overall mass transport and the sinks/sources due to the presence of particles, weakly dependent on the details of kinetics and values of the reaction rate constant.

We have considered above an ensemble of identical particles. Being reasonable first approximation this is still a simplification of reality. For identical particles there is a single local concentration of the species for all particles at the same physical point, see Section 2. For N_s discrete size classes the averaging results in N_s different variables, that is a local concentration, \tilde{c}_i^n , $n = 1, 2, \dots, N_s$ for each size class. This results in a drastic increase in the number of governing equations. All parameters of local mass transfer and reaction kinetics, introduced in this communication for an ensemble of identical particles, will also differ for different size classes. Still, the same approach may be applied; however for polydisperse aerosols the mathematics becomes much more involved. The effects of particle size distribution will be subject of a special communication.

In summary, a model, describing fast heterogeneous chemical reaction and mass transfer in a one-dimensional overall flow has been developed. If the basic system of equations is supplemented by the finite capacity assumption reflecting the finite storage ability with respect to a non-volatile product, a travelling-wave regime exists. In this regime, the width of the reaction domain tends to increase. This system may be extended in a rather straightforward way to include multicomponent, multiple reactions, several kinds of particles and different size classes. As shown in [15], essentially the same approach may be used to analyze a «batch reactor» – in the context of aerosol systems, this constitutes a well mixed «parcel» of air or laboratory experiments in a chamber. For a reversible reaction finite K should be considered. To solve the problem for small, but finite K we have to use the modified Thiele moduli (mTm) approach see [16–18] and [19]. The interplay of local and global mass-transfer is taken into account in a self-consistent way. As a consequence, even if one of the reactants initially is in local excess, crossover may happen due to asymmetry in mass transfer coefficients. This may result in significant corrections to the uptake of reactants and the spatial-temporal distribution of the products.

Appendix A. We assume the following mechanism for heterogeneous reaction



where only the second step represents chemical kinetics: k^+ and k^- are rate coefficients for the forward and reverse reactions, respectively, on the surface. If A_1 is identified with



HCl, A_2 with ClONO₂, A_3 with Cl₂, and A_4 with HNO₃, the model (43)-(45) applies under reasonable assumptions for the reaction of chlorine activation, considered in the present paper as an example. The kinetic expression for this mechanism will be derived below, but first we introduce the following notations for the concentrations at the surfaces of the particles $c_i^{(s)}$ and their relative surface coverages s_i

A_1	$c_1^{(s)}$	s_1
A_2	$c_2^{(s)}$	-
A_3	$c_3^{(s)}$	-
A_4	-	s_4

If for A_1 the Langmuir kinetics is assumed, the mass balance on the surface is given by equations

$$\frac{ds_1}{dt} = k_1 c_1^{(s)} (1 - s_1 - s_4) - k'_1 s_1 - k^+ s_1 c_2^{(s)} + k^- c_3^{(s)} s_4, \quad (46)$$

$$\frac{ds_4}{dt} = k^+ s_1 c_2^{(s)} - k^- c_3^{(s)} s_4 - b [s_4 - (s_4)_{\text{equil}}], \quad (47)$$

where k_i and k'_i are adsorption and desorption rate constants, respectively; b is the dissolution rate constant, and $(s_4)_{\text{equil}}$ is the equilibrium value of s_4 , determined by the instantaneous content of A_4 inside the droplet (the diffusion of the non-volatile product A_4 inside the small droplet is considered as fast and not rate-limiting).

Making the common assumption of a pseudo - stationary state at the surface, we obtain

$$c_1^{(s)} (1 - s_1 - s_4) - a_1 s_1 - \frac{k^+}{k_1} s_1 c_2^{(s)} + \frac{k^-}{k_1} c_3^{(s)} s_4 = 0, \quad (48)$$

$$\frac{k^+}{k_1} s_1 c_2^{(s)} - \frac{k^-}{k_1} c_3^{(s)} s_4 - a_2 [s_4 - (s_4)_{\text{equil}}] = 0, \quad (49)$$

where $a_1 = k'_1/k_1$; $a_2 = b/k_1$. Solution of this system for s_1 , s_4 , though elementary, yields quite cumbersome expressions. However, the exact solutions are not needed within the scope of the present communication. Indeed, our consideration is restricted to the case when the adsorption/desorption and dissolution kinetics are fast in comparison to all other processes; that is $k^+/k_1 \ll 1$, $k^-/k_1 \ll 1$, while a_1 , a_2 are neither too large, nor too small. It follows from (49), that $s_4 \simeq (s_4)_{\text{equil}}$. According to our finite capacity assumption, we do not treat the gradual increase of $(s_4)_{\text{equil}}$ caused by increased content of A_4 in the droplet. Instead, we assume it to be constant and small; thus the reaction is switched off when the limiting content of A_4 in the droplet is reached.

For s_1 the same assumptions yield

$$s_1 = \frac{c_1^{(s)}/a_1}{1 + c_1^{(s)}/a_1}. \quad (50)$$

Then the expression for the reaction rate R is :

$$R = \frac{k^+}{a_1} \cdot \frac{c_1^{(s)} c_2^{(s)}}{1 + c_1^{(s)}/a_1} - k^- (s_4)_{\text{equil}} c_3^{(s)}; \quad (51)$$



or, introducing rate constant $k = k^+/a_1$ and effective equilibrium constant

$$K = k^+ / \left[a_1 k^- (s_4)_{\text{equil}} \right]$$

for the surface reaction,

$$R = k \left(\frac{c_1^{(s)} c_2^{(s)}}{1 + c_1^{(s)}/a_1} - \frac{c_3^{(s)}}{K} \right). \quad (52)$$

This equation still differs from (2) of Section 2 by the Langmuir multiplier, $1 + c_1^{(s)}/a_1$, which is close to unity only for the relatively low coverage of the surface. This multiplier is taken into account in [19] and shown to be of possible importance for reversible reaction. In the present paper, for large k and $K \rightarrow \infty$, that is for fast irreversible reaction, both (52) and (40) result in the same limiting form, $c_1^{(s)} c_2^{(s)} \rightarrow 0$. See the corresponding equation (19) for the local concentrations.

Appendix B. Let us integrate equation (14) over domain $-\infty < \xi < 0$, and equation (13) over domain $0 < \xi < \infty$:

$$\frac{\partial c_2}{\partial \xi} \Big|_{-\infty}^0 - s c_2 \Big|_{-\infty}^0 = 0, \quad (53)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial \xi} \Big|_0^\infty - s c_2 \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \varphi(\xi) d\xi = 0. \quad (54)$$

Both c_2 and $\partial c_2/\partial \xi$ are continuous at $\xi = 0$; therefore

$$s c_2 \Big|_{-\infty}^\infty = - \int_0^\infty \varphi(\xi) d\xi, \quad (55)$$

or

$$[c_2^\infty - c_2|_{+\infty}] s = \frac{n}{N} v Q. \quad (56)$$

For the cases 1 and 3 $c_2|_{+\infty} = 0$; this immediately yields the result equation (34). Exactly the same procedure, but applied to equations (14) and (13) yields for the cases 2 and 4:

$$v = \frac{p}{1 + Q/\sigma}. \quad (57)$$

Appendix C. Here the full solution for the third case, see (23)-(24) and (38)-(41), is given. For $0 < \xi < X$

$$c_1 = \frac{1}{\alpha_1 \exp(\alpha_2 X) + \alpha_2 \exp(-\alpha_1 X)} \left[\left[\alpha_1 \frac{c_1^\infty - c_2^\infty}{1 - \nu_1} \exp(\alpha_2 X) - s c_1^\infty \right] \times \right. \\ \left. \times \exp(-\alpha_1 (X - \xi)) + \left[\alpha_2 \frac{c_1^\infty - c_2^\infty}{1 - \nu_1} \exp(-\alpha_1 X) + s c_1^\infty \right] \exp(\alpha_2 (X - \xi)) \right], \quad (58)$$



$$c_2 = c_1 - c_1^\infty + c_2^\infty, \quad (59)$$

$$\tilde{c}_1 = 0; \quad \tilde{c}_2 = (1 - \nu_1) c_1 - c_1^\infty + c_2^\infty. \quad (60)$$

For $X < \xi < \infty$

$$c_1 = \nu_1 \frac{c_1^\infty - c_2^\infty}{1 - \nu_1} \exp(-\beta(\xi - X)) + c_1^\infty - c_2^\infty, \quad (61)$$

$$c_2 = \nu_1 \frac{c_1^\infty - c_2^\infty}{1 - \nu_1} \exp(-\beta(\xi - X)), \quad (62)$$

$$\tilde{c}_1 = c_1^\infty - c_2^\infty - (c_1^\infty - c_2^\infty) \exp(-\beta(\xi - X)), \quad \tilde{c}_2 = 0, \quad (63)$$

Both bulk concentrations are decreasing for $\xi \rightarrow \infty$; while the concentration of the reagent A_2 which is in deficit with respect to stoichiometric ratio approaches zero, the concentration of the reagent A_1 approaches $c_1^\infty - c_2^\infty$. However, while the local concentration \tilde{c}_2 is decreasing from some finite value at $\xi = 0$ to zero at $\xi = X$ and remains zero for larger ξ , the local concentration \tilde{c}_1 increases from zero at $\xi = X$ to $c_1^\infty - c_2^\infty$ for $\xi \rightarrow \infty$, see Fig 1. The simple relation between the bulk concentrations, (59), (61), and (62) is a direct consequence of the equal dispersion coefficients for all species in the equations for the macroscopic mass transport, eq.(7). However, the method of solution outlined in the present communication does not use this fact, so it is valid for the case of different dispersion coefficients as well, when there is no such simple connection. The above solutions depend parametrically on X , which is a root of the equation (40). For the present case to exist the ratio σ of the initial concentrations should belong to the interval $[1, 1 + s\beta(1 - \nu_1)/\nu_1]$, see (41). One can see from (40), that X approaches zero when σ approaches the upper limit. This means that the solutions (61)-(63), representing the local deficit of A_2 , become valid starting from $\xi = 0$, that is the Case 1 – for sufficiently large excess of initial concentration A_1 is both in global and (despite slower mass transfer) local excess over whole reactive domain. On the other hand, if σ approaches the lower limit, X tends to infinity, that is the domain where solutions (58)- (60) are valid spreads over all ξ . This means, in its turn, that we approach the Case 2, when A_1 is in global and local deficit in the whole reactive domain.

The above consideration presumes $\nu_1 < 1$. Of course, for $\nu_1 > 1$ the switch is also possible; however, than it should be $\sigma < 1$, but again, not too small (Case 4). It is worth noticing, that each of the (physically equivalent) Cases 1 and 2 is possible both for $\nu_1 < 1$ and $\nu_1 > 1$, see eqs. (36),(37) for the Case 1. This corresponds to a single non-zero local concentration either increasing, or decreasing with ξ in the whole reactive domain; of course, the difference between the corresponding bulk and local concentrations, which is the driving force for the process, always decreases with ξ . Such non-trivial and non-monotonic parametric dependence is a manifestation of the strongly nonlinear character of the problem considered.

Acknowledgements. The authors are thankful to Reinhard Zellner for interesting discussion of this work. The discussions with Cécile Coeur and Leonid Davydov are also acknowledged. GK and WBZ thank the French-British Alliance Program for a travel award, PN02.061. GK and PMP thank the French-Ukrainian Dnipro Program for a travel award, WBZ would like to thank the University du Littoral for a visiting professorship and the EPSRC Advanced Research Fellowship Programme (Grant No. GR/A01435). PMP would



like to thank the University du Littoral Côte d'Opale, France for visiting Professorship and French Ministry of Education and Research for a research fellowship.

References

1. Warneck P. Fundamentals // in: Global aspects of atmospheric chemistry. Topics in physical chemistry / Vol. 6, ed. by Deutsche Bunsen-Gesellschaft für Physikalische Chemie e.V., R. Zellner, guest editor / Springer: Darmstadt, New York, 1999. – P.1-20.
2. Calvert J.G. (Ed.): SO₂, NO, NO₂ Oxidation Mechanisms: Atmospheric Considerations / Butterworth: Boston, 1984.
3. Zellner R. Chemistry of Stratosphere // in: Global aspects of atmospheric chemistry. Topics in physical chemistry, Vol. 6, ed. by Deutsche Bunsen-Gesellschaft für Physikalische Chemie e.V., R. Zellner guest editor / Springer: Darmstadt, New York, 1999. –P.181-254.
4. Schwartz S.E. Mass transport considerations pertinent to aqueous phase reactions of gases in liquid-water clouds // in: Chemistry of multiphase atmospheric systems, Ed. W.Jaeschke, NATO ASI series. – Vol. G6, 1986.
5. Jacob D.J. Heterogeneous chemistry and tropospheric ozone // Atmospheric Environment. – 2000. – 34. – P.2131-2159.
6. Widmann J.F., Davies E.J. Mathematical models of the uptake of ClONO₂ and other gases by atmospheric aerosols // J. Aerosol Sci. – 1997. – 28(1). – P.87-106.
7. Seinfeld J.H. Atmospheric chemistry and physics of air pollution / John Wiley & Sons: N-Y., 1986.
8. Jacobson M.Z. Fundamentals of atmospheric modeling / Cambridge University Press, 1999.
9. Ravishankara A.R. Heterogeneous and multiphase chemistry in the Troposphere // Science. – 1997. – 276. – P.1058-1065.
10. Pilinis C., Seinfeld J.H., Seigneur C. Mathematical modeling of the dynamics of multicomponent atmospheric aerosols // Atmos. Environ. – 1987. – 21. – P.943-955.
11. Koo B., Gaydos T.M., Pandis S.N. Evaluation of the equilibrium, dynamic, and hybrid aerosol modeling approaches // Aerosol Science and Technology. – 2003. – 37. – P.53-64.
12. Meng Z., Seinfeld J.H. Time scales to achieve atmospheric gas-aerosol equilibrium for volatile species // Atmospheric Environment. – 1996. – 30. – P.2889-2900.
13. Tabazadeh A., Turco R. A model for heterogeneous chemical process on the surface of ice and nitric acid trihydrate particles // J. Geophys. Res. – 1993. – 98(D7). – P.12727-12740.
14. Hanson D.R., Ravishankara A.R., Solomon S. Heterogeneous reactions in sulfuric acid aerosols: A framework for model calculations // J. Geophys. Res. – 1994. – 99(D2). – P.3615-3629.
15. Mchedlov-Petrosyan P.O., Zimmerman W.B., Khomenko G. Fast binary reactions in a heterogeneous catalytic batch reactor // Chemical Engineering Science. – 2003. – 58(12). – P.2691-2703.
16. Mchedlov-Petrosyan P.O., Khomenko G., Zimmerman W.B. Nearly irreversible, fast heterogeneous reactions in premixed flow // Chemical Engineering Science. – 2003. – 58(13). – P.3005-3023.
17. Mchedlov-Petrosyan P.O., Khomenko G., Zimmerman W.B. Fast heterogeneous catalytic reactions in a CST reactor: perturbative approach // Kharkov University Bulletin, Chemical series. – 2001. – 7(30). – P.53-65.
18. Zimmerman W.B., Mchedlov-Petrosyan P.O., Khomenko G.A. Diffusion limited mixing and reaction in heterogeneous catalysis of initially segregated species // Chemie Symposium Series. – 1999. – 146. – P.317-324.
19. Zimmerman W.B., Mchedlov-Petrosyan P.O., Khomenko G.A. Nonequilibrium effects on fast binary reactions in a heterogeneous catalytic batch reactor // Chemical Engineering Science. – 2005. – 60. – P.3061-3076.
20. Deshpande K.B., Zimmerman W.B. Experimental study of mass transfer limited reaction. Part I: A novel approach to infer asymmetric mass transfer coefficients // Chemical Engineering Science. – 2005. – 60(11). – P.2879-2893.



21. Deshpande K.B., Zimmerman W.B. Experimental study of mass transfer limited reaction. Part II: Existence of crossover phenomenon // *Chemical Engineering Science*. – 2005. – 60; №15. – P.4147-4156.
22. Soo S.L. *Fluid Dynamics of Multiphase Systems* / Blaisdell Publ.: Massachusetts-Toronto-London, 1967.
23. Satterfield C.N. *Mass transfer in heterogeneous catalysis* / MIT Press: Cambridge, Mass., 1970.
24. Dankwerts P.V. Absorption by simultaneous diffusion and chemical reaction // *Transactions of the Faraday Society*. – 1950. – 46. – P.300-304.
25. Dole J., Wilson R., Dalaudier F., Sidi C. Energetics of small scale turbulence in the lower stratosphere from high resolution radar measurements // *Annales Geophysicae*. – 2001. – 19. – P.945-952.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ФРОНТА НАСЫЩЕНИЯ ГЕТЕРОГЕННОЙ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В АЭРОЗОЛЬНОМ ОБЛАКЕ

Г.А. Хоменко, *П.О. Мчедлов-Петросян, В.Б. Зиммерман

*Национальный научный центр ХФТИ,
ул. Академическая, 1, Харьков, 61108, Украина, e-mail: peter.mchedlov@free.fr

Аннотация. Облако аэрозольных частиц осаждается в воздухе, содержащем реагенты. Исходя из макроскопической модели химии и массопереноса, основанной на кинетической теории гетерогенных химических реакций, мы анализируем распространение химической реакции в облаке аэрозольных частиц. В этой работе мы рассматриваем бинарную реакцию с одним летучим и одним нелетучим продуктом, протекающую на поверхности аэрозольных частиц. Если принять во внимание конечную ёмкость капли по насыщению нелетучим продуктом реакции, замедление реакции в конце концов приводит к распространению фронта насыщения. Найдены пространственное распределение концентраций, их эволюция со временем и скорость фронта насыщения.

Ключевые слова: аэрозоль, капля, гетерогенная химическая реакция, массоперенос.



MSC 76M60

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ГАЗОВЗВЕСИ В СЛУЧАЕ ТРЕХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.В. Панов

Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия, e-mail: gjd@bk.ru

Аннотация. Методами группового анализа исследована система уравнений в частных производных, описывающая динамику смеси газа и мелких частиц, в случае трех пространственных переменных. Найдено ядро основных алгебр Ли системы, выписана оптимальная система одномерных подалгебр, для них выписаны инвариантные подмодели, найдены некоторые точные решения системы уравнений.

Ключевые слова: газовзвесь, алгебра Ли симметрий, оптимальная система подалгебр, допускаемая группа, инвариантное решение, подмодель.

1. Введение. В работе исследуются симметричные свойства [1] системы уравнений в частных производных, описывающей динамику смеси газа и мелких частиц. Исследуемая модель описывает подавление неконтролируемой детонации горючего газа инертными частицами (метод гашения) [2].

Подавление дискретными частицами волны детонации может протекать по-разному, в зависимости от плотности, концентрации и размеров частиц, а также других параметров системы. Данный процесс описывается системой уравнений механики гетерогенных сред взаимопроникающих континуумов в двухскоростном приближении. Первым континуумом выступает смесь реагирующих газов и продуктов их воспламенения и горения, вторым континуумом — мелкие частицы инертного вещества. Функциональным параметром системы является давление смеси, зависящее от плотностей фаз.

Главная гипотеза, используемая при теоретическом описании течений газовзвесей, состоит в предположении о том, что среда в целом и её компоненты являются сплошными. Также, предполагается, что:

- размеры включений дисперсной фазы значительно превосходят молекулярно-кинетические размеры в несущей фазе и в то же время значительно меньше характерных макромасштабов среды;
- газовая взвесь является достаточно разреженной, чтобы не учитывать взаимодействие частиц между собой;
- эффекты вязкости проявляются только во взаимодействии между газом и частицами;
- температура частиц по всему ее объему постоянна вследствие высокой теплопроводности материала частиц;
- энергией и эффектами, связанными с хаотическим движением частиц, можно пренебречь;



- течение является нестационарным;
- тепловыми эффектами пренебрегаем;
- процессы дробления, слипания и образования новых дисперсных частиц отсутствуют; частицы состоят из несжимаемого материала;
- в качестве несущей газовой среды выступает горючий газ, который воспламеняется по достижении некоторой критической температуры;
- состав газа предполагается однокомпонентным.

Теоретические исследования данной системы были проведены, главным образом, в одномерном и двумерном случаях (см. [2] и ссылки там же). Симметричные свойства системы в данных работах не изучались.

В работах [3, 4] система исследовалась в случае пространства независимых переменных $\mathbb{R}_{(t,x)}^2$: было найдено ядро основных алгебр Ли, доказано, что система не имеет дополнительных симметрий при любой функции давления, найдена оптимальная система подалгебр ядра основных алгебр Ли, осуществлен поиск инвариантных и частично инвариантных решений системы. В настоящей работе найдено ядро основных алгебр Ли данной системы в случае пространства независимых переменных $\mathbb{R}_{(t,x,y,z)}^4$, выписаны инвариантные подмодели ранга 3 и найдены некоторые точные решения системы.

2. Ядро основных алгебр Ли. Рассматривается система уравнений:

$$\frac{d\rho_1}{dt_1} + \rho_1 \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\rho_2}{dt_2} + \rho_2 \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0, \quad (2)$$

$$\rho_1 \frac{d\vec{u}_1}{dt_1} + m_1 \nabla P(\rho_1, \rho_2) = -\frac{\rho_2}{\tau} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2), \quad (3)$$

$$\rho_2 \frac{d\vec{u}_2}{dt_2} + m_2 \nabla P(\rho_1, \rho_2) = \frac{\rho_2}{\tau} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2), \quad (4)$$

описывающая динамику смеси газа и мелких частиц в пространстве. Здесь $\vec{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$ — вектор скорости газа, $\vec{u}_2 = (u_2, v_2, w_2)$ — вектор скорости частиц, ρ_1 — плотность газа, ρ_2 — плотность частиц, P — давление смеси, $m_2 = \frac{\rho_2}{b}$ — объемная концентрация частиц, b — абсолютная плотность частиц, $m_1 = 1 - m_2$ — объемная концентрация газа,

$$\frac{d}{dt_1} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \nabla, \quad \frac{d}{dt_2} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_2 \cdot \nabla.$$

Определение 1. Ядром основных алгебр Ли системы уравнений называется алгебра Ли преобразований зависимых и независимых переменных, допускаемых при любом значении параметра системы [1].

Оператор группы допускаемых преобразований ищется в виде

$$X = \theta \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} + U_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + V_1 \frac{\partial}{\partial v_1} +$$



$$+ W_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + U_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + V_2 \frac{\partial}{\partial v_2} + W_2 \frac{\partial}{\partial w_2} + R_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1} + R_2 \frac{\partial}{\partial \rho_2} .$$

Все коэффициенты оператора зависят от переменных $(t, x, y, z, u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \rho_1, \rho_2)$. Продолжая данный оператор на пространство 1-струй, действуя продолженным оператором на систему и сужая полученные уравнения на многообразии, задаваемое системой в расширенном пространстве, получим систему определяющих уравнений на коэффициенты оператора. Из определяющих уравнений и произвольности параметра P следует, что $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $\theta = \theta(t)$, $\xi = \xi(t, x, y, z)$, $\eta = \eta(t, x, y, z)$, $\zeta = \zeta(t, x, y, z)$,

$$U_1 = U_1(t, x, y, z, u_1, v_1, w_1), \quad V_1 = V_1(t, x, y, z, u_1, v_1, w_1), \quad W_1 = W_1(t, x, y, z, u_1, v_1, w_1),$$

$$U_2 = U_2(t, x, y, z, u_2, v_2, w_2), \quad V_2 = V_2(t, x, y, z, u_2, v_2, w_2), \quad W_2 = W_2(t, x, y, z, u_2, v_2, w_2).$$

Кроме того, имеются следующие две идентичные друг другу группы уравнений (5)-(16) и (17)-(28) для наборов функций $\{U_1, V_1, W_1\}$ и $\{U_2, V_2, W_2\}$, соответственно:

$$U_{1u_1} + \theta_t - \xi_x = 0, \quad V_{1v_1} + \theta_t - \eta_y = 0, \quad W_{1w_1} + \theta_t - \zeta_z = 0, \quad (5)$$

$$U_1 = \xi_t - u_1 \theta_t + u_1 \xi_x + v_1 \xi_y + w_1 \xi_z, \quad (6)$$

$$V_1 = \eta_t - v_1 \theta_t + u_1 \eta_x + v_1 \eta_y + w_1 \eta_z, \quad (7)$$

$$W_1 = \zeta_t - w_1 \theta_t + u_1 \zeta_x + v_1 \zeta_y + w_1 \zeta_z, \quad (8)$$

$$U_{1x} + V_{1y} + W_{1z} = 0, \quad (9)$$

$$U_{1v_1} + \eta_x = 0, \quad U_{1w_1} + \zeta_x = 0, \quad (10)$$

$$V_{1u_1} + \xi_y = 0, \quad V_{1w_1} + \zeta_y = 0, \quad (11)$$

$$W_{1u_1} + \xi_z = 0, \quad W_{1v_1} + \eta_z = 0, \quad (12)$$

$$\theta_t - \xi_x - U_{1u_1} = 0, \quad \theta_t - \eta_y - V_{1v_1} = 0, \quad \theta_t - \zeta_z - W_{1w_1} = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_2}{\tau} (U_1 - U_2) + \rho_1 (u_1 U_{1x} + v_1 U_{1y} + w_1 U_{1z} + U_{1t}) + \\ & + \frac{\rho_2}{\tau} (\theta_t - U_{1u_1}) (u_1 - u_2) - \frac{\rho_2}{\tau} U_{1v_1} (v_1 - v_2) - \frac{\rho_2}{\tau} U_{1w_1} (w_1 - w_2) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_2}{\tau} (V_1 - V_2) + \rho_1 (u_1 V_{1x} + v_1 V_{1y} + w_1 V_{1z} + V_{1t}) + \\ & + \frac{\rho_2}{\tau} (\theta_t - V_{1v_1}) (v_1 - v_2) - \frac{\rho_2}{\tau} V_{1u_1} (u_1 - u_2) - \frac{\rho_2}{\tau} V_{1w_1} (w_1 - w_2) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_2}{\tau} (W_1 - W_2) + \rho_1 (u_1 W_{1x} + v_1 W_{1y} + w_1 W_{1z} + W_{1t}) + \\ & + \frac{\rho_2}{\tau} (\theta_t - W_{1w_1}) (w_1 - w_2) - \frac{\rho_2}{\tau} W_{1u_1} (u_1 - u_2) - \frac{\rho_2}{\tau} W_{1v_1} (v_1 - v_2) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$U_{2u_2} + \theta_t - \xi_x = 0, \quad V_{2v_2} + \theta_t - \eta_y = 0, \quad W_{2w_2} + \theta_t - \zeta_z = 0, \quad (17)$$

$$U_2 = \xi_t - u_2 \theta_t + u_2 \xi_x + v_2 \xi_y + w_2 \xi_z, \quad (18)$$



$$V_2 = \eta_t - v_2\theta_t + u_2\eta_x + v_2\eta_y + w_2\eta_z, \quad (19)$$

$$W_2 = \zeta_t - w_2\theta_t + u_2\zeta_x + v_2\zeta_y + w_2\zeta_z, \quad (20)$$

$$U_{2x} + V_{2y} + W_{2z} = 0, \quad (21)$$

$$U_{2v_2} + \eta_x = 0, \quad U_{2w_2} + \zeta_x = 0, \quad (22)$$

$$V_{2u_2} + \xi_y = 0, \quad V_{2w_2} + \zeta_y = 0, \quad (23)$$

$$W_{2u_2} + \xi_z = 0, \quad W_{2v_2} + \eta_z = 0, \quad (24)$$

$$\theta_t - \xi_x - U_{2u_2} = 0, \quad \theta_t - \eta_y - V_{2v_2} = 0, \quad \theta_t - \zeta_z - W_{2w_2} = 0, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_2}{\tau}(U_1 - U_2) + \rho_1(u_2U_{2x} + v_2U_{2y} + w_2U_{2z} + U_{2t}) + \\ & + \frac{\rho_2}{\tau}(\theta_t - U_{2u_2})(u_1 - u_2) - \frac{\rho_2}{\tau}U_{2v_2}(v_1 - v_2) - \frac{\rho_2}{\tau}U_{2w_2}(w_1 - w_2) = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_2}{\tau}(V_1 - V_2) + \rho_1(u_2V_{2x} + v_2V_{2y} + w_2V_{2z} + V_{2t}) + \\ & + \frac{\rho_2}{\tau}(\theta_t - V_{2v_2})(v_1 - v_2) - \frac{\rho_2}{\tau}V_{2u_2}(u_1 - u_2) - \frac{\rho_2}{\tau}V_{2w_2}(w_1 - w_2) = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_2}{\tau}(W_1 - W_2) + \rho_1(u_2W_{2x} + v_2W_{2y} + w_2W_{2z} + W_{2t}) + \\ & + \frac{\rho_2}{\tau}(\theta_t - W_{2w_2})(w_1 - w_2) - \frac{\rho_2}{\tau}W_{2u_2}(u_1 - u_2) - \frac{\rho_2}{\tau}W_{2v_2}(v_1 - v_2) = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

Достаточно решить одну из этих систем уравнений. Решим, например, систему (5)-(16).

Складывая первые уравнения в (5) и (13), получим $\theta_t = \xi_x$. Так же из вторых уравнений в (5) и (13) получим $\theta_t = \eta_y$, из третьих — $\theta_t = \zeta_z$. Подставляя (6) и (18) в (14) и приводя подобные при ρ_2, v_1, w_1 , получим, что $\xi_x = 0, \xi_{tt} = 0, \xi_{yy} = 0, \xi_{zz} = 0, \xi_{ty} = 0, \xi_{tz} = 0, \xi_{yz} = 0$. Таким образом, функция ξ есть многочлен первой степени от переменных t, y, z . Функция θ есть константа. Далее, подставив (7) и (19) в (15), учитывая равенства $\theta_t = \eta_y = 0$ и приводя подобные при u_1, w_1 , получим $\eta_{tt} = 0, \eta_{zz} = 0, \eta_{xx} = 0, \eta_{tz} = 0, \eta_{tx} = 0, \eta_{xz} = 0$. Таким образом, функция η есть многочлен первой степени от переменных t, x, z . Так же, подставив (8) и (20) в (16), найдем, что ζ есть многочлен первой степени от переменных t, x, y . Итак, получены выражения $\theta = c, \xi = a_1t + a_3y + a_4z + a_5, \eta = b_1t + b_2x + b_4z + b_5, \zeta = c_1t + c_2x + c_3y + c_5$. Учитывая выражения для U_1, V_1, W_1 из (6)-(8), находим

$$U_1 = a_1 + a_3v_1 + a_4w_1,$$

$$V_1 = b_1 + b_2u_1 + b_4w_1,$$

$$W_1 = c_1 + c_2u_1 + c_3v_1.$$

Остались уравнения (9), (10), (11), (12). Уравнение (9) следует из других уравнений. Из уравнений (10), (11), (12) получим

$$\eta_x + \xi_y = 0, \quad \zeta_x + \xi_z = 0, \quad \zeta_y + \eta_z = 0.$$



После подстановки в эти уравнения выражений для ξ, η, ζ получим равенства $b_2 = -a_3$, $a_4 = -c_2$, $c_3 = -b_4$. Подставив в формулы (18), (19), (20) выражения для ξ, η, ζ , найдем U_2, V_2, W_2 . Итак, после переобозначений $b_2 = d, a_4 = e, c_3 = f$, решение определяющей системы уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned}\theta &= c, \quad \xi = a_1 t - dy + ez + a_5, \quad \eta = b_1 t + dx - fz + b_5, \quad \zeta = c_1 t - ex + fy + c_5, \\ U_1 &= a_1 - dv_1 + ew_1, \quad V_1 = b_1 + du_1 - fw_1, \quad W_1 = c_1 - eu_1 + fv_1, \\ U_2 &= a_1 - dv_2 + ew_2, \quad V_2 = b_1 + du_2 - fw_2, \quad W_2 = c_1 - eu_2 + fv_2, \\ R_1 &= 0, \quad R_2 = 0.\end{aligned}$$

Полученные формулы приводят к следующему утверждению.

Теорема 1. *Базис ядра основных алгебр Ли L_{10} системы уравнений (1)-(4) состоит из операторов*

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_4 &= t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}, \quad X_5 = t \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{\partial}{\partial v_2}, \quad X_6 = t \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w_1} + \frac{\partial}{\partial w_2}, \\ X_7 &= y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} + v_1 \frac{\partial}{\partial w_1} - w_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial w_2} - w_2 \frac{\partial}{\partial v_2}, \\ X_8 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} + w_1 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial}{\partial w_2}, \\ X_9 &= x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial v_2} - v_2 \frac{\partial}{\partial u_2}, \\ X_{10} &= \frac{\partial}{\partial t}.\end{aligned}$$

□ Задавая в последних формулах для коэффициентов допускаемого векторного поля произвольные константы равными нулю, кроме одной, равной единице, получим требуемые векторные поля. ■

3. Подмодели. В работе Л.В. Овсянникова [5] была предложена программа «Подмодели», направленная на максимальное использование свойств симметрий систем уравнений, с целью их решения и качественного исследования: постановки краевых задач, исследование траекторий, характеристик и т. д. Для нахождения всех существенно различных подмоделей необходима классификация всех подалгебр основной алгебры Ли с точностью до преобразований внутренних автоморфизмов, так как решения одной подмодели переводятся в решения другой, если подалгебры, соответствующие этим подмоделям, переводятся друг в друга внутренним автоморфизмом. Такие подалгебры будем называть подобными.

Определение 2. *Совокупность представителей классов подобных подалгебр размерности s (по одному от каждого класса) называется оптимальной системой подалгебр размерности s [1].*



Алгебра Ли L_{10} является алгеброй Ли группы Галилея. Оптимальная система подалгебр всех размерностей данной алгебры была найдена Л.В. Овсянниковым в работе [6]. В таблице 1 приведена система всех одномерных неподобных подалгебр из работы [6] вместе с их инвариантами. При этом D означает декартову систему координат, а C — цилиндрическую.

Таблица 1

№	Система координат	Оператор	Инвариантные независимые переменные	Инвариантные компоненты U_1, U_2
1	D	X_1	t, y, z	$U_1 = u_1, U_2 = u_2$
2	D	X_4	t, y, z	$U_1 = u_1 - \frac{x}{t}, U_2 = u_2 - \frac{x}{t}$
3	D	$\beta X_3 + X_4, \beta \neq 0$	$t, y, \beta x - zt$	$U_1 = u_1 - \frac{z}{\beta}, U_2 = u_2 - \frac{z}{\beta}$
4	C	$\delta X_1 + X_7, \delta \in \mathbb{R}$	$t, x - \delta\theta, r$	$U_1 = u_{1c}, U_2 = u_{2c}$
5	C	$\beta X_4 + X_7, \beta \neq 0$	$t, x - \beta t\theta, r$	$U_1 = u_{1c} - \beta\theta, U_2 = u_{2c} - \beta\theta$
6	D	X_{10}	x, y, z	$U_1 = u_1, U_2 = u_2$
7	D	$\beta X_4 + X_{10}, \beta \neq 0$	$x - \beta \frac{t^2}{2}, y, z$	$U_1 = u_1 - \beta t, U_2 = u_2 - \beta t$
8	C	$\beta X_4 + \alpha X_7 + X_{10}, \alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$	$\alpha t - \theta, x - \beta \frac{t^2}{2}, r$	$U_1 = u_{1c} - \beta t, U_2 = u_{2c} - \beta t$

Компоненты вектора скорости v_1, w_1, v_2, w_2 являются инвариантами во всех подалгебрах. Подмодели для подалгебр с номерами 4, 5, 8 удобней записывать в цилиндрических координатах. Для этого вводятся новые независимые переменные t, x, r, θ , где

$$y = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta, \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctg \frac{z}{y}.$$

Компоненты векторов скорости фаз в цилиндрических координатах $\vec{u}_{1c} = (u_{1c}, v_{1c}, w_{1c})$, $\vec{u}_{2c} = (u_{2c}, v_{2c}, w_{2c})$ вводятся заменами

$$u_{1c} = u_1, \quad v_{1c} = v_1 \cos \theta + w_1 \sin \theta, \quad w_{1c} = -v_1 \sin \theta + w_1 \cos \theta,$$

$$u_{2c} = u_2, \quad v_{2c} = v_2 \cos \theta + w_2 \sin \theta, \quad w_{2c} = -v_2 \sin \theta + w_2 \cos \theta.$$

Обратная замена

$$u_1 = u_{1c}, \quad v_1 = v_{1c} \cos \theta - w_{1c} \sin \theta, \quad w_1 = v_{1c} \sin \theta + w_{1c} \cos \theta,$$

$$u_2 = u_{2c}, \quad v_2 = v_{2c} \cos \theta - w_{2c} \sin \theta, \quad w_2 = v_{2c} \sin \theta + w_{2c} \cos \theta.$$

Здесь v_{ic} — радиальная в плоскости (y, z) , а w_{ic} — окружная компоненты векторов скоростей фаз. Обозначения для плотностей и давления не изменяются. Вектора X_1, X_4, X_{10} не изменятся в цилиндрических координатах, вектор X_7 примет вид $X_7 = \partial_\theta$.

Выпишем инвариантные для подалгебр из оптимальной системы подмодели системы (1)-(4). При этом номер подмодели будет соответствовать номеру подалгебры в таблице.



3.1. Двумерные движения. Рассмотрим представление решения $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \rho_1, \rho_2) = (\vec{U}_1, \vec{U}_2, \rho_1, \rho_2)(t, y, z)$. Факторсистема уравнений подмодели:

$$D_1 \rho_1 + \rho_1 \left(\frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} \right) = 0, \quad D_2 \rho_2 + \rho_2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial W_2}{\partial z} \right) = 0,$$

$$D_1 \vec{U}_1 + \frac{m_1}{\rho_1} \text{grad}_{(y,z)} P = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\vec{U}_1 - \vec{U}_2}{\tau},$$

$$D_2 \vec{U}_2 + \frac{m_2}{\rho_2} \text{grad}_{(y,z)} P = \frac{\vec{U}_1 - \vec{U}_2}{\tau},$$

где

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial t} + V_1 \frac{\partial}{\partial y} + W_1 \frac{\partial}{\partial z}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial t} + V_2 \frac{\partial}{\partial y} + W_2 \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\vec{U}_1 = (U_1, V_1, W_1), \quad \vec{U}_2 = (U_2, V_2, W_2), \quad \text{grad}_{(y,z)} = (0, \partial_y, \partial_z).$$

3.2. Галилеево-инвариантные движения. Решения имеют вид

$$u_1 = \frac{x}{t} + U_1(t, y, z), \quad u_2 = \frac{x}{t} + U_2(t, y, z),$$

$$(v_1, w_1, v_2, w_2, \rho_1, \rho_2) = (V_1, W_1, V_2, W_2, \rho_1, \rho_2)(t, y, z),$$

а соответствующая факторсистема уравнений подмодели —

$$D_1 \rho_1 + \rho_1 \left(\frac{1}{t} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} \right) = 0, \quad D_2 \rho_2 + \rho_2 \left(\frac{1}{t} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial W_2}{\partial z} \right) = 0,$$

$$D_1 U_1 + \frac{1}{t} U_1 = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{U_1 - U_2}{\tau},$$

$$D_1 V_1 + \frac{m_1}{\rho_1} \frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial y} = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{V_1 - V_2}{\tau},$$

$$D_1 W_1 + \frac{m_1}{\rho_1} \frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial z} = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{W_1 - W_2}{\tau},$$

$$D_2 U_2 + \frac{1}{t} U_2 = \frac{U_1 - U_2}{\tau},$$

$$D_2 V_2 + \frac{m_2}{\rho_2} \frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial y} = \frac{V_1 - V_2}{\tau},$$

$$D_2 W_2 + \frac{m_2}{\rho_2} \frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial z} = \frac{W_1 - W_2}{\tau},$$

где

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial t} + V_1 \frac{\partial}{\partial y} + W_1 \frac{\partial}{\partial z}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial t} + V_2 \frac{\partial}{\partial y} + W_2 \frac{\partial}{\partial z}.$$



3.3. Сдвиговые движения. Решения вида $u_1 = \frac{z}{\beta} + U_1(t, \xi, y)$, $u_2 = \frac{z}{\beta} + U_2(t, \xi, y)$, $(v_1, w_1, v_2, w_2, \rho_1, \rho_2) = (V_1, W_1, V_2, W_2, \rho_1, \rho_2)(t, \xi, y)$, $\xi = x - \frac{tz}{\beta}$ соответствуют факторсистеме:

$$D_1 \rho_1 + \rho_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{t}{\beta} \frac{\partial W_1}{\partial \xi} \right) = 0, \quad D_2 \rho_2 + \rho_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \frac{\partial V_2}{\partial y} - \frac{t}{\beta} \frac{\partial W_2}{\partial \xi} \right) = 0,$$

$$D_1 U_1 + \frac{1}{\beta} W_1 + \frac{m_1}{\rho_1} \frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial \xi} = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{U_1 - U_2}{\tau},$$

$$D_1 V_1 + \frac{m_1}{\rho_1} \frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial y} = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{V_1 - V_2}{\tau},$$

$$D_1 W_1 - \frac{m_1 t}{\rho_1 \beta} \frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial \xi} = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{W_1 - W_2}{\tau},$$

$$D_2 U_2 + \frac{1}{\beta} W_2 + \frac{m_2}{\rho_2} \frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial \xi} = \frac{U_1 - U_2}{\tau},$$

$$D_2 V_2 + \frac{m_2}{\rho_2} \frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial y} = \frac{V_1 - V_2}{\tau},$$

$$D_2 W_2 - \frac{m_2 t}{\rho_2 \beta} \frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial \xi} = \frac{W_1 - W_2}{\tau},$$

где

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \left(U_1 - \frac{t}{\beta} W_1 \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + V_1 \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial t} + \left(U_2 - \frac{t}{\beta} W_2 \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + V_2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

3.4. Винтовые движения. Решения, имеющие вид

$$(u_{1c}, v_{1c}, w_{1c}, u_{2c}, v_{2c}, w_{2c}, \rho_1, \rho_2) = (U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2, \rho_1, \rho_2)(t, \xi, r), \quad \xi = x - \delta \theta,$$

соответствуют факторсистеме уравнений подмодели

$$D_1 \rho_1 + \rho_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{V_1}{r} - \frac{\delta}{r} \frac{\partial W_1}{\partial \xi} \right) = 0,$$

$$D_2 \rho_2 + \rho_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{V_2}{r} - \frac{\delta}{r} \frac{\partial W_2}{\partial \xi} \right) = 0,$$

$$D_1 U_1 + \frac{m_1}{\rho_1} P_\xi = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{U_1 - U_2}{\tau},$$

$$D_1 V_1 - \frac{W_1^2}{r} + \frac{m_1}{\rho_1} P_r = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{V_1 - V_2}{\tau},$$

$$D_1 W_1 + \frac{W_1 V_1}{r} - \frac{\delta m_1}{r \rho_1} P_\xi = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{W_1 - W_2}{\tau},$$



$$D_2 U_2 + \frac{m_2}{\rho_2} P_\xi = \frac{U_1 - U_2}{\tau},$$

$$D_2 V_2 - \frac{W_2^2}{r} + \frac{m_2}{\rho_2} P_r = \frac{V_1 - V_2}{\tau},$$

$$D_2 W_2 + \frac{W_2 V_2}{r} - \frac{\delta m_2}{r \rho_2} P_\xi = \frac{W_1 - W_2}{\tau},$$

где

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial t} + (U_1 - \frac{\delta}{r} W_1) \frac{\partial}{\partial \xi} + V_1 \frac{\partial}{\partial r}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial t} + (U_2 - \frac{\delta}{r} W_2) \frac{\partial}{\partial \xi} + V_2 \frac{\partial}{\partial r}.$$

3.5. Обобщенные вращательно-симметричные движения. Представление решения $u_{1c} = \beta\theta + U_1(t, \xi, r)$, $u_{2c} = \beta\theta + U_2(t, \xi, r)$, $\xi = x - \beta t\theta$, $(v_{1c}, w_{1c}, v_{2c}, w_{2c}, \rho_1, \rho_2) = (V_1, W_1, V_2, W_2, \rho_1, \rho_2)(t, \xi, r)$.

Факторсистема имеет вид

$$D_1 \rho_1 + \rho_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{V_1}{r} - \beta \frac{t}{r} \frac{\partial W_1}{\partial \xi} \right) = 0,$$

$$D_2 \rho_2 + \rho_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{V_2}{r} - \beta \frac{t}{r} \frac{\partial W_2}{\partial \xi} \right) = 0,$$

$$D_1 U_1 + \beta \frac{W_1}{r} + \frac{m_1}{\rho_1} P_\xi = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{U_1 - U_2}{\tau},$$

$$D_1 V_1 - \frac{W_1^2}{r} + \frac{m_1}{\rho_1} P_r = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{V_1 - V_2}{\tau},$$

$$D_1 W_1 + \frac{W_1 V_1}{r} - \beta \frac{m_1 t}{\rho_1 r} P_\xi = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{W_1 - W_2}{\tau},$$

$$D_2 U_2 + \beta \frac{W_2}{r} + \frac{m_2}{\rho_2} P_\xi = \frac{U_1 - U_2}{\tau},$$

$$D_2 V_2 - \frac{W_2^2}{r} + \frac{m_2}{\rho_2} P_r = \frac{V_1 - V_2}{\tau},$$

$$D_2 W_2 + \frac{W_2 V_2}{r} - \beta \frac{m_2 t}{\rho_2 r} P_\xi = \frac{W_1 - W_2}{\tau},$$

где

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial t} + (U_1 - \beta \frac{t}{r} W_1) \frac{\partial}{\partial \xi} + V_1 \frac{\partial}{\partial r}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial t} + (U_2 - \beta \frac{t}{r} W_2) \frac{\partial}{\partial \xi} + V_2 \frac{\partial}{\partial r}.$$

3.6. Стационарные течения. Решения вида

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \rho_1, \rho_2) = (\vec{U}_1, \vec{U}_2, \rho_1, \rho_2)(x, y, z)$$



соответствуют факторсистеме

$$D_1\rho_1 + \rho_1\operatorname{div}\vec{U}_1 = 0, \quad D_2\rho_2 + \rho_2\operatorname{div}\vec{U}_2 = 0,$$

$$D_1\vec{U}_1 + \frac{m_1}{\rho_1}\operatorname{grad}P = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\vec{U}_1 - \vec{U}_2}{\tau},$$

$$D_2\vec{U}_2 + \frac{m_2}{\rho_2}\operatorname{grad}P = \frac{\vec{U}_1 - \vec{U}_2}{\tau},$$

где

$$D_1 = U_1\frac{\partial}{\partial x} + V_1\frac{\partial}{\partial y} + W_1\frac{\partial}{\partial z}, \quad D_2 = U_2\frac{\partial}{\partial x} + V_2\frac{\partial}{\partial y} + W_2\frac{\partial}{\partial z}.$$

3.7. Стационарные течения в однородном поле сил, направленных параллельно оси x . Представление решения $u_1 = \beta t + U_1(\xi, y, z)$, $u_2 = \beta t + U_2(\xi, y, z)$, $(v_1, w_1, v_2, w_2, \rho_1, \rho_2) = (V_1, W_1, V_2, W_2, \rho_1, \rho_2)(\xi, y, z)$, $\xi = x - \beta\frac{t^2}{2}$. Факторсистема уравнений подмодели:

$$D_1\rho_1 + \rho_1\left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right) = 0,$$

$$D_2\rho_2 + \rho_2\left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial W_2}{\partial z}\right) = 0,$$

$$D_1U_1 + \beta + \frac{m_1}{\rho_1}\frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial \xi} = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{U_1 - U_2}{\tau},$$

$$D_1V_1 + \frac{m_1}{\rho_1}\frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial y} = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{V_1 - V_2}{\tau},$$

$$D_1W_1 + \frac{m_1}{\rho_1}\frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial z} = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{W_1 - W_2}{\tau},$$

$$D_2U_2 + \beta + \frac{m_2}{\rho_2}\frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial \xi} = \frac{U_1 - U_2}{\tau},$$

$$D_2V_2 + \frac{m_2}{\rho_2}\frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial y} = \frac{V_1 - V_2}{\tau},$$

$$D_2W_2 + \frac{m_2}{\rho_2}\frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial z} = \frac{W_1 - W_2}{\tau},$$

где

$$D_1 = U_1\frac{\partial}{\partial \xi} + V_1\frac{\partial}{\partial y} + W_1\frac{\partial}{\partial z}, \quad D_2 = U_2\frac{\partial}{\partial \xi} + V_2\frac{\partial}{\partial y} + W_2\frac{\partial}{\partial z}.$$

3.8. Обобщенные вращательные движения в однородном поле сил, направленных параллельно оси x . Решения вида $u_{1c} = \beta t + U_1(\tau, \xi, r)$,



$u_{2c} = \beta t + U_2(\tau, \xi, r)$, $(v_{1c}, w_{1c}, v_{2c}, w_{2c}, \rho_1, \rho_2) = (V_1, W_1, V_2, W_2, \rho_1, \rho_2)(\tau, \xi, r)$, $s = \alpha t - \theta$, $\xi = x - \beta \frac{t^2}{2}$, соответствуют факторсистеме уравнений подмодели

$$\begin{aligned} D_1 \rho_1 + \rho_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{V_1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_1}{\partial s} \right) &= 0, \\ D_2 \rho_2 + \rho_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{V_2}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_2}{\partial s} \right) &= 0, \\ D_1 U_1 + \beta + \frac{m_1}{\rho_1} P_\xi &= -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{U_1 - U_2}{\tau}, \\ D_1 V_1 - \frac{W_1^2}{r} + \frac{m_1}{\rho_1} P_r &= -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{V_1 - V_2}{\tau}, \\ D_1 W_1 + \frac{W_1 V_1}{r} - \frac{m_1}{\rho_1} \frac{1}{r} P_s &= -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{W_1 - W_2}{\tau}, \\ D_2 U_2 + \beta + \frac{m_2}{\rho_2} P_\xi &= \frac{U_1 - U_2}{\tau}, \\ D_2 V_2 - \frac{W_2^2}{r} + \frac{m_2}{\rho_2} P_r &= \frac{V_1 - V_2}{\tau}, \\ D_2 W_2 + \frac{W_2 V_2}{r} - \frac{m_2}{\rho_2} \frac{1}{r} P_s &= \frac{W_1 - W_2}{\tau}, \end{aligned}$$

где

$$D_1 = \left(\alpha - \frac{W_1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial s} + U_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + V_1 \frac{\partial}{\partial r}, \quad D_2 = \left(\alpha - \frac{W_2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial s} + U_2 \frac{\partial}{\partial \xi} + V_2 \frac{\partial}{\partial r}.$$

4. Некоторые решения системы уравнений динамики газозвеси. Прямой проверкой можно убедиться, что функции

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{c_1}{t}, \quad \rho_2 = \frac{c_2}{t}, \\ u_1 &= \frac{x}{t} + \frac{1}{t} \left(\frac{c_2}{c_1 + c_2} \varphi(y, z) \exp \left\{ - \left(\frac{c_1 + c_2}{c_1} \right) \frac{t}{\tau} \right\} + \psi(y, z) \right), \\ u_2 &= \frac{x}{t} + \frac{1}{t} \left(-\frac{c_1}{c_1 + c_2} \varphi(y, z) \exp \left\{ - \left(\frac{c_1 + c_2}{c_1} \right) \frac{t}{\tau} \right\} + \psi(y, z) \right), \\ v_1 &= w_1 = 0, \quad v_2 = w_2 = 0 \end{aligned}$$

задают решение системы (1)-(4), инвариантное относительно галилеевских преобразований. Также найдены следующие решения системы.

I.

$$\begin{aligned} \vec{u}_2 &= \vec{u}_1, \quad \rho_1 = \frac{c_1}{(t + c_3)(t + c_5)(t + c_7)}, \quad \rho_2 = c_2 \rho_1, \\ u_1 &= \frac{x}{t + c_3} + \frac{c_4}{t + c_3}, \quad v_1 = \frac{y}{t + c_5} + \frac{c_6}{t + c_5}, \quad w_1 = \frac{z}{t + c_7} + \frac{c_8}{t + c_7}. \end{aligned}$$



II.

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{c_1}{(t + c_3)(t + c_6)(t + c_9)},$$

$$u_1 = \frac{x}{t + c_3} + \frac{c_4}{t + c_3} - \frac{c_5}{t + c_3} \exp \left\{ -\frac{2}{\tau} t \right\}, \quad u_2 = \frac{x}{t + c_3} + \frac{c_4}{t + c_3} + \frac{c_5}{t + c_3} \exp \left\{ -\frac{2}{\tau} t \right\},$$

$$v_1 = \frac{y}{t + c_6} + \frac{c_7}{t + c_6} - \frac{c_8}{t + c_6} \exp \left\{ -\frac{2}{\tau} t \right\}, \quad v_2 = \frac{y}{t + c_6} + \frac{c_7}{t + c_6} + \frac{c_8}{t + c_6} \exp \left\{ -\frac{2}{\tau} t \right\},$$

$$w_1 = \frac{z}{t + c_9} + \frac{c_{10}}{t + c_9} - \frac{c_{11}}{t + c_9} \exp \left\{ -\frac{2}{\tau} t \right\}, \quad w_2 = \frac{z}{t + c_9} + \frac{c_{10}}{t + c_9} + \frac{c_{11}}{t + c_9} \exp \left\{ -\frac{2}{\tau} t \right\}.$$

5. Заключение. Полученные подмодели будут использоваться при поиске инвариантных решений системы, для качественного исследования конкретных движений газовой взвеси: поиск характеристик, областей гиперболичности, траекторий движения. Найденные решения могут быть использованы как для апробации численных методов, так и для постановки задачи Коши.

Литература

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. Федоров А.В., Фомин П.А., Фомин В.М., Тропин Д.А., Чен Дж.-Р. Физико - математическое моделирование подавления детонации облаками мелких частиц / Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2011. – 156 с.
3. Панов А.В. Групповая классификация системы уравнений механики двухфазной среды // Вестник Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Вып.13. – С.38-48.
4. Федоров В.Е., Панов А.В. Инвариантные и частично инвариантные решения системы уравнений механики двухфазной среды // Вестник Челяб. гос. университета. Физика. – 2011. – Вып.11. – С.65-69.
5. Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. – 1994. – 58, Вып.4. – С.29-55.
6. Ovsyannikov L.V. On the optimal system of subalgebras // Lie Groups and Their Appl. – 1994. – 1, №.2. – P.18-26.

INVARIANT SUBMODELS OF EQUATIONS SYSTEM
OF MIXTURE DYNAMICS OF GAS AND SMALL PARTICLES
IN THE CASE OF THREE SPATIAL VARIABLES

A.V. Panov

Chelyabinsk State University,
Bratyev Kashirinyh St., 129, Chelyabinsk, 454001, Russia , e-mail: gjd@bk.ru

Abstract. The equations system of mixture dynamics of gas and small particles is investigated by means of group analysis methods in the case of three spatial variables. The kernel of principal Lie algebras is found. Optimal system of one-dimensional subalgebras is written and their invariant submodels are extracted. Some exact solutions of the system are calculated.

Key words: gas and particles mixture, symmetry Lie algebra, optimal system of subalgebras, admitted group, invariant solution, submodel.



MSC 81P20

ГАУССОВСКОЕ ФЛУКТУАЦИОННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ С ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧНОМ РЕАЛИЗАЦИЯМИ

Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучается стохастическое электромагнитное поле, описывающее тепловые флуктуации. Строятся гауссовские модели случайного электромагнитного поля в рамках общепринятого в статистической физике подхода на основе разложения поля на плоские линейно поляризованные волны в конечной области в форме параллелепипеда с большим линейным размером и последующим переходом к термодинамическому пределу. Показывается, что математически непротиворечивым образом могут быть построены модели электромагнитного поля с произвольной корреляционной функцией, на которую наложено специальное дополнительное условие, связанное с его поперечностью.

Ключевые слова: флуктуационное электромагнитное поле, гауссовское случайное поле, уравнения Максвелла, стохастическая модель, корреляционная функция, бесконечномерный марковский процесс, почти-периодические функции в среднем квадратичном.

1. Постановка задачи. Начало изучению стохастических моделей электромагнитного поля восходит к работам Рэля, Джинса, Вина и Планка при построении теории излучения абсолютно черного тела (см., например, [1]). В связи с решением этой задачи, в теоретической физике возникло, в частности, понятие квантования электромагнитного поля. Следует заметить, что в то время, когда были опубликованы эти исследования, раздел теории вероятностей, идейно связанный с изучением таких стохастических моделей, – теория случайных процессов (полей) находился еще в зачаточном состоянии. Этим обстоятельством, в частности, обусловлен, в значительной мере, выбор пути построения теории излучения абсолютно черного тела, предложенный Планком. Нам представляется, что в настоящее время, благодаря бурному развитию в течение двадцатого столетия теории случайных процессов, которое привело к построению развитой математической теории случайных полей, представляется возможность по новому подойти к задаче описания тепловых флуктуаций электромагнитного поля и, в частности, по новому подойти к теории теплового излучения абсолютно черного тела (см., например, [2, 3]). Наличие такого альтернативного подхода к изучению стохастических электромагнитных полей отнюдь не ведет к необходимости пересмотра современной квантовой точки зрения на электромагнитное поле, однако дает новые математические возможности при теоретическом моделировании теплового электромагнитного излучения и, вообще, любого электромагнитного излучения, содержащего стохастическую составляющую.



2. Стохастические гауссовские электромагнитные поля. Рассмотрим стохастическое электромагнитное поле $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H} \rangle$ ¹⁾ в евклидовом пространстве, которое подчиняется уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + [\nabla, \mathbf{E}] &= 0, \quad (\nabla, \mathbf{H}) = 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - [\nabla, \mathbf{H}] &= 0, \quad (\nabla, \mathbf{E}) = 0. \end{aligned}$$

При построении стохастической модели удобно использовать формализм, при котором для описания электромагнитного поля используется только одна комплекснозначная вектор-функция $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$, которая подчинена уравнениям

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = -i[\nabla, \mathbf{F}], \quad (\nabla, \mathbf{F}) = 0. \quad (1)$$

Для определения стохастического электромагнитного поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ мы будем исходить из следующей схемы, принятой в статистической физике и квантовой теории поля. Сначала мы построим случайное электромагнитное поле в конечной области Λ , которую, ввиду простоты, положим в виде кубического ящика со стороной L , $\Lambda = [0, L]^3$. Затем, при вычислении математических ожиданий, интерпретируемых как наблюдаемые значения физических величин, будем переходить к пределу $L \rightarrow \infty$, который называется *термодинамическим пределом*. Иными словами, наша модель стохастического электромагнитного поля представляет собой обобщенное случайное поле, так как мы, посредством термодинамического предельного перехода, определяем только лишь характеристический функционал случайного поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ в \mathbb{R}^3 .

В рассматриваемой нами схеме случайное поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ в Λ может быть разложено в трехмерный ряд Фурье,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}} \bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\kappa}, t) \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})), \quad (2)$$

где $\bar{\Lambda} = \left\langle \boldsymbol{\kappa} = \frac{2\pi}{L} n_i \mathbf{e}_i : n_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3 \right\rangle$, $\mathbf{e}_j, j = 1, 2, 3$ — орты в \mathbb{R}^3 , ориентированные по сторонам куба Λ . Векторное поле $\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\kappa}, t)$ подчинено уравнениям

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial t} = [\boldsymbol{\kappa}, \bar{\mathbf{F}}], \quad (\boldsymbol{\kappa}, \bar{\mathbf{F}}) = 0. \quad (3)$$

Задание случайной комплекснозначной вектор-функции $\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\kappa}, t)$, удовлетворяющей (3), эквивалентно заданию случайного поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющего уравнениям (1).

¹Здесь мы, чтобы не усложнять запись формул, не вводим какого-либо специального обозначения, позволяющего отличать случайные математические объекты от неслучайных. Поэтому, в дальнейшем, по умолчанию, все вектор-функции E_j, H_j, F_j, A_j являются случайными. Остальные же встречающиеся в тексте величины являются неслучайными.



Набор случайных коэффициентов $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$, $i = 1, 2, 3$, как набор коэффициентов ряда Фурье квадратично интегрируемых функций $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, квадратично суммируем

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}} |\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)|^2 < \infty,$$

$$\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t) = \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Lambda} F_i(\mathbf{x}, t) \exp(-i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa})) d\mathbf{x},$$

$|\Lambda|$ — объем области Λ . Более того, ввиду гладкости поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ (квадратичной интегрируемости пространственных производных поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$), имеет место более сильное свойство суммируемости этого набора коэффициентов,

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}} \boldsymbol{\kappa}^2 |\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)|^2 < \infty,$$

Простейшая стохастическая модель, у которой случайные реализации могут быть представлены с вероятностью единица в виде обычных (не обобщенных) гладких вектор-функций, удовлетворяющих уравнению (1), дается конструкцией гауссовского случайного поля. Более того, модель гауссовского случайного поля является естественной в том случае, когда оно мало с физической точки зрения. Математически, эту малость нужно понимать в смысле малости средних квадратичных значений поля.

Гауссовская модель электромагнитного поля, естественным образом, определяется на основе понятия характеристического функционала. В общем случае, распределение вероятностей пары, вообще говоря статистически связанных, случайных полей $\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \rangle$ (в том числе и обобщенных) определяется на основе характеристического функционала

$$\Phi[\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle; \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{H}(\mathbf{y}, s) \rangle] \equiv \left\langle \left\langle \exp \left(i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} (v_j(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{x}, t) + w_j(\mathbf{x}, t) H_j(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \right) \right\rangle \right\rangle \geq 0$$

от пары $\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \rangle$ финитных и непрерывных вектор-функций на $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Здесь мы использовали обозначение $\langle \cdot \rangle$ для операции вычисления математического ожидания по определяемому распределению вероятностей.

Гауссовская модель определяется следующей явной формулой для характеристического функционала

$$\Phi[\mathbf{u}^{(\alpha)}; \mathbf{F}^{(\beta)}(\mathbf{x}, t)] = \exp \left(- \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} dt ds \int_{\mathbb{R}^6} K_{ij}^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s) u_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) u_j^{(\beta)}(\mathbf{y}, s) d\mathbf{x} d\mathbf{y} + \right. \\ \left. + i \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}^3} u_j^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) \langle \langle F_j^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) \rangle \rangle d\mathbf{x} \right),$$



где $\alpha, \beta = 1, 2$ и введены обозначения $u_j^{(1)} = v_j$, $u_j^{(2)} = w_j$; $F_j^{(1)} = E_j$, $F_j^{(2)} = H_j$ и корреляционная функция

$$K_{ij}^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s) = \langle\langle (F_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) - \langle F_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) \rangle) (F_j^{(\beta)}(\mathbf{y}, s) - \langle F_j^{(\beta)}(\mathbf{y}, s) \rangle) \rangle\rangle.$$

В рамках гауссовской модели все средние вида $\langle\langle \left(\prod_{k=1}^m F_{i_k}(\mathbf{x}_k, t_k) \right) \left(\prod_{l=1}^m F_{j_l}^*(\mathbf{y}_l, s_l) \right) \rangle\rangle$ существуют (конечны).

Пусть гауссовское векторное комплекснозначное поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ обладает нулевым средним, $\langle\langle \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \rangle\rangle = 0$. Более того, будем, далее, для простоты предполагать, что его электрическая и магнитная компоненты являются стохастически независимыми и эквивалентными. Это означает, в частности, что

$$\langle\langle E_i(\mathbf{x}, t) H_j(\mathbf{y}, s) \rangle\rangle = \langle\langle E_i(\mathbf{x}, t) \rangle\rangle \langle\langle H_j(\mathbf{y}, s) \rangle\rangle = 0,$$

а также $\langle\langle E_i(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{y}, s) \rangle\rangle = \langle\langle H_i(\mathbf{x}, t) H_j(\mathbf{y}, s) \rangle\rangle \equiv K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)/2$, при любых значениях \mathbf{x}, t, i и \mathbf{y}, s, j . Тогда любые математические ожидания от произведений значений поля $\langle\langle \left(\prod_{k=1}^m F_{i_k}(\mathbf{x}_k, t_k) \right) \left(\prod_{l=1}^n F_{j_l}^*(\mathbf{y}_l, s_l) \right) \rangle\rangle$, во-первых, отличны от нуля только в случае, если $m = n$, и, во-вторых, если это равенство имеет место, то они выражаются посредством следующей формулы через корреляционную функцию

$$K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = \langle\langle F_i(\mathbf{x}, t) F_j^*(\mathbf{y}, s) \rangle\rangle. \quad (4)$$

следующей формулой

$$\langle\langle \left(\prod_{k=1}^m F_{i_k}(\mathbf{x}_k, t_k) \right) \left(\prod_{l=1}^m F_{j_l}^*(\mathbf{y}_l, s_l) \right) \rangle\rangle = \sum_{P \in \mathcal{P}_m} \prod_{k=1}^m \langle\langle F_{i_k}(\mathbf{x}_k, t_k) F_{j_{P_k}}^*(\mathbf{y}_{j_{P_k}}, s_{j_{P_k}}) \rangle\rangle. \quad (5)$$

В этой формуле суммирование производится по всем возможным операциям перестановок P номеров аргументов, которые составляют группу перестановок \mathcal{P}_m порядка m .

Заметим, что корреляционная функция (4) в рассматриваемом нами случае является вещественнозначной, в чем убеждаемся непосредственной подстановкой разложения $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$ в ее определение. Принимая во внимание вещественность этой функции, из (4) следует, что она обладает следующим свойством

$$K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = K_{ji}(\mathbf{y}, s; \mathbf{x}, t). \quad (6)$$

Записывая определение характеристического функционала в терминах случайной вектор-функции $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$:

$$\Phi[\mathbf{u}; \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)] = \langle\langle \exp \left(i \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x}, t) F_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \rangle\rangle,$$



где $\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$. Подставляя же правую часть определения характеристического функционала гауссовской модели, согласно свойствам статистической независимости и эквивалентности полей \mathbf{E} и \mathbf{H} и равенства нулю средних компонент \mathbf{E} и \mathbf{H} , выражение $K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)\delta_{\alpha,\beta}$, находим

$$\begin{aligned} \Phi[\mathbf{u}; \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)] &\equiv \left\langle \left\langle \exp \left(i \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x}, t) F_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \right\rangle \right\rangle = \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt ds \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x}, t) u_j^*(\mathbf{y}, s) K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

для любой непрерывной комплекснозначной финитной вектор-функции $u_i(\mathbf{x}, t)$. Следовательно, комплекснозначная тензор-функция $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$ полностью определяет, в рассматриваемом нами случае, распределение вероятностей комплекснозначного векторного гауссовского случайного поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$.

Каждая из формулы (5) и (6) может служить характеристическим свойством случайного поля \mathbf{F} со статистически независимыми и эквивалентными компонентами, обладающими нулевыми средними значениями, то есть справедлива

Теорема 1. Для того, чтобы гауссовское комплекснозначное векторное поле $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$, у которого компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} имеют нулевые средние значения, обладало свойством их статистической независимости и эквивалентности, необходимо и достаточно, чтобы корреляционная функция (4), обладающая свойством (6), была вещественной и имела место формула усреднения (5) или, эквивалентно, формула (6) для характеристического функционала.

□ Необходимость. Следует из приведенного выше рассуждения.

Достаточность. Пусть имеет место формула (6). Тогда, одновременной заменой переменных интегрирования суммирования $\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{y}$, $t \Leftrightarrow s$, $i \Leftrightarrow j$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt ds \int_{\mathbb{R}^3} (v_i(\mathbf{x}, t) w_j(\mathbf{y}, s) - w_i(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{y}, s)) K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = 0,$$

то есть

$$\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dt ds \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x}, t) u_j^*(\mathbf{y}, s) K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = 0.$$

Тогда,

$$\begin{aligned} &\exp \left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt ds \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x}, t) u_j^*(\mathbf{y}, s) K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right) = \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt ds \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x}, t) u_j^*(\mathbf{y}, s) K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt ds \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x}, t) u_j^*(\mathbf{y}, s) K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right) \Big|_{w=0} \times \\
 &\quad \times \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt ds \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x}, t) u_j^*(\mathbf{y}, s) K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right) \Big|_{v=0} = \\
 &= \left\langle \left\langle \exp \left(i \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x}, t) F_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \right\rangle \right\rangle \Big|_{w=0} \left\langle \left\langle \exp \left(i \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x}, t) F_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \right\rangle \right\rangle \Big|_{v=0} \\
 &= \left\langle \left\langle \exp \left(i \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \right\rangle \right\rangle \left\langle \left\langle \exp \left(i \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x}, t) (i H_j)(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \right\rangle \right\rangle,
 \end{aligned}$$

согласно формуле (7), соответственно, при $w \equiv 0$, $v \equiv 0$. С другой стороны, используя формулу (7) в общем случае, имеем

$$\Phi[\mathbf{u}; \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)] = \Phi[\mathbf{u}; \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)] \cdot \Phi[\mathbf{u}; i\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)].$$

Эта формула означает, что случайные поля \mathbf{E} и \mathbf{H} статистически независимы.

Положим теперь в начальном и конечном выражениях приведенного вычисления $v = w$. Тогда левая часть равна

$$\begin{aligned}
 &\left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt ds \int_{\mathbb{R}^3} v_i(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{y}, s) K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right) \Big|_{w=0} \right]^2 = \\
 &= \left[\left\langle \left\langle \exp \left(i \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} v_j(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \right\rangle \right\rangle \right]^2,
 \end{aligned}$$

а правая –

$$\left\langle \left\langle \exp \left(i \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} v_j(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \right\rangle \right\rangle \left\langle \left\langle \exp \left(i \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} v_j(\mathbf{x}, t) H_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \right\rangle \right\rangle.$$

Это приводит к равенству

$$\left\langle \left\langle \exp \left(i \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} v_j(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \right\rangle \right\rangle = \left\langle \left\langle \exp \left(i \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} v_j(\mathbf{x}, t) H_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \right\rangle \right\rangle$$

с произвольной функцией $v(\mathbf{x}, t)$, которое означает, что поля \mathbf{E} и \mathbf{H} стохастически эквивалентны.



Наконец, вычисляя вариационную производную

$$\delta^{m+n}(\cdot)/\delta u_{i_1}(\mathbf{x}_1, t_1)\dots\delta u_{i_m}(\mathbf{x}_m, t_m)\delta u_{j_1}^*(\mathbf{y}_1, s_1)\dots\delta u_{j_n}^*(\mathbf{y}_n, s_n)$$

от обеих частей формулы (7) в точке $u_i(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ функционального пространства финитных непрерывных вектор-функций $u_i(\mathbf{x}, t)$, получим формулу (5) для вычисления средних значений мономов от случайного поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$. ■

Заметим, что через посредство функции $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$ выражаются физически значимые величины. Например,

$$\frac{1}{8\pi}K_{ii}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) \equiv W(\mathbf{x}, t)$$

представляет собой плотность энергии электромагнитного поля в пространственно-временной точке \mathbf{x}, t .

Из определения (4) непосредственно следует, что корреляционная функция, обладает следующим свойством положительности:

$$\left\langle \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} u_j(\mathbf{x}, t) F_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right|^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt ds \int_{\mathbb{R}^3} K_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s) u_i(\mathbf{x}, t) u_j^*(\mathbf{y}, s) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \geq 0, \quad (8)$$

верное для любой непрерывной финитной комплекснозначной вектор-функции $u_i(\mathbf{x}, t)$ (это, автоматически, означает вещественность интеграла в правой части).

Замечание. Воспользовавшись теоремой Бохнера-Хинчина (см., например, [4]), легко доказать, что это условие, вместе с (6), является также достаточным для того, чтобы функция $K_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s)$ представляла корреляционную функцию некоторого комплекснозначного векторного случайного поля $F_j(\mathbf{x}, t)$ с нулевым средним значением. Если к тому же эта функция вещественна, то, согласно доказанной теореме, реальная и мнимая части случайного поля статистически независимы и эквивалентны. Для доказательства достаточно определить пару гауссовских вектор-функций \mathbf{E} и \mathbf{H} таких, что $\langle E_j \rangle = \langle H_j \rangle = 0$ и, для которых $K_{ij}^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) \delta_{\alpha, \beta}$.

Заметим, что свойства (6), (8) означают, что $K_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s)$ является ядром эрмитовского неотрицательного интегрального оператора с вещественным ядром.

Укажем, наконец, очень важный частный случай, который будет для нас, в дальнейшем, иметь особое значение в связи с приложением к теории термодинамически равновесного излучения в замкнутой полости. Случайное поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ называется стохастически однородным по пространству и/или стационарным по времени, если его распределение вероятностей не изменяется при преобразовании случайного поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ посредством сдвига пространственной точки $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ и времени $t \Rightarrow t + c$ для любого вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ и/или любого числа $c \in \mathbb{R}$. Иными словами, случайное поле $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{a}, t)$ и/или $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t + c)$ имеет то же самое распределение вероятностей, что и поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$. Согласно формуле (7), для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$K_{ij}(\mathbf{x} + \mathbf{a}, t; \mathbf{y} + \mathbf{a}, s) = K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) \quad \text{и/или} \quad K_{ij}(\mathbf{x}, t + c; \mathbf{y}, s + c) = K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s). \quad (9)$$



Общим решением функциональных уравнений (9) при наличии стохастической однородности, как по пространственным переменным, так и по времени, является следующий вид корреляционной функции:

$$K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = K_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s), \quad (10)$$

где $K_{ij}(\cdot, \cdot)$ – некоторая тензор-функция на $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, то есть функция уже только от одной пространственно-временной точки. При этом, согласно (6), функция $K_{ij}(\cdot, \cdot)$ обладает свойством

$$K_{ij}(\mathbf{x}, t) = K_{ji}(-\mathbf{x}, -t). \quad (11)$$

Рассмотрим теперь какими дополнительными необходимыми свойствами должна обладать функция $K_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s)$ для того, чтобы она представляла корреляционную функцию поля $F_j(\mathbf{x}, t)$, соответствующую электромагнитному полю $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H} \rangle$ посредством соотношения $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$. Так как в этом случае случайная функция должна подчиняться уравнениям Максвелла, записанным в форме (1), то умножая каждое из этих уравнений на $F_j^*(\mathbf{y}, s)$ и производя усреднение, находим, что корреляционная функция должна подчиняться следующим уравнениям

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = -i\varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} K_{lj}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = 0. \quad (12)$$

Точно также, заменив в уравнениях (1) $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{y}$ и $t \Rightarrow s$ вместе с комплексным сопряжением, а затем умножив из на $F_i(\mathbf{x}, t)$ и усреднив по распределению вероятностей поля, получим, что имеют место уравнения

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial s} K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = i\varepsilon_{jkl} \frac{\partial}{\partial y_k} K_{il}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s), \quad \frac{\partial}{\partial y_j} K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = 0. \quad (13)$$

Существенно, что эти уравнения имеют место только в случае, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $t \neq s$. Но при этом также нужно помнить, что поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ должно быть дифференцируемым по \mathbf{x} и t , и поэтому корреляционная функция $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$ обязательно дифференцируема по каждой из переменных, то есть, наверняка, непрерывна.

Ограничения (12), (13) на корреляционную функцию являются необходимыми в том случае, когда поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнениям Максвелла. Однако, они не являются достаточными. Это связано с тем, что они получены уже в результате усреднения, в то время как случайное электромагнитное поле $F_i(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнениям Максвелла с вероятностью единица. Таким образом, при усреднении посредством описания его корреляционной функцией, удовлетворяющей уравнениям (12), (13), теряется существенная часть информации о случайном поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$. Нахождение таких ограничений на корреляционную функцию $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$, которые бы являлись необходимыми и достаточными для того, чтобы она соответствовала стохастическому электромагнитному полю, в общем случае, довольно затруднительно. В следующем разделе эта задача будет решена в том случае, когда электромагнитное поле сосредоточено в ограниченной полости.



3. Стохастические электромагнитные поля в ограниченной полости. Для нахождения ограничений на корреляционную функцию $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$, которые бы представляли необходимые и достаточные условия ее связанности со стохастическим электромагнитным полем в ограниченной полости, воспользуемся разложением (2) поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$. Подстановка этого разложения в уравнения Максвелла (1) приводит к следующим уравнениям для коэффициентов разложения

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial t} = \varepsilon_{ijk} \kappa_j \bar{F}_k, \quad \kappa_k \bar{F}_k = 0; \quad \boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}. \quad (14)$$

Ввиду наличия однозначной линейной связи между полями $F_i(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Lambda$ и $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$, для того чтобы поле $F_i(\mathbf{x}, t)$ было гауссовским и имело нулевое среднее необходимо и достаточно чтобы поле $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ также было гауссовским и имело нулевое среднее. В этом случае поле $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ полностью определяется ковариационной матрицей

$$\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \langle \langle \bar{F}_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1) \bar{F}_{i_2}^*(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2) \rangle \rangle, \quad \bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \bar{K}_{i_2 i_1}^*(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2; \boldsymbol{\kappa}_1, t_1).$$

Эта матрица обладает свойством положительной определенности вида

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} dt \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}} \bar{u}_j(\boldsymbol{\kappa}, t) \bar{F}_j(\boldsymbol{\kappa}, t) \right|^2 \right\rangle \right\rangle = \\ = \sum_{\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2 \in \bar{\Lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}_{k_1 k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) \bar{u}_{k_1}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1) \bar{u}_{k_2}^*(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2) dt_1 dt_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

для любого набора финитных по t функций $\bar{u}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$.

Корреляционная функция $K_{i_1 i_2}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2)$ поля $F_i(\mathbf{x}, t)$ связана с ковариационной матрицей $\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$ следующей формулой

$$K_{i_1 i_2}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2 \in \bar{\Lambda}} \bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) \exp[i(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\kappa}_1) - i(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\kappa}_2)],$$

которая получается подстановкой в определяющую формулу (4), вместо случайных функций $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, их разложений вида (2). Подставляя аналогичное разложение в выражение в правой части формулы (10), убеждаемся, что, благодаря неравенству (15), корреляционная функция $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$, действительно, является положительно определенной.

Как и для поля $F_i(\mathbf{x}, t)$, для того чтобы $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ обладало стохастически независимыми и эквивалентными реальной и мнимой частями, необходимо и достаточно, чтобы эта матрица, как и корреляционная матрица $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$, была вещественной, то есть удовлетворяло соотношению

$$\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \bar{K}_{i_2 i_1}(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2; \boldsymbol{\kappa}_1, t_1). \quad (16)$$



Найдем общее решение второго алгебраического уравнения. Для этого заметим, что линейное уравнение

$$\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t) = \varepsilon_{ijk}\kappa_j A_k(\boldsymbol{\kappa}, t), \quad (17)$$

где ε_{ijk} — псевдотензор Леви-Чивитта, всегда разрешимо относительно $A_k(\boldsymbol{\kappa}, t)$ при выполнении условия $\kappa_k \bar{F}_k = 0$. Общим решением этого вырожденного линейного уравнения является (если $\boldsymbol{\kappa} \neq 0$)

$$A_i(\boldsymbol{\kappa}, t) = \lambda(\boldsymbol{\kappa}, t)\kappa_i - \boldsymbol{\kappa}^{-2}\varepsilon_{ijk}\kappa_j \bar{F}_k(\boldsymbol{\kappa}, t),$$

$\lambda(\boldsymbol{\kappa}, t)$ — произвольная функция от $\boldsymbol{\kappa}$ и t . Однако, первое слагаемое не дает вклада в правой части формулы (17), и поэтому оно может быть положено равным нулю. Тогда для выполнимости (17), достаточно считать, набор функций $A_k(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ однозначно определяется формулой

$$A_i(\boldsymbol{\kappa}, t) = -\boldsymbol{\kappa}^{-2}\varepsilon_{ijk}\kappa_j \bar{F}_k(\boldsymbol{\kappa}, t). \quad (18)$$

Тогда, ввиду квадратичной суммируемости $F_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, этот набор функций обладает свойством

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}} \boldsymbol{\kappa}^2 |A(\boldsymbol{\kappa}, t)|^2 < \infty.$$

Ввиду однозначности связи между полями $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ и $A_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$, совместное распределение вероятностей набора $A_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ порождается распределением вероятностей набора $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ и, наоборот, распределение вероятностей первого набора порождает совместное распределение второго. При этом в силу выполнимости свойства суммируемости с квадратичным весом для набора $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ с вероятностью единица, для набора $A_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$, с той же вероятностью, выполняется

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}} \boldsymbol{\kappa}^4 |A_i(\boldsymbol{\kappa}, t)|^2 < \infty. \quad (19)$$

Кроме того, так как поле $A(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ получается линейным преобразованием из гауссовского случайного поля $\bar{F}(\boldsymbol{\kappa}, t)$, то, согласно теории Пугачева [5], оно является гауссовским по $\boldsymbol{\kappa}$ и t . Это поле, вслед за случайным полем $\bar{F}(\boldsymbol{\kappa}, t)$ обладает нулевым средним значением. Обратно, если для набора гауссовских случайных функций с нулевым средним значением выполняется (19), то соответствующий набор функций $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ представляет собой гауссовское поле с нулевым средним, квадратично суммируемое с весом $\boldsymbol{\kappa}^2$.

Поле $A_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ с нулевым средним значением полностью описывается бесконечной ковариационной матрицей

$$D_{i_1, i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \langle\langle A_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1) A_{i_2}^*(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2) \rangle\rangle, \quad D_{i_1, i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = D_{i_2, i_1}^*(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2; \boldsymbol{\kappa}_1, t_1). \quad (20)$$

Эта матрица точно также как и ковариационная матрица $\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$ должна обладать свойством положительной определенности

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2 \in \bar{\Lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} D_{i_1, i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) \bar{u}_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1) \bar{u}_{i_2}^*(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2) dt_1 dt_2 \geq 0 \quad (21)$$



для любого набора финитных по t функций $\bar{u}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$. Подставляя в эту формулу выражения (17) для функций $A_{i_s}(\boldsymbol{\kappa}_s, t_s)$, $\boldsymbol{\kappa}_s \in \bar{\Lambda}$ и заменив функции $\bar{u}_{i_s}(\boldsymbol{\kappa}_s, t_s)$ на $-\boldsymbol{\kappa}_s^{-2} \varepsilon_{i_s j k_s} \kappa_j \bar{u}_{k_s}(\boldsymbol{\kappa}_s, t_s)$, $s = 1, 2$, получим, что выполняется (15).

Итак, вследствие выявленных выше связей между полями $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ и $A_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ и вещественности коэффициентов (формулы (17) и (18)), в линейных связях между этими полями, справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы комплекснозначное гауссовское поле $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ имело нулевое среднее значение и статистически независимые и эквивалентные реальную и мнимую части необходимо и достаточно, чтобы гауссовское векторное комплекснозначное поле $A_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ имело нулевое среднее и корреляционная матрица этого поля $\langle\langle A_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1) A_{i_2}^*(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2) \rangle\rangle$ была вещественной.*

Таким образом, определив произвольным образом набор гауссовских случайных функций $A_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ с нулевым средним и с реализациями, удовлетворяющими с вероятностью единица условию (19) и вещественной ковариационной матрицей $D_{i_1, i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$, мы, тем самым, определим однозначным образом гауссовское случайное соленоидальное поле $F_i(\mathbf{x}, t)$ с вещественной ковариационной матрицей. При этом, ввиду формулы (13), ковариационные матрицы $\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$ и $D_{i_1, i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$ связаны очевидным соотношением

$$\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \varepsilon_{i_1 j_1 k_1} \varepsilon_{i_2 j_2 k_2} (\boldsymbol{\kappa}_1)_{j_1} (\boldsymbol{\kappa}_2)_{j_2} D_{k_1, k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2), \quad (22)$$

которое является необходимым (в рамках сделанных ограничений на поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$), вследствие теоремы 2, и достаточным условием для соленоидальности этого поля так, что имеют место соотношения

$$(\boldsymbol{\kappa}_1)_{i_1} \bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = 0, \quad (\boldsymbol{\kappa}_2)_{i_2} \bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = 0. \quad ^2)$$

Рассмотрим теперь те ограничения на выбор гауссовского поля $A_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, которые необходимы для того, чтобы поле $\bar{F}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ удовлетворяло эволюционному уравнению (1). Посредством усреднения, из уравнений (11), (12) непосредственно вытекает, что ковариационная матрица удовлетворяет следующим уравнениям

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_1} \bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \varepsilon_{i_1 k l} (\boldsymbol{\kappa}_1)_k \bar{K}_{l i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2), \quad (23)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_2} \bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \varepsilon_{i_2 k l} (\boldsymbol{\kappa}_2)_k \bar{K}_{i_1 l}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2). \quad (24)$$

²С другой стороны, выполнимость этих соотношений обеспечивает соленоидальность поля $F_i(\mathbf{x}, t)$ с вероятностью 1, так как имеет место

$$0 = \sum_{\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2 \in \bar{\Lambda}} (\boldsymbol{\kappa}_1)_{i_1} (\boldsymbol{\kappa}_2)_{i_2} \bar{K}_{k_1 k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) \bar{u}(\boldsymbol{\kappa}_1) \bar{u}^*(\boldsymbol{\kappa}_2) = \left\langle \left| \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}} \bar{u}(\boldsymbol{\kappa}) \kappa_j \bar{F}_j(\boldsymbol{\kappa}, t) \right|^2 \right\rangle,$$

для любой финитной функции $\bar{u}(\boldsymbol{\kappa})$, для всех $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$. Это означает, что с вероятностью единица имеет место тождество $\kappa_k \bar{F}_k(\boldsymbol{\kappa}, t) = 0$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ (см. (13)).



Проанализируем к каким следствиям приводит выполнимость первого уравнения в (13) именно с вероятностью единица. Продифференцируем по времени формулу (17) и воспользуемся вторым уравнением (13). Тогда, так как $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, то

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{F}_i}{\partial t^2} = -\kappa^2 \bar{F}_i.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_i(\boldsymbol{\kappa}, t) = -\kappa^{-2} \varepsilon_{ijk} \kappa_j \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{F}_k(\boldsymbol{\kappa}, t) = -\kappa^2 \left(-\kappa^{-2} \varepsilon_{ijk} \kappa_j F_k(\boldsymbol{\kappa}, t) \right) = -\kappa^2 A_i(\boldsymbol{\kappa}, t).$$

Поэтому

$$A_i(\boldsymbol{\kappa}, t) = A_i^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}) \exp(ic|\boldsymbol{\kappa}|t) + A_i^{(-)}(\boldsymbol{\kappa}) \exp(-ic|\boldsymbol{\kappa}|t).$$

Тогда, подставляя аналогичные выражения в определение ковариационная матрицы, получаем

$$\begin{aligned} D_{j_1, j_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \\ \langle\langle A_{j_1}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}_1) A_{j_2}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa}_2) \rangle\rangle \exp(ic(|\boldsymbol{\kappa}_1|t_1 - |\boldsymbol{\kappa}_2|t_2)) + \langle\langle A_{j_1}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa}_1) A_{j_2}^{(-)*}(\boldsymbol{\kappa}_2) \rangle\rangle \exp(-ic(|\boldsymbol{\kappa}_1|t_1 - |\boldsymbol{\kappa}_2|t_2)) + \\ \langle\langle A_{j_1}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}_1) A_{j_2}^{(-)*}(\boldsymbol{\kappa}_2) \rangle\rangle \exp(ic(|\boldsymbol{\kappa}_1|t_1 + |\boldsymbol{\kappa}_2|t_2)) + \langle\langle A_{j_1}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa}_1) A_{j_2}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa}_2) \rangle\rangle \exp(-ic(|\boldsymbol{\kappa}_1|t_1 + |\boldsymbol{\kappa}_2|t_2)). \end{aligned}$$

Далее, мы ограничимся анализом случая стохастически пространственно-однородного случайного поля. При наличии периодических граничных условий эта ковариационная матрица пропорциональна символу Кронекера $\delta_{\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2}$. Поэтому мы введем обозначение $D_{j_1, j_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \delta_{\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2} \delta_{\boldsymbol{\kappa}_2, \boldsymbol{\kappa}} D_{j_1, j_2}(\boldsymbol{\kappa}; t_1, t_2)$. Введя матрицы $D_{j_1, j_2}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}) = \langle\langle A_{j_1}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}) A_{j_2}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa}) \rangle\rangle$ и $D_{j_1, j_2}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa}) = \langle\langle A_{j_1}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa}) A_{j_2}^{(-)*}(\boldsymbol{\kappa}) \rangle\rangle$, из требования вещественности матрицы $D_{j_1, j_2}(\boldsymbol{\kappa}; t_1, t_2)$ при любых значениях t_1, t_2 находим, что $D_{j_1, j_2}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa}) = \langle\langle A_{j_1}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa}) A_{j_2}^{(-)*}(\boldsymbol{\kappa}) \rangle\rangle$ и $D_{j_1, j_2}^{(-)*}(\boldsymbol{\kappa}) = \langle\langle A_{j_1}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}) A_{j_2}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa}) \rangle\rangle$. Тогда явное выражение для матрицы $D_{j_1, j_2}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa})$ запишется в виде

$$\begin{aligned} D_{j_1, j_2}(\boldsymbol{\kappa}; t_1, t_2) = D_{j_1, j_2}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}) \exp(ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 - t_2)) + D_{j_1, j_2}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa}) \exp(-ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 - t_2)) + \\ + D_{j_1, j_2}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa}) \exp(ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 + t_2)) + D_{j_1, j_2}^{(-)*}(\boldsymbol{\kappa}) \exp(-ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 + t_2)). \end{aligned}$$

Эта матрица полностью определяет гауссовские случайные поля $A_i^{(\pm)}(\boldsymbol{\kappa}, t)$ и, тем самым, поле $A_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, так как из выполнимости $\langle\langle A_i(\boldsymbol{\kappa}, t) \rangle\rangle = 0$ при любых t следуют ограничения $\langle\langle A_i^{(\pm)}(\boldsymbol{\kappa}, t) \rangle\rangle = 0$ на эти поля.

Для того, чтобы поле $A_j(\boldsymbol{\kappa}, t)$ обладало, дополнительно, свойством стационарности по временной переменной, нужно чтобы $\langle\langle A_{j_1}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}) A_{j_2}^{(-)*}(\boldsymbol{\kappa}) \rangle\rangle = 0$. При этом, беря комплексное сопряжение, как следствие получаем $D_{j_1, j_2}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa}) = 0$,

$$D_{j_1, j_2}(\boldsymbol{\kappa}; t_1, t_2) = D_{j_1, j_2}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}) \exp(ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 - t_2)) + D_{j_1, j_2}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa}) \exp(-ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 - t_2)). \quad (25)$$



Из условия положительной определенности корреляционной функции $D_{j_1, j_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$, в условиях стохастических пространственной однородности и временной стационарности, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \int_{\mathbb{R}^3} \left(D_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}) \exp(ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 - t_2)) u_i(\boldsymbol{\kappa}, t_1) u_j^*(\boldsymbol{\kappa}, t_2) + \right. \\ \left. + D_{ij}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa}) \exp(-ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 - t_2)) u_i^*(\boldsymbol{\kappa}, t_1) u_j(\boldsymbol{\kappa}, t_2) \right) d\boldsymbol{\kappa} \geq 0.$$

Вводя комплексные переменные

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_i(\boldsymbol{\kappa}, t) e^{itc|\boldsymbol{\kappa}|} d\boldsymbol{\kappa} = z_i(\boldsymbol{\kappa}),$$

которые, ввиду произвольности функций $u_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, могут принимать любые комплексные значения независимо друг от друга, последнее условие положительной определенности записывается в виде

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(D_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}) z_i(\boldsymbol{\kappa}) z_j^*(\boldsymbol{\kappa}) + D_{ij}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa}) z_i^*(\boldsymbol{\kappa}) z_j(\boldsymbol{\kappa}) \right) d\boldsymbol{\kappa} \geq 0.$$

Для выполнимости этого ограничения необходимо и достаточно, чтобы при любом $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^3$ имело место $D_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}) z_i(\boldsymbol{\kappa}) z_j^*(\boldsymbol{\kappa}) + D_{ij}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa}) z_i^*(\boldsymbol{\kappa}) z_j(\boldsymbol{\kappa}) \geq 0$ для эрмитовской матрицы $D_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa})$. Меняя индексы суммирования во втором слагаемом $i \Leftrightarrow j$ и пользуясь эрмитовостью матрицы, получаем, что $D_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}) z_i(\boldsymbol{\kappa}) z_j^*(\boldsymbol{\kappa}) \geq 0$. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению

Теорема 3. Для того чтобы случайное гауссовское поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + i\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ с нулевым средним значением обладало статистически независимыми и эквивалентными соленоидальными составляющими \mathbf{E} и \mathbf{H} , а также свойствами стохастических пространственной однородности и стационарности по времени необходимо и достаточно, чтобы его корреляционная функция $\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$ имела вид (22), где $D_{k_1, k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \delta_{\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}} \delta_{\boldsymbol{\kappa}_2, \boldsymbol{\kappa}} D_{k_1, k_2}(\boldsymbol{\kappa}; t_1, t_2)$, где $D_{k_1, k_2}(\boldsymbol{\kappa}; t_1, t_2)$ определяется формулой (25) с неотрицательной эрмитовской матриц-функцией $D_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa})$.

4. Заключение. Непосредственным следствием наших рассуждений в этой работе является вывод о том, что в рамках теории гауссовских случайных полей возможно построение модели стохастического электромагнитного поля (в вакууме) с интегрируемой спектральной плотностью, то есть свободной от парадокса Рэлея-Джинса (отсутствие ультрафиолетовой катастрофы), что позволяет, в частности, построить теорию излучения абсолютно черного тела без использования понятия квантования электромагнитного поля. При этом спектральная плотность энергии может иметь довольно произвольный (в частности, планковский) вид.



В самом деле, в рамках рассмотренного в работе и детально исследованного случая случайного электромагнитного поля, метод построения распределения вероятностного распределения которого описан в теореме 3, рассмотрим случайное гауссовское электромагнитное поле, которое, дополнительно, обладает свойством стохастической пространственной изотропии, когда $D_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}) = \delta_{ij}D(|\boldsymbol{\kappa}|)$ с $D(\xi) > 0$. При этом, ввиду (19), $\sum_{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{\kappa}^2 D(|\boldsymbol{\kappa}|) < \infty$. Это означает, ввиду формулы (22), что

$$8\pi W = K_{ii}(0, 0) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \bar{K}_{ii}(\boldsymbol{\kappa}) = 4 \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{\kappa}^2 D(|\boldsymbol{\kappa}|) < \infty.$$

Литература

1. Борн М. Атомная физика / М.: Мир, 1965. – 492 с.
2. Рытов С.М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения / М.: Изд. АН СССР, 1953.
3. Рытов С.М., Татарский В.И., Кравцов Ю.А. Введение в статистическую радиофизику, ч.2 Случайные поля / М.: Наука, 1978. – 464 с.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / М.: Эдиториал УРСС, 2005. – 448 с.
5. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления / 2-е изд. / М.: Физ.-мат. лит., 1960. – 884 с.
6. Фат Лам Тан, Вирченко Ю.П. Стохастически однородные и изотропные магнитные поля // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 19(162); 32. – С.176-183.
7. Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П. Стохастически однородные и изотропные соленоидальные гауссовские поля // Тезисы зимней математической школы С.Г.Крейна / Воронеж: ВГУ, 2014. – С.204-208.

GAUSSIAN FLUCTUATION ELECTROMAGNETIC FIELD WITH QUADRATICALLY AVERAGE ALMOST-PERIODIC RANDOM REALIZATIONS

Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
 Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. Stochastic electromagnetic field that describes some thermal fluctuations is studied. Gaussian models of random electromagnetic field are built in frameworks of the general approach in statistical physics based on the expansion of the field on plane linear polarized waves in finite domain of the parallelepiped form with large linear size and using the thermodynamical limit. It is shown that some models of stochastic electromagnetic field with arbitrary correlation function may be construct by mathematically non-contradictory way. This function should be possessed the special supplementary condition which arises due to the transverse property of electromagnetic field.

Key words: fluctuation electromagnetic field, gaussian random field, Maxwell 's equations, stochastic model, correlation function, infinitely dimensional markovian process, quadratically average almost-periodic functions.



КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

MSC 41A05

ПОВЕДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ УЗЛОВЫХ ФУНКЦИЙ,
ПОСТРОЕННЫХ ИЗ РАВНОМЕРНЫХ СДВИГОВ
ФУНКЦИЙ ГАУССА И ЛОРЕНЦА

Л.А. Минин, С.М. Ситник, С.Н. Ушаков

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394000, Россия, e-mail: mininla@mail.ru;
Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматриваются аппроксимации функций при помощи целочисленных сдвигов функций Гаусса и функций Лоренца. Исследованы свойства монотонности коэффициентов разложений по указанным системам, приведены результаты численных расчётов коэффициентов разложений.

Ключевые слова: функции Лоренца, функции Гаусса, интерполяция.

Рассмотрим задачу о приближении достаточно произвольной функции $f(t)$ в виде ряда $g(t)$ по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами) или функции Лоренца. Рассматриваемые разложения имеют вид

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f_k \cdot F(t - k),$$

где $F(t)$ — некоторая функция, по целочисленным сдвигам которой производится разложение. Построенная функция должна совпадать с исходной во всех целых точках

$$g(m) = f(m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Известны три подхода к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета-функций Якоби [2]. Как показано в [1,3–4], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [1,4], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Третий приближённый метод предложен в [5–7] и основан на сведении задачи к решению конечных систем линейных уравнений.

При всей важности численных методов, для данного класса разложений имеется достаточное число аналитических задач, решения которых до сих пор не получены. Например, в работе [9] вычислены константы Рисса для систем функций Гаусса и Лоренца. В данной заметке исследуются свойства монотонности коэффициентов разложения.

Рассматриваются системы целочисленных сдвигов функции Гаусса $F(t) = G_\sigma(t)$ и функции Лоренца $F(t) = L_s(t)$,

$$G_\sigma(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right), \quad L_s(t) = \frac{s^2}{t^2 + s^2},$$



с параметрами $\sigma > 0$ и $s > 0$.

Задачу интерполяции для таких систем удобно решать с помощью узловой функции. Функция $\tilde{\varphi}(t)$ называется узловой, если для нее выполнена система равенств

$$\tilde{\varphi}(m) = \delta_{0m}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

где δ_{0m} – символ Кронекера. Узловую функцию построенную из сдвигов функции Гаусса обозначим через $\tilde{G}_\sigma(t)$, а из сдвигов функции Лоренца – через $\tilde{L}_s(x)$:

$$\tilde{G}_\sigma(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{G,k} G_\sigma(t - k), \quad \tilde{L}_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{L,k} L_s(t - k).$$

Для коэффициентов $d_{G,k}$ известна формула [2],

$$d_{G,k}(\sigma) = \frac{1}{C(\sigma)} \cdot \exp\left(\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sum_{r=|k|}^{\infty} (-1)^r \cdot \exp\left(-\frac{(r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где константа $C(\sigma)$ есть сумма ряда

$$C(\sigma) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \cdot \exp\left(-\frac{(2r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Формула для $d_{G,k}$ получается из разложения в ряд Фурье функции

$$\frac{1}{\vartheta_3\left(\frac{t}{2}; q\right)}, \quad q = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right),$$

где $\vartheta_3(t; q)$ – третья тета-функция Якоби [8].

Заметим, что формула для ряда Фурье этой функции была известна ещё в 1903 году [8]. Правда, там в знаменателе стоит ϑ_4 . Однако, эти функции легко получить друг из друга с помощью соотношения

$$\vartheta_3(z, q) = \vartheta_4(z, -q).$$

Численные результаты статьи [4] позволяют предположить, что коэффициенты $d_{G,k}$ знакопереваются и монотонно убывают по абсолютной величине с ростом номера $|k|$.

Теорема 1. *Справедлива формула $\text{sign}(d_{G,k}(\sigma)) = (-1)^k$.*

Кратко опишем схему доказательства теоремы. Вначале показывается, что $C(\sigma) > 0$. Это следует из цепочки равенств

$$C(\sigma) = \frac{1}{2} \vartheta_1'(0, q) = \exp\left(-\frac{1}{8\sigma^2}\right) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left\{1 - \exp\left(-\frac{n}{\sigma^2}\right)\right\}^3.$$

Следовательно, знак коэффициента совпадает со знаком выражения

$$(-1)^{|k|} \sum_{r=|k|}^{\infty} (-1)^{r-|k|} \cdot \exp\left(-\frac{(r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right).$$



В отличие от знакопереживания, монотонное убывание $|d_{G,k}(\sigma)|$ доказать для всех значений σ и k не удалось (хотя сам факт, по-видимому, справедлив).

Теорема 2. Начиная с номера

$$k = \max \left\{ \left[\log_q \sqrt{1-q} - 1 \right], 0 \right\}$$

коэффициенты $d_{G,k}(\sigma)$ монотонно убывают по абсолютной величине.

Ключевой при доказательстве является формула

$$\frac{d_{G,k}}{d_{G,k+1}} = \frac{q^{-k^2} X_k}{q^{-(k+1)^2} X_{k+1}} = q^{2k+1} \cdot \left(\frac{q^{(k+\frac{1}{2})^2}}{X_{k+1}} - 1 \right),$$

где используется следующее обозначение

$$X_k = \left| \sum_{r=k}^{\infty} (-1)^r \cdot q^{(r+0.5)^2} \right|.$$

Коэффициенты $d_{L,k}$ для $\sigma = 0.5$, $\sigma = 1.0$ и $\sigma = 1.5$

σ	0.5	1.0	1.5
$d_{L,0}$	1.08273	1.73697	3.89172
$d_{L,1}$	-0.20019	-0.78304	-2.49120
$d_{L,2}$	-0.01541	0.13838	0.93889
$d_{L,3}$	-0.00966	-0.004310	-0.34861
$d_{L,4}$	-0.00531	0.00094	0.11382
$d_{L,5}$	-0.00341	-0.00530	-0.04562
$d_{L,6}$	-0.00237	-0.00242	0.01205
$d_{L,7}$	-0.00174	-0.00207	-0.00714
$d_{L,8}$	-0.00133	-0.00154	0.00028
$d_{L,9}$	-0.00105	-0.00123	-0.00185
$d_{L,10}$	-0.00085	-0.00100	-0.00077
$d_{L,11}$	-0.00070	-0.00082	-0.00090
$d_{L,12}$	-0.00059	-0.00069	-0.00067

Коэффициенты $d_{L,k}$ для $\sigma = 2.0$ и $\sigma = 3.0$.

d_k	$\sigma = 2.0$	d_k	$\sigma = 3.0$
d_{12}	0.00103	d_{26}	$1.20 \cdot 10^{-5}$
d_{13}	-0.00137	d_{27}	$3.00 \cdot 10^{-5}$
d_{14}	-0.00015	d_{28}	$-3.37 \cdot 10^{-5}$
d_{15}	-0.00061	d_{29}	$-1.75 \cdot 10^{-5}$
d_{16}	-0.00032	d_{30}	$-7.84 \cdot 10^{-5}$
d_{17}	-0.00038	d_{31}	$-1.24 \cdot 10^{-5}$
d_{18}	-0.00029	d_{32}	$-8.65 \cdot 10^{-5}$

Следствие. Для монотонного убывания $|d_{G,k}|$ с нулевого номера достаточно выполнения неравенства: $q < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, что соответствует

$$\sigma < \sqrt{\frac{1}{\ln\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)}} \approx 1.01933.$$

Обратимся к функции Лоренца. Для $d_{L,k}$ справедлива формула [9]

$$d_{L,k}(s) = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}(s\pi)}{s\pi^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos(kt)}{\operatorname{ch}(st)} dt.$$



В таблицах приведены значения этих коэффициентов, вычисленные при различных значениях параметров. Поведение $d_{L,k}$ отличается от поведения $d_{G,k}$. Согласно таблице 1, знакопеременность с какого-то момента прекращается. Таблица 2 показывает, что нет и монотонного убывания по абсолютному значению коэффициентов.

Следующая теорема показывает, что при малых значениях параметра s знакопеременности нет вообще.

Теорема 3. *Все коэффициенты $d_{L,k}$ отрицательны, за исключением $d_{L,0}$, при выполнении неравенства*

$$s < \ln(3 + 2\sqrt{2})/\pi \approx 0.5611.$$

Литература

1. Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Science, Springer. – 2011. – 2(173). – P.131-140.
2. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations / Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys and Monographs, 2007.
3. Минин Л.А., Ситник С.М. Неравенства для третьей тета-функции Якоби // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ). Тезисы докладов международной конференции / Минск, 2009. – С.111.
4. Журавлев М.В., Минин Л.А., Ситник С.М. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости БелГУ. Математика, Физика. – 2009. – 13(68); 17/2. – P.89-99.
5. Ситник С.М., Тимашов А.С. Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2013. – 2 (56). – С.90-94.
6. Ситник С.М., Тимашов А.С. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости БелГУ. Математика, Физика. – 2013. – 19(162), Вып.32. – С.184-186.
7. Тимашов А.С. Математическое моделирование и численный анализ в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2013. – 9(4). – С.112-115.
8. Уиттекер Э., Ватсон Дж.Н. Курс современного Анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции / М.: ГИФМЛ, 1963.
9. Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.Ya., Sitnik S.M. On Evaluation of Riesz Constants for Systems of Shifted Gaussians // arXiv:1308.2649. – 2013. – 32 p.

PROPERTIES OF COEFFICIENTS OF NODE FUNCTIONS OF UNIFORM EXPANSIONS WITH INTEGER SHIFTS OF GAUSS AND LORENTZ FUNCTIONS

L.A. Minin, S.M. Sitnik, S.N. Ushakov

Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Patriotov Av. 53, Voronezh, 394065, Russia, e-mail: mathsms@yandex.ru

Abstract. Approximations of functions based on integer shifts of Gauss and Lorentz functions are studied. Monotonicity properties of coefficients of node functions are proved and numerically simulated.

Key words: Gauss' functions, Lorentz' functions, interpolation.



MSC 34H05

ЗАДАЧА СИНТЕЗА ОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ**В.И. Коробов, О.А. Тарасова**

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: vkorobov@univer.kharkov.ua,
Tarasova_O@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе исследованы вопросы решения задачи синтеза, построены примеры стабилизируемых систем.

Ключевые слова: задача синтеза, управляемая система, стабилизируемая система.

1. Введение. Математическая теория управления начала интенсивно развиваться в середине XX столетия. Ее возникновение связано с необходимостью решать новые на то время задачи, задачи управления механическими объектами, движение которых описывается дифференциальными уравнениями. Дальнейшее развитие теории управления связано как с прикладными задачами, так и с исследованием задач управления как чисто математических. Развитие математической теории управляемых процессов привело к возникновению новых направлений в теории дифференциальных уравнений, что в значительной мере определяет ее настоящее состояние. Одним из таких направлений стал допустимый позиционный синтез управления дифференциальных уравнений. В этой области проводились многочисленные исследования российскими и зарубежными авторами. Я отмечу работы: Склера Г.М., Благодатского В.И., Понтрягина Л.С., Коробова В.И.

Задача допустимого позиционного синтеза управления для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$$

состоит в построении управления $u = u(x)$, которое удовлетворяет заданным ограничениям $u(x) \in \Omega$, так что, траектория замкнутой системы

$$\dot{x} = f(x, u(x)),$$

начинающая в произвольной точке x_0 из некоторой окрестности Q начала координат, попадает в начало координат за конечное время $T(x_0)$. Мы рассматриваем случай, когда начало координат является точкой покоя системы, $f(0, u_0) = 0$ при $u_0 \in \Omega$. Если $Q = \mathbb{R}^n$, то синтез называется глобальным, а если $Q \neq \mathbb{R}^n$, то локальным [1]. Поскольку через конечную точку проходит бесконечное число траекторий и время движения по каждой траектории в эту точку конечно, то в силу теоремы о единственности решения правая часть уравнения $\dot{x} = f(x, u)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$, с выбранным управлением не может удовлетворять условию Липшица в рассматриваемой окрестности. Поэтому управление, решающее задачу синтеза, не может быть гладким, линейным, как в задаче стабилизации. Наличие ограничений на управление накладывает дополнительные сложности на построение такого управления.

2. Методы решения задачи синтеза. Задача синтеза ограниченных управлений, оптимальных по быстрдействию состоит в следующем. Для управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \quad 0 \in \Omega \tag{1}$$



требуется найти управление $u = (t, x)$, принимающее значения в множестве Ω , такое, что траектория системы

$$\dot{x} = f(t, x, u(t, x)), \tag{2}$$

начинающаяся в произвольной точке x_0 , оканчивается в заданной точке x_1 за минимальное время. В этом случае управление $u(t, x)$ является оптимальным по быстродействию и удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\min_{u \in \Omega} \left(\frac{\partial T(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial T(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) \right) = -1, \tag{3}$$

где $T(t_0, x_0)$ - из произвольной точки x_0 в момент времени t_0 в фиксированную точку x_1 по траектории системы (2), отвечающей управлению $u(t, x)$. Обозначим через $\dot{T}(t, x)$ для (1) и $\dot{T}(t, x)$ для (2) производные времени движения в силу системы (1) и (2), соответственно. Тогда равенство (3) будит

$$\min_{u \in \Omega} \dot{T}(t, x) = \dot{T}(t, x) = -1$$

и означает, что производная в силу системы (2), времени быстродействия $T(t, x)$ из произвольной точки x в заданную точку x_1 равна -1. Это равенство выполняется в точках существования производных. Для решения задачи синтеза также сформулирован допустимы принцип максимума [1], который по форме подобен принципу максимума в оптимальном управлении, но при этом указывается сопряженная функция, которая является функцией фазовых координат, а не времени, что позволяет определять позиционное управление.

3. Стабилизация системы относительно подпространства. В качестве примера рассмотрим линейную управляемую систему [5]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + u. \end{cases} \tag{4}$$

Для этой системы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим прямоугольную матрицу $H = (2, 1)$, для которой $\text{rank } H = l = 1$. Тогда сопряженная матрица H^* представляет собой столбец $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Собственные значения матрицы A^* равны ± 1 . Соответствующие им собственные вектора $(-3, 1)$ и $(-1, 1)$ и поэтому $K^- = (-1, 1)$.

2. $r = \text{rank}(Hb, HAb) = \text{rank}(3, 3) = 1$. Обозначим вектор $\xi = \omega_1 h_1$, где ω_1 определяется из уравнения $(\xi, b) = (\xi, Ab) = 0$. Это дает $3\omega_1 = 0$ и поэтому $\omega_1 = 0$.

3. Введем вектор $c = \alpha_1 h_1$ такой, что α_1 определяется уравнением $\alpha_1 : (c, b) = 3\alpha_1 \neq 0$ так, что $(c, b) = 3$, откуда $\alpha_1 = 1, c = h_1, j = 0$.

4. Так как $H^* \subset L(c, A^*c) + K^- = \mathbb{R}^2$, то стабилизация возможна.

Для построения стабилизирующего управления выберем такие постоянные γ_1 , чтобы уравнение относительно $\mu : \mu + \gamma_1 = 0$ имело корни μ с $\text{Re} \mu < 0$. Пусть $\gamma_1 = 1$. Тогда управление имеет вид:

$$u(x) = \frac{1}{(c, b)} [-(c, Ax) - \gamma_1(c, x)] = \frac{1}{3} (-9x_1 + 3x_2).$$

Следовательно, матрица Q имеет вид $Q = (-3, 1)$.



Подставим полученное управление в систему (4). Тогда система $\dot{x} = (A + bQ)x$ имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases}$$

Ее общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 e^{-t}, \\ x_2 = x_2^0 e^{-t}, \end{cases}$$

где $x_1^0 = x_1(0)$, $x_2^0 = x_2(0)$. Тогда $Hx = e^{-t}(2x_1^0 + x_2^0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

References

1. Коробов В.И. Метод функции управляемости // М.-Ижевск: НИЦ, 2007. – С.7,13.
2. Коробов В.И. Критерии управляемости линейной системы на подпространство // Вестник Харьковского университета. – 1981. – №221, Вып.46. – С.3.
3. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление / М: Высшая школа, 2001.
4. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления / М: Наука, 1972.
5. Коробов В.И., Луценко А.В., Подольский Е.Н. Стабилизация линейной автономной системы относительно подпространства // 1975. С.117-122.

PROBLEM OF SYNTHESIS OF BOUNDED CONTROLS

V.I. Korobov, O.A. Tarasova

Belgorod State National Research University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: vkorobov@univer.kharkov.ua,
Tarasova_O@bsu.edu.ru

Abstract. Some problems of control synthesis are studied and some examples of stabilized systems are built.

Key words: synthesis problem, stabilized system, control system.



MSC 62F10

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ НЕГАУССОВСКОГО ТИПА

*М.М. Ошхунов, **З.М. Ошхунова, *М.А. Джанкулаева

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
ул. Чернышевского, 173, Нальчик, 360004, Россия, e-mail: muaed@inbox.ru;

**Кабардино-Балкарский филиал ОАО Ростелеком,
ул. Головки, 4, Нальчик, 360000, Россия, e-mail: zalina_oshhunova@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются и обосновываются методы анализа статистических данных, распределенных «не по Гауссу», т.е. имеющих явно выраженную асимметрию и эксцесс. Даны алгоритмы, позволяющие модифицировать классические методы статистики, разработанные в основном для нормально распределенных случайных величин, в частности, метод доверительных интервалов, учитывающий указанные выше факторы. Получены простые формулы для вычисления доверительной точности с заданной надежностью по Лапласу и Стьюденту, если функция плотности распределения случайной величины отличается существенно от экспоненты. Приводятся практические примеры анализа информации, когда асимметрия и эксцесс существенны.

Ключевые слова: асимметрия, эксцесс, нормальное распределение, интервальная оценка.

Как известно [1], нормальный закон распределения случайных чисел встречается в природе наиболее часто. В теории вероятности и математической статистике справедлив закон больших чисел или центральная предельная теорема, суть которой такова: если на какой-то результат влияет бесчисленное количество независимых случайных факторов, отклоняющих его в ту или иную сторону, то суммарное их воздействие приводит к результату, близкому к нормальному распределению.

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью распределения, зависящей от двух параметров a , σ :

$$f(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0. \quad (1)$$

Заметим, что при любых значениях a , σ справедливо условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, a, \sigma) dx = 1.$$

Таким образом, нормальный закон распределения симметричен относительно точки $x = a$, имеет определённую «скорость роста» в окрестности этой же точки.

Для количественной характеристики отклонений от симметрии вводят число

$$A = \mu_3/\sigma^3,$$



где

$$\mu_3 = M(x - M(x))^3,$$

которое называется коэффициентом асимметрии. Легко показать, что для нормального закона (1) этот коэффициент равен нулю.

Если закон роста плотности функции распределения не гауссовский, вводится новый коэффициент (эксцесс) по формуле

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,$$

$$\mu_4 = M(x - M(x))^4.$$

Очевидно, эксцесс также равен нулю для нормального закона (1).

Так как методы статистики разработаны, в основном, для нормально распределенных случайных величин, то выводы на их основе справедливы только для таких распределений. Возникает вопрос, как учесть отклонения от закона Гаусса, в частности асимметрию и эксцесс, например, в теории доверительных интервалов.

Попытаемся построить математическую модель, учитывающую отклонение скорости роста плотности распределения от классической, т.е. гауссовской. Как известно, классический нормальный закон имеет максимум в точке $x = a$ равный

$$f(x)_{x=a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

Встречаются распределения, для которых это «пик» больше или меньше классического значения [2]. Для описания такой плотности введём функцию

$$f(x, a, \sigma, c) = \frac{\sqrt{\ln c}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \ln c}, \quad c > 1.$$

Очевидно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, a, \sigma, c) dx = 1$$

для любых параметров a, σ, c ($\sigma > 0, c > 1$).

Пик такой функции равен

$$\frac{\sqrt{\ln c}}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

Он может быть больше или меньше, чем классическое значение для нормального закона в зависимости от c : если $c > e$, то $\sqrt{\ln c} / (\sqrt{2\pi}\sigma) > 1 / (\sqrt{2\pi}\sigma)$; если $1 < c \leq e$ то $\sqrt{\ln c} / (\sqrt{2\pi}\sigma) < 1 / (\sqrt{2\pi}\sigma)$.

Вычислим количественное значение эксцесса по формулам

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \quad \mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^4 f(x) dx.$$

Легко получить

$$E = \frac{3}{\ln^2 c} - 3.$$



Очевидно, если $c > e$, то

$$E = 3 \left(\frac{1}{\ln^2 c} - 1 \right) < 0,$$

и, наоборот, если $1 < c \leq e$, то

$$E = 3 \left(\frac{1}{\ln^2 c} - 1 \right) > 0.$$

Таким образом, плотность распределения

$$f = \frac{\sqrt{\ln c}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \ln c \right\}, \quad c > 1$$

моделирует любое значение эксцесса, если оно симметрично относительно точки $x = a$.

Легко оценить доверительный интервал с заданной надежностью, когда эксцесс – ненулевой. Очевидно, аналог интегральной функции Лапласа имеет вид

$$\phi^*(x) = \frac{\sqrt{\ln c}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \ln c \right\} dx = \phi \left(\frac{x-a}{\sigma} \sqrt{\ln c} \right),$$

где $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Для классического нормального закона вероятность попадания случайной величины в интервал $\alpha < x < \beta$ равна

$$\phi \left(\frac{\beta-a}{\sigma} \right) - \phi \left(\frac{\alpha-a}{\sigma} \right).$$

При наличии эксцесса эта формула приобретает вид

$$P(\alpha < x < \beta) = \phi \left(\frac{\beta-a}{\sigma} \sqrt{\ln c} \right) - \phi \left(\frac{\alpha-a}{\sigma} \sqrt{\ln c} \right).$$

Аналогичным образом, вероятности заданного отклонения, очевидно, равны

$$\phi(|x-a| < \delta) = 2\phi \left(\frac{\delta}{\sigma} \right)$$

– по Лапласу;

$$\phi(|x-a| < \delta) = 2\phi \left(\frac{\delta\sqrt{\ln c}}{\sigma} \right)$$

– при $E \neq 0$.

В случае ненулевого эксцесса, когда доверительная точность с заданной надежностью может быть найдена по формулам

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{\ln c} \cdot \sqrt{n}}, \quad (2)$$

$$a = \bar{x} \pm \delta.$$

Из формулы (2) следует, что, чем больше c , тем доверительная оценка выше. Если объем выборки небольшой, то, очевидно, параметр надежности t следует выбирать из таблицы из Стьюдента.



Теория доверительных интервалов для распределений с ненулевым эксцессом распространяется также на задачи о статистическом различии (или неразличии) средних двух выборок. Очевидно, также, что объем выборки, обеспечивающий необходимую статистическую точность с заданной надежностью, при наличии эксцесса равен

$$n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2 \ln c}.$$

Приведенные формулы дают возможность такого учета. Из приведенного краткого анализа можно сделать вывод, что если полученное значение числа c отличается сильно от e , то эксцесс распределения экономической информации существенен и его учет является обязательным.

Литература

1. Васильев В.И., Класильников В.В., Млаксий С.И., Тягунова Т.Н. Статистический анализ многомерных объектов произвольной природы / М.: ИКАР, 2004. – 382 с.
2. Льюис К.Д. Методы прогнозирования экономических показателей / М.: Финансы и статистика, 1986.

MATHEMATICAL MODELS OF STATISTICAL DATA ANALYSIS OF NON-GAUSSIAN TYPE

*M.M. Oshkhunov, **Z.M. Oshkhunova, *M.A. Dzhankulaeva

*Kabardino-Balkarian State University named H.M. Berbekov,
Chernishevskogo St., 173, Nalchik, 360004, Russia, e-mail: muaed@inbox.ru;

** Kabardino-Balkarian department of OJSC Rostelecom,
Golovko St., 4, Nalchik, 360000, Russia, e-mail: zalina_oshkhunova@mail.ru

Abstract. Methods of statistical analysis of data distributed by non-gaussian way are under consideration. Asymmetry and excess are pronounced. Given algorithms, in particular, the method of confidence intervals, are modified to classic statistical methods developed primarily for normally distributed random variables. The simple formula is proposed to calculate the confidence of accuracy with a given Laplace and Student reliability if the probability density of random variable differs significantly from the exponents low. Practical examples are provided concerned the analysis of information when asymmetry and excess are significant.

Key words: asymmetry, excess, normal distribution, interval estimation.



MSC 82B10

РАЗЛИЧИЯ ПОСТАНОВОК ЗАДАЧ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Показано, что химический потенциал квантового идеального ферми-газа, при фиксации среднего числа частиц, должен быть функцией температуры, как это имеет место для газа бозе-частиц, в котором наличие такой зависимости приводит к явлению бозе-конденсации.

Ключевые слова: ферми-газ, химический потенциал, температурная зависимость.

Постановка задач в квантовой статистической механике может несколько отличаться по сравнению с традиционной постановкой задач в классической механике. Это связано с тем, что понятия частицы, которым оперирует статистическая механика, в первом и во втором случае могут отличаться по своему физическому содержанию. В квантовой механике допускается (идеологически) принципиальная невозможность непосредственного наблюдения отдельной частицы в смысле своего пространственного расположения, а наблюдается лишь результат действия сразу многих одинаковых частиц и/или допускается возможность косвенного наблюдения движения отдельной частицы. Такое положение имеет место во всех экспериментах с так называемыми элементарными частицами, в частности, фундаментальными. Такие частицы как электрон, фотон, нейтрино невозможно наблюдать непосредственно. В большой степени они существуют в теории как понятия с целью объяснения всей совокупности экспериментов из мира элементарных частиц. С таким положением тесно связано, в частности, то, что общее число частиц в некотором объеме пространства, которое мы называем системой, может быть в среднем фиксированным и нефиксированным. Если число частиц в среднем нефиксировано, то под этим мы понимаем, что может, принципиально, не иметься возможностей экспериментального управления такой системой, которое бы позволило держать постоянным среднее число частиц. В частности, такое положение реализуется в классической задаче об излучении черного тела, при решении которой, исторически, было введено понятие фотона. Это приводит к тому, что в этой задаче не возникает понятия химического потенциала, посредством которого, математически, производится фиксация среднего числа частиц. Это понятие возникает в статистической механике систем классических частиц, именно, по той причине, что в постановку задач статистической механики таких систем закладывается условие сохранения среднего (хотя статистически и переменного) числа частиц. В свою очередь, такое условие имеет смысл вводить по той причине, что частицы в рамках классической статистической механики мыслятся наблюдаемыми в конкретном месте пространства каждая по отдельности, что предопределяет принципиальную возможность такого управления системой частиц, при которой сохраняется общее их число.

Различие в постановках задач с квантовыми частицами, в одном случае, когда среднее число частиц фиксируется, а во втором, когда оно не фиксируется, сразу же выявляется на примере газа бозе-частиц. Если число бозе-частиц не фиксировано, как, например, в случае фотонов, то мы получаем в качестве решения задачи об излучении черного тела планковскую



функцию распределения. Если же число бозе-частиц фиксировано, как это имеет место в случае так называемых голдстоуновских квазичастиц с бозевской статистикой, то возникает понятие химического потенциала, и, как следствие, зависимость его от температуры, причем такая, что возникает явление так называемой *бозе-конденсации*.

Точно такое же положение возникает в случае газа ферми-частиц. Однако, в этом случае не возникает какой-либо аномальной зависимости от температуры физических характеристик системы. К сожалению, на физическое различие в постановках задач в рамках статистической бозе-частиц, приводящих и неприводящих к явлению бозе-конденсации, в учебной (да и в монографической) литературе не обращается внимание. В настоящем сообщении мы проиллюстрируем механизм возникновения температурной зависимости химического потенциала, для простоты, на примере квантового идеального ферми-газа.

Как известно, равновесная квантовая статистическая механика основана на статистическом операторе в форме Гиббса (см., например, [1])

$$\hat{\rho} = Z^{-1} \exp \left(- \frac{\hat{H} - \mu \hat{N}}{\kappa T} \right),$$

$$Z = \text{Sp} \exp \left(- \frac{\hat{H} - \mu \hat{N}}{\kappa T} \right),$$

где $\mu > 0$ – химический потенциал, \hat{H} и \hat{N} – соответственно операторы энергии и числа частиц, κT – абсолютная температура в энергетических единицах. Рассмотрим эти выражения в представлении вторичного квантования в гильбертовом пространстве векторов состояния, натянутом на базис векторов $|n(\mathbf{p})\rangle$, поставленным во взаимно однозначное соответствие с множеством произвольных распределений $n(\mathbf{p}) \in \{0, 1\}$ чисел заполнения (возможную зависимость от других квантовых чисел мы опускаем). Здесь $\mathbf{p} \in \{2\pi\hbar\mathbf{l}/L : \mathbf{l} = \sum_{i=1}^3 l_i \mathbf{e}_i\}$, \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$ – орты евклидова пространства. Действие операторов \hat{H} , \hat{N} определяется на векторах базиса посредством равенств $\hat{N}|n(\mathbf{p})\rangle = \sum_{\mathbf{p}} n(\mathbf{p})|n(\mathbf{p})\rangle$, $\hat{H}|n(\mathbf{p})\rangle = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\mathbf{p})n(\mathbf{p})|n(\mathbf{p})\rangle$, где $\varepsilon(\mathbf{p})$ – неотрицательная функция, называемая одночастичным спектром. Тогда $Z = \prod_{\mathbf{p}} \left(1 + \exp(-(\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu)/\kappa T) \right)$, а среднее число частиц –

$$N = Z^{-1} \text{Sp} \hat{N} \exp \left(- \frac{\hat{H} - \mu \hat{N}}{\kappa T} \right) = \sum_{\mathbf{p}} \left[\exp \left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu}{\kappa T} \right) + 1 \right]^{-1}. \quad (1)$$

Ясно, что для возможности такого равенства при постоянном N необходимо, чтобы величина μ являлась функцией температуры. Однако, заранее, не очевидно, что эта функция существует и существует ли она во всем диапазоне температур. Напомним, что явление бозе-конденсации связано именно с тем, что аналогичная функция в случае идеального бозе-газа не существует при $T < T_c$, где $T_c > 0$ – некоторая критическая точка фазового перехода второго рода – бозе-конденсации. В связи с этим, актуально доказать следующее утверждение.

Теорема. Уравнение (1) имеет единственное решение $\mu > 0$ при любом $\kappa T > 0$.

□ Обозначим $I(z) = \sum_{\mathbf{p}} \left[z \exp \left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{\kappa T} \right) + 1 \right]^{-1}$, $z = e^{-\mu/\kappa T}$. Заметим $I(0) = \infty$, $I(\infty) = 0$ и

$$\frac{dI}{dz} = - \sum_{\mathbf{p}} \exp \left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{\kappa T} \right) \left[z \exp \left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{\kappa T} \right) + 1 \right]^{-2} < 0.$$



По этой причине, существует единственное решение уравнения $I(z) = N$ при любом $N > 0$.

Непосредственным вычислением асимптотики функции $\mu(T)$, неявно определенной (1), убеждаемся, что при достаточно малых значениях T построенная функция $\mu(T) > 0$. Поэтому, если $\mu(T)$ в какой-то точке T' становится отрицательной, то существует точка T'' , в которой $\mu(T'') = 0$ и $(d\mu/dT)_{T''} < 0$.

Далее, из (1) имеем

$$0 = \frac{dI}{d(\kappa T)} = \frac{z}{\kappa^2 T} \sum_{\mathbf{p}} \exp\left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{\kappa T}\right) \left[z \exp\left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{\kappa T}\right) + 1 \right]^{-2} \left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu}{T} - \frac{d\mu}{dT} \right).$$

Из этого уравнения, неявно определяющего производную dI/dT , находим, что в любой точке T_0 , в которой $\mu(T_0) = 0$, производная $(d\mu/dT)_{T_0} > 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\mu(T) > 0$. ■

Литература

1. Боголюбов Н.Н. Лекции по квантовой статистике / Избранные труды в 3-х тт., Т.2./Киев: Наукова думка, 1970. – С.287-493.

DIFFERENCES OF PROBLEM SETTINGS IN STATISTICAL MECHANICS

Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
 Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. It is shown that chemical potential of quantum ideal fermi-gas should be depended on temperature when the average particle density is fixed as it is in bose-gas. In the last case such an effect leads to the appearance of the bose-condensation.

Key words: fermi-gas, chemical potential, temperature dependence.



ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика» выходит четыре раза в год. В журнале печатаются статьи по всем направлениям чистой и прикладной математики (за исключением текстов, имеющих чисто компьютерное содержание и вычислительной эмпирики).

Редколлегия журнала принимает от авторов рукописи статей, написанные на русском или на английском языках. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора(ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором(ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности и с таким расчетом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором(ами) направлению исследований, но более широкому кругу математиков. Ни в коем случае рукопись не должна представлять собой краткий отчет о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи. В связи с этим, рукопись должна быть структурирована — разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае, рукопись должна содержать введение и заключение. Разделы должны быть пронумерованы и иметь заголовки.

Во введении должны быть описаны: проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объеме физико-математического знания, представлены краткая история вопроса и полученный автором(ами) результат. В заключении работы должна быть дана характеристика полученного результата с указанием его значения для дальнейшего развития темы исследования.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются и для обзорной статьи, с той лишь разницей, что их содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Возможна также публикация статьи, носящей методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается редколлегией отдельно.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в чисто математических текстах должны быть четко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объем рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата А4. Она должна быть написана шрифтом 12pt через два интервала. Объем обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлегией журнала.

После подготовки одним из членов редколлегии заключения о соответствии рукописи нормам журнала «Научные ведомости» она рассматривается на общем собрании редколлегии. В отдельных случаях редколлегией может быть принято решение о более тщательном изучении рукописи внешним (не входящем в состав редколлегии журнала) рецензентом. Редколлегия оставляет за собой право на мелкие стилистические исправления текста рукописи после принятия решения о её публикации.

В редакцию присылается следующая информация:

1) основная содержательная часть статьи, представляемая на русском или английском языках. При этом название статьи должно состоять не более чем из 20 слов.

2) индекс MSC (см. Mathematical Subject Classification) того научного направления, которому посвящена статья;



- 3) список авторов с указанием порядка их размещения при публикации статьи;
- 4) аннотация на русском языке; её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;
- 5) список ключевых слов (не более 10-12);
- 6) текст перевода заголовка статьи, аннотации и ключевых слов на английском языке;
- 7) список литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;
- 8) данные об авторах статьи с указанием места их работы, точного почтового адреса предприятия. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить также на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;
- 9) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи.

Порядок оформления этой информации в электронном файле указан в приложении в конце настоящих правил (см. п.5) требований к электронному набору).

В редакцию присылается электронный файл работы. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). **Файлы, приготовленные в другом редакторе, рассматриваться редколлегией не будут.** При этом нужно присылать файл работы с расширением «tex» и pdf-копию файла с расширением «dvi» работы, для того, чтобы редакция имела возможность сравнения его с авторским оригиналом при редактировании и верстке журнала. Присылать сам dvi-файл при этом не нужно.

Особые требования к электронному набору в редакторе LaTeX (и тому подобным редакторам) следующие.

- 1) Нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды.
- 2) «Выключные» формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерации соответствующих номеров формул в тексте. Допускается применение для меток формул цифр, снабженных штрихами (или цифр совместно с буквами латинского алфавита). Однако этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста.
- 3) В случае, если в статье имеются разделы в виде *приложений* в конце основного текста работы, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть независимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложения. Каждый из разделов-приложений начинается словом ПРИЛОЖЕНИЕ с порядковым номером этого приложения. Это слово должно быть выровнено по правому полю страницы. Затем следует заголовок этого приложения.
- 4) Литературные источники в ссылках на основе команд cite (или непосредственно) в электронном тексте рукописи нужно обозначать цифрами, соответствующими их порядковому номеру появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.
- 5) Ниже прилагается шаблон, согласно которому должен оформляться файл статьи. Для авторов **следование этому шаблону обязательно.**



Шаблон для приготовления файла с рукописью

```

\setcounter{figure}{0}
\setcounter{equation}{0}
MSC XXX (по индекс научного направления Mathematical Subject Classification)
\vskip 0.3cm

\begin{center}
{\bf НАЗВАНИЕ СТАТЬИ}
\medskip
{\bf И.О. Автор1, И.О. Автор2, ... }
\medskip
{\small {\sf Учреждение, \\
ул. Название улицы (пр. Название проспекта, пл. Название площади и т.д.),
Номер дома, Город, Индекс, Страна, e-mail: \underline{имя@адрес}}}}
\end{center}

{\small {\bf Аннотация.} Текст аннотации.}
\medskip
{\bf Ключевые слова:} слово1, слово2, ... \ .}
\vskip 1 cm

Текст статьи
\vskip 1 cm

\renewcommand\baselinestretch{0.6}

{\small
\centerline{{\bf Литература}}}

\def\sk{\vskip - 0.25cm}

\begin{enumerate}
\bibitem{1}      Источник 1
\bibitem{2} \sk Источник 2
...
\end{enumerate}
\vskip 0.5cm

\begin{center}
{\bf TITLE 1st line \\
\vskip 0.1cm

2d line \\
\vskip 0.1cm and so on }\medskip

```



```
{\bf N.N. Author1, N.N. Author2, ...}
```

```
\medskip
```

```
{\small {\sf Enterprize, \
```

```
Street St. (Avenue Av., Square Sq. and so on), Number, City, Index, Country,
```

```
e-mail: \underline{name@address}}}
```

```
\end{center}
```

```
{\small {\bf Abstract.} Text of abstract. {\bf Key words:} word1, word2, ... \ .}}
```

```
\newpage
```

```
\renewcommand\baselinestretch{1.0}
```

Рисунки

Особое внимание при подготовке рукописи к печати должно быть уделено рисункам, если они имеются в тексте работы. Они должны быть качественно выполнены и представлены в редакцию в электронной форме в виде отдельных файлов в формате «ps». Файлы рисунков необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам. При этом в название каждого из файлов рисунков, чтобы избежать путаницы при верстке выпуска журнала, должна входить фамилия одного из авторов, записанная латиницей (например, Ivanov1.ps, Petrov2.ps и т.д.).

На представляемых в электронном формате рисунках **не следует** наносить те комментирующие их подписи, которые присылаются в редколлегию отдельным списком.

Внимание! В случае присылки в редакцию работы с некачественно выполненными рисунками, она **будет возвращена автору(ам) на доработку**.

Таблицы

Если в тексте работы есть таблицы, то их следует формировать на основе программы LaTeX и ни в коем случае не оформлять в виде рисунков.

Список литературных источников

Обращаем внимание авторов на требование к качественному оформлению списка используемых в работе литературных источников. В связи с тем, что требования, предъявляемые ГОСТом, при оформлении такого списка весьма сложны и ориентированы на решение задач, связанных с централизованным поиском и хранением научной информации, которые не специфичны для научно-исследовательской практики, в журнале используется собственная система его оформления. Типы литературных источников качественно довольно разнообразны. Поэтому редакция не предлагает универсальный рецепт их оформления. Единственным общим принципом, которым должен руководствоваться автор, состоит в том, литературная ссылка должна оформляться так, чтобы читатель имел максимально точную информацию о том, как найти и ознакомиться с научным результатом, на который опирается его работа.

Несмотря на отсутствие общего рецепта оформления списка, редакция требует соблюдение строгих правил оформления ссылок на литературные источники двух типов, которые являются наиболее распространенными. Это касается статей в регулярных периодических изданиях



(в журналах) и книг (монографий и учебников). Принятые в журнале правила оформления литературных источников указанных двух типов демонстрируются следующими примерами:

Журнальные статьи –

\item Цегельник В.В. Гамильтонианы, ассоциированные с третьим и пятым уравнениями Пенлеве // Теоретическая и математическая физика. -- 2010. -- 162;1. -- С.69-74.

\item Demidov A.S., Kochurov A.S., Popov A.Yu. To the problem of the recovery of non-linearities in equations of mathematical physics // Journal of Mathematical Sciences. -- 2009. -- 163;1. -- P.46-77.

Книги (в частности, многотомные издания) –

Рытов С.М., Кляцкин Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику / Случайные поля, т.2 / М.: Наука, 1978. -- 464 с.

(если издание однотомное, то позиция между двумя слэш-черточками становится ненужной и, поэтому исчезает).

Обращаем внимание на то, что:

1) должны быть указаны полные названия журнальных статей, а также указаны не только начальные страницы этих статей, но обязательно также и конечные;

2) при указании журнальных статей после года издания стоит номер (обязательно арабскими цифрами) тома журнала (если он имеется) и через точку с запятой стоит дополнительная информация (номер внутри тома, в частности, номер выпуска и т.д.); при этом номер тома может иметь сложное начертание и не выражаться только одним числом;

3) название журнала нужно давать полностью без сокращений;

4) каждая из книг в списке цитируемой литературы обязательно должна быть дана с указанием полного числа страниц.

При несоблюдении описанных правил оформления литературных источников **работа будет возвращена автору(ам) на доработку.**