№5 (202) 2015
Выпуск 38
Научный рецензируемый журнал
Основан В 1995 г.

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ
Белгородского государственного университета
Математика Физика

BELGOROD STATE UNIVERSITY
SCIENTIFIC BULLETIN
Mathematics & Physics

Журнал входит
в Перечень ведущих рецензируемых
научных журналов и изданий,
выпускаемых в Российской Федерации,
в которых рекомендуется публикация
основных результатов диссертаций
на соискание ученых степеней
доктора и кандидата наук

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Издатель:

НИУ «БелГУ»,
Издательский дом «Белгород»

Адрес редакции, издателя, типографии: 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-50062 от 29 мая 2012 г.
Выходит 4 раза в год

Содержание

Оригинал-макет Ю.П. Вирченко
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Подписано в печать 26.03.2015
Формат 60×84/8
Гарнитура Courier New
Усл.п.л. 19.3
Заказ 92
Цена свободная
Тираж 1000 экз.
Дата выхода 31.03.2015

Подписной индекс в Объединенном каталоге агенства «Пресса России» – 81631

Оригинал-макет тиражирован в издательском доме «Белгород»

Адрес: 308015, г.Белгород, ул.Победы, 85

ФИЗИКА

№5 (202) 2015

Issue 38

Scientific peer-reviewed journal

Founded in 1995

Journal included into the list of leading peer-reviewed journals and publications coming out in Russian Federation that are recommended for publishing key results of theses for Doktor and Kandidat degree-applicants.

Founder:

Federal state autonomous educational establishment of higher professional education «Belgorod State National Research University»

Publisher:

Belgorod State National Research University, Publishing House «Belgorod».

Address of editorial office: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor)

Mass media registration certificate ПИ №ФС77-21121 May 29, 2012.

Publication frequency: 4/year

Belgorod State University Scientific Bulletin

Mathematics & Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

Белгородского государственного университета

Mathematics & Physics

Contents

Page layout: *Virchenko Yu.P.*
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Passed for printing: 26.03.2015
Format: 60×84/8
Typeface: Courier New
Printer's sheets: 19.3
Order 92
Price: free
Calculation: 1000 copies
Date of publishing: 31.03.2015

Subscription reference in Russian Press common catalogue - 81631

Dummy layout is replicated at Belgorod National Research University, Publishing House "Belgorod"

Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

PHYSICS

МАТЕМАТИКА

MSC 34M50

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В УГЛОВЫХ ТОЧКАХ КРИВОЙ

Г.Н. Аверьянов, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, Белгород, e-mail: soldatov48@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена классическая задача линейного сопряжения для аналитических функций на кусочно-гладкой кривой во всей шкале весовых пространств Гельдера. Получена явная степенно-логарифмическая асимптотика решения этой задачи в угловых точках кривой в предположении, что аналогичную асимптотику допускает правая часть задачи.

Ключевые слова: задача линейного сопряжения, аналитические функции, пространства Гельдера, кусочно-гладкие кривые.

Рассмотрим классическую задачу линейного сопряжения для аналитических функций

$$\phi^+ - G\phi^- = g \tag{1}$$

на ориентированной кусочно-гладкой кривой Γ в семействе весовых пространств Гельдера. Под кусочно-гладкой кривой понимается объединение конечного числа гладких дуг, которые попарно могут пересекаться только по своим концам. Каждая из дуг Γ_j определённым образом ориентирована и предельные значения $\phi^\pm$ в (1) понимаются по отношению к этой ориентации.

Задача (1) хорошо изучена [6] как в пространствах Гельдера, так и в весовых гельдеровых пространствах функций, ограниченных в окрестности точек $\tau \in F$ или допускающих в них особенности порядка меньше 1. Как известно, основным инструментом ее исследования служат интеграл типа Коши

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-z}\,, \quad z \notin \Gamma\,, \tag{2}$$

и связанный с ним сингулярный интеграл Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}\,, \quad t_0 \in \Gamma \setminus F\,. \tag{3}$$

В данной работе эти результаты распространим на весовые пространства любого порядка. Остановимся подробнее на определении этих пространств.

Работа выполнена при поддержке Международного проекта (0113РК01031) Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Для компакта K на плоскости обозначим $C^\mu(K)$, $0 < \mu < 1$, обычное пространство Гельдера с показателем μ. Для фиксированной точки $\tau \in K$ пусть $C^\mu_0(K;\tau)$ означает пространство всех ограниченных функций $\varphi(z)$ на $K\backslash\tau$, для которых $\psi(z) = |z-\tau|^\mu\varphi(z) \in C^\mu(K)$, относительно нормы

$$|\varphi| = \sup_{z\in K}|\varphi(z)| + \sup_{z_i\in K}\frac{|\psi(z_1)-\psi(z_2)|}{|z_1-z_2|^\mu}\ ,$$

это пространство банахово. Наконец, пусть пространство $C^\mu_\lambda(K;\tau)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, состоит из всех функций $\varphi(z) = |z-\tau|^\lambda\varphi_0(z)$, $\varphi_0 \in C^\mu_0(K;\tau)$, снабженное «перенесенной» нормой $|\varphi| = |\varphi_0|_{C^\mu_0}$.

Введенное весовое пространство обладает следующими свойствами [7].

Лемма 1. (a) *Операция умножения как билинейное отображение ограничено* $C^\mu_{\lambda'}\times C^\mu_{\lambda''}\to C^\mu_{\lambda'+\lambda''}$.

(b) *Семейство пространств* (C^μ_λ) *монотонно убывает (в смысле вложения банаховых пространств) по каждому из параметров* μ *и* λ.

(c) *Для любых* $\alpha\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ *и* $n=0,1,\ldots$ *функции*

$$|z-\tau|^{i\alpha}\in C^\mu_0(K,\tau),\quad |z-\tau|^{i\alpha}\ln^n|z-\tau|\in C^\mu_{-\varepsilon}(K,\tau)\,.$$

Пространство $C^\mu_\lambda(K;\tau)$ ниже используем в случаях, когда K является либо радиальной гладкой дугой Γ_τ с концом τ, либо криволинейным сектором S_τ с вершиной τ. Гладкая дуга называется радиальной по отношению к своему концу τ, если окружности $|z-\tau| = r$ при $0<r\le\delta$, где δ – расстояние между концами, пересекают эту дугу и притом некасательно ровно в одной точке. Для любой гладкой дуги с концом τ всегда найдется такое $\delta>0$, что пересечение $\Gamma\cap\{|z-\tau|\le\delta\}$ является радиальной дугой. Под криволинейным сектором с вершиной τ понимается односвязная область, граница которой составлена из двух радиальных дуг с общей вершиной τ, и дуги окружности с центром τ. Радиальные дуги играют роль боковых сторон этого сектора. Заметим, что для двух указанных типов компакта K утверждение (c) леммы 1 сохраняется и для функций $(z-\tau)^{i\alpha}$, $(z-\tau)^{i\alpha}\ln^n(z-\tau)$, определяемых по некоторой ветви логарифма.

Хорошо известно [6], что если область D ограничена гладким контуром, не пересекается с гладкой дугой Γ, лежит вне некоторой окрестности ее концов и прилегает к Γ в том смысле, что $\Gamma\cap\partial D$ не пусто и является дугой, то интегральный оператор типа Коши I ограничен $C^\mu(\Gamma)\to C^\mu(\overline{D})$. В частности, если две такие области $D^\pm$ не пересекаются, т.е. прилегают к Γ с разных сторон (пусть D^+ лежит слева от Γ), то для интеграла типа Коши $\phi = I\varphi$ с плотностью $\varphi\in C^\mu(\Gamma)$ можно рассмотреть граничные значения $\phi^\pm$ на общей части $\Gamma_0 = (\partial D^+)\cap\partial D^-\subseteq\Gamma$. Для этих граничных значений справедлива формулы Сохоцкого-Племеля

$$2\phi^\pm = \pm\varphi + S\varphi\,, \tag{4}$$

связывающая интегралы (2) и (3).

Действие интегрального оператора I в весовых пространствах Гельдера (без конкретизации показателя μ) изучено в [6]. В пространствах C^{μ}_{λ} этот результат был уточнен в [8], который сформулируем отдельно.

Теорема 1. *Пусть гладкая дуга Γ с концом τ является продолжением боковой стороны сектора S_τ. Тогда интегральный оператор типа Коши I ограничен $C^{\mu}_{\lambda}(\Gamma,\tau) \to C^{\mu}_{\lambda}(\overline{S}_\tau,\tau)$.*

Из этой теоремы непосредственно следует, что если $\varphi \in C^{\mu}_{\lambda}(\Gamma,\tau)$, где $0 < \lambda < 1$, то $(I\varphi)(z) - (I\varphi)(\tau) \in C^{\mu}_{\lambda}(\overline{S}_\tau,\tau)$. Для доказательства достаточно воспользоваться тождеством

$$\frac{z-\tau}{(t-\tau)(t-z)} = \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\tau}\,,$$

согласно которому

$$(I\varphi)(z) - (I\varphi)(\tau) = (z-\tau)\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi_1(t)dt}{t-z}$$

с функцией $\varphi_1(t) = (t-\tau)^{-1}\varphi(t) \in C^{\mu}_{\lambda-1}(\Gamma,\tau)$.

Если $\varphi(t)$ обладает указанным свойством с точностью до константы, то функция $\phi = I\varphi$ в окрестности точки τ ведет себя как $\ln(z-\tau)$.

Лемма 2. *Пусть в условиях теоремы 1 функция $\varphi(t) - a \in C^{\mu}_{\lambda}(\Gamma,\tau)$, $0 < \lambda < 1$. Тогда для $\phi = I\varphi$ справедливо разложение*

$$\phi(z) = \pm a\ln(z-\tau) + b + \phi_0(z), \quad \phi_0 \in C^{\mu}_{\lambda}(\overline{D},\tau)\,,$$

где выбирается верхний знак, если τ является правым концом ориентируемой дуги Γ, и нижний знак в противном случае.

При $\lambda = \mu$ условие на φ в лемме можно записать в форме $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$ и ее утверждение сводится к $\phi(z) \mp \varphi(a)\ln(z-\tau) \in C^{\mu}(\overline{D})$. В этом случае данное утверждение хорошо известно [6]. В общем случае эта лемма перекрывается приводимой ниже леммой 4.

Обратимся к кусочно-гладкой кривой Γ, составленной из (разомкнутых или сомкнутых) ориентируемых гладких дуг $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m$, которые попарно могут пересекаться только по своим концам. Множество, образованное концами этих дуг, обозначим F. Выберем $\rho > 0$ столь малым, что круги $B_\tau = \{|z-\tau| \le \rho\}$ с центрами $\tau \in F$ попарно не пересекаются и для каждого τ кривая $\Gamma \cap B_\tau$ состоит из некоторого числа радиальных дуг $\Gamma_{\tau,j}$, $1 \le j \le n_\tau$, с общим концом τ, которые служат боковыми сторонами криволинейных секторов $S_{\tau,j}$, $1 \le j \le n_\tau$, с вершиной τ. Эти дуги ориентируем одинаково, считая τ их левым концом. В результате, получаем сигнатуру ориентации $\sigma(\tau,j) = \pm 1$, где выбирается знак плюс, если ориентация $\Gamma_{\tau,j}$ противоположна с Γ и знак минус в противном случае. Общее число всех дуг $\Gamma_{\tau,j}$ равно $2m$ и их можно записать в виде семейства Γ^s_k, $1 \le k \le m$, $s = 0,1$, где для $\Gamma_{\tau,j} \subseteq \Gamma_k$ полагается $\Gamma_{\tau,j} = \Gamma^0_k$, если $\sigma(\tau,j) = -1$ и $\Gamma_{\tau,j} = \Gamma^1_k$ в противном случае. Таким образом, дуга Γ_k ориентирована от Γ^0_k к Γ^1_k. Выберем еще строго внутри Γ_k дугу Γ^*_k, перекрывающуюся с каждой из дуг Γ^0_k, Γ^1_k и рассмотрим вне Γ семейство попарно непересекающихся областей $D^{\pm}_k$, $1 \le k \le m$, которые также не пересекаются с некоторой окрестностью множества F и для которых

$(\partial D_k^+) \cap \partial D_k^- = \Gamma_k^*,\ 1 \le k \le m$. Тогда, очевидно, обьединение всех $4m$ областей

$$D_k^{\pm},\ 1 \le k \le m, \quad S_{\tau,j}\,, \quad \tau \in F,\ \ 1 \le j \le n_\tau\,, \tag{5}$$

вместе с кривой Γ образуют открытую окрестность этой кривой.

Исходя из векторного весового порядка $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$, введем пространство $C^\mu_\lambda(\Gamma, F)$ всех непрерывных на $\Gamma \setminus F$ функций $\varphi(t)$, соответствующие сужения которых принадлежат $C^\mu(\Gamma_k^*),\ \ 1 \le k \le m$, и $C^\mu_{\lambda_\tau}(\Gamma_{\tau,j}, \tau)$, $\tau \in F,\ 1 \le j \le n_\tau$. Аналогичным образом вводится и пространство $C^\mu(\Gamma; F)$ кусочно-гельдеровых функций, когда эти сужения принадлежат классу C^μ на всех указанных дугах.

Точно также по определению пространство $C^\mu_\lambda(\widehat{D}; F)$ состоит из аналитических в открытом множестве $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ функций $\phi(z)$, соответствующие сужения которых на области (5) принадлежат $C^\mu(\overline{D_k^\pm})$ и $C^\mu_{\lambda_\tau}(\overline{S}_{\tau,j}, \tau)$. Очевидно, для функций ϕ этого класса определены односторонние предельные значения $\phi^\pm \in C^\mu_\lambda(\Gamma; F)$. Единственное уточнение в этом определении требуется для точек τ с $n_\tau = 1$, когда роль сектора $S_{\tau,1}$ играет круг B_τ с разрезом вдоль Γ_{τ_1}. В этом случае множество $S_{\tau,1}$ радиальным отрезком разобьем на два обычных сектора и потребуем, чтобы классу $C^\mu_{\lambda_\tau}$ принадлежали сужения ϕ на эти сектора. В этом случае для сужения ϕ на весь сектор $S_{\tau,1}$ писать $\phi \in C^\mu_{\lambda_\tau}(\widehat{S}_{\tau,1}, \tau)$.

Нетрудно видеть, что определения этих пространств не зависят от выбора семейства (5). В самом деле, пусть $\widetilde{S}_{\tau,j}$ отвечают $\widetilde{\rho}$ и выбрано соответствующее семейство $\widetilde{D}_k^\pm$ прилегающих областей. Необходимо показать, сужения функции ϕ на эти области также принадлежат соответствующим пространствам. Рассматривая надлежащее третье аналогичное (5) семейство областей, без ограничения общности можно считать, что $\widetilde{\rho} < \rho$ и $\widetilde{D}_k^\pm \supseteq D_k^\pm$ для всех $1 \le k \le m$. Пусть Γ содержится в круге $|z| < R$ большого радиуса и область $D^0 \subseteq D$ такова, что вместе со всеми областями (5) имеем открытое покрытие множества $\{|z| < R\} \setminus \Gamma$. Очевидно, достаточно убедиться, что функция ϕ принадлежит классу C^μ в замыкании $\overline{D}$ каждой области $D = \widetilde{D}_r^\pm$. Но вместе с D^0 множества (5) образуют открытое покрытие $\overline{D} \setminus \Gamma_r$. В частности, по предположению $\phi \in C^\mu(\overline{D \cap D_k^\pm})$ и $\phi \in C^\mu(\overline{D \cap S_{\tau,j}})$. Но для каждой точки $t \in K \cap \Gamma_r$ найдется такой круг B с центром в этой точке, что множество $B \cap D$ целиком содержится в одном из областей (5). Отсюда включение $\phi \in C^\mu(\overline{D})$ получается непосредственно.

По отношению к этим пространствам теорему 1 можно переформулировать следующим образом: если $\varphi \in C^\mu_\lambda(\Gamma, F)$, $\ -1 < \lambda < 0$, то интеграл типа Коши $\phi = I\varphi$ принадлежит $C^\mu_\lambda(\widehat{D}; F)$ и справедливы формулы Сохоцкого-Племеля (4). На этот факт в дальнейшем ссылаемся также как на теорему 1.

Для $\varphi \in C^\mu(\Gamma; F)$ имеем $2m$ предельных значений, которые можно записать следующими двумя способами:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\tau, j) &= \lim_{t \to \tau, t \in \Gamma_{\tau,j}} \varphi(t)\,, \quad 1 \le j \le m,\ \tau \in F\,, \\ \widehat{\varphi}_k^s &= \lim_{t \to \tau, t \in \Gamma_k^s} \varphi(t), \quad 1 \le k \le m,\ s = 0, 1\,. \end{aligned} \tag{6}$$

В принятых обозначениях лемму 2 также можем переформулировать следующим образом: если $\varphi \in C^\mu(\Gamma, F)$, то в секторах $S_{\tau,j}$ интеграл типа Коши $\phi = I\varphi$ представим в виде

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{j=1}^{n_\tau}\sigma(\tau,j)\widehat{\varphi}(\tau,j)\right)\ln(z-\tau) + \phi_{\tau,j}(z)\,, \quad \phi_{\tau,j}\in C^\mu(\overline{S}_{\tau,j})\,, \tag{7}$$

где $\ln(z-\tau)$ – некоторая непрерывная в $S_{\tau,j}$ ветвь логарифма. Конечно, при $n_\tau = 1$ условие на $\phi_{\tau,j}$ здесь следует записывать в форме $\phi_{\tau,j}\in C^\mu(\widehat{S}_{\tau,1})$, т.е. в смысле принадлежности классу C^μ в каждом из двух секторов, на которые разбивается область $S_{\tau,1}$ радиальным отрезком.

Обратимся к задаче (1), дополнительно предполагая, что функция $G(t)$ отлична от нуля всюду на $\Gamma\setminus F$, включая её предельные значения $\widehat{G}(\tau,j)$ в точках $\tau\in F$. Очевидно, в этом случае $1/G\in C^\mu(\Gamma;F)$ и аналогичным свойством обладает непрерывная на $\Gamma\setminus F$ ветвь логарифма $\ln G(t)$.

В обозначениях (6) введем приращения $(\ln G)\big|_{\Gamma_k} = (\widehat{\ln G})^1_k - (\widehat{\ln G})^0_k$ на дуге Γ_k и сумму

$$\mathrm{Ind}\, G = \sum\nolimits_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i}(\ln G)\big|_{\Gamma_j}\,, \tag{8}$$

которую назовем индексом Коши функции G. Очевидно, полученное комплексное число не зависит от выбора ветви логарифма. Заметим, что согласно (6) имеет место равенство

$$\mathrm{Ind} G = \sum_{\tau\in F}\zeta_\tau, \quad \zeta_\tau = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n_\tau}\sigma(\tau,j)(\widehat{\ln G})(\tau,j)\,. \tag{9}$$

Положим

$$\alpha_\tau + i\beta_\tau = \frac{1}{2\pi i}\ln\widehat{G}_\tau\,, \quad 0\le\alpha_\tau<1\,, \tag{10}$$

где для краткости

$$\widehat{G}_\tau = \prod_{j=1}^{n_\tau}[\widehat{G}(\tau,j)]^{\sigma(\tau,j)}\,,$$

и введем семейство дискретных множеств $\Delta_\tau = \{\alpha_\tau + k, k\in\mathbb{Z}\}$, $\tau\in F$. Для весового порядка запись $\delta\in\Delta$ означает, что $\delta_\tau\in\Delta_\tau$ для всех $\tau\in F$.

Очевидно, $\zeta_\tau - (\alpha_\tau + i\beta_\tau)\in\mathbb{Z}$, поэтому с учетом (8) – (10) для любого $\delta\in\Delta$ число

$$æ = \mathrm{Ind}\, G - \sum\nolimits_{\tau\in F}(\delta_\tau + i\beta_\tau)\in\mathbb{Z}\,. \tag{11}$$

Теорема 2. *Для любого $\delta\in\Delta$ существует единственная аналитическая в $D=\mathbb{C}\setminus\Gamma$ функция $X(z)$, которая всюду отлична от нуля и удовлетворяет условиям*

$$\begin{gathered} X(z),\ 1/X(z)\in C^\mu(\overline{D}^{\pm}_k), \quad 1\le k\le m; \\ X_{\tau,j}(z),\ 1/X_{\tau,j}(z)\in C^\mu(\overline{S}_{\tau,j}), \quad \tau\in F,\ 1\le j\le n_\tau\,, \end{gathered} \tag{12}$$

где $X_{\tau,j}(z) = X(z)(z-\tau)^{-\delta_\tau - i\beta_\tau}$, $z\in S_{\tau,j}$, и

$$X^+ = GX^-\,, \tag{13}$$

$$\lim_{z\to\infty} X(z)z^{æ} = 1\,. \tag{14}$$

$\square$ Если две функции X_1, X_2 удовлетворяют условиям (12)-(14), то их отношение $Y = X_1/X_2$ обладает свойством $Y^+ = Y^-$ и, следовательно, является функцией, аналитической в $\mathbb{C} \setminus F$. Этот факт является очевидным следствием хорошо известного свойства об аналитическом продолжении, которое сформулируем отдельно и докажем позже. $\blacksquare$

Лемма 3. *Пусть простая область D_0 разбита ориентируемой гладкой дугой Γ_0 на две подобласти $D^\pm$, считая D^+ лежащей слева от Γ_0. Тогда любая функция $\phi_0 \in C(\overline{D_0})$, аналитическая в подобластях $D^\pm$, аналитична во всей области D_0.*

Итак, функция $Y(z)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus F$ и в силу (12) в окрестности точек $\tau \in F$ ограничена. Поэтому она аналитична на всей плоскости и на основании (14) стремится к 1 при $z \to \infty$. В силу теоремы Лиувилля отсюда $Y(z) \equiv 1$, что означает единственность функции $X(z)$.

Исходя из непрерывной на $\Gamma \setminus F$ ветви логарифма $\ln G \in C^\mu(\Gamma; F)$, рассмотрим функцию

$$X_0(z) = \exp[I(\ln G)](z)\,, \quad z \in D\,.$$

Применяя к $\varphi = \ln G$ соотношение (7), убеждаемся, что функция $X_0(z)$ удовлетворяет условиям (12) по отношению к семейству ζ_τ в (9) и стремится к 1 при $z \to \infty$. Кроме того, она удовлетворяет и краевому условию (13). Поэтому можем положить

$$X(z) = \prod_{\tau\in F} (z-\tau)^{\delta_\tau + i\beta_\tau - \zeta_\tau} X_0(z)\,.$$

Остаётся заметить, что в силу (8), (11)

$$\sum\nolimits_\tau (\zeta_\tau - \delta_\tau - i\beta_\tau) = æ$$

и, следовательно, выполнено и условие (14).

$\square$ Доказательство леммы 3 легко получается из формулы Коши. Если дуги $\Gamma^\pm = \partial D^\pm \setminus \Gamma_0$ ориентированы положительно по отношению к $D^\pm$, то согласно этой формуле

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^\pm} \frac{\phi_0(t)dt}{t-z} \pm \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\phi_0(t)dt}{t-z} = \begin{cases} \phi_0(z), & z \in D^\pm, \\ 0, & z \in D^\mp. \end{cases}$$

Складывая эти равенства, получим представление

$$\phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_0} \frac{\phi_0(t)dt}{t-z}, \quad z \in D_0 \setminus \Gamma_0,$$

которое доказывает аналитичность функции ϕ_0 в области D_0. $\blacksquare$

Следуя [6], функцию $X(z)$ назовём канонической по отношению к задаче (1) и весовому порядку $\delta \in \Delta$. Процедура построения этой функции также впервые указана в [6].

Отметим, что асимптотика канонических матриц-функции в точках $\tau \in F$ для задачи (1) в общем векторном случае приведена в [9].

Рассмотрим задачу (1) в классе функций $\phi \in C^{\mu}_{\lambda}$, поведение которых на бесконечности подчиняется оценке

$$|\phi(z)| \leq C|z|^k\,, \quad |z| \geq R\,, \tag{16}$$

где R выбрано столь большим, что $\Gamma \subseteq \{|z| < R\}$ и $k \in \mathbb{Z}$ фиксировано. Эта оценка равносильна тому, что функция $\phi(z)$ в области $|z| \geq R$ раскладывается в ряд

$$\phi(z) = \sum\nolimits_{j=-\infty}^{k} c_j z^j\,.$$

Наибольшее $j \leq k$, для которого $c_j \neq 0$ в этом разложении называется порядком $\deg\phi$ на бесконечности. Таким образом, оценку (16) можем выразить условием $\deg\phi \leq k$. Условимся под $\deg p$ понимать степень многочлена p, считая $p = 0$ при $\deg p < 0$, и обозначим P_k класс многочленов p степени $\deg p \leq k$. Очевидно, его размерность равна $\max(0, k+1)$.

Пользуясь канонической функцией, обычным образом [6] легко построить эффективное решение задачи (1).

Теорема 3. *Пусть весовой порядок λ удовлетворяет условию $\lambda_\tau \notin \Delta_\tau$, $\tau \in F$, так что найдется $\delta \in \Delta$ со свойством $-1 < \lambda_\tau - \delta_\tau < 0$. Пусть X – каноническая функция задачи (1), отвечающая δ. Тогда в классе*

$$\{\phi \in C^{\mu}_{\lambda},\ \deg\phi \leq k-1\} \tag{17}$$

при $æ + k \geq 0$ все решения однородной задачи $\phi^+ = G\phi^-$ состоят из функций Xp, $p \in P_{æ+k-1}$, а неоднородная задача всегда разрешима и одним из её решений служит функция

$$\phi = X\phi_0, \quad \phi_0 = I[(X^+)^{-1}g]\,. \tag{18}$$

Если $æ + k < 0$, то однородная задача в классе (17) имеет только нулевое решение, а неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности

$$\int_\Gamma [X^+(t)]^{-1} g(t)p(t)dt = 0, \quad p \in P_{-æ-k-1}\,. \tag{19}$$

При выполнении этих условий решение задачи даётся формулой (18).

□ В силу леммы 1 и теоремы 1 преобразование $\phi \to \phi_0 = X^{-1}\phi$ осуществляет изоморфизм класса (17) на класс

$$\{\phi_0 \in C^{\mu}_{\nu},\ \deg\phi \leq k + æ - 1\} \tag{20}$$

с весовым порядком $\nu_\tau = \lambda_\tau - \delta_\tau$, удовлетворяющим условию $-1 < \nu < 0$. При этом преобразовании с учетом (13) задача (1) переходит в $\phi_0^+ - \phi_0^- = g_0$ с правой частью $g_0 = (X^+)^{-1}g \in C^{\mu}_{\nu}(\Gamma, F)$. Если $g = 0$, то тогда функция ϕ_0 аналитически продолжается в $\mathbb{C}\setminus F$ и в точках $\tau \in F$ допускает слабые особенности. Поэтому в действительности эта функция аналитична на всей плоскости, поэтому на основании (20) и теоремы Лиувилля эта функция является многочленом p степени $\deg p \le k + æ$. В частности, $\phi = 0$ при $k + æ < 0$.

При $k + æ \ge 0$ интеграл типа Коши $\phi_0 = Ig_0$ принадлежит классу (20) и в силу формул Сохоцкого-Племеля (4) удовлетворяет краевому условию $\phi_0^+ - \phi_0^- = g_0$, поэтому формула (18) доставляет решение задачи (1) в классе (17). При $k + æ < 0$ функцию g_0 нужно подчинить дополнительным условиям, обеспечивающим ее принадлежность классу (20). В силу разложения

$$(Ig_0)(z) = \sum_{j\ge 0} c_j z^{-j-1}\,, \quad c_j = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g_0(t)t^j dt\,,$$

интеграла типа Коши в окрестности ∞ эти условия сводятся к $c_j = 0,\ \ 0 \le j \le -(k + æ) - 1$, что равносильно условиям ортогональности (19). ■

Теорема 3 позволяет описать степенно-логарифмическую асимптотику в точках $\tau \in F$ решений задачи (1) при условии, что аналогичное поведение имеет правая часть g задачи (1). Начнем со следующего вспомогательного результата, дополняющего лемму 2.

Лемма 4. *Пусть гладкая дуга Γ_0 с концами $\tau \ne \tau'$ ориентирована от τ к τ', задана простая область $D_0 \subseteq \mathbb{C} \setminus \Gamma_0$, для которой $\overline{D_0} \cap \Gamma_0 = \{\tau\}$, и выбрана ветвь логарифма $\ln(z-\tau)$ с разрезом вдоль Γ_0 и граничными значениями $\ln^+(t-\tau) = \ln(t-\tau)$ и $\ln^-(t-\tau) = \ln(t-\tau) + 2\pi i$ на Γ_0. Пусть функция*

$$\varphi(t) = (t-\tau)^\zeta q[\ln(t-\tau)] + \varphi_0(t)\,, \quad \varphi_0 \in C^\mu_\lambda(\Gamma_0, \tau)\,, \tag{21}$$

где $-1 < \mathrm{Re}\,\zeta < \lambda < 0$ и $q(u)$ – многочлен некоторой степени $k \ge -1$ (при $k = -1$ полагается $q = 0$). Тогда интеграл типа Коши с плотностью φ в области D_0 представим в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi(t)dt}{t-z} = (z-\tau)^\zeta p[\ln(z-\tau)] + \phi_0(z), \quad \phi_0 \in C^\mu_\lambda(\overline{D_0}, \tau)\,, \tag{22}$$

где многочлен p имеет ту же степень k и однозначно определяется из уравнения

$$p(u) - e^{2\pi i\zeta} p(u + 2\pi i) = q(u)\,. \tag{23}$$

Аналогичное утверждение справедливо и при $\mathrm{Re}\,\zeta = 0,\ \ 0 < \lambda < 1$ с той разницей, что в представлении (22) функция $\phi_0 - c_0 \in C^\mu_\lambda(\overline{D_0}, \tau)$ с некоторой постоянной $c_0 \in \mathbb{C}$, а степень многочлена p не превосходит k при $\zeta \ne 0$ и $k + 1$ при $\zeta = 0$.

□ Убедимся прежде всего, что при $e^{2\pi i\zeta} \ne 1$ уравнение (23) в классе многочленов степени не выше n однозначно разрешимо. Поскольку оператор N этого уравнения можно записать в форме

$$Np = (1 - e^{2\pi i\zeta})p - \sum_{k\ge 1}\frac{(2\pi i)^k}{k!}p^{(k)}\ ,$$

достаточно убедиться, что уравнение $Np = 0$ имеет только нулевой решение. Но этот факт является следствием того, что многочлен Np имеет ту же степень, что и p. Что касается случая $\zeta = 0$, то в этом случае

$$Np = -\sum_{k\geq 1} \frac{(2\pi i)^k}{k!} p^{(k)} \,,$$

и предыдущие рассуждения достаточно применить к p'. Таким образом, решение p уравнения $p(u) - p(u + 2\pi i) = q(u)$ определено с точностью до константы и имеет степень, на единицу большую степени q.

Выберем положительные числа $\rho_1 < \rho_2$ столь малыми, что пересечение круга $\{|z - \tau| \leq \rho_k\}$ с Γ_0 является некоторой дугой Γ_k, $k = 1, 2$ и, пусть S_k есть дополнение к Γ_0 в этом круге. Очевидно, утверждение леммы достаточно установить по отношению к сектору S_1, записывая условие на функцию ϕ_0 в (22) в форме $\phi_0 \in C^\mu_\lambda(\widehat{S}_1, \tau)$. Применим в секторе S_2 к функции $\Omega(z) = (z - \tau)^\zeta p[\ln(z - \tau)]$, где многочлен $p(u)$ есть решение уравнения (23), формулу Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t-\tau|=\rho_2} \frac{\Omega(t)dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{[\Omega^+(t) - \Omega^+(t)]dt}{t-z} = \Omega(z)\,, \quad z \in S_2\,.$$

В результате приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{(t-\tau)^\zeta q[\ln(t-\tau)]dt}{t-z} = \Omega(z) + h_0(z), \quad z \in S_1\,,$$

где функция $h_0(z)$ аналитична в круге $|z - \tau| < \rho_2$. Отсюда приходим к равенству (22) с функцией

$$\phi_0(z) = h_0(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0\setminus\Gamma_2} \frac{(t-\tau)^\zeta q[\ln(t-\tau)]dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\varphi_0(t)dt}{t-z}\,, \quad z \in S_1\,.$$

Если $-1 < \mathrm{Re}\,\zeta < \lambda < 0$, то на основании теоремы 1 функция $\phi_0 \in C^\mu_\lambda(\widehat{S}_1, \tau)$. Если $\mathrm{Re}\,\zeta = 0$ и $0 < \lambda < 1$, то согласно очевидному соотношению

$$\frac{z-\tau}{(t-\tau)(t-z)} = \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\tau}$$

можем записать

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\varphi_0(t)dt}{t-z} = (z-\tau)\int_{\Gamma_0} \frac{\varphi_1(t)dt}{t-z} + \int_{\Gamma_0} \varphi_1(t)dt$$

с функцией $\varphi_1(t) = (t - \tau)^{-1}\varphi_0(t) \in C^\mu_{\lambda-1}(\Gamma_0, \tau)$. Поскольку $-1 < \lambda - 1 < 0$, остается воспользоваться теоремой 1. ■

Отметим, что уравнение (23) можно решить в явной форме. С этой целью рассмотрим аналитическую функцию $g(u) = 1 - e^{2\pi i u}$. Исходя из тейлоровского разложения

$g(\zeta+u)$ по степеням u и операции дифференцирования $Dp = p'$ в классе многочленов p, введем в этом классе линейную операцию

$$g(\zeta+D)p = \sum_{k\geq 0} \frac{g^{(k)}(\zeta)}{k!} D^k p\,.$$

В терминах этой операции уравнение (23) можно записать в виде $g(\zeta+D)p = q$. Пусть $\zeta \neq 0$ и $h(u) = (1-e^{2\pi i u})^{-1}$. Тогда записывая тождество $h(\zeta+u)g(\zeta+u) = g(\zeta+u)h(\zeta+u) = 1$ для тейлоровских разложений по степеням u, убеждаемся, что операции $g(\zeta+D)$ и $h(\zeta+D)$ взаимно обратны, так что решением уравнения (23) служит $p = h(\zeta+D)q$.

При $\zeta = 0$ рассмотрим разложение функции $h(u)$ в ряд Лорана

$$h(u) = -\frac{1}{2\pi i}u^{-1} + \sum_{k\geq 0} c_k u^k$$

с коэффициентами

$$c_0 = \frac{1}{2}\,, \quad c_1 = -\frac{2\pi i}{12}\,, \quad c_2 = 0\,, \dots\,,$$

и соответственно этому разложению положим

$$h(D)p = -\frac{1}{2\pi i}p^{(-1)} + \sum_{k\geq 0} c_D^k p, \quad p^{(-1)}(u) = \int_0^u p(v)dv\,.$$

Тогда аналогично предыдущему проверяется, что $g(D)h(D)p = p$ для любого многочлена p, однако порядок операций здесь существенен. Поэтому многочлен $p = h(D)q$ является решением уравнения (23) и в этом случае.

Согласно лемме 1 функции вида (21), (22) принадлежат классу $\cap_{\varepsilon>0} C^\mu_{\lambda-\varepsilon}$, который обозначим $C^\mu_{\lambda-0}$. Аналогичным образом положим $C^\mu_{\lambda+0} = \cup_{\varepsilon>0} C^\mu_{\lambda+\varepsilon}$. Очевидно, по отношению к классу $C^\mu_{\lambda-0}(\widehat{D}, F)$ условие на λ в теореме 3 можно опустить, выбирая $\delta \in \Delta$ по условию

$$\delta_\tau - 1 < \lambda_\tau \leq \delta_\tau\,, \ \tau \in F\,. \tag{24}$$

Теорема 4. *Пусть функция g принадлежит классу $C^\mu_{\lambda-0}(\Gamma, F)$ и $\delta \in \Delta$ выбрано по условию (24). Пусть для фиксированного $\tau \in F$ сужение функции g на дуги $\Gamma_{\tau,j}$, $1 \leq j \leq n_\tau$, представимо в виде*

$$g(t) = (t-\tau)^\zeta q_j[\ln(t-\tau)] + g_j(t), \quad g_j \in C^\mu_{\lambda_\tau+0}(\Gamma_{\tau,j}, \tau)\,, \tag{25}$$

где $\operatorname{Re}\zeta = \lambda_\tau$ *и* $q_j \in P_k$.

Тогда при $\lambda_\tau < \delta_\tau$ любое решение $\phi \in C^\mu_{\lambda-0}(\widehat{D}, F)$ задачи (1) в секторах $S_{\tau,j}$ представимо в виде

$$\phi(z) = (z-\tau)^\zeta p_j[\ln(z-\tau)] + \phi_j(z), \quad \phi_j \in C^\mu_{\lambda_\tau+0}(\overline{S}_{\tau,j}, \tau)\,, \tag{26}$$

с некоторыми многочленами $p_j \in P_k$. Если $\lambda_\tau = \delta_\tau$, то

$$\phi(z) = (z-\tau)^\zeta p_j[\ln(z-\tau)] + c_j(z-\tau)^{\zeta_\tau} + \phi_j(z), \quad \phi_j \in C^\mu_{\lambda_\tau+0}(\overline{S}_{\tau,j}, \tau)\,, \tag{27}$$

с некоторыми $c_j \in \mathbb{C}$ и многочленами p_j, степень которых не превосходит k при $\operatorname{Im}\zeta \neq \beta_\tau$ и $k+1$ при $\operatorname{Im}\zeta = \beta_\tau$.

□ Согласно теореме 3 решение $\phi \in C^\mu_{\lambda-0}(\widehat{D}, F)$ задачи (1) представимо в виде

$$\phi = X(\phi_0 + p_0), \quad \phi_0 = I[(X^+)^{-1}g], \tag{28}$$

с некоторым многочленом p_0. Тогда на основании (25) и теоремы 2 можем записать

$$[X^+(t)]^{-1}g(t) = (t-\tau)^{\zeta-\delta_\tau-i\beta_\tau}q_j[\ln(t-\tau)] + g^0_j(t), \quad g^0_j \in C^\mu_{\nu_\tau+0}(\Gamma_{\tau,j}, \tau),$$

где $\operatorname{Re}\zeta - \delta_\tau = \nu_\tau$ и $-1 < \nu_\tau \leq 0$.

Предположим сначала, что $\nu_\tau < 0$. Тогда в силу леммы 4 отсюда

$$\phi_0(z) = (z-\tau)^{\zeta-\delta_\tau-i\beta_\tau}p_j[\ln(z-\tau)] + \phi^0_j(z), \quad \phi^0_j \in C^\mu_{\nu_\tau+0}(\overline{S}_{\tau,j}, \tau),$$

что для функции ϕ в (28) приводит к соотношению (26).

Если $\nu_\tau = 0$, то на основании леммы 4

$$\phi_0(z) = (z-\tau)^{i(\operatorname{Im}\zeta-\beta_\tau)}p_j[\ln(z-\tau)] + c_j + \phi^0_j(z), \quad \phi^0_j \in C^\mu_{+0}(\overline{S}_{\tau,j}, \tau),$$

с многочленами p_j соответствующей степени. Совместно с (28) отсюда следует второе утверждение теоремы.

Проиллюстрируем теорему в ситуации, когда $\lambda_\tau = \zeta = 0$ и q_j являются многочленами нулевой степени, т.е. когда условие (25) переходит в

$$g(t) - a_j \in C^\mu_{+0}(\Gamma_{\tau,j}, \tau), \quad 1 \leq j \leq n_\tau. \tag{29}$$

Напомним, что в обозначениях (10) множество Δ_τ состоит из чисел $\alpha_\tau + j$, $j \in \mathbb{Z}$, где $0 \leq \alpha_\tau < 1$. Поэтому на основании теоремы 4 при $0 < \alpha_\tau < 1$ любое решение ϕ задачи (1), принадлежащее $C^\mu_{-0}(\overline{S}_{\tau,j}, \tau)$ в окрестности τ, в действительности обладает свойством $\phi(z) - c_j \in C^\mu_{+0}(\overline{S}_{\tau,j}, \tau)$ с некоторой постоянной c_j. Если $\alpha_\tau = 0$, но $\beta_\tau \neq 0$, то согласно (27) имеем разложение

$$\phi(z) = b_j + c_j(z-\tau)^{i\beta_\tau} + \phi_j(z), \quad \phi_j \in C^\mu_{\lambda_\tau+0}(\overline{S}_{\tau,j}, \tau).$$

Наконец при $\alpha_\tau = \beta_\tau = 0$ многочлены p_j в (27) имеют степень 1 и, следовательно, в этом случае

$$\phi(z) = b_j + c_j\ln(z-\tau) + \phi_j(z), \quad \phi_j \in C^\mu_{\lambda_\tau+0}(\overline{S}_{\tau,j}, \tau). \tag{30}$$

Таким образом, решение ϕ будет ограниченным в окрестности τ для любой функции g вида (29) тогда и только тогда, когда $\alpha_\tau + i\beta_\tau \neq 0$. По терминологии Н.И. Мусхелишвили [6] точки $\tau \in F$, для которых $\zeta_{\tau,0} \neq 0$, называются неособенными.

Из доказательства теоремы 4 и леммы 2 видно, что при $\alpha_\tau = 0$ коэффициенты c_j в разложении (30) обращаются в нуль тогда и только тогда, когда постоянные a_j в (29) подчинены условию

$$\sum_{j=1}^{n_\tau}\sigma(\tau,j)\frac{\widehat{g}(\tau,j)}{\widehat{X^+}(\tau,j)} = 0. \tag{31}$$

Здесь учтено, что в соответствии с принятым предположением и теоремой 2 каноническая функция $X(z) \in C^\mu(\overline{S}_{\tau,j})$ и, следовательно, $X^+ \in C^\mu(\Gamma_{\tau,j})$.

Рассмотрим частный случай, когда $n_\tau = 2$ и знаки $\sigma(\tau,j)$, $j = 1,2$, противоположны, например, $\sigma(\tau,1) = -\sigma(\tau,2) = 1$. Тогда в окрестности τ кривая Γ ориентирована единым образом, причем дуга $\Gamma_{\tau,1}$ лежит слева от τ и ее можно обозначить $\Gamma_{\tau,-0}$, и аналогично $\Gamma_{\tau,2} = \Gamma_{\tau,+0}$. Соответственно предельные значения (6) на этих дугах можно обозначить $\varphi(\tau \pm 0)$. В этом случае (10) принимает вид

$$\alpha_\tau + i\beta_\tau = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{G(\tau-0)}{G(\tau+0)}\,, \quad 0 \le \alpha_\tau < 1\,.$$

Пусть $G(\tau-0) = G(\tau+0)$ и выполнено условие (29), т.е. $g(t) - a_\pm \in C^\mu_{+0}(\Gamma_{\tau\pm0},\tau)$. Тогда для аналитической функции ϕ в двух секторах $S_{\tau,1}$ и $S_{\tau,2}$ будем иметь разложение (30). Пусть каноническая функция $X(z)$ в теореме 2 построена для случая, когда все $\alpha_\tau + i\beta_\tau = 0$. Тогда ее сужение X_j на сектор $S_{\tau,j}$ вместе со своим обратным принадлежит классу $C^\mu(\overline{S}_{\tau,j})$. Считая для определенности сектор $S_{\tau,1}$ расположенным слева от Γ, приходим к заключению, что значения $X^+(\tau \pm 0)$ совпадают с $X_1(\tau)$ и, следовательно, соотношение (31) сводится к равенству $g(\tau+0) = g(\tau-0)$. Выполнение этого условия необходимо и достаточно для обращения в нуль логарифмического слагаемого в разложении (30).

В заключение остановимся на случае, когда Γ является кусочно-гладким контуром, т.е. каждая связная компонента этой кривой гомеоморфна окружности, и функция $G \in C^\mu(\Gamma)$. Пусть эти компоненты, которые обозначим $\Gamma_{(1)},\ldots,\Gamma_{(n)}$, ориентированы определенным образом (по или против часовой стрелки). Поскольку в рассматриваемом случае $\alpha_\tau + i\beta_\tau = 0$ для всех $\tau \in F$, каноническая функция $X(z)$, построенная по теореме 2 для $\delta = 0$, в прилегающих областях $D^\pm$ вместе со своей обратной $1/X(z)$ принадлежит $C^\mu(\overline{D^\pm})$. Соответственно для $g \in C^\mu(\Gamma)$ теорема 3 описывает разрешимость задачи (1) а классе функций $\phi \in C^\mu(\widehat{D})$ с порядком не выше $k-1$ на ∞.

Целое число æ в рассматриваемом случае совпадает с индексом Коши æ $= \mathrm{Ind} G$, которое определяется суммой приращений ветви $\ln G$ на простых контурах $\Gamma_{(j)}$ в соответствии с их ориентацией, т.е.

$$\text{æ} = \frac{1}{2\pi i} \sum\nolimits_{j=1}^{n} \ln G\big|_{\Gamma_{(j)}}\,. \tag{32}$$

Здесь ветвь логарифма предполагается непрерывной на $\Gamma_{(j)}$ вне фиксированной точки $\tau_{(j)}$.

Следуя [5,6], каноническую функцию можно строить по той же схеме, что и в теореме 3, но только исходя из компонент $\Gamma_{(j)}$. Если все слагаемые в правой части (32) равны нулю, то $\ln G \in C^\mu(\Gamma)$ и можно положить

$$X(z) = \exp[I(\ln G)](z)\,, z \in D\,.$$

В общем случае пусть æ$_j$ означает $j-$ое слагаемое в правой части (32). Каждый простой контур $\Gamma_{(j)}$ разбивает плоскость на конечную D^0_j и бесконечную D^1_j области.

Выберем точку $a_j \in D_j^0$ и положим

$$G_1(t) = \prod_{j=1}^{s} (t - a_j)^{\sigma_j æ_j}\,, \quad t \in \Gamma\,,$$

где $\sigma_j = 1$, если контур $\Gamma_{(j)}$ ориентирован против часовой стрелки, и $\sigma_j = -1$ в противном случае. Очевидно,

$$\frac{1}{2\pi i} \ln G_1 \Big|_{\Gamma_{(j)}} = æ_j\,, \quad 1 \leq j \leq n\,,$$

и, следовательно, функция $G_0 = G_1^{-1} G$ обладает свойством $\ln G_0 \in C^{\mu}(\Gamma)$. Легко видеть, что аналитическая вне Γ функция

$$X_1(z) = \prod_{j=1}^{n} Y_j(z), \quad Y_j(z) = \left\{ \begin{array}{cc} 1, & z \in D_j^0, \\ (z - a_j)^{-æ_j}, & z \in D_j^1, \end{array} \right.$$

будет канонической для коэффициента $G_1(t)$. Соответственно каноническую функцию для коэффициента G можем определить равенством

$$X(z) = X_0(z) X_1(z), \quad X_0(z) = \exp[I(\ln G_0)](z)\,, \quad z \in D\,.$$

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Наука, 1968.
2. Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций / М.: Высшая школа, 1991. – 266 с.
3. Солдатов А.П. Обобщенный интеграл типа Коши / Дифференц. ур-ния. – 1991. – 27, №.2. – С.3-8.
4. Солдатов А.П. Краевая задача линейного сопряжения теории функций / Изв. АН СССР (сер.матем.). – 1979. – 43, №.1. – С.184-202.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / М.: Физматгиз, 1963.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE LINEAR CONJUGATION PROBLEM AT ANGULAR POINTS OF THE CURVE

G.N. Averianov, A.P. Soldatov

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: soldatov48@gmail.com

Abstract. The classical problem of linear conjugation problem with piecewise smooth curve is under consideration for analytic functions in the frame of weight Hölder's spaces scale. It is obtained the explicit power-logarithmic asymptotic of solution of this problem at angle points of the conjugation curve at the supposition that the right-hand side of the problem has the analogous asymptotic.

Key words: linear conjugation problem, analytic functions, Hölder's spaces, piecewise-smooth curves..

MSC 35Q05

ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОТ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ С ФРЕДГОЛЬМОВЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Исследована зависимость решений абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с фредгольмовым оператором при производных от коэффициентов уравнения.

Ключевые слова: абстрактная задача Коши, уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, фредгольмов оператор, возмущение.

В работе [1] при $t > 0$ и $k \geq 0$ установлена разрешимость задачи Коши для следующих уравнений с фредгольмовым оператором A при производных:

$$A\left(t^k u'(t)\right)' = t^k Bu(t)\,, \tag{1}$$

$$\left(t^k Av'(t)\right)' = t^k Bv(t)\,, \tag{2}$$

$$\left(t^k (Aw(t))'\right)' = t^k Bw(t)\,. \tag{3}$$

Для всех этих уравнений начальное условие имеет вид

$$u(0) = U_0\,, \quad u'(0) = 0\,. \tag{4}$$

В настоящей работе исследуются вопросы поведения решений рассматриваемых задач при изменении либо операторных коэффициентов уравнений, либо параметра k. Все используемые нами обозначения введены в [1].

Условие 1. Пусть $B \in L(E_1, E_2)$, а оператор A — линейный, замкнутый, фредгольмовый оператор и при этом для достаточно малых по модулю λ оператор $A + \lambda B$ обратим.

Если выполнено условие 1 и $U_0 \in \mathfrak{M}$, то задача (1), (4) при любых $k \geq 0$ имеет единственное решение (см. [1]) $u_k(t) = Y_k(t; T_p)U_0$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие 1 и $U_0 \in \mathfrak{M}$. Тогда равномерно по $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$ для любого $k \geq 0$ справедливо соотношение*

$$\lim_{m \to k} u_m(t) = u_k(t)\,. \tag{5}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00378 А-2013

□ Для определённости будем считать, что $m > k$. В силу формулы сдвига по параметру (см. [2]) для $U_0 \in \mathfrak{M}$, $t \in [0, t_0]$ и $\delta > 0$ имеем

$$u_m(t) - u_k(t) =$$

$$= \frac{2}{B\left((k+1)/2, (m-k)/2\right)} \int\limits_0^{1-\delta/t_0} s^k \, (1-s^2)^{(m-k-2)/2} \left(Y_m(ts; T_p) - Y_k(t; T_p)\right) U_0 \, ds +$$

$$+ \frac{2}{B\left((k+1)/2, (m-k)/2\right)} \int\limits_{1-\delta/t_0}^{1} s^k \, (1-s^2)^{(m-k-2)/2} \left(Y_m(ts; T_p) - Y_k(t; T_p)\right) U_0 \, ds \, .$$

В силу сильной непрерывности операторной функции $Y_k(t; T_p)$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ $\|Y_m(ts; T_p)U_0 - Y_k(t; T_p)U_0\| < \varepsilon$, если только $|1 - s| < \delta/t_0$. Зафиксируем такое $\delta > 0$ и пусть $M(t_0) = \sup_{[0,t_0]} \|Y_k(t; T_p)U_0\|$. Тогда

$$\|u_m(t) - u_k(t)\| \le \frac{2}{B\left((k+1)/2, (m-k)/2\right)} \times$$

$$\times \left(2M(t_0) \int\limits_0^{1-\delta/t_0} (1-s^2)^{(m-k-2)/2} \, ds + \varepsilon \int\limits_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} \, ds \right) \le$$

$$\le \frac{4M(t_0)\, \Gamma((m+1)/2)}{\Gamma((k+1)/2)\, \Gamma((m-k)/2)} \left(\frac{2\delta}{t_0} - \frac{\delta^2}{t_0^2} \right)^{(m-k-2)/2} + \varepsilon \, .$$

Поскольку $\lim\limits_{m\to k} \Gamma((m-k)/2 = \infty$, то, учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, из последнего неравенства получим (5). ■

Аналогично доказываются и следующие две теоремы о разрешимости соответственно задач (2), (4) и (3), (4).

Теорема 2. *Пусть выполнено условие 1 и* $U_0 \in \mathfrak{M}$. *Тогда равномерно по* $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$ *для любого* $k \ge 0$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{m\to k} v_m(t) = v_k(t) \, .$$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие 1 и*

$$S_0 U_0 = 0, \quad Q_j S_{j-1} F_{j-1} (I_1 - P_0) U_0 = 0 \, , \quad j = 1, \ 2, \ ..., p-1 \, .$$

Тогда равномерно по $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$ *для любого* $k \ge 0$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{m\to k} w_m(t) = w_k(t) \, .$$

В дальнейшем мы, используя результаты гл. 2 из [3], исследуем влияние на решение возмущений коэффициентов только для уравнения (1). Для уравнений (2) и (3) результаты формулируются и устанавливаются аналогично.

При $k \geq 0$ рассмотрим уравнение

$$(A-\varepsilon C)\left(t^k u'(t)\right)' = t^k Bu(t) \tag{6}$$

с параметром $\varepsilon \in \mathbb{C},\ 0<|\varepsilon|<\varepsilon_0,\ \varepsilon_0>0$.

Условие 2. Пусть $B,\ C \in L\left(E_1, E_2\right)$, а оператор A — линейный, замкнутый, фредгольмовый оператор, причём $\dim \ker A = 1$.

Отметим, что предположение $\dim \ker A = 1$ лишь упрощает изложение результатов. Пусть e — элемент из $\ker A$, $\varphi \in \operatorname{coker} A$. В одномерном пространстве $\operatorname{coker} A$ введём скалярное произведение $<\cdot,\cdot>$ так, чтобы $<\varphi,\varphi>=1$.

В рассматриваемом случае лемма 1 из [1] формулируется следующим образом.

Лемма 1 [3]. *Пусть выполнено условие 2, $x \in D(A),\ y \in E_2$. Тогда уравнение $Ax=y$ эквивалентно системе*

$$<Q_0 y, \varphi>=0, \quad x = H_0 y + ce,$$

где c — произвольная постоянная из $\mathbb{C}$.

Следуя [3] (п. 2.2.1), для $x \in E_1$ и $\varepsilon \in \mathbb{C} : |\varepsilon| < \|H_0 C\|^{-1}$ введём в рассмотрение операторы

$$K_0(\varepsilon)x = \varepsilon <Q_0 Cx, \varphi>, \quad x \in E_1,$$

$$K_1(\varepsilon)x = \varepsilon <Q_0 C(I_1-\varepsilon H_0 C)^{-1} H_0 Bx, \varphi> + <Q_0 Bx, \varphi>,$$

$$K_j(\varepsilon) = K_{j-1}(I_1-\varepsilon H_0 C)^{-1} H_0 B, \quad j=2,3,\ldots .$$

Введём также в рассмотрение элемент $\tau(\varepsilon)=(I_1-\varepsilon H_0 C)^{-1}e$ и пусть r — минимальное число, при котором $K_r(\varepsilon)\tau(\varepsilon) \neq 0$. Тогда уравнение (6) примет вид

$$\left(t^k u'(t)\right)' = t^k \Upsilon(\varepsilon) u(t)\,, \tag{7}$$

где

$$\Upsilon(\varepsilon)x = (I_1-\varepsilon H_0 C)^{-1} H_0 Bx - \frac{K_{r+1}(\varepsilon)x}{K_r(\varepsilon)\tau(\varepsilon)}(I_1-\varepsilon H_0 C)^{-1} e\,,$$

и при этом для $j=1,2,\ldots,r$ выполняются тождества

$$K_j(\varepsilon)u(t) \equiv 0\,. \tag{8}$$

Учитывая лемму 1, также как и в п. 2.2.1 [3] доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие 2. Решение задачи (6), (4) существует и единственно только тогда, когда существует $j \in \mathbb{N}$ такое, что $K_j(\varepsilon)\tau(\varepsilon) \neq 0$ для $\varepsilon \in \mathbb{C}$ и таких, что $0<|\varepsilon|<\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ с некоторым $\varepsilon_1>0$, а для U_0 выполнены условия согласования $K_j(\varepsilon)U_0=0,\ j=1,2,\ldots,r$. При этом решение имеет вид $u(t)=Y_k(t;\Upsilon(\varepsilon))U_0$ и обладает свойством (8).*

Из теоремы 1 [1] вытекает следующий результат.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие 1. Решение задачи (6), (4) существует и единственно только том случае, когда при каждом* $\varepsilon \in \mathbb{C}: \ 0 < |\varepsilon| < \varepsilon_1$ *существует* $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ *такое, что оператор* $A - \varepsilon C - \lambda B$ *обратим при* $0 < |\lambda| < |\lambda_1|$.

Исследование обратимости оператора $A - \varepsilon C - \lambda B$ содержится в п. 2.2.2 [3], а поведение решения задачи (6), (4) при $\varepsilon \longrightarrow 0$ исследуется аналогично пункту 2.3.5 [3]. Отметим, что даже малая добавка εC может оказать существенное влияние на существование решения задачи (6), (4).

Наконец, рассмотрим случай сингулярного возмущения уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с фредгольмовым оператором при производных, когда множителем при старшей производной вводится параметр $\varepsilon \longrightarrow +0$.

Теорема 6. *Пусть* $k > 0$, *выполнено условие 1 и* $U_0 \in \mathfrak{M}$. *Тогда равномерно по* $t \in [0, t_0]$ *решение задачи*

$$\varepsilon A U''(t) + \frac{k}{t} U'(t) = BU(t)\,, \quad U(0) = U_0\,, \quad U'(0) = 0 \tag{9}$$

стремится при $\varepsilon \longrightarrow +0$ *к решению задачи*

$$\frac{k}{t} V'(t) = BV(t)\,, \quad V(0) = U_0\,, \tag{10}$$

при этом $\|U(t) - V(t)\| = O(\varepsilon)$.

□ В силу теоремы 3 [1] и теоремы 3 из [4] решения задач (9) и (10) имеют вид

$$U(t) = Y_{k/\varepsilon}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}; T_p\right) U_0\,, \quad V(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2k} T_p\right) U_0\,,$$

и требуемое нам утверждение вытекает из теоремы 3 [5]. ■

Литература

1. Глушак А.В. Уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с фредгольмовым оператором при производных // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2014. – Вып. 37. – С.5-18.
2. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // ДАН. – 1997. – 352, № 5. – С.587-589.
3. Зубова С.П. Метод каскадной декомпозиции решения задач для псевдорегулярных уравнений / Дис. докт. физ.-мат. наук. Белгород. 2013.
4. Зубова С.П., Чернышов К.И. О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения и их применение. – Вып. 14. Вильнюс. Институт физики и математики АН Литовской ССР. – 1976. – С.21-39.
5. Глушак А.В. Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Математ. заметки. – 1999. – 66, вып.3. – С.364-371.

SOLUTIONS DEPENDENCE ON COEFFICIENTS OF EULER-POISSON-DARBOUX's EQUATION WITH FREDHOLM's OPERATOR AT DERIVATIVES

A.V. Glushak

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. It is investigated the dependence of solutions of an abstract Euler-Poisson-Darboux equation with Fredholm's operator at the derivatives the equation coefficients.

Key words: abstract Cauchy problem, Euler-Poisson-Darboux's equation, Fredholm's operator, perturbation.

MSC 11P32

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ПРОБЛЕМЫ ХУА ЛО-КЕНА

***С.А. Гриценко, **Н.Н. Мотькина**

*Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр., 49, Москва, Россия
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва, Россия, e-mail: s.gritsenko@gmail.com
**Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, Россия, e-mail: motkina@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе решается вариант задачи Хуа Ло-кена с простыми числами p, такими, что $a < \{\eta p^2\} < b$, где a и b — произвольные числа из интервала $[0,1]$, η — квадратичная иррациональность.

Ключевые слова: аддитивные задачи, простые числа специального вида, число решений, асимптотическая формула, квадратичная иррациональность.

1. Введение. В 1938 г. Хуа Ло-Кен доказал [1], что достаточно большое натуральное N, $N \equiv 5 \pmod{24}$, представимо суммой квадратов пяти простых чисел:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N\,. \qquad (1)$$

Задача Хуа Ло-Кена состоит в оценке числа $I_{5,2}(N)$ таких представлений. Хуа показал [2], что

$$I_{5,2}(N) = \frac{4\pi^2 N^{3/2}}{3\log^5 N}\sigma(N) + O\Big(\frac{N^{3/2}\log\log N}{\log^6 N}\Big)\,,$$

где

$$\sigma(N) = 24\prod_{\substack{p|N\\ p>3}}\Big(1 - \frac{5p^2 + 10(\frac{-1}{p})p + 1}{(p-1)^4}\Big)\times$$

$$\times\prod_{\substack{p\nmid N\\ p>3}}\Big(1 + \frac{5p^2 + 10(\frac{-1}{p})p + 1}{(p-1)^5} + p\Big(\frac{N}{p}\Big)\frac{p^2 + 10(\frac{-1}{p})p + 5}{(p-1)^5}\Big) > \frac{1}{4}$$

при $N \equiv 5 \pmod{24}$ и $\sigma(N) = 0$ в противном случае.

В настоящей работе мы рассматриваем задачу Хуа Ло-Кена с простыми числами специального вида. Пусть η — квадратичная иррациональность, a и b — произвольные фиксированные действительные числа, $0 \le a < b \le 1$. Пусть $J_{5,2}(N)$ — число решений уравнения (1) с простыми числами p_i, $a < \{\eta p_i^2\} < b$, $i = 1,2,3,4,5$. Полученный нами результат представлен в следующей теореме.

Теорема. *Для достаточно большого натурального N, $N \equiv 5\mathrm{mod}24$, справедлива формула*

$$J_{5,2}(N) = I_{5,2}(N)s(N,a,b) + O(N^{3/2-0{,}00002})\,,$$

где
$$s(N,a,b)=\sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N-2{,}5(a+b))}\frac{\sin^5 \pi m(b-a)}{\pi^5 m^5}\ .$$

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1 ([2], с. 22). *Пусть r — натуральное число, α и β — вещественные числа, $0<\Delta<1/4$, $\Delta\le\beta-\alpha\le 1-\Delta$. Тогда существует периодическая с периодом 1 функция $\psi(x)$, удовлетворяющая условиям:*

1. *$\psi(x)=1$ в промежутке $\alpha+\Delta/2\le x\le\beta-\Delta/2$,*
2. *$0<\psi(x)<1$ в промежутках $\alpha-\Delta/2<x<\alpha+\Delta/2$ и $\beta-\Delta/2<x<\beta+\Delta/2$,*
3. *$\psi(x)=0$ в промежутке $\beta+\Delta/2\le x\le 1+\alpha-\Delta/2$,*
4. *$\psi(x)$ разлагается в ряд Фурье вида*
$$\psi(x)=\beta-\alpha+\sum_{0<|m|<\infty} c(m)e^{2\pi i m x}\,,$$

где
$$|\,c(m)|\le\min\left(\beta-\alpha,\ \frac{1}{\pi|m|}\ ,\ \frac{1}{\pi|m|}\left(\frac{r}{\pi|m|\Delta}\right)^r\right).$$

Лемма 2 ([3], с. 158). *Пусть $\tau\ge 1$, α — вещественное число. Тогда существуют целые взаимно простые числа a и q, $1\le q\le\tau$, такие, что*
$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{1}{q\tau}\ .$$

Лемма 3 ([4], с. 264). *Для любого действительного алгебраического числа α степени n можно подобрать положительное c, зависящее только от α, такое, что для всех рациональных чисел a/b ($a/b\ne\alpha$) будет иметь место неравенство*
$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|\ge\frac{c}{b^n}\ .$$

Лемма 4 ([3], с. 29). *Пусть $f(x)$ — комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция, c_n — произвольные комплексные числа,*
$$\mathbb{C}(x)=\sum_{a<n\le x} c_n\,.$$

Тогда

$$\sum_{a<n\le b} c_n f(n) = -\int_a^b \mathbb{C}(x) f'(x)dx + \mathbb{C}(b)f(b)\,.$$

Лемма 5 ([5], с. 62). *Пусть $1 \le U \le N$, где N — натуральное число. Тогда для любой комплекснозначной функции $f(x)$ справедливо тождество*

$$\sum_{U<n\le N} \Lambda(n) f(n) = W_1 - W_2 - W_3\,,$$

где

$$W_1 = \sum_{d\le U} \mu(d) \sum_{l\le Nd^{-1}} (\log l) f(ld)\,,$$

$$W_2 = \sum_{d\le U} \mu(d) \sum_{n\le U} \Lambda(n) \sum_{r\le N(dn)^{-1}} f(ndr)\,,$$

$$W_3 = \sum_{U<m\le NU^{-1}} \Bigl(\sum_{\substack{d|m\\ d\le U}} \mu(d)\Bigr) \sum_{U<n\le Nm^{-1}} \Lambda(n) f(nm)\,.$$

Лемма 6 ([3], с. 94). *При $P \ge 1$ имеет место оценка*

$$\Bigl|\sum_{x\le P} e^{2\pi i\alpha x}\Bigr| \le \min(P; 0,5\|\alpha\|^{-1}).$$

Лемма 7 ([3], с. 94). *Пусть*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}\ ,\ (a,q)=1,\ q\ge 1\,,\quad |\theta| \le 1\,.$$

Тогда при любом β, $U>0$, $P\ge 1$ имеем

$$\sum_{x=1}^{P} \min(U, \|\alpha x + \beta\|^{-1}) \le 6(Pq^{-1}+1)(U + q\log q)\,.$$

3. Доказательство теоремы. 1. Определим характеристическую функцию интервала (a,b):

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a < x < b, \\ 0, & \text{если } 0 \le x \le a \text{ или } b \le x \le 1, \end{cases}$$

продолжим ее с периодом 1 на всю числовую ось. Тогда

$$J_{5,2}(N) = \int_0^1 \Bigl(\sum_{p\le\sqrt{N}} \psi_0(\eta p^2) e^{2\pi i x p^2}\Bigr)^5 e^{-2\pi i x N} dx.$$

В лемме 1 положим $r = [\log N]$, $\Delta = N^{-0{,}01}$. Обозначим через ψ_1 функцию ψ из леммы при $\alpha = a + \Delta/2$, $\beta = b - \Delta/2$ и через ψ_2 при $\alpha = a - \Delta/2$, $\beta = b + \Delta/2$. Соответственно α и β для функции ψ_1 обозначим через α_1 и β_1, для функции ψ_2 — через α_2 и β_2. Справедливо неравенство

$$J_1(N) \le J_{5,2}(N) \le J_2(N), \tag{2}$$

где

$$J_k(N) = \int_0^1 \Big(\sum_{p\le\sqrt{N}} \psi_k(\eta p^2) e^{2\pi i x p^2} \Big)^5 e^{-2\pi i x N} dx, \quad k = 1, 2. \tag{3}$$

Далее покажем, что главные члены приближенных формул для $J_1(N)$ и $J_2(N)$ совпадают.

Разложим $\psi_k(\eta p^2)$ в ряд Фурье

$$\psi_k(\eta p^2) = \sum_{|m|<\infty} c_k(m) e^{2\pi i m \eta p^2}.$$

Оценим сумму при $|m| > r\Delta^{-1}$, пользуясь неравенствами из леммы 1 о «стаканчиках» Виноградова:

$$\sum_{|m|>r\Delta^{-1}} c_k(m) e^{2\pi i m\eta p^2} \ll \sum_{|m|>r\Delta^{-1}} \frac{1}{\pi|m|}\Big(\frac{r}{\pi|m|\Delta}\Big)^r \ll \frac{1}{\pi^{r+1}} < N^{-\log\pi}.$$

Имеем

$$\psi_k(\eta p^2) = \sum_{|m|\le r\Delta^{-1}} c_k(m) e^{2\pi i m\eta p^2} + O(N^{-\log\pi}).$$

Полученное разложение для $\psi_k(\eta p^2)$ подставим в (3). Введем обозначение

$$S(x) = \sum_{p\le\sqrt{N}} e^{2\pi i x p^2}.$$

Пользуясь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим, получим

$$\int_0^1 |S(x+m_1\eta)||S(x+m_2\eta)||S(x+m_3\eta)||S(x+m_4\eta)| dx \ll$$

$$\ll \int_0^1 |S(x)|^4 dx \ll \sum_{\substack{p_1,p_2,p_3,p_4\le\sqrt{N},\\ p_1^2+p_2^2=p_3^2+p_4^2}} 1 \ll \sqrt{N} \sum_{\substack{l\le\sqrt{N},\\ p_1^2+p_2^2=l}} 1 \ll$$

$$\ll \sqrt{N} \sum_{\substack{l\le\sqrt{N},\\ x^2+y^2=l}} 1 \ll \sqrt{N} \sum_{l\le\sqrt{N}} \tau(l) \ll N\log N.$$

Тогда

$$J_k(N)=\sum_{|m_1|\le r\Delta^{-1}}c_k(m_1)\sum_{|m_2|\le r\Delta^{-1}}c_k(m_2)\times$$

$$\times\sum_{|m_3|\le r\Delta^{-1}}c_k(m_3)\sum_{|m_4|\le r\Delta^{-1}}c_k(m_4)\sum_{|m_5|\le r\Delta^{-1}}c_k(m_5)\times$$

$$\times\int_0^1 S(x+m_1\eta)S(x+m_2\eta)S(x+m_3\eta)S(x+m_4\eta)S(x+m_5\eta)e^{-2\pi ixN}dx+$$

$$+O(N^{3/2-\log\pi}\log N).$$

2. При $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m$ рассмотрим

$$I_1(N)=\sum_{|m|\le r\Delta^{-1}}c_k^5(m)e^{2\pi im\eta N}\sum_{p_1\le\sqrt{N}}\sum_{p_2\le\sqrt{N}}\sum_{p_3\le\sqrt{N}}\sum_{p_4\le\sqrt{N}}\sum_{p_5\le\sqrt{N}}\times$$

$$\times\int_0^1 e^{2\pi i(x+m\eta)(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2-N)}dx.$$

Учтем, что подынтегральная функция периодична по x с периодом 1, и получим

$$I_1(N)=I_{5,2}(N)\sum_{|m|\le r\Delta^{-1}}c_k^5(m)e^{2\pi im\eta N}.$$

Сумму по m разобьем на две: при $|m|<M$ и при $M\le|m|\le r\Delta^{-1}$, значение M выберем позже. Вторую сумму оценим с помощью леммы 1 тривиально как $O(M^{-4})$:

$$\sum_{M\le|m|\le r\Delta^{-1}}c_k^5(m)e^{2\pi im\eta N}=O(M^{-4}).$$

Для коэффициентов Фурье при $m\ne 0$ известно представление ([3], с. 16)

$$c_k(m)=e^{-\pi im(\alpha_k+\beta_k)}\frac{\sin\pi m(\beta_k-\alpha_k)}{\pi m}\Big(\frac{\sin\pi m\Delta/r}{\pi m\Delta/r}\Big)^r.$$

При $0<|m|<M$ имеем

$$c_k^5(m)=e^{-5\pi im(a+b)}\frac{\sin^5\pi m(b-a)+O(M\Delta)}{\pi^5m^5}\Big(1+O(M\Delta)^2\Big)=$$

$$=e^{-5\pi im(a+b)}\frac{\sin^5\pi m(b-a)}{\pi^5m^5}\Big(1+O(M\Delta)\Big).$$

Далее,

$$\sum_{|m|\le r\Delta^{-1}}c_k^5(m)e^{2\pi im\eta N}=$$

$$= \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 2{,}5(a+b))} \frac{\sin^5 \pi m(b-a)}{\pi^5 m^5} + O(M\Delta) + O(M^{-4}).$$

При выборе $M = \Delta^{-1/5}$ получим

$$I_1 = I_{5,2}(N)(s(N,a,b) + O(\Delta^{4/5})). \tag{4}$$

3. Рассмотрим наборы $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \neq (m, m, m, m, m)$ и интегралы

$$I(N, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) =$$

$$= \int_0^1 |S(x+m_1\eta)||S(x+m_2\eta)||S(x+m_3\eta)||S(x+m_4\eta)||S(x+m_5\eta)|dx\,.$$

Обозначим $x + m_1\eta$ за t. Без ограничения общности положим, что $m_1 < m_2$. Введем обозначения:

$$m_2' = m_2 - m_1, \quad \ldots, \quad m_5' = m_5 - m_1\,,$$

$$F(t) = |S(t)||S(t+m_2'\eta)||S(t+m_3'\eta)||S(t+m_4'\eta)||S(t+m_5'\eta)|\,.$$

Тогда

$$I(N, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = \int_0^1 F(t)dt\,.$$

Поскольку подынтегральная функция от переменной t имеет период 1, полагаем, что промежуток интегрирования имеет вид $E = [-1/\tau; 1 - 1/\tau)$, где $\tau = N^{1-0{,}001}$.

К $t \in E$ применим лемму 2. Пусть $d, q \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$t = \frac{d}{q} + \frac{\theta_1}{q\tau}, \quad (d,q) = 1, \quad 1 \le q \le \tau, \quad |\theta_1| \le 1. \tag{5}$$

Те значения t, для которых в представлении (5) $q \le N^{0{,}001}$, отнесем к «большим» дугам E_1, остальные — к «малым» дугам E_2.

В соответствии с данным делением интервала интегрирования на большие и малые дуги интегралы $I(N, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$ разобьем на сумму двух слагаемых:

$$\int_{E_1} F(t)dt + \int_{E_2} F(t)dt\,.$$

4. Оценим суммы вида $S(t + m_i'\eta)$ для значений t, принадлежащих большим дугам E_1. Примем, к примеру, $t + m_2'\eta$ за γ при $m_2' \neq 0$.

Рассмотрим рациональное приближение γ. Для этого вначале приблизим η рациональным числом (лемма 2)

$$\eta = \frac{A}{Q} + \frac{\theta}{Q\tau_1}\,, \quad (A,Q) = 1\,, \quad |\theta| \le 1, \quad 1 \le Q \le \tau_1\,.$$

Значение τ_1 выберем позже.

Поскольку η — квадратичная иррациональность, то из лемм 2, 3 имеем $Q \asymp \tau_1$ и

$$\eta = \frac{A}{Q} + \frac{\theta_2}{Q^2}\,, \quad (A,Q)=1\,, \quad |\theta_2| \le 1\,.$$

Тогда

$$\gamma = t + m_2'\eta = \frac{d}{q} + \frac{\theta_1}{q\tau} + \frac{A_1}{Q_1} + \frac{\theta_2 m_2'}{Q^2} = \frac{X}{Y} + \frac{\theta_1}{q\tau} + \frac{\theta_2 m_2'}{Q^2}\,,$$
$$(A_1,Q_1)=1\,, \quad (X,Y)=1\,.$$

Из представления γ имеем $Y \le qQ$, то есть

$$\frac{1}{Q} \le \frac{q}{Y}\,.$$

Так как $Y \le qQ$ и $Q \asymp \tau_1$, то при выборе $\tau_1 = \sqrt{\tau/q}$ имеем $Y^2 \ll q\tau$. Тогда выполняется

$$\left|\frac{\theta_1}{q\tau} + \frac{\theta_2 m_2'}{Q^2}\right| = \frac{\theta_3}{Y^2}\,, \quad |\theta_3| \le 1 + |m_2'|q^2\,.$$

Обозначим $(dQ_1 + A_1 q, Q_1)$ через δ. Поскольку $(A_1,Q_1)=1$, то $\delta | q$ и, следовательно, $\delta \le q$. Оценим сверху $(dQ_1 + A_1 q, qQ_1)$:

$$(dQ_1 + A_1 q, qQ_1) \le q(dQ_1 + A_1 q, Q_1) \le q^2\,.$$

Тогда для

$$Y = \frac{qQ_1}{(dQ_1 + A_1 q, qQ_1)}$$

имеем

$$Y \ge \frac{Q_1}{q} \ge \frac{Q}{m_2' q}\,.$$

5. Перейдем к оценке суммы $S(\gamma)$:

$$S(\gamma) = \sum_{p \le \sqrt{N}} e^{2\pi i \gamma p^2}\,.$$

Положим $U = N^{0,05}$, имеем

$$S(\gamma) = \sum_{U < p \le \sqrt{N}} e^{2\pi i \gamma p^2} + O(U)\,.$$

Пусть

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = p, \\ 0, & \text{если } x \ne p. \end{cases}$$

Используя формулу частного суммирования (лемма 4), выбрав

$$\mathbb{C}(x) = \sum_{U < n \le x} \alpha(n) e^{2\pi i \gamma n^2} \log n\,,$$

получим

$$\sum_{U<p\leq\sqrt{N}} e^{2\pi i\gamma p^2} \ll \int_U^{\sqrt{N}} |\mathbb{C}(x)| \frac{dx}{x\log^2 x} + \frac{|\mathbb{C}(\sqrt{N})|}{\log N} \ll$$

$$\ll \max_{U<x\leq\sqrt{N}} \Bigl| \sum_{U<p\leq x} e^{2\pi i\gamma p^2} \log p \Bigr| .$$

Поскольку

$$\sum_{U<n\leq\sqrt{N}} e^{2\pi i\gamma n^2}\Lambda(n) = \sum_{U\leq p\leq\sqrt{N}} e^{2\pi i\gamma p^2} \log p + \sum_{k=2}^{\log N} \sum_{U\leq p^k\leq\sqrt{N}} e^{2\pi i\gamma p^2} \log p =$$

$$= \sum_{U\leq p\leq\sqrt{N}} e^{2\pi i\gamma p^2} \log p + O(N^{1/4}\log^2 N) .$$

Окончательно,

$$|S(\gamma)| = \max_{U<x\leq\sqrt{N}} \Bigl| \sum_{U<n\leq x} e^{2\pi i\gamma n^2}\Lambda(n) \Bigr| + O(N^{1/4}\log^2 N) .$$

6. В лемме 5 положим $f(n) = e^{2\pi i\gamma n^2}$. Тогда

$$\sum_{U<n\leq\sqrt{N}} e^{2\pi i\gamma n^2}\Lambda(n) = A_1 - A_2 - A_3,$$

где

$$A_1 = \sum_{d\leq U}\mu(d) \sum_{l\leq\sqrt{N}d^{-1}} e^{2\pi i\gamma (dl)^2}\log l,$$

$$A_2 = \sum_{d\leq U}\mu(d) \sum_{n\leq U}\Lambda(n) \sum_{r\leq\sqrt{N}(dn)^{-1}} e^{2\pi i\gamma(dnr)^2},$$

$$A_3 = \sum_{U<m\leq\sqrt{N}U^{-1}} a_m \sum_{U<n\leq\sqrt{N}m^{-1}} \Lambda(n)e^{2\pi i\gamma(mn)^2},$$

$$a_m = \sum_{\substack{d|m,\\ d\leq U}} \mu(d).$$

7. Во внутренней сумме A_1 проведем частное суммирование по l (лемма 4):

$$\sum_{l\leq\sqrt{N}d^{-1}} e^{2\pi i\gamma (dl)^2}\log l \ll$$

$$\ll \int_1^{\sqrt{N}d^{-1}} |\mathbb{C}(x)| d(\log x) + |\mathbb{C}(\sqrt{N}d^{-1})| \log(\sqrt{N}d^{-1}),$$

где

$$\mathbb{C}(x) = \sum_{l \le x} e^{2\pi i \gamma d^2 l^2} .$$

Тогда

$$A_1 \ll \log N \sum_{d \le U} \Big| \sum_{l \le \sqrt{N} d^{-1}} e^{2\pi i \gamma d^2 l^2} \Big| .$$

Промежутки суммирования по l, d разобьем на промежутки вида

$$D < d < D_1 \le 2D, \quad L < l < L_1 \le 2L,$$

получится $\ll \log^2 N$ промежутков:

$$A_1 \ll \log^3 N \sum_d |A_1(L)| , \tag{6}$$

где

$$A_1(L) = \sum_l e^{2\pi i \gamma d^2 l^2} ,$$

и модуль суммы в правой части неравенства (6) максимален. Рассмотрим

$$|A_1(L)|^2 = \sum_{\substack{h \le \sqrt{N} d^{-1} \\ 0 < h \le L}} \Big| \sum_{\substack{L < l + h \le L_1 \\ L < l \le L_1}} e^{2\pi i \gamma d^2 (h^2 + 2hl)} \Big| .$$

По лемме 6

$$A_1(L)^2 \ll \sum_{\substack{h \le \sqrt{N} d^{-1} \\ 0 < h \le L}} \min(L, \|\gamma d^2 h\|^{-1}) \ll \sum_{\substack{h \le \sqrt{N} d \\ 0 < h \le L d^2}} \min(L, \|\gamma h\|^{-1}) .$$

Пусть $h = h_1 + Ys$, $0 \le h_1 < Y$. Воспользуемся, полученным выше, рациональным приближением γ:

$$\gamma = \frac{X}{Y} + \frac{\theta_3}{Y^2}, \quad (X, Y) = 1, \quad |\theta_3| \le 1 + |m_2'| q^2 .$$

Обозначим $\gamma Y s$ через β_1, тогда

$$\gamma h = \gamma h_1 + \beta_1 = \frac{X h_1 + [\beta_1 Y] + \theta_3 h_1 Y^{-1} + \{\beta_1 Y\}}{Y} .$$

Имеем

$$A_1(L)^2 \ll \left(\frac{L d^2}{Y} + 1 \right) \sum_{0 \le h_1 < Y} \min \left(L, \|\gamma h_1 + \beta_1\|^{-1} \right) .$$

Обозначим Z_1 наименьший неотрицательный вычет числа $X h_1 + [\beta_1 Y]$ по модулю Y. Полагая

$$Z = \begin{cases} Z_1, & \text{если } Z_1 \le Y/2, \\ Y - Z_1, & \text{если } Y/2 < Z_1 \le Y, \end{cases}$$

имеем
$$\sum_{0\le h_1<Y}\min(L,\|\gamma h_1+\beta_1\|^{-1})\ll\sum_{|Z|\le 0{,}5Y}\min\left(L,\left\|\frac{Z}{Y}+\frac{\theta_4(Z)}{Y}\right\|^{-1}\right),$$
где $|\theta_4(Z)|<2|m_2'|q^2$. Следовательно,
$$A_1(L)^2\ll\left(\frac{Ld^2}{Y}+1\right)\left(L|m_2'|q^2+\sum_{2|m_2'|q^2\le|Z|\le 0{,}5Y}\frac{Y}{|Z|-2|m_2'|q^2}\right).$$

Так как
$$L\le\sqrt{N}d^{-1},\quad d\le U,\quad |m_2'|\le\Delta^{-1}\log N,$$
имеем
$$A_1(L)^2\ll\left(\frac{\sqrt{N}d}{Y}+1\right)\left(\frac{\sqrt{N}q^2}{d\Delta}+Y\right)\log N\ll$$
$$\ll\left(\frac{Nq^2}{Y\Delta}+\frac{\sqrt{N}q^2}{d\Delta}+\sqrt{N}U+Y\right)\log N.$$

8. Проведем аналогичные рассуждения для A_2. В результате получаем
$$A_1,A_2\ll U^2\log^{3,5}N\left(\sqrt{N}\left(\frac{q}{\sqrt{Y\Delta}}+\frac{q}{\sqrt{d\Delta\sqrt[4]{N}}}+\frac{U}{\sqrt[4]{N}}\right)+\sqrt{Y}\right).$$

Параметры выбраны так, что
$$U=N^{0,05},\quad q\le N^{0,001},\quad \Delta=N^{-0,01},$$
$$\frac{Q}{m_2'q}\le Y\le qQ,\quad |m_2'|\le\frac{\log N}{\Delta},\quad Q\asymp\sqrt{\frac{N^{1-0,001}}{q}},$$
что позволяет получить оценки
$$\frac{1}{Y}\ll\frac{\log N}{N^{0,488}},\quad \frac{q}{\sqrt{Y\Delta}}\ll\frac{\sqrt{\log N}}{N^{0,238}},\quad \frac{q}{\sqrt{d\Delta\sqrt[4]{N}}}\ll\frac{1}{N^{0,244}},\quad Y\ll\sqrt{N}.$$

Тогда
$$A_1,A_2\ll N^{0,4}\log^4N.$$

9. Оценим сумму A_3.
$$A_3\ll|A_3(M,K)|\log^2N,$$
где
$$A_3(M,K)=\sum_{\substack{U<m\le\sqrt{N}U^{-1},\\ M<m\le 2M}}a_m\sum_{\substack{U<n\le\sqrt{N}m^{-1},\\ K<n\le 2K}}\Lambda(n)e^{2\pi i\gamma m^2n^2}.$$

Если $MK\le N^{1/2-0,00002}\log^{-4}N$, то достаточно тривиальной оценки
$$A_3(M,K)\ll MK\log^2N,$$

чтобы $A_3 \ll N^{1/2-0,00002}$. В дальнейшем полагаем, что

$$N^{1/2-0,00002}\log^{-4} N < MK \le \sqrt{N}\,.$$

Возведем сумму $A_3(M,K)$ в квадрат, воспользуемся неравенством Коши:

$$A_3(M,K)^2 \ll \Big(\sum_m a_m^2\Big)\sum_m \Big|\sum_n \Lambda(n)e^{2\pi i\gamma m^2 n^2}\Big|^2.$$

Так как

$$\sum_{m\le M} a_m^2 \ll \sum_{m\le M}\tau^2(m) \ll M\log^3 N,$$

тогда

$$A_3(M,K)^2 \ll M\log^5 N\Big(MK+$$

$$+\sum_{\substack{j\le\sqrt{N}U^{-1}\\0<j\le K}}\,\sum_{\substack{U<n\le\sqrt{N}U^{-1}\\K<n\le 2K}}\Big|\sum_{\substack{U<m\le\sqrt{N}(n+j)^{-1},\\M<m\le 2M}} e^{2\pi i\gamma m^2(2n+j)j}\Big|\Big)\,.$$

Возведем обе части полученного неравенства в квадрат и еще раз воспользуемся неравенством Коши:

$$A_3(M,K)^4 \ll M^2\log^{10}N(M^2K^3+S(M,K)),$$

где

$$S(M,K) \ll K^2\Big(K^2M+\sum_j\sum_n\sum_m\Big|\sum_{0<l\le M} e^{2\pi i\gamma(2m+l)l(2n+j)j}\Big|\Big).$$

По лемме об оценке модуля линейной тригонометрической суммы (лемма 6), получим

$$S(M,K) \ll K^2(K^2M+\sum_{j\le K}\sum_{n\le 5K}\sum_{m\le 2M}\min(M,\|\gamma mnj\|^{-1})).$$

Далее

$$\sum_{m\le 2M}\min(M,\|\gamma mnj\|^{-1}) \ll \sum_{h\le 10MK^2}\tau_3(h)\min(M,\|\gamma h\|^{-1}) \ll$$

$$\ll N^{\varepsilon}\Big(\frac{MK^2}{Y}+1\Big)(M|m_2'|q^2+Y\log Y) \ll$$

$$\ll N^{\varepsilon}\Big(M^2K^2\Big(\frac{|m_2'|q^2}{Y}+\frac{|m_2'|q^2}{MK^2}+\frac{\log N}{M}\Big)+Y\log N\Big).$$

При $|m_2'| < \Delta^{-1}\log N$ получаем

$$A_3(M,K)^4 \ll N^{2\varepsilon}\Big(M^4K^4\Big(\frac{1}{K}+\frac{q^2}{\Delta Y}+\frac{q^2}{\Delta MK^2}+\frac{1}{M}\Big)+M^2K^2Y\Big)\,.$$

С учетом неравенств

$$U < M \le \frac{\sqrt{N}}{U}, \quad U < K \le \frac{\sqrt{N}}{U}, \quad \frac{N^{1/2-0,00002}}{\log^4 N} < MK \le \sqrt{N}$$

имеем

$$A_3 \ll N^{\varepsilon}\Big(\sqrt{N}\Big(\frac{1}{\sqrt[4]{U}} + \frac{\sqrt{q}}{\sqrt[4]{\Delta Y}} + \frac{\sqrt{q}}{\sqrt[4]{\Delta MKU}}\Big) + \sqrt[4]{NY}\Big).$$

Параметры выбраны так, что

$$U = N^{0,05}, \quad q \le N^{0,001}, \quad \Delta = N^{-0,01},$$

$$\frac{Q}{m_2' q} \le Y \le qQ, \quad |m_2'| \le \frac{\log N}{\Delta}, \quad Q \asymp \sqrt{\frac{N^{1-0,001}}{q}},$$

$$N^{1/2-0,00002} \log^{-4} N < MK \le \sqrt{N}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt[4]{U}} \ll \frac{1}{N^{0,0125}}, \quad \frac{1}{Y} \ll \frac{\log N}{N^{0,488}}, \quad \frac{\sqrt{q}}{\sqrt[4]{\Delta Y}} \ll \frac{\sqrt[4]{\log N}}{N^{0,119}},$$

$$\frac{\sqrt{q}}{\sqrt[4]{\Delta MKU}} \ll \frac{\log N}{N^{0,134}}, \quad Y \ll \sqrt{N}.$$

В результате при $\varepsilon < 0,001$ получаем оценку

$$A_3 \ll N^{0,49}.$$

Таким образом, для суммы $|S(t + m_2'\eta)|$ при $t \in E_1$ справедлива оценка

$$|S(t + m_2'\eta)| \ll N^{1/2-0,00002}.$$

10. Применив неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, оценим интеграл по множеству E_1 как

$$\int_{E_1} F(t)dt \ll \max_{t\in E_1} |S(t + m_2'\eta)| \int_0^1 |S(t)|^4 dt.$$

Учитывая полученную при $t \in E_1$ оценку $|S(t + m_2'\eta)|$, имеем

$$\int_{E_1} F(t)dt \ll N^{3/2-0,00002}. \tag{7}$$

11. При $t \in E_2$ рассмотрим сумму $S(t)$:

$$S(t) = \sum_{p \le \sqrt{N}} e^{2\pi i t p^2}.$$

Пусть $U = N^{0,0002}$. Совершая преобразование Абеля, имеем

$$|S(t)| = \max_{U<x\le\sqrt{N}} \Big| \sum_{U<n\le x} e^{2\pi i t n^2}\Lambda(n)\Big| + O(N^{1/4}) .$$

12. В лемме 5 выберем $f(n) = e^{2\pi i t n^2}$. Тогда

$$\sum_{U<n\le\sqrt{N}} e^{2\pi i t n^2}\Lambda(n) = B_1 - B_2 - B_3,$$

где

$$B_1 = \sum_{d\le U}\mu(d) \sum_{l\le\sqrt{N}d^{-1}} e^{2\pi i t (dl)^2}\log l\,,$$

$$B_2 = \sum_{d\le U}\mu(d)\sum_{n\le U}\Lambda(n) \sum_{r\le\sqrt{N}(dn)^{-1}} e^{2\pi i t(dnr)^2}\,,$$

$$B_3 = \sum_{U<m\le\sqrt{N}U^{-1}} b_m \sum_{U<n\le\sqrt{N}m^{-1}} \Lambda(n)e^{2\pi i t(mn)^2}\,,$$

$$b_m = \sum_{\substack{d|m,\\ d\le U}}\mu(d)\,.$$

13. Рассмотрим сумму B_1.

$$B_1 \ll \log^3 N \sum_{\substack{d\le U,\\ D<d\le 2D}} |B_1(L)|\,,$$

где

$$B_1(L) = \sum_{\substack{l\le\sqrt{N}d^{-1},\\ L<l\le 2L}} e^{2\pi i t d^2 l^2}.$$

Возведем $|B_1(L)|$ в квадрат:

$$|B_1(L)|^2 = \sum_{\substack{h\le\sqrt{N}d^{-1},\\ 0<h\le L}} \Big| \sum_{\substack{L<l+h\le L_1,\\ L<l\le L_1}} e^{2\pi i t d^2(h^2+2hl)}\Big|\,.$$

По лемме 6 имеем

$$B_1(L)^2 \ll \sum_{\substack{h\le\sqrt{N}d^{-1}\\ 0<h\le L}} \min(L, \|td^2h\|^{-1}) \ll \sum_{\substack{h\le\sqrt{N}d,\\ 0<h\le Ld^2}} \min(L, \|th\|^{-1})\,.$$

По лемме об оценке суммы минимумов (лемма 7) получаем неравенство:

$$B_1(L)^2 \ll (\sqrt{N}dq^{-1}+1)(L+q\log q) \ll$$

$$\ll (\sqrt{N}dLq^{-1} + \sqrt{N}d + q)\log q \ll (Nq^{-1} + \sqrt{N}d + q)\log N\,.$$

Проведя аналогичные рассуждения для суммы B_2, в результате имеем

$$B_1, B_2 \ll U^2 \log^{3,5} N(\sqrt{Nq^{-1}} + UN^{1/4} + \sqrt{q})\;.$$

При выборе параметров

$$U = N^{0,0002}, \quad N^{0,001} < q \le N^{1-0,001}$$

получаем

$$B_1, B_2 \ll N^{1/2-0,0001} \log^{3,5} N\,.$$

14. Получим оценку суммы B_3.

$$B_3 \ll |B_3(M,K)| \log^2 N\,,$$

где

$$B_3(M,K) = \sum_{\substack{U<m\le\sqrt{N}U^{-1},\\ M<m\le 2M}} b_m \sum_{\substack{U<n\le\sqrt{N}m^{-1},\\ K<n\le 2K}} \Lambda(n) e^{2\pi i t m^2 n^2}.$$

Оценку суммы $B_3(M,K)$ проведем для $\sqrt{N} \ge MK > N^{1/2-0,00002}\log^{-4} N$. Для $MK \le N^{1/2-0,00002}\log^{-4} N$ достаточно тривиальной оценки $B_3(M,K)$.

Возведем $B_3(M,K)$ в квадрат, применим неравенство Коши:

$$B_3(M,K)^2 \ll M\log^5 N\Big(MK + \sum_{\substack{j\le\sqrt{N}U^{-1},\\ 0<j\le K}} \sum_{\substack{U<n\le\sqrt{N}U^{-1},\\ K<n\le 2K}} \times$$

$$\times\Big| \sum_{\substack{U<m\le\sqrt{N}(n+j)^{-1},\\ M<m\le 2M}} e^{2\pi i t m^2(2n+j)j} \Big|\Big).$$

Далее, Возведя обе части полученного равенства в квадрат, применим неравенство Коши и лемму 6:

$$B_3(M,K)^4 \ll M^2\log^{10} N(M^2K^3 + K^4M + K^2 \sum_{h\le 10MK^2} \tau_3(h)\min(M, \|th\|^{-1}))\,.$$

Применяя лемму 7, имеем

$$\sum_{h\le 10MK^2} \min(M, \|th\|^{-1}) \ll \Big(\frac{MK^2}{q} + 1\Big)(M+q)\log N \ll$$

$$\ll \Big(M^2K^2\Big(\frac{1}{q} + \frac{1}{MK^2} + \frac{1}{M}\Big) + q\Big)\log N\,.$$

Тогда

$$B_3(M,K)^4 \ll \Big(M^4K^4\Big(\frac{1}{K} + \frac{1}{M} + \frac{1}{q}\Big) + M^2K^2q\Big)N^{2\varepsilon}\,.$$

При выборе параметров

$$U < K \leq \frac{\sqrt{N}}{U}, \quad U < M \leq \frac{\sqrt{N}}{U}, \quad \frac{N^{1/2-0,00002}}{\log^4 N} < MK \leq \sqrt{N}\,,$$

$$U = N^{0,0002}, \quad N^{0,001} < q \leq N^{1-0,001}, \quad \varepsilon < 0,00001$$

выполняется неравенство

$$B_3 \ll N^{\varepsilon}(\sqrt{N}(U^{-1/4} + q^{-1/4}) + (qN)^{1/4}) \ll N^{1/2-0,00002}\,.$$

Таким образом, если $t \in E_2$, то справедлива оценка

$$|S(t)| \ll N^{1/2-0,00002}\,.$$

15. Поскольку

$$\int_{E_2} F(t)dt \ll \max_{t\in E_2} |S(t)| \int_0^1 |S(t)|^4 dt\,,$$

имеем

$$\int_{E_2} F(t)dt \ll N^{3/2-0,00002}\,. \tag{8}$$

Окончательно утверждение теоремы следует из (2), (4), (7), (8). ■

Литература

1. Hua L.-K. On the representation of numbers as the sum of powers of primes // Math. Z. – 1938. –44. —P.335-346.
2. Хуа Л.-К. Аддитивная теория простых чисел / М.: Изд. АН СССР. –1947. – 22.
3. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / М.: Наука, 1980. – 160 с.
4. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983. – 240 с.
5. Бухштаб А.А. Теория чисел / М.: Просвещение, 1966. – 384 с.
6. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана / М.: Физматлит, 1994. – 376 с.

HUA LOO KENG'S PROBLEM FOR PRIMES OF A SPECIAL TYPE

***S.A. Gritsenko, **N.N. Motkina**

*Financial University of Russian Federation Government,
Leningradsky Av., 49, Moscow, Russia
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory, 1, Moscow, Russia, e-mail: s.gritsenko@gmail.com
**Belgorod State University,
Pobeda St., 85, 308015, Belgorod, Russia, e-mail: motkina@bsu.edu.ru

Abstract. Let η be a quadratic irrationality. A variant of Hua Loo Keng's problem on the basis of primes such that $a < \{\eta p^2\} < b$, where a and b are arbitrary real numbers of the interval $[0,1]$ is solved.

Key words: additive problems, primes of special type, solutions number, asymptotic formula, quadratic irrationality.

MSC 11M25

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НУЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ L–ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ, ЛЕЖАЩИХ НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

До Дык Там

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, г. Белгород, 308007, Россия, e-mail: doductam140189@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается линейные комбинации функций, аналогов функции Харди, соответствующих L-функциям Дирихле. Исследуется распределение нулей, которые лежат на критической прямой $\Re s = 1/2$. Для функций указанного типа доказаны утверждения, аналогичные результатам А.А. Карацубы для дзета-функции Римана.

Ключевые слова: дзета-функция, нетривиальные нули, критическая прямая, L-функция Дирихле.

1. Введение

Пусть $Z(t,\chi) = e^{i\theta(t,\chi)}L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)$, где функция $\theta(t,\chi)$ подобрана так, что $Z(t,\chi)$ вещественна при вещественных t [1, с. 485]. Пусть далее

$$G(t) = a_1 Z(t,\chi_1) + a_2 Z(t,\chi_1) + \cdots + a_l Z(t,\chi_l)\,, \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \cdots, a_l$ – произвольные вещественные числа, $\chi_1, \cdots, \chi_l$ – примитивные характеры Дирихле по модулям соответственно $k_1, k_2, \cdots, k_l$. $Z(t,\chi)$ представляет собой аналог функции Харди [2, гл. 2].

В 1991 году А.А. Карацуба [1] поставил и решил своим методом задачу о нижней оценке числа нулей нечетного порядка функции $G(t)$ на отрезке $(T, T+H)$, где $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$, ε – произвольное малое положительное число.

В настоящей работе получены оценки для числа нулей функции $G(t)$ на почти всех промежутках вида $(T, T+H)$, где $H = X^{\varepsilon_1}$, $X \le T \le 2X$, ε_1– сколь угодно малое фиксированное положительное число. Доказательства проводятся по схеме работы А.А. Карацубы [1]. Пусть $[k_1, k_2, \cdots, k_l]$ – наименьшее общее кратное натуральных чисел $k_1, \cdots, k_l$. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$ – произвольно малые фиксированные положительные числа и $K = [k_1, k_2, \cdots, k_l] \geqslant 3$, $\beta = 1/\varphi(K)$, $X \geqslant X_0(\varepsilon, \varepsilon_1)$, $H = X^{\varepsilon_1}$, $X \leqslant T \leqslant 2X$. Если E_1 – множество тех T из промежутка $[X, 2X]$, для которых не выполняется неравенство*

$$N_0(T+H,\chi) - N_0(T,\chi) \ge c_1 H \left(\ln T\right)^{\beta-\varepsilon}\,, \tag{2}$$

то для меры множества E_1 справедлива оценка $\mu(E_1) \ll X^{1-0{,}5\varepsilon_1}$.

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$ – произвольно малые фиксированные положительные числа и $K = [k_1, k_2, \cdots, k_l] \geqslant 3$, $X \geqslant X_0(\varepsilon, \varepsilon_1)$, $H = X^{\varepsilon_1}$, $M = [XH^{-1}]$. При $m = M+1, M+2, \cdots, 2M$ рассмотрим интервалы вида $[mH, mH+H]$. Тогда в каждом из этих интервалов, за исключением не более $M^{1-0.5\varepsilon_1}$ из них, содержится более чем $c_2 H(\ln X)^{\beta-\varepsilon}$ нулей нечетного порядка функции $G(t)$.*

2. Вспомогательные утверждения.

Для доказательств теорем нам понадобятся леммы. Эти леммы близки к известным леммам [3, с. 1215].

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, h_1$ – положительные числа с условиями $\varepsilon_1 < 0.01$, $\varepsilon_2 < 1$, $h_1 < 1$, r – натуральное число, $H = X^{\varepsilon_1}$. $P = \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}$, $P_0 = \sqrt{\frac{kX}{\pi}}$. При $j = 0, 1, 2$ суммы $W_j(T)$ определяются равенствами:

$$W_0(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2\le P} \frac{a(\lambda_1)\overline{a(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_2\lambda_1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

$$W_1(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2\le P_0^{1-\varepsilon_2}} \frac{a(\lambda_1)\overline{a(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_2\lambda_1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)} e^{-\left(\frac{H+1}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

$$W_2(T) = \sum_{P_0^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2\le P} \frac{a(\lambda_1)\overline{a(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_2\lambda_1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

где $B(\lambda) = \left((P\lambda^{-1})^{ih_1} - 1\right)^r \left(\ln(P\lambda^{-1})\right)^{-r}$, $a(\lambda)$– числа из приближеного функционального уравнения для аналога функции Харди-Сельберга $F(t,\chi)$ [1, с. 490].

Лемма 1. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{j=0}^{2} \int_X^{2X} W_j^2(T) \ll r^4(1 + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r} h_1^2(\varepsilon_2^{-1} + 8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4 X H^{-1} Y^{12} L^7,$$

где $L = \ln X$.

Следствие 1. *Пусть δ – произвольное положительное число, не превосходящее 1, E_1 – множество таких из интервала $[X, 2X]$, для которых*

$$\sum_{j=0}^{2} W_j^2(T) \ge r^4(1 + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r} h_1^2(\varepsilon_2^{-1} + 8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4 X^{1-\delta} H^{-1} Y^{12} L^7. \qquad (3)$$

Тогда для меры множества E_1 справедлива оценка $\mu(E_1) \ll X^\delta$.

Лемма 2. *При обозначениях теоремы 2 справедливо неравенство*

$$\sum_{j=0}^{2} \sum_{m=M}^{2M} W_j^2(mH) \ll r^4(1 + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r} h_1^2(\varepsilon_2^{-1} + 8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4 M H^{-1} Y^{12} L^8. \qquad (4)$$

Следствие 2. *Пусть δ– произвольное положительное число, не превосходящее 1, E_1 – множество таких $M \le m \le 2M$, для которых*

$$\sum_{j=0}^{2} W_j^2(mH) \ge r^4(1 + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r} h_1^2(\varepsilon_2^{-1} + 8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4 M^{1-\delta} H^{-1} Y^{12} L^8. \qquad (5)$$

Тогда для количества элементов этого множества $\mu(E_1)$ справедлива оценка $\mu(E_1) \ll M^\delta$.

3. Схема доказательства теоремы 1.

Возьмем в Следствии 1 $\delta = 1-0.5\varepsilon_1$. Докажем, что для T, не принадлежащих множеству E_1, выполняется неравенство (2). Тогда из следствия 1 легко следует утверждение теоремы.

Для T, не принадлежащих множеству E_1, выполняется неравенство

$$W_0^2(T)+W_1^2(T)+W_2^2(T) < r^4(1+8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r}h_1^2(\varepsilon_2^{-1}+8\varepsilon_2^{-1}L^{-1}h_1^{-1})^4H^{-0.5}Y^{12}L^7\,. \qquad (6)$$

Посредством символа $\varkappa$ обозначим величину

$$r^2(1+8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{2r}h_1(\varepsilon_2^{-1}+8\varepsilon_2^{-1}L^{-1}h_1^{-1})^2H^{-0.25}Y^6L^{3.5}\,.$$

1) По аналогии с работой [1], определим функцию

$$F(t)=G(t)\left|g\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2,$$

где $G(t)$ определяется равенством (1),

$$g(s)=g_j(s,\chi)=\sum_{\nu\le Y}\frac{\beta(\nu)\chi_j(\nu)}{\nu^s},\ j=1,2,\cdots,l,$$

и

$$\beta(\nu)=\begin{cases}\alpha(\nu)\left(1-\dfrac{\ln\nu}{\ln Y}\right) & \text{если}\ \ 1\le\nu<Y=H^{0.01}\,,\\ 0\quad \text{если}\ \ \nu\ge Y\,;\end{cases}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha(\nu)}{\nu^s}=\prod_{p\equiv 1\pmod K}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{1/2}\quad \text{при}\ \ \mathrm{Re}s>1\,.$$

Посредством E обозначим подмножество $(T,T+H)$, на котором выполняется неравенство

$$\int_0^{h_1}\ldots\int_0^{h_1}|F(t+u_1+\ldots+u_r)|\,du_1\ldots du_r>\left|\int_0^{h_1}\ldots\int_0^{h_1}F(t+u_1+\ldots+u_r)du_1\ldots du_r\right|,$$

Далее, следуя рассуждениям А.А. Карацубы [1] получаем неравенство:

$$I_1+I_2\ge I_3\,, \qquad (7)$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_E\left(\int_0^{h_1}\cdots\int_0^{h_1}F(t+u_1+\cdots+u_r)du_1\cdots du_r\right)^a dt\,,\\
I_2 &= \int_T^{T+H}\left|\int_0^{h_1}\cdots\int_0^{h_1}F(t+u_1+\cdots+u_r)du_1\cdots du_r\right|^a dt\,,\\
I_3 &= \int_T^{T+H}\left(\int_0^{h_1}\cdots\int_0^{h_1}|F(t+u_1+\cdots+u_r)|du_1\cdots du_r\right)^a dt\,,
\end{aligned}$$

a – число из отрезка $(0,1)$.

2) Для I_3 из [1] имеем оценку снизу

$$I_3 \geq c_4 h_1^{ra} H\,.$$

3) Для I_1 из [1] имеем оценку сверху

$$I_1^{2/a} \leq (\mu(E))^{2/a-1}\, h_1^{2r} H \left(\Sigma_0 + |W_0| + T^{-0,2}\right)\,, \tag{8}$$

где

$$\Sigma_0 = \sum_{\lambda \leq P} \frac{|a(\lambda)|^2}{\lambda}\,,$$

W_0– тригонометрическая сумма из леммы 2.

Сумма Σ_0 оценивается аналогично тому, как это было сделано в [1] с учетом леммы 5 [1, с. 505]:

$$\Sigma_0 = \sum_{\lambda \leq P} \frac{|a(\lambda)|^2}{\lambda} \ll \frac{\ln T}{(\ln Y)^{\beta}}\,. \tag{9}$$

Для суммы W_0 справедливо неравенство (6), поэтому

$$W_0 \ll \varkappa\,. \tag{10}$$

Таким образом из (8)-(10) получаем

$$I_1 \leq c_5\, (\mu(E))^{1-a/2}\, h_1^{ar} H^{a/2} \left(\frac{\ln T}{(\ln Y)^{\beta}}\right)^{a/2}\,.$$

4) Подобно тому как это сделано в [1], для I_2 получаем оценку сверху

$$I_2^{2/a} \ll H^{2/a-1}\left(I_{21} + I_{22} + HT^{-0.2}h_1^{2r}\right)\,,$$

где

$$I_{21} = \int_T^{T+H} \left| \int_0^{h_1} \ldots \int_0^{h_1} F_1(t+u_1+\ldots+u_r,\chi)\,du_1 \ldots du_r \right|^2 dt\,,$$

$$I_{22} = \int_T^{T+H} \left| \int_0^{h_1} \ldots \int_0^{h_1} F_2(t+u_1+\ldots+u_r,\chi)\,du_1 \ldots du_r \right|^2 dt\,,$$

$$F_1(t,\chi) = 2\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon(\chi)}e^{i\varphi_1(t)} \sum_{\lambda \leq P_0^{1-\varepsilon_2}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it}\,,$$

$$F_2(t,\chi) = 2\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon(\chi)}e^{i\varphi_1(t)} \sum_{P_0^{1-\varepsilon_2} < \lambda \leq P} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it}\,.$$

Для I_{21} справедливо неравенство

$$I_{21} \ll H\left(\Sigma_1\left(\frac{8}{\varepsilon_2 \ln T}\right)^{2r} + |W_1|\right), \tag{11}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{\lambda \le P} \frac{|a(\lambda)|^2}{\lambda},$$

W_1- тригонометрическая сумма леммы 2.

Сумма Σ_1 оценивается аналогично сумме Σ_0:

$$\Sigma_1 \ll \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta}. \tag{12}$$

Используя (6), получаем оценку суммы W_1:

$$W_1 \ll \varkappa. \tag{13}$$

Из (11)-(13) следует

$$I_{21} \ll H\left(\left(\frac{8}{\varepsilon_2 \ln T}\right)^{2r} \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta} + \varkappa\right).$$

Аналогично тому, как это было сделано в 3) для оценки I_1, для I_{22} получаем неравенство

$$I_{22} \ll Hh_1^{2r}\left(\varepsilon_2 \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta} + \varkappa\right). \tag{14}$$

Таким образом, получаем:

$$I_2 \ll Hh_1^{ar}\Delta_1,$$

где

$$\Delta_1 = \left(\left(\frac{8}{\varepsilon_2 h_1 \ln T}\right)^{2r} \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta} + h_1^{-2r}\varkappa + \varepsilon_2 \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta} + \varkappa\right)^{a/2}.$$

Из полученных оценок для I_1, I_2 и I_3 с учетом неравенством (7) найдем нижнюю границу для $\mu(E)$. Из этой оценки уже легко будеть следовать, что для T выполняется (2).

Доказательство теоремы 2 с очевидными изменениями повторяет доказательство теоремы 1.

Литература

1. Карацуба А.А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле // Известия АН СССР. Серия Математическая. – 1991. – 55;3. – С.483-514.
2. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана / М.: Физматлит, 1994. – 376 с.
3. Карацуба А.А. Распределение нулей функции $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ // Известия АН СССР. Серия Математическая. – 1984. – 48; 6. – С.1214-1224.

4. Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльброна, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия Математическая. –1990. – 54;2, – С.303-315.

ON ZERO DISTRIBUTION OF LINEAR COMBINATIONS OF L-DIRICHLET FUNCTIONS LYING ON THE CRITICAL LINE

Do Duc Tam

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:doductam140189@gmail.com

Abstract. Linear combinations of functions which are analogous Hardy's functions, corresponding L-Dirichlet functions are studied. It is investigated the zero distribution which are on the critical line $\Re s = 1/2$. Assertions which are analogous some Karatsuba's results concerning Riemann's zeta-function have been proved for functions pointed out.

Key words: Rieman's zeta-function, non-trivial zeros, critical line, L-Dirichlet function.

MSC 30E05

БЛОЧНЫЕ МАТРИЦЫ ЯКОБИ И МАТРИЧНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ ГАМБУРГЕРА

Ю.М. Дюкарев

Белгородский государственный аграрный университет им. В.Я. Горина,
ул. Вавилова, 1, п. Майский, Белгород, 308503, Россия,
e-mail: yu.dyukarev@karazin.ua

Аннотация. Блочной матрице Якоби соответствуют ортогональные матричные многочлены. В статье получены явные формулы, выражающие ортогональные многочлены через матричные моменты. Доказано, что дефектные числа матрицы Якоби совпадают с рангами радиусов предельных матричных кругов Вейля.

Ключевые слова: блочные матрицы Якоби, проблема моментов, ортогональные многочлены, дефектные числа симметрических операторов.

1. Введение. Пусть даны целые числа $m,n \geq 1$. Линейное пространство m-мерных комплексных столбцов $x = \mathrm{col}\big(x_1, x_2, \ldots, x_m\big)$ со скалярным произведением $(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{m} \bar{x}_i y_j$ обозначим через $\mathbb{C}^m$. Через $\mathbb{C}^{m\times n}$ обозначим множество комплексных матриц с m строками и n столбцами. Пусть $\mathbb{C}_H^{m\times m} = \big\{A \in \mathbb{C}^{m\times m} : (Ax,y) = (x,Ay),\ \ \forall x,y \in \mathbb{C}^m\big\}$ обозначает множество эрмитовых матриц. Эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}_H^{m\times m}$ называется неотрицательной, если $(x,Ax) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{C}^m$. Через $\mathbb{C}_{\geq}^{m\times m}$ обозначим множество неотрицательных матриц m-го порядка. Неотрицательная матрица $A \in \mathbb{C}_{\geq}^{m\times m}$ называется положительной, если $(x,Ax) > 0$ для всех ненулевых векторов $x \in \mathbb{C}^m$. Через $\mathbb{C}_{>}^{m\times m}$ обозначим множество положительных матриц m-го порядка. Единичную матрицу m-го порядка обозначим через I_m, а нулевую матрицу с m строками и n столбцами обозначим через $0_{m\times n}$. Для упрощения записи мы часто будем опускать индексы у матриц I_m и $0_{m\times n}$, если эти индексы легко определяются из контекста. Для матриц $A, B \in \mathbb{C}_H^{m\times m}$ запись $A > B$ (соотв. $A \geq B$) обозначает, что $A - B \in \mathbb{C}_{>}^{m\times m}$ (соотв. $A - B \in \mathbb{C}_{\geq}^{m\times m}$).

Введем обозначения для числовых множеств $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \big\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z < 0\big\}$.

Через $\mathfrak{B}$ обозначим σ-алгебру борелевских подмножеств множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Отображение $\sigma : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}_{\geq}^{m\times m}$ называется неотрицательной матричной мерой, если

$$\sigma\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(A_j)$$

для любой бесконечной последовательности $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ попарно не пересекающихся борелевских подмножеств из $\mathbb{R}$.

В статье [1] были введены бесконечные матрицы Якоби

$$\mathbf{J}_m = \begin{pmatrix} A^{(0)} & B^{(0)} & 0 & 0 & \dots \\ B^{(0)^*} & A^{(1)} & B^{(1)} & 0 & \dots \\ 0 & B^{(1)^*} & A^{(2)} & B^{(2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь эрмитовы матрицы $A_j \in \mathbb{C}_H^{m\times m}$ и невырожденные матрицы $B_j \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

Через $\ell^2(\mathbb{C}^m)$ обозначим гильбертово пространство бесконечных вектор-колонок

$$u = \operatorname{col}(u_0, u_1, u_2, \dots), \quad u_k \in \mathbb{C}^m, \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k^* u_k < +\infty .$$

Пусть $\ell_0^2(\mathbb{C}^m)$ обозначает незамкнутое подпространство в $\ell^2(\mathbb{C}^m)$, состоящее из финитных векторов.

С помощью матрицы Якоби (1) определим операцию $l : \ell_0^2(\mathbb{C}^m) \to \ell_0^2(\mathbb{C}^m)$

$$lu = \mathbf{J}_m u, \qquad \forall u \in \ell_0^2(\mathbb{C}^m).$$

Эта операция задаёт на $\ell_0^2(\mathbb{C}^m)$ незамкнутый симметрический оператор. Его замыкание обозначим через $\mathbf{L}_m$. Числа

$$m_+ = \dim\ker(\mathbf{L}_m^* - zI), \ z \in \mathbb{C}_+, \quad m_- = \dim\ker(\mathbf{L}_m^* - zI), \ z \in \mathbb{C}_- \tag{2}$$

не зависят от выбора точки z из верхней и нижней полуплоскости соответственно и называются дефектными числами оператора $\mathbf{L}_m$. Хорошо известны следующие свойства оператора $\mathbf{L}_m$ (см. [1], [2]). Оператор $\mathbf{L}_m$, вообще говоря, не самосопряжён. Дефектные числа m_+ и m_- удовлетворяют условиям

$$0 \le m_+ \le m, \qquad 0 \le m_- \le m.$$

В этих неравенствах максимального значения дефектные числа достигают одновременно $m_+ = m \ \Leftrightarrow \ m_- = m$. В статьях [3], [4] доказано, что если дефектные числа не максимальны, то они могут независимо друг от друга принимать любые значения от 0 до $m-1$.

По блочной матрице Якоби (1) построим последовательность матричных многочленов с помощью рекуррентных соотношений

$$P^{(0)}(z) \equiv I_m, \quad zP^{(0)}(z) = A^{(0)}P^{(0)}(z) + B^{(0)}P^{(1)}(z), \tag{3}$$

$$zP^{(j)}(z) = B^{(j-1)^*}P^{(j-1)}(z) + A^{(j)}P^{(j)}(z) + B^{(j)}P^{(j+1)}(z), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть последовательность матричных многочленов $P^{(j)}(z)$ определена формулами (3), (4). Тогда*

1) матричный многочлен $P^{(j)}(z)$ является многочленом j-ой степени, и его коэффициенты являются $m \times m$ матрицами;

2) старший коэффициент матричного многочлена $P^{(j)}(z)$ является невырожденной матрицей;

3) существует неотрицательная $m \times m$ матричная мера σ на оси $\mathbb{R}$ такая, что матричные многочлены $P^{(j)}(z)$ ортонормированы относительно этой меры

$$\int_{\mathbb{R}} P^{(j)}(t)\sigma(dt)P^{(k)^*}(t) = \delta_{jk}I_m\,, \qquad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}\,; \tag{5}$$

4) для всех $z \in \mathbb{C}$ существует предел

$$K(z) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} P^{(j)^*}(z)P^{(j)}(z)\right)^{-1} \tag{6}$$

и дефектные числа m_+ и m_- могут быть вычислены по формулам

$$m_+ = rank\,K(z),\ \forall z \in \mathbb{C}_+, \quad m_- = rank\,K(z),\ \forall z \in \mathbb{C}_-. \tag{7}$$

Запись вида $P^{(j)^*}(z)$ всегда будет сокращением записи $(P^{(j)}(z))^*$.

2. Ассоциированная матричная проблема моментов Гамбургера. С неотрицательной матричной мерой σ из соотношений (5) свяжем матричную проблему моментов Гамбургера

$$s_j = \int_{\mathbb{R}} t^j\sigma(dt)\,, \qquad j \geq 0\,. \tag{8}$$

Непустое множество всех решений σ проблемы (7) обозначим через $\mathcal{M}$.

Рассмотрим матрицу-функцию (МФ)

$$w(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma(dt)}{t - z}\,. \tag{9}$$

МФ w определена и голоморфна в верхней полуплоскости и называется *ассоциированной* с проблемой моментов (7). Множество ассоциированных МФ w обозначим символом $\mathcal{F}$. Из формулы обращения Стилтьеса вытекает, что соответствие между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{M}$ является биективным.

Пусть в верхней полуплоскости зафиксирована некоторая точка z_0. Рассмотрим множество матриц

$$\mathcal{K}(z_0) = \{w(z_0) : w \in \mathcal{F}\}. \tag{10}$$

Существуют неотрицательные матрицы $r(z_0)$, $\rho(z_0)$ и матрица $c(z_0)$ такие, что множество матриц (10) можно записать в виде

$$\mathcal{K}(z_0) = \{c(z_0) + r(z_0)V\rho(z_0) : V^*V \leq I_m\}\,. \tag{11}$$

Множество матриц $\{V : V^*V \leq I\}$ естественно назвать единичным матричным кругом. Теперь из (11) следует, что множество матриц $\mathcal{K}(z_0)$ является образом единичного матричного круга при линейном матричном отображении. Поэтому множество $\mathcal{K}(z_0)$ естественно считать матричным кругом с центром в точке $c(z_0)$, левым радиусом $r(z_0)$ и правым радиусом $\rho(z_0)$. В контексте проблемы моментов $\mathcal{K}(z_0)$ называется *предельным матричным кругом Вейля* в точке z_0. Для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_+$ ранги левых и правых радиусов предельных матричных кругов Вейля удовлетворяют условиям

$$\delta_+ = \operatorname{rank} r(z_1) = \operatorname{rank} r(z_2), \quad \delta_- = \operatorname{rank} \rho(z_1) = \operatorname{rank} \rho(z_2). \tag{12}$$

Числа $\delta_\pm$ удовлетворяют неравенствам $0 \leq \delta_\pm \leq m$ и характеризуют степень вырожденности множества решений матричной проблемы моментов Гамбургера. Если хотя бы одно из чисел $\delta_\pm$ равно нулю, то матричная проблема моментов Гамбургера называется вполне определённой (множество $\mathcal{F}$ состоит из единственной МФ). Если $\delta_+ = \delta_- = m$, то матричная проблема моментов Гамбургера называется вполне неопределённой (множество $\mathcal{F}$ состоит из бесконечного множества МФ и невырождено). Во всех остальных случаях матричная проблема моментов Гамбургера называется полуопределённой (множество $\mathcal{F}$ состоит из бесконечного множества МФ и вырождено из-за вырожденности матричных радиусов кругов Вейля).

3. Ортонормированные матричные многочлены и проблема моментов. Для исследования матричных проблем моментов широко применяются ортонормированные матричные многочлены, матричные круги и интервалы Вейля [5]- [13]. По последовательности матричных моментов (8) построим следующие блочные матрицы:

$$\begin{aligned}
&H^{(l)} = \left(s_{j+k}\right)_{j,\,k=0}^{l}, \quad l \geq 0\,,\\
&T^{(0)} = 0_{m\times m}\,, \quad T^{(l)} = \begin{pmatrix} 0_{m\times ml} & 0_{m\times m} \\ I_{ml} & 0_{ml\times m} \end{pmatrix}, \quad l > 0,\\
&B^{(l)} = \operatorname{col}\left(s_l, \ldots, s_{2l-1}\right), \quad l \geq 0\\
&v^{(l)} = \operatorname{col}\left(I_m, 0_{m\times ml}\right), \quad V^{(l)} = \operatorname{col}\left(0_{m\times ml}, I_m\right), \quad l \geq 0\,,\\
&R^{(l)}(z) = \left(I_{(l+1)m} - zT^{(l)}\right)^{-1}, \quad l \geq 0\,,\\
&u^{(0)} = 0,\ u^{(l)} = \operatorname{col}\left(0, -s_0, \ldots, -s_{l-1}\right), \quad l > 0\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

Имеют место очевидные равенства

$$H^{(l)} = \begin{pmatrix} H^{(l-1)} & B^{(l)} \\ B^{(l)^*} & C^{(l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{(l)^*} H^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^{(l-1)} & 0 \\ 0 & \widehat{H}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & H^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$l \geq 1\,. \tag{14}$$

Здесь $C^{(l)} = s_{2l+1-r}$ и

$$\widehat{H}^{(l)} = \begin{cases} C^{(l)} - B^{(l)^*} H^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} > 0, & l > 0\,; \\ H^{(0)^{-1}}, & l = 0\,. \end{cases} \tag{15}$$

Из неравенства $H^{(l)} > 0$ и (14) следует, что $\widehat{H}^{(l)} > 0$. Поэтому при $l \geq 1$ из (14) имеем

$$H^{(l)^{-1}} = \begin{pmatrix} I & -H^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^{(l-1)^{-1}} & 0 \\ 0 & \widehat{H}^{(l)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -B^{(l)^*}H^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix}. \tag{16}$$

И, следовательно,

$$\begin{aligned} &V^{(l)^*}H^{(l)^{-1}} = \widehat{H}^{(l)^{-1}}\begin{pmatrix} -B^{(l)^*}H^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix}, \\ &V^{(l)^*}H^{(l)^{-1}}V^{(l)^*} = \widehat{H}^{(l)^{-1}}, \quad l \geq 1. \end{aligned} \tag{17}$$

Теорема 2. *Пусть матричная мера σ участвует в равенствах* (5), (8) *и две бесконечных последовательности матричных многочленов $\tilde{P}^{(j)}(z)$, $\tilde{Q}^{(j)}(z)$ заданы явными формулами*

$$\tilde{P}^{(j)}(z) = \widehat{H}^{(j)^{1/2}}V^{(j)^*}H^{(j)^{-1}}R^{(j)}(z)v^{(j)}, \tag{18}$$

$$\tilde{Q}^{(j)}(z) = \widehat{H}^{(j)^{1/2}}V^{(j)^*}H^{(j)^{-1}}R^{(j)}(z)u^{(j)}, \quad j \geq 0. \tag{19}$$

Тогда:

1) матричный многочлен $\tilde{P}^{(j)}(t)$ является многочленом j-ой степени, и его коэффициенты являются $m \times m$ матрицами;

2) старший коэффициент матричного многочлена $\tilde{P}^{(j)}(t)$ является положительной матрицей;

3) матричные многочлены $\tilde{P}^{(j)}(t)$ ортонормированы относительно меры σ

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{P}^{(j)}(t)\sigma(dt)\tilde{P}^{(k)^*}(t) = \delta_{jk}I_m, \qquad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \tag{20}$$

4) матричные многочлены $\tilde{Q}^{(j)}(z)$ являются многочленами 2-го рода

$$\tilde{Q}^{(j)}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\tilde{P}^{(j)}(t) - \tilde{P}^{(j)}(z)}{t - z}\sigma(dt). \tag{21}$$

□ При $j = 0$ утверждение о степени и положительности старших коэффициентов многочленов $\tilde{P}^{(0)}$ очевидно. При $j > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(j)}(z) &= \widehat{H}^{(j)^{1/2}}V^{(j)^*}H^{(j)^{-1}}\mathrm{col}\Big(I, zI, \ldots, z^nI\Big) = z^n\widehat{H}^{(j)^{1/2}}V^{(j)^*}H^{(j)^{-1}}V^{(j)} + \cdots \\ &= z^n\widehat{H}^{(j)^{1/2}}\widehat{H}^{(j)^{-1}} + \cdots = z^n\widehat{H}^{(j)^{-1/2}} + \cdots . \end{aligned}$$

Таким образом, матричный многочлен $\tilde{P}^{(j)}(z)$ является матричным многочленом j-ой степени с положительным старшим коэффициентом $\widehat{H}^{(j)^{-1/2}} > 0$.

Пусть матричная мера σ участвует в равенствах (5), (8). При $j=0$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{P}^{(0)}\sigma(dt)\tilde{P}^{(0)^*} = H^{(0)^{-\frac{1}{2}}} H^{(0)} H^{(0)^{-\frac{1}{2}}} = I_m\,, \quad r=1,2\,.$$

При $j>0$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{P}^{(j)}(t)\sigma(dt)\tilde{P}^{(j)^*}(t) =$$

$$= \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} I \\ tI \\ \vdots \\ t^l I \end{pmatrix} \sigma(dt)\Big(I,\, tI, \ldots, t^l I\Big) H^{(j)^{-1}} V^{(j)} \widehat{H}^{(j)^{1/2}}$$

$$= \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} \begin{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} t^0\sigma(dt) & \ldots & \int_{\mathbb{R}} t^l\sigma(dt) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\mathbb{R}} t^l\sigma(dt) & \ldots & \int_{\mathbb{R}} t^{2l}\sigma(dt) \end{pmatrix}$$

$$\times\, H^{(j)^{-1}} V^{(j)^*} \widehat{H}^{(j)^{1/2}} = \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} H^{(j)} H^{(j)^{-1}} V^{(j)} \widehat{H}^{(j)^{1/2}}$$

$$= \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} V^{(j)} \widehat{H}^{(j)^{1/2}} = \widehat{H}^{(j)^{1/2}} \widehat{H}^{(j)^{-1}} \widehat{H}^{(j)^{1/2}} = I_m\,.$$

Пусть теперь $j\neq k$. Предположим, для определённости, что $j>k>0$ и $r=1$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{P}^{(j)}(t)\sigma(dt)\tilde{P}^{(k)^*}(t) =$$

$$= \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} I \\ tI \\ \vdots \\ t^l I \end{pmatrix} \sigma(dt)\Big(I,\, tI, \ldots, t^k I\Big) H^{(k)^{-1}} V^{(k)} \widehat{H}^{(k)^{1/2}}$$

$$= \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} \begin{pmatrix} s_0 & \ldots & s_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_l & \ldots & s_{l+k} \end{pmatrix} H^{(k)^{-1}} V^{(k)} \widehat{H}^{(k)^{1/2}}$$

$$= \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} \begin{pmatrix} I_{(k+1)m} \\ 0_{(l-k-1)m\times(k+1)m} \end{pmatrix} H^{(k)^{-1}} V^{(k)} \widehat{H}^{(k)^{1/2}}$$

$$= \widehat{H}^{(j)^{1/2}} 0_{m\times(k+1)m} H^{(k)^{-1}} V^{(k)} \widehat{H}^{(k)^{1/2}} = 0_{m\times m}\,.$$

Покажем, что при $j\geq 0$ матричные многочлены $\tilde{Q}^{(j)}$ являются матричными многочленами второго рода для многочленов $\tilde{P}^{(j)}$. При $j=0$ наше утверждение очевидно.

При $j \geq 1$, воспользовавшись очевидным тождеством

$$\frac{R^{(j)}(t)-R^{(j)}(z)}{t-z} = -R^{(j)}(z)T^{(j)}R^{(j)}(t)\,,$$

получим

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \frac{\tilde{P}^{(j)}(t)-\tilde{P}^{(j)}(z)}{t-z}\sigma(dt) = \widehat{H}^{(j)^{1/2}}V^{(j)^*}H^{(j)^{-1}} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} \frac{R^{(j)}(t)-R^{(j)}(z)}{t-z}v^{(j)}\sigma(dt) = -\widehat{H}^{(j)^{1/2}}V^{(j)^*}H^{(j)^{-1}}R^{(j)}(z)T^{(j)} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} R^{(j)}(t)v^{(j)}\sigma(dt) = -\widehat{H}^{(j)^{1/2}}V^{(j)^*}H^{(j)^{-1}}R^{(j)}(z)T^{(j)}\mathrm{col}\big(s_0,\ldots,s_l\big) \\
&= \widehat{H}^{(j)^{1/2}}V^{(j)^*}H^{(j)^{-1}}R^{(j)}(z)u^{(j)} = \tilde{Q}^{(j)}(z)\,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Радиусы и центр предельного матричного круга Вейля (11) выражаются через матричные многочлены $\tilde{P}^{(j)}$ и $\tilde{Q}^{(j)}$ следующим образом (см. [5]):

$$\begin{aligned}
r(z_0) &= \lim_{l\to\infty}\left(\left(i(\bar{z}_0-z_0)\sum_{j=0}^{l}\tilde{P}^{(j)^*}(z_0)\tilde{P}^{(j)}(z_0)\right)^{-1/2}\right)\,, \\
\rho(z_0) &= \lim_{l\to\infty}\left(\left(i(\bar{z}_0-z_0)\sum_{j=0}^{l}\tilde{P}^{(j)^*}(\bar{z}_0)\tilde{P}^{(j)}(\bar{z}_0)\right)^{-1/2}\right)\,, \\
c(z_0) &= \lim_{l\to\infty}\left(\left(i(\bar{z}_0-z_0)\sum_{j=0}^{l}\tilde{P}^{(j)^*}(z_0)\tilde{P}^{(j)}(z_0)\right)^{-1}\right. \\
&\qquad\left.\times\left(-i(\bar{z}_0-z_0)\sum_{j=0}^{l}\tilde{Q}^{(j)^*}(z_0)\tilde{P}^{(j)}(z_0)-iI\right)^*\right)\,.
\end{aligned}$$

Теорема 3. *Пусть матрица Якоби $\mathbf{J}_m$ вида (1) порождает симметрический оператор $\mathbf{L}_m$ и его дефектные числа равны $m_\pm$. Пусть многочлены $P^{(j)}$ определены формулами (3), (4) и матричная $m \times m$ мера σ участвует в соотношениях ортогональности (5). И пусть, далее, для построенной по этой мере σ матричной проблемы моментов Гамбургера (7) ранги радиусов предельных кругов Вейля равны $\delta_\pm$. Тогда:*

1) дефектные числа оператора $\mathbf{L}_m$ равны рангам радиусов предельного круга Вейля

$$m_+ = \delta_+\,, \qquad m_- = \delta_-\,; \tag{22}$$

2) для любого фиксированного числа $m \geq 1$ и чисел $\delta_\pm$ таких, что $0 \leq \delta_+, \delta_- \leq m-1$ или $\delta_+ = \delta_- = m$, существует проблема моментов Гамбургера с $m \times m$ матричными моментами и рангами радиусов предельных кругов Вейля равными δ_+ и δ_- соответственно.

$\square$ Пусть матричные многочлены P_j (соотв. $\tilde{P}_j$) заданы формулами (3), (4) (соотв. (18)). Эти многочлены ортонормированы относительно одной и той же неотрицательной

$m \times m$ матричной меры σ из (5). Но тогда (см. [14]) существует последовательность унитарных матриц U_j такая, что $P_j = U_j \tilde{P}_j$. Отсюда следует, что $P_j^* P_j = \tilde{P}_j^* U_j^* U_j \tilde{P}_j = \tilde{P}_j^* \tilde{P}_j$. Для любой точки $z_0 \in \mathbb{C}_+$ имеем

$$\begin{aligned}\ker K(z_0) &= \ker \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} P^{(j)^*}(z_0) P^{(j)}(z_0) \right)^{-1} = \ker \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \tilde{P}^{(j)^*}(z_0) \tilde{P}^{(j)}(z_0) \right)^{-1} \\ &= \ker \lim_{n\to\infty} \left(i(\bar{z}_0 - z_0) \sum_{j=0}^{n} \tilde{P}^{(j)^*}(z_0) \tilde{P}^{(j)}(z_0) \right)^{-1/2} = \ker r(z_0)\,.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rank} K(z_0) = \operatorname{rank} r(z_0)$, т.е. $m_+ = \delta_+$. Аналогичным образом, убеждаемся в том, что $m_- = \delta_-$. Первое утверждение теоремы доказано.

В [3], [4] доказано существование блочных матриц Якоби вида (1), порождающих симметрические операторы с любыми возможными дефектными числами. Отсюда и из первого утверждения теоремы немедленно следует второе утверждение теоремы. ■

Литература

1. Крейн М.Г. Бесконечные J матрицы и матричная проблема моментов // Докл. АН СССР. – 1949. – 69;3. – С.125-128.
2. Коган В.И. Об операторах, порождённых l_p-матрицами в случае максимальных индексов дефекта // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1970. – 11. – С.103-107.
3. Дюкарев Ю.М. О дефектных числах симметрических операторов, порождённых блочными матрицами Якоби // Матем. сб. – 2006. – 197;8. – С.73-100.
4. Дюкарев Ю.М. Примеры блочных матриц Якоби, порождающих симметрические операторы с любыми возможными дефектными числами // Матем. сб. – 2010. – 201;12. – С.83-92.
5. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов / Физматгиз: М., 1961. – 310 с.
6. Arov D.Z., Dym H. J-contractive matrix valued functions and related topics / Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 116.: Cambridge University Press, 2008. – 565 с.
7. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика // ДАН Арм. ССР. – 1974. – 59;1. – С.17-22.
8. Потапов В.П. Мультипликативная структура J-растягивающих матриц-функций // Труды ММО. – 1955. – 4. – С.125-236.
9. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1983. – 47;3. – С.455-497.
10. Нудельман А.А. Об одной проблеме типа проблемы моментов // Докл. АН СССР. – 1977. – 233;5. – С.79-795.
11. Дюкарев Ю.М. О неопределённости интерполяционных задач для неванлинновских функций // Известия высших учебных заведений. Серия «Математика». – 2004. – 507;8. – С.26-38.
12. Дюкарев Ю.М. О неопределённости интерполяционных задач в классе Стилтьеса // Математический сборник. – 2005. – 196;3. – С.61-88.
13. Дюкарев Ю.М. Обобщённый критерий Стилтьеса полной неопределённости интерполяционных задач // Матем. заметки. – 2008. – 84;1. – С.23-39.
14. Damanik D., Pushnitski A., Simon B. The Analytic Theory of Matrix Orthogonal Polynomials // Surv. Approx. Theory. – 2008. – 4. – P.1-85.

BLOCK JACOBI's MATRICES AND MATRIX HAMBURGER's MOMENT PROBLEM

Yu. M. Dyukarev

Belgorod State Agricultural University,
Vavilova St., 1, Maiskiy, Belgorod, 308503, Russia, e-mail: yu.dyukarev@karazin.ua

Abstract. Some orthogonal matrix polynomials are connected with corresponding block Jacobi's matrix. It has been obtained explicit formulas expressing the orthogonal polynomials through matrix moments. It is proved that defect numbers of the Jacobi matrix coincide with ranks of Weil's limiting matrix disks radii.

Key words: Jacobi's block matrix, moments problem, orthogonal polynomials, defective numbers of symmetrical operators.

MSC 11P21

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ПРОБЛЕМЫ ДЕЛИТЕЛЕЙ ТИТЧМАРША С ПОЛУПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Н.А. Зинченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: zinchenko@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача о числе решений уравнения $p_1p_2^a - xy = 1$, где p_1 и p_2 — простые, а x и y — натуральные числа, при условии, что числа $p_1p_2^a$ лежат в промежутках $[(2m)^c, (2m+1)^c)$, где $m \in \mathbb{N}, c \in (1,2]$, а простые числа p_1 и p_2 удовлетворяют дополнительным условиям.

Ключевые слова: проблема делителей Титчмарша, бинарная аддитивная задача, полупростые числа, метод тригонометрических сумм, короткие (виноградовские) промежутки.

1. Введение. Задача о получении асимптотической формулы для числа решений уравнения $p - 1 = xy$, $p \leqslant n$, впервые поставленная в работе 1930 года [1], по имени автора этой статьи, получила название проблемы делителей Титчмарша. В [1] эта задача была решена в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана. Безусловное доказательство асимптотической формулы в задаче Титчмарша было получено Ю.В. Линником [2] с помощью разработанного им дисперсионного метода.

Заметим, что после появления в 1965 году теоремы Бомбьери-Виноградова (см. [3] и [4]) для решения многих аддитивных задач вместо дисперсионного метода стала применяться эта теорема. Например, в работе Д.В. Горяшина [5] с помощью теоремы Бомбьери-Виноградова были решены некоторые задачи, являющиеся аналогами проблемы Титчмарша.

С работы И.М. Виноградова 1940 года [6] началось решение аддитивных арифметических задач с простыми числами из «коротких» («виноградовских») промежутков. Такое название получили отрезки натурального ряда вида

$$[(2m)^c, (2m+1)^c), \tag{1}$$

где $m \in \mathbb{N}$, и $c \in (1,2]$. (В работе [6] $c = 2$.)

Задачи с простыми числами из промежутков вида (1) рассматривались, например, в работах С.А. Гриценко [7], [8], А. Балога и Дж. Фридлендера [9].

Отметим, что в работах [7]- [9] аддитивные задачи являются тернарными, или решаются по схеме тернарной задачи. Однако, бинарные аддитивные задачи с простыми числами из промежутков (1), к которым относится и проблема Титчмарша, в настоящее время не поддаются решению. Это связано с отсутствием аналогов классической теоремы Бомбьери-Виноградова, равных ей по силе, для простых чисел из промежутков вида (1).

Автором были решены некоторые бинарные аддитивные задачи с полупростыми числами из «виноградовских» промежутков ([10]- [13]). В настоящей статье решается задача, которую можно считать вариантом проблемы делителей Титчмарша. Доказывается теорема о числе решений диофантова уравнения $p_1p_2^a - xy = 1$, которая была сформулирована в работе [11].

Теорема. *Пусть* $n \geqslant 0 > 0$, $a \geqslant 2$ – *натуральные числа,* $Q = \exp(\sqrt{\ln n}\ )$, $A_1 = [1, nQ^{-1}]$, $A_2 = [1, Q^{1/a}]$ *и*

$$G(n) = \sum_{p_1\in A_1} \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy=1}} \sum_{x,y} 1\,,$$

$$G_1(n) = \sum_{p_1\in A_1} \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy=1\,,\\ \{\frac{1}{2}(p_1p_2^a)^{1/c}\}<\frac{1}{2}}} \sum_{x,y} 1\,.$$

Тогда справедливо равенство:

$$G_1(n) = \frac{1}{2}\, G(n)(1 + O(Q^{-\eta}))\,, \tag{2}$$

где

$$G(n) = c_0 \mathrm{Li}\Big(\frac{n}{Q}\Big)\pi\Big(Q^{1/a}\Big)\ln n\ \Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\Big)\Big)\,,$$

$\eta > 0$ — *абсолютная постоянная,* $c_0 = \sum\limits_{d=1}^{\infty} \dfrac{\mu^2(d)}{\varphi(d)d}$.

2. Обозначения и вспомогательные утверждения. Будем использовать следующие обозначения:

$c, c_1, c_2, \cdots$ — положительные постоянные, в различных формулах, вообще говоря, различные;

a — произвольное натуральное число, $a \geqslant 2$; p, p_1, p_2 — простые числа;

$\binom{m}{n} = \frac{(m-n+1)\cdots m}{1\cdots n}$ — биномиальный коэффициент; $\mathrm{Li}\, x = \int\limits_2^x \frac{du}{\ln u}$;

$\tau(n)$ — число различных натуральных делителей числа n;

$\varphi(n)$ — функция Эйлера (число натуральных чисел, непревосходящих n и взаимно простых с n);

$\mu(n)$ — функция Мебиуса, которая равна единице при $n = 1$, равна нулю, если $p^2|n$ и равна $(-1)^k$, если n равно произведению k различных простых сомножителей;

(a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b; $[a, b]$ — наименьшее общее кратное чисел a и b;

$\{x\}$ — дробная часть числа x;

запись $f(x) \sim g(x)$ означает, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

В процессе доказательства мы будем использовать вспомогательные теоремы.

Лемма 1. [14, с. 50] *При* $N > 2$ *и целом положительном* l *для* $\tau(m)$

$$\sum_{0<m\leqslant N} (\tau(m))^l \ll N(\ln N)^{2l-1}\ .$$

Лемма 2. [15, с. 20] (теорема Бруна-Титчмарша) *Для натуральных чисел a и k, удовлетворяющих условиям $(a,k)=1$ и $k\leqslant x$ выполняется:*

$$\pi(x,a,k)=\sum_{p\leqslant x,\ p\equiv a \bmod k} 1<\frac{(2+\eta)x}{\varphi(k)\ln(2x/k)}\,,$$

где $\eta>0$ и $x>x_0(\eta)$.

Лемма 3. [16, с. 476] (теорема Бомбьери-Виноградова) *Пусть* $\mathrm{Li}\,x=\int\limits_2^x\frac{du}{\ln u}$ *и при* $a\leqslant k,\ (a,k)=1$

$$\pi(x,a,k)=\sum_{\substack{p\leqslant x,\\ p\equiv a \mathrm{mod} k}} 1.$$

Тогда для всякого $A>0$ найдется такое B, что

$$\sum_{k\leqslant\sqrt{x}(\ln x)^{-B}}\max_{(l,k)=1}\left|\pi(x,l,k)-\frac{\mathrm{Li}\,x}{\varphi(k)}\right|=O\Big(\frac{x}{\ln^A x}\Big)\,.$$

Лемма 4. [3, с. 85] *Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — целые числа,*

$$J=J_{k,n}(P))=\int_0^1\ldots\int_0^1\Big|\sum_{x\leqslant P}e^{2\pi i(\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n)}\Big|^{2k}d\alpha_1\ldots d\alpha_n$$

— среднее значение модуля тригонометрической суммы и $J_{k,n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ — число решений системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1+\cdots+x_k-x_{k+1}-\cdots-x_{2k} &=& \lambda_1\,,\\ x_1^n+\cdots+x_k^n-x_{k+1}^n-\cdots-x_{2k}^n &=& \lambda_n\,,\end{array}\right.$$
$$1\leqslant x_1,\ldots,x_{2k}\leqslant P.$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

a) $J_{k,n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=$

$$=\int_0^1\ldots\int_0^1\Big|\sum_{x\leqslant P}e^{2\pi i(\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n)}\Big|^{2k}e^{-2\pi i(\alpha_1\lambda_1+\cdots+\alpha_n\lambda_n)}d\alpha_1\ldots d\alpha_n\,;$$

b) $J_{k,n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\leqslant J_{k,n}(0,\ldots,0)=J_{k,n}(P)=J\,;$

c) $\sum\limits_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}J_{k,n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=P^{2k}\,;$

d) $|\lambda_1|<kP,\ \ldots,\ |\lambda_n|<kP^n\,;$

e) $J = J_{k,n}(P) > (2k)^{-n} P^{2k-\frac{n^2+n}{2}}$.

Лемма 5. ([3], с. 94) *Пусть*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}\,, \ (a,q)=1\,, \quad q \geqslant 1\,, \quad |\theta| \leqslant 1\,.$$

Тогда при любом $\beta,\ U>0,\ P\geqslant 1$ *выполняется*

$$\sum_{x=1}^{P} \min\left(U, \frac{1}{\|\alpha x+\beta\|}\right) \leq 6\left(\frac{P}{q}+1\right)(U+q\ln q)\,.$$

3. Доказательство теоремы. Доказательство разобьем на несколько этапов.

1. Сначала получим асимптотическую формулу для $G(n)$.

Так как $Q = \exp(\sqrt{\ln n})$, то

$$A_1 = [1, nQ^{-1}]\,, \quad A_2 = [1, Q^{1/a}]\,.$$

Преобразуем

$$G(n) = \sum_{p_1\in A_1} \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy=1}} 1\,.$$

Ограничим промежуток изменения переменной x положив

$$G(n) = 2G'(n) - G''(n)\,, \tag{3}$$

где

$$G'(n) = \sum_{p_1\in A_1} \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy=1}} \sum_{x\leqslant\sqrt{n}} 1$$

и

$$G''(n) = \sum_{p_1\in A_1} \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy=1}} \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}\,,\\ y\leqslant\sqrt{n}}} 1\,.$$

Сначала оценим сумму $G''(n)$, представив ее в виде суммы двух слагаемых:

$$G''(n) = G''_1(n) + G''_2(n)\,, \tag{4}$$

где

$$G''_1(n) = \sum_{p_1\in A_1} \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy=1}} \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}\,,\\ y\leqslant\sqrt{n}}} 1$$

и

$$G''_2(n) = \sum_{p_1\in A_1} \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy=1}} \sum_{\substack{\sqrt{n}Q^{-1}<x\leqslant\sqrt{n}\,,\\ y\leqslant\sqrt{n}}} 1\,.$$

Заметим, что

$$G_1''(n) \leq \sum_{m \leqslant nQ^{-1}+1} \tau(m-1) t_1(m)\,,$$

где

$$t_1(m) = \sum_{\substack{p_1 p_2^a = m\,,\\ p_1 \in A_1\,,\\ p_2 \in A_2}} 1\,.$$

Очевидно, что $t_1(m) = 1$, если $m = p^{a+1}$ или $m = p_1 p_2^a$ и $t_1(m) = 0$ во всех других случаях. Следовательно,

$$G_1''(n) \leq \sum_{m \leq nQ^{-1}+1} \tau(m-1)\,.$$

Применяя лемму 1, получим:

$$G_1''(n) \ll nQ^{-1} \ln n\,.$$

Оценим $G_2''(n)$. Так как в случае, когда $p_2 \mid x$, уравнение $p_1 p_2^a - xy = 1$ не имеет решений, то

$$G_2''(n) = \sum_{\sqrt{n}Q^{-1} < x \leqslant \sqrt{n}} \;\sum_{\substack{p_2 \in A_2\,,\\ (p_2,x)=1}} \;\sum_{\substack{p_1 \in A_1\,,\\ p_1 \equiv p_2^* \bmod x}} 1 =$$

$$= \sum_{\sqrt{n}PQ^{-1} < x \leqslant \sqrt{n}} \;\sum_{\substack{p_2 \in A_2\,,\\ (p_2,x)=1}} \pi(nQ^{-1}, p_2^*, x)\,,$$

где p_2^* — решение сравнения $p_2^a t \equiv 1 \bmod x$.

Применяя теорему Бруна-Титчмарша, получаем:

$$G_2''(n) < \sum_{\sqrt{n}Q^{-1} < x \leqslant \sqrt{n}} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{p_2 \in A_2} \frac{(2+\eta) nQ^{-1}}{\ln \frac{2n}{Qx}} \ll$$

$$\ll \frac{n}{Q \ln n} \sum_{p_2 \in A_2} \;\sum_{\sqrt{n}Q^{-1} < x \leq \sqrt{n}} \frac{1}{\varphi(x)}\,.$$

Для оценки внутренней суммы используем формулу, доказательство которой можно найти в [18, с. 71]:

$$\sum_{1 \leq n \leq X} \frac{1}{n} = \ln X + \gamma + O\left(\frac{1}{X}\right)\,,$$

где γ — постоянная Эйлера. С помощью этой оценки и формулы для вычисления значений функции Эйлера $\varphi(x)$ получаем:

$$\sum_{m \leqslant X} \frac{1}{\varphi(m)} = c_0 \ln X + O(1)\,, \quad c_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu^2(r)}{r\varphi(r)}\,. \tag{5}$$

Используя (5), получаем

$$G_2''(n) \ll \frac{n}{Q}\,\pi(Q^{1/a})\frac{\ln Q}{\ln n}\,.$$

Подставляя оценки для $G_1''(n)$ и $G_2''(n)$ в (4), получим:

$$G''(n) \ll \frac{n}{Q}\,\pi(Q^{1/a})\frac{\ln Q}{\ln n}\,.$$

Теперь оценим сумму $G'(n)$, представив ее в виде суммы двух слагаемых:

$$G'(n) = G_1'(n) + G_2'(n)\,, \tag{6}$$

где

$$G_1'(n) = \sum_{p_1\in A_1}\ \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy = 1}}\ \sum_{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}} 1\,,$$

$$G_2'(n) = \sum_{p_1\in A_1}\ \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy = 1}}\ \sum_{\sqrt{n}Q^{-1}<x\leqslant\sqrt{n}} 1\,.$$

Заметим, что сумма $G_2'(n)$ оценивается так же, как и $G_2''(n)$. Поэтому

$$G_2'(n) \ll \frac{n}{Q}\,\pi(Q^{1/a})\frac{\ln Q}{\ln n}\,. \tag{7}$$

Рассмотрим сумму $G_1'(n)$ и получим для нее асимптотическую формулу. Имеем:

$$G_1'(n) = \sum_{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\ \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ (p_2,\ x)=1}} \pi(nQ^{-1}, p_2^*, x) =$$

$$= \mathrm{Li}\Big(\frac{n}{Q}\Big)\sum_{p_2\in A_2}\ \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1},\\ (p_2,\ x)=1}} \frac{1}{\varphi(x)} + O\Big(\sum_{p_2\in A_2}\ \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1},\\ (x,\ p_2)=1}} \Big|\pi\left(\frac{n}{Q}, p_2^*, x\right) - \frac{\mathrm{Li}(\frac{n}{Q})}{\varphi(x)}\Big|\Big)\,,$$

где p_2^* — решение сравнения $p_2^a t \equiv 1 \pmod{x}$.

Отсюда, в силу теоремы Бомбьери-Виноградова, получим

$$G_1'(n) = \mathrm{Li}\Big(\frac{n}{Q}\Big)\sum_{p_2\in A_2}\ \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1},\\ (p_2,\ x)=1}} \frac{1}{\varphi(x)} + O\Big(\frac{n}{Q}\,\pi\,(Q^{1/a})(\ln\, n)^{-1}\Big)\,.$$

Рассмотрим внутреннюю сумму

$$\sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1},\\ (p_2,\ x)=1}} \frac{1}{\varphi(x)}\,.$$

Имеем

$$\sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1},\\ (p_2,\ x)=1}}\frac{1}{\varphi(x)}=\sum_{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\frac{1}{\varphi(x)}-\sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}p_2^{-1}}\frac{1}{\varphi(x_1p_2)}\,.$$

Так как $\varphi(ab)\geqslant\varphi(a)\varphi(b)$, то, применяя оценку (5), получим:

$$\sum_{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}p_2^{-1}}\frac{1}{\varphi(x_1p_2)}\leqslant\frac{1}{p_2-1}\sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\frac{1}{\varphi(x_1)}=O\Big(\frac{\ln n}{p_2}\Big)\,.$$

Из (5) следует, что

$$\sum_{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\frac{1}{\varphi(x)}=c_0\ln(\sqrt{n}Q^{-1})+O(1)\,,$$

где

$$c_0=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)d}\,.$$

Поэтому

$$\sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1},\\ (p_2,\ x)=1}}\frac{1}{\varphi(x)}=c_0\ln(\sqrt{n}Q^{-1})+O\Big(\frac{\ln n}{p_2}\Big)\,.$$

Просуммируем обе части полученного равенства по $p_2\in A_2$. Получим:

$$\sum_{p_2\in A_2}\sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1},\\ (p_2,\ x)=1}}\frac{1}{\varphi(x)}=c_0\ln(\sqrt{n}Q^{-1})\pi(Q^{1/a})+O(\ln n\,\ln\ln\,Q)\,.$$

Поэтому

$$G_1'(n)=c_0\mathrm{Li}\Big(\frac{n}{Q}\Big)\,\pi(Q^{1/a})\,\ln(\sqrt{n}Q^{-1})\,\Big(1+O\Big(\frac{\ln Q}{\ln n}\Big)\Big)\,.$$

Подставляя оценки для $G_1'(n)$ и $G_2''(n)$ в (6), получим:

$$G'(n)=\frac{c_0}{2}\,\mathrm{Li}\Big(\frac{n}{Q}\Big)\,\pi(Q^{1/a})\ln n\,\Big(1+O\Big(\frac{\ln Q}{\ln n}\Big)\Big)\,. \tag{8}$$

2. Рассмотрим сумму

$$G_1(n)=\sum_{p_1\in A_1}\sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a-xy=1\,,\\ \{\frac{1}{2}(p_1p_2^a)^{1/c}\}<\frac{1}{2}}}\sum_{x,y}1\,.$$

Считаем далее, что $n\geqslant n_0>0$, где n_0 — достаточно большое число.
Введем функцию

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } 0\le x<1/2\,,\\ 0, & \text{если } 1/2\le x<1\end{cases}$$

и продолжим ее периодически на всю числовую прямую.

Воспользуемся леммой о «стаканчиках» И.М. Виноградова ([19], с. 23) и выберем параметры r, $\triangle$, α, β двумя способами.

Сначала определим эти параметры так:

$$r = [\ln n], \Delta = \frac{1}{\ln^2 n}\,, \quad \alpha = \Delta\,, \quad \beta = \frac{1}{2} - \Delta\,.$$

Обозначим через $\chi_1(x)$ функцию, существование которой следует из леммы о «стаканчиках». Затем, при тех же r и Δ, положим $\alpha = -\Delta$, $\beta = \frac{1}{2} + \Delta$, а соответствующую функцию обозначим как $\chi_2(x)$.

Тогда из леммы о «стаканчиках» следует, что $\chi_1(x) \leqslant \chi(x) \leqslant \chi_2(x)$, и, следовательно

$$G_{11}(n) \leqslant G_1(n) \leqslant G_{12}(n)\,, \tag{9}$$

где

$$G_{1i}(n) = \sum_{p_1\in A_1} \sum_{p_2\in A_2} \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}\,,\\ p_1p_2^a - xy=1}} \chi_i\Big(\frac{1}{2}\,(p_1p_2^a)^{1/c}\Big)\,,\ i = 1, 2\,.$$

Заметим, что если будут получены асимптотические формулы для $G_{11}(n)$ и $G_{12}(n)$ с совпадающими главными и остаточными членами, то из неравенства (9) следует, что такая же формула будет верна и для $G_1(n)$.

3. Займемся подготовкой к выводу асимптотической формулы для $G_{11}(n)$.

Раскладывая функцию $\chi_1\Big(\frac{1}{2}(p_1p_2^a)^{1/c}\Big)$ в ряд Фурье, получим

$$G_{11}(n) = (1/2 - 2\Delta)G(n) + R_1(n) + R_2(n)\,, \tag{10}$$

где

$$R_1(n) = \sum_{0<|m|\leqslant\Delta^{-1}\ln n} |g_m||V_m(n)|\,,$$

$$R_2(n) = \sum_{|m|>\Delta^{-1}\ln n} |g_m||V_m(n)|\,,$$

$$V_m(n) = \sum_{p_1\in A_1} \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy=1}} t_2(p_1p_2^a - 1)e^{\pi i m (p_1p_2^a)^{1/c}}\,,$$

$$t_2(k) = \sum_{\substack{xy=k\,,\\ x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}} 1\,,$$

g_m — коэффициент Фурье с номером m для функции χ_1.

Оценим $R_2(n)$. Из леммы о «стаканчиках» следует, что

$$|g_m| \leqslant \frac{1}{\pi|m|}\Big(\frac{r}{\pi\Delta|m|}\Big)^r\,.$$

Кроме того,
$$|V_m(n)| \leqslant G_1(n) \leqslant n\,.$$

Поэтому
$$R_2(n) = O\Big(n \sum_{|m|>\Delta^{-1}\ln n} \Big(\frac{r}{\Delta}\Big)^r m^{-r-1}\Big) = O(1)\,. \tag{11}$$

Оценим $R_1(n)$. Имеем
$$|R_1(n)| \leqslant \sum_{0<|m|<\Delta^{-1}\ln n} \frac{1}{\pi|m|}|V_m(n)|$$
и
$$|V_m(n)| \leqslant \sum_{n_1\leqslant n/Q} \Big|\sum_{p_2\in A_2} t_2(n_1p_2^a-1)e^{\pi im(n_1p_2^a)^{1/c}}\Big|\,,$$
где n_1 пробегает множество натуральных чисел.

Применяя неравенство Коши [3, с. 87], получим
$$|V_m(n)|^2 \leqslant n/Q \sum_{n_1\leqslant n/Q} \Big|\sum_{p_2\in A_2} t_2(n_1p_2^a-1)e^{\pi im(n_1p_2^a)^{1/c}}\Big|^2 =$$
$$= \frac{n}{Q}\sum_{p_2\in A_2}\sum_{p_2'\in A_2}\sum_{n_1\leqslant n/Q} t_2(n_1p_2^a-1)t_2(n_1(p_2')^a-1)e^{\pi im(p_2^{a/c}-(p_2')^{a/c})n_1^{1/c}} =$$
$$= \frac{n}{Q}(V_0(n)+V_1(n))\,, \tag{12}$$
где сумма $V_0(n)$ соответствует слагаемым, в которых $p_2=p_2'$, а в сумме $V_1(n)$ $p_2\neq p_2'$.

Оценим $V_0(n)$. Заметим, что из мультипликативности функции $\tau(n)$ и формулы для вычисления ее значений следует, что $\tau(ab)\leqslant\tau(a)\tau(b)$. Кроме того воспользуемся леммой 1. В результате, получим
$$V_0(n) \leqslant \sum_{p_2\in A_2}\sum_{n_1\leq n/Q} \tau^2(n_1p_2^a-1) \leqslant$$
$$\leqslant (a+1)^2Q^{1/a}\sum_{n_1\leqslant nQ^{-1}} \tau^2(n_1) \ll nQ^{1/a-1}\ln^3 n\,. \tag{13}$$

Перейдем к оценке $V_1(n)$. Заметим, что
$$V_1(n) \leq \sum_{p_2\in A_2}\sum_{\substack{p_2'\in A_2,\\ p_2\neq p_2'}}\sum_{n_1\leqslant nQ^{-1}} t_2(n_1(p_2)^a-1)t_2(n_1(p_2')^a-1)e^{2\pi i(m/2)(p_2^{a/c}-(p_2')^{a/c})n_1^{1/c}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{p_2\in A_2}\sum_{p_2'\in A_2} f(n)\,, \tag{14}$$

где
$$f(n)=\sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\ \sum_{x_2\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}} s(m) \tag{15}$$
и
$$s(m)=\sum_{\substack{n_1\leqslant nQ^{-1},\\ n_1p_2^a\equiv 1 \bmod x_1,\\ n_1(p_2')^a\equiv 1 \bmod x_2}} e^{2\pi i(m/2)(p_2^{a/c}-(p_2')^{a/c})n_1^{1/c}}\,.$$

Будем считать, без ограничения общности, что $(p_2,x_1)=1$ и $(p_2',x_2)=1$, так как в противном случае сумма будет пустой, то есть равной нулю.

Пусть $p_2q_2\equiv 1 \bmod x_1$ и $p_2'q_2'\equiv 1 \bmod x_2$. Решим систему сравнений:
$$\begin{cases} x\equiv q_2^a \bmod x_1\,,\\ x\equiv (q_2')^a \bmod x_2\,.\end{cases}$$

Она разрешима тогда и только тогда, когда $(x_1,x_2)|(q_2^a-(q_2')^a)$ и, в случае разрешимости, ее решение имеет вид:
$$x=z_2+mD\,,$$
где $D=[x_1,x_2]$ (см. [3, с. 65, 145]).

Таким образом,
$$s(m)=\sum_{\xi+l\leqslant\frac{n}{DQ}} e^{2\pi i\varkappa(\xi+l)^{\frac{1}{c}}}\,, \tag{16}$$
где
$$\varkappa=\frac{m}{2}\,(p_2^{a/c}-(p_2')^{a/c})\,,\qquad \xi=\frac{z_2}{D}\,.$$
Очевидно, что $0<\xi<1$.

Чтобы вывести асимптотическую формулу для G_{11}, требуется оценить $s(m)$.

4. Займемся оценкой тригонометрической суммы $s(m)$ из (16).

Представим эту сумму в следующем виде:
$$s(m)=s_1(m)+s_2(m)\,,$$
где
$$s_1(m)=\sum_{\frac{n}{DQ^{1,5}}<\xi+l\leqslant\frac{n}{DQ}} e^{2\pi i\varkappa(\xi+l)^{1/c}}\,,\qquad s_2(m)=\sum_{\xi+l\leqslant\frac{n}{DQ^{1,5}}} e^{2\pi i\varkappa(\xi+l)^{1/c}}\,.$$

Очевидно, что
$$|\ s_2(m)\ |\leqslant\sum_{\xi+l\leq\frac{n}{DQ^{1,5}}} 1\leq\frac{n}{DQ^{1,5}}\,.$$

Поэтому
$$s(m)=s_1(m)+O\Big(\frac{n}{DQ^{1,5}}\Big)\,. \tag{17}$$

Разобьем сумму $s_1(m)$ на $O(\ln n)$ сумм вида:

$$\bar{s_1}(M) = \sum_{M<\xi+l\leqslant M_1} e^{2\pi i\varkappa(\xi+l)^{1/c}},$$

где

$$\frac{n}{DQ^{1,5}} \leq M < M_1 \leqslant 2M\,, \qquad M_1 \leqslant \frac{n}{DQ}\ .$$

Заметим, что, так как $x_1 \leqslant \sqrt{n}Q^{-1}$ и $x_2 \leqslant \sqrt{n}Q^{-1}$, то

$$D = [x_1, x_2] \leqslant x_1x_2 \leqslant nQ^{-2}\,,$$

поэтому

$$M \geqslant \frac{n}{DQ^{1,5}} \geqslant Q^{0,5}$$

и, следовательно, сумма $\bar{s_1}(M)$ содержит «сравнительно много» слагаемых.

Будем оценивать $\bar{s_1}(M)$, считая, что

$$\frac{n}{DQ^{1,5}} \leqslant M \leqslant \frac{n}{DQ}\ .$$

Сначала рассмотрим случай, когда

$$1 \leqslant D \leqslant n^{0,99} \Leftrightarrow M \geq \frac{n^{0,01}}{Q^{1,5}}\ .$$

Если

$$\frac{|\varkappa|M^{1/c}}{M} \leqslant \frac{1}{10}\ ,$$

то, применяя лемму о приближении суммы интегралом [3, с. 19], получим

$$\bar{s_1}(M) = \int_M^{M_1} e^{2\pi i\varkappa(\xi+l)^{1/c}} dl = O(1) = O(M^{1-1/c})\,.$$

В дальнейшем считаем, что $|\varkappa|M^{1/c}/M > 1/10$ и применим для оценки суммы $\bar{s_1}(M)$ метод ван дер Корпута [20, с. 85-94].

Определим натуральное число k из условия:

$$\frac{1}{M^2} < \frac{|\varkappa|M^{1/c}}{M^k} \leq \frac{1}{M}\ .$$

Если $k = 2$, то

$$\frac{|\varkappa|M^{\frac{1}{c}}}{M^2} \asymp \frac{1}{M}\ .$$

Оценивая $\bar{s_1}(M)$ по второй производной, получаем, что при $k = 2$

$$\bar{s_1}(M) = O(\sqrt{M})\,.$$

Рассмотрим случай $k \geqslant 3$ и оценим $\bar{s_1}(M)$ по производной порядка k [3, с. 66-70]. Имеем

$$\bar{s_1}(M) \ll M^{1-\delta}\,,$$

где $\delta = \delta(k) > 0$. Случай $D \leq n^{0,99}$ полностью рассмотрен.

Пусть теперь

$$D > n^{0,99}\,, \qquad \frac{|\varkappa| M^{1/c}}{M} > \frac{1}{10}\,.$$

Оценку $\bar{s_1}(M)$ будем вести по схеме оценки дзетовой суммы, принадлежащей И.М. Виноградову [3, с. 66-70]. Пусть $a = [M^{5/11}]$. Тогда

$$|\bar{s_1}(M)| \leq \frac{1}{a^2} \sum_{M<m\leqslant M_1} |W(m)| + 2a^2\,,$$

где

$$W(m) = \sum_{u=1}^{a} \sum_{v=1}^{a} e^{2\pi i \varkappa (\xi+m+uv)^{1/c}}.$$

Применим формулу Тейлора:

$$(\xi+m+uv)^{1/c} =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} \binom{1/c}{j} (\xi+m)^{1/c-j} (uv)^j + \theta_2 \binom{1/c}{r+1} (\xi+m)^{1/c-r-1} a^{2(r+1)}\,, \qquad |\theta_2| \leqslant 1\,.$$

Таким образом,

$$e^{2\pi i \varkappa (\xi+m+uv)^{1/c}} = e^{2\pi i F(uv)} + 2\pi\theta_3 |\varkappa| (\xi+m)^{1/c} \left(\frac{a^2}{\xi+m}\right)^{r+1}\,, \qquad |\theta_3| \leqslant 1\,,$$

где

$$F(uv) = \sum_{j=0}^{r} \binom{1/c}{j} (\xi+m)^{1/c-j} (uv)^j\,.$$

Введем обозначения:

$$x_j = \binom{1/c}{j}\,, \qquad T = |\varkappa|(\xi+m)^{1/c}\,, \qquad \alpha_j = \frac{\mathrm{sgn}(\varkappa)\;T}{x_j(\xi+m_j)}\,.$$

Тогда

$$W(m) = W_1 + 2\pi\theta_4 T \left(\frac{a^2}{M}\right)^r a^2 M^{-1/11}\,, \qquad |\theta_4| \leqslant 1\,,$$

$$W_1 = \sum_{u=1}^{a} \sum_{v=1}^{a} e^{2\pi i F(uv)} =$$

$$= \sum_{u=1}^{a} \sum_{v=1}^{a} e^{2\pi i (\alpha_1 uv + \alpha_2 u^2 v^2 + \dots + \alpha_r u^r v^r)}\,.$$

Выберем натуральное число r из условия

$$r-1<\frac{11\ln T}{\ln M}\leqslant r$$

и заметим, что, так как $D>0,99$, то $|\varkappa|\leqslant n^{0,99/c}$. Поэтому из неравенства $MD\leqslant nQ^{-1}$ заключаем, что $M<n^{0,01}$. Следовательно,

$$\frac{\ln T}{\ln M}>\frac{\ln\frac{1}{2}n^{0,99/c}}{\ln n^{0,01}}>\frac{99}{c}-1\geqslant\frac{97}{2}$$

и указанный выбор r возможен.

Следуя схеме Виноградова, получим:

$$|W_1|^{4k^2}\leqslant a^{8k^2-4k}J^2_{k,r}(0,...,0)\prod_{j=1}^{r}\sigma_j\,,$$

где $J_{k,r}(0,...,0)$ определяется в условии леммы 4 и

$$\sigma_j=\sum_{|\mu_j|<A_j}\min\left(2A_j,\frac{1}{||a_j\mu_j||}\right),$$

$$A_j=ka^j\,.$$

При

$$\frac{4\ln T}{\ln M}\leqslant j\leqslant\frac{8\ln T}{\ln M}$$

оценим σ_j по лемме 5, а при остальных j, тривиально, — величиной $(2A_j)^2$.

Итак, пусть

$$\frac{4\ln T}{\ln M}\leqslant j\leqslant\frac{8\ln T}{\ln M}\,.$$

В силу леммы 5, имеем

$$\sigma_j\leqslant6\Big(\frac{2A_j}{q_j}+1\Big)\left(2A_j+q_j\ln q_j\right)\leqslant$$

$$\leqslant6(2A_j)^2\Big(\frac{1}{q_j}+\frac{1}{A_j}+\frac{q_j}{4(A_j)^2}\Big)\,,$$

где

$$q_j=[\frac{x_j(\xi+m)^j}{T}]\,.$$

Оценим сверху сумму

$$\Big(\frac{1}{q_j}+\frac{1}{A_j}+\frac{q_j}{4(A_j)^2}\Big)\,.$$

Из определений A_j, q_j и выбора j следует, что

$$A_j \geqslant a^j \geqslant \left(\frac{1}{2}M^{5/11}\right)^j \geqslant \frac{1}{2^r} M^{\frac{5}{11}\,\frac{4\ln T}{\ln M}} = \frac{1}{2^r} T^{20/11};$$

$$q_j \leqslant \frac{M^j}{T} \leqslant \frac{M^{4\ln T/\ln M}}{T} = T^3\,;$$

$$\frac{q_j}{A_j^2} \leqslant \frac{x_j 4^r M^j}{a_j^2 T} \leqslant \frac{x_j 8^r M^{j/11}}{T} \leqslant x_j 8^r T^{-3/11}\,.$$

Оценим сверху x_j:

$$x_j = \left|\binom{1/c}{j}\right|^{-1} = \frac{c^2}{c-1}\cdot\frac{j!}{(2-1/c)(3-1/c)}\cdots(j-1/c-1) \leqslant \frac{c^2}{c-1}\,j^2 \leqslant \frac{c^2}{c-1}\,r^2\,.$$

Итак, при

$$\frac{4\ln T}{\ln M} \leqslant j \leqslant \frac{8\ln T}{\ln M}$$

$$\left(\frac{1}{q_j} + \frac{1}{A_j} + \frac{q_j}{4A_j^2}\right) \leqslant \left(\frac{1}{T^3} + 2^r T^{-20/11} + \frac{1}{(c-1)}\,16^r T^{-3/11}\right) \leqslant \frac{48^r}{c-1} T^{-3/11}\,.$$

Оценим $\ln q_j$ при этих же значениях j:

$$\ln q_j = \ln\frac{x_j(\xi+m)^j}{T} \leqslant \ln\left(\frac{c^2}{c-1}\,4^r\cdot 2^r\cdot\frac{M^j}{T}\right) \leqslant \ln\left(\frac{16^r}{c-1}\,T^7\right) \leqslant 7\,\frac{16^r}{c-1}\ln n\,.$$

В итоге получаем, что при

$$\frac{4\ln T}{\ln M} \leqslant j \leqslant \frac{8\ln T}{\ln M}$$

$$\sigma_j \leqslant \frac{42}{(c-1)^2}\,(1000)^r\, T^{-3/11}\ln n (2A_j)^2\,.$$

Следовательно,

$$\prod_{j=1}^{r}\sigma_j \leqslant \frac{(42)^r(1000)^{r^2}}{(c-1)^{2r}}(\ln n)^r T^{-\frac{12}{11}\cdot\frac{\ln T}{\ln M}}\prod_{j=1}^{r}(2A_j)^2\,.$$

Окончательно получаем

$$\prod_{j=1}^{r}\sigma_j \leqslant \frac{(168k^2)^r}{(c-1)^{2r}}(\ln\, n)^r T^{-\frac{12}{11}\cdot\frac{\ln T}{\ln M}} a^{r^2+r}\,.$$

Выберем натуральное число τ из условия $e^{\tau-1} < 10000^r \leqslant e^\tau$ и применим теорему о среднем И.М. Виноградова ([3], с. 89), положив в ней $k = r\tau$:

$$J_{k,r}(0,\ldots,0) \leqslant (r\tau)^{6r\tau}(2r)^{4r\tau(r+1)}a^{2k-r(r+1)/2}\left(1-\left(1-\frac{1}{r}\right)\right)^{\tau}.$$

Заметим, что

$$\left(1-\frac{1}{r}\right)^{\tau} < e^{-\tau/r} < \frac{1}{10000},$$

так как $\tau/r \geqslant \ln 10000$. Поэтому

$$a^{(r^2+r)/2}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{\tau} < a^{r^2/10000}.$$

Кроме того,

$$r < 1 + \frac{11\ln T}{\ln M} < \frac{22\ln T}{\ln M}.$$

Значит,

$$a^{r^2/10000} < M^{5/11\cdot\frac{484}{10000}\cdot\frac{\ln^2 T}{\ln^2 M}} < T^{\ln T/40\ln M}.$$

Отсюда получаем:

$$|W_1|^{4k^2} \leqslant k^{12k}(2r)^{8k(r+1)}\frac{(168k^2)^r}{(c-1)^{2r}}(\ln n)^r 10000^{r^2}T^{-\ln T/\ln M}a^{8k^2}$$

и, следовательно,

$$|W_1| \leqslant k^{3/k}T^{-\ln T/4k^2\ln M}a^2 \leqslant c_1a^2(\ln n)^{r/4k^2}T^{-\ln T/4k}.$$

Заметим, что

$$4k^2 \geqslant 4(r^2\ln 10000)^2 \geqslant 484\left(\left(\frac{\ln T}{\ln M}\right)^2\ln\, 10000\right)^2 \geqslant c_2\left(\frac{\ln T}{\ln M}\right)^4,$$

поэтому

$$|W_1| \leqslant c_1a^2e^{-\gamma\,\frac{\ln^3 M}{\ln^2 T}}(\ln n)^{r/4k^2}, \qquad (\gamma > 0).$$

Далее, учитывая, что $M > Q(\ln n)^{-c}$, имеем

$$M > e^{\sqrt{\ln\, n}/2}, \qquad \ln^3 M > \frac{1}{8}\sqrt{\ln^3 n}.$$

Поэтому окончательно получаем, что

$$|W_1| \leqslant c_2a^2e^{-\gamma_1\sqrt{\ln n}}, \quad c_2 > 0, \quad \gamma_1 > 0.$$

Следовательно,

$$\bar{s_1}(M) \ll \frac{n}{QD}e^{-\gamma\sqrt{\ln n}}$$

и

$$s_1(m) \ll \frac{n\ln n}{QD} e^{-\gamma\sqrt{\ln n}}\,.$$

Используя полученные оценки, из (17) имеем:

$$s(m) \ll nQ^{-1}e^{-\gamma\sqrt{\ln n}}D^{-1}\ln\, n + nQ^{-1,5}D^{-1} \ll$$

$$\ll nQ^{-1}e^{-\gamma\sqrt{\ln n}/2}D^{-1}, \tag{18}$$

где $D = [x, x_2]$.

5. Продолжим вывод асимптотической формулы для $G_{11}(n)$. Из формул (10) и (11) (см. п. 3) следует, что

$$G_{11}(n) = \Big(\frac{1}{2} - 2\Delta\Big)G_1(n) + O\left(\sum_{0<|m|<\Delta^{-1}\ln n} \frac{1}{\pi|m|}\mid V_m(n)\mid\right),$$

где $\Delta = (\ln^2 n)^{-1}$.

Из (12) и (13) получаем

$$\mid V_m(n)\mid^2 \leqslant \frac{n}{Q}V_1(n) + O\Big(n^2Q^{1/a-2}\ln^3 n\Big)\,.$$

Поэтому, для получения асимптотической формулы нужна оценка $V_1(n)$.

Из (14) имеем

$$V_1(n) \ll \sum_{p_2\in A_2}\sum_{p_2'\in A_2} f(n)\,,$$

где

$$f(n) = \sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\ \sum_{x_2\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}} s(m)\,.$$

Подставив в эту формулу оценку (18), получим:

$$f(n) \ll nQ^{-1}e^{-\frac{\gamma}{2}\sqrt{\ln n}} \sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\ \sum_{x_2\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}} D^{-1}.$$

Оценим сумму в этом неравенстве:

$$\sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\ \sum_{x_2\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}} D^{-1} = \sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\ \sum_{x_2\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}} \frac{(x_1,x_2)}{x_1x_2} =$$

$$= \sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\ \sum_{x_2\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}} \frac{1}{x_1x_2}\sum_{d|(x_1,x_2)}\varphi(d) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{d\leqslant\sqrt{n}P^{-1}} \frac{\varphi(d)}{d^2}\Big(\sum_{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}d^{-1}} x^{-1}\Big)^2 \ll \ln^3 n\,.$$

Поэтому
$$f(n) \ll nQ^{-2} \ln^3 n\,.$$

Отсюда и из (14) следует, что
$$|V_1(n)| \ll n^2 Q^{1/a-3} \ln^3 n\,. \tag{19}$$

Используя оценки (13) и (19), из (12) получим:
$$|V_m(n)|^2 \ll n^2 Q^{-2+\frac{2}{a}} e^{-\frac{\gamma}{4}\sqrt{\ln n}} + n^2 Q^{-2+\frac{1}{a}} \ln^3 n \ll$$
$$\ll (nQ^{-1})^2 Q^{-2+\frac{2}{a}} e^{-\frac{\gamma}{4}\sqrt{\ln n}},$$
то есть
$$|V_m(n)| \ll nQ^{-1+\frac{1}{a}} e^{-\frac{\gamma}{8}\sqrt{\ln n}}\,.$$
Поэтому
$$|R_1(n)| \ll nQ^{-1+\frac{1}{a}} e^{-\frac{\gamma}{8}\sqrt{\ln n}} \ln^2 n\,. \tag{20}$$

Из (11), (20) и (10) следует, что для $G_{11}(n)$ получена асимптотическая формула:
$$G_{11}(n) = \frac{1}{2} G(n)(1 + O(Q^{-\eta})\,, \qquad \eta > 0\,.$$

Для $G_{12}(n)$ аналогичными рассуждениями выводится асимптотическая формула с такими же главным членом и остатком. Поэтому, из (9) следует, что для $G_1(n)$ верна асимптотическая формула:
$$G_1(n) = \frac{1}{2} G(n)(1 + O(Q^{-\eta})\,, \qquad \eta > 0\,,$$
то есть теорема доказана. ∎

4. Заключение. Рассмотренная в статье аддитивная бинарная задача является аналогом проблемы Тичмарша. Подобная задача была решена в работе [10] для уравнения $p_1p_2 - 1 = xy$ при $a \geq 2$. Особенность задачи, решение которой представлено в данной работе, заключается в том, что, при $a \geq 2$ последовательность $p_1p_2^a$ является более редкой, чем последовательность p_1p_2 (при больших a она «близка» к последовательности простых чисел).

Литература

1. Titchmarsh E.C. A divisor problem // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. – 1930. – 54. – P.414-429.
2. Линник Ю.В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах / Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. – 208 с.
3. Виноградов А.И. О плотностной гипотезе для L-рядов Дирихле // Известия АН СССР, серия Математическая. – 1965. – 29; 4. – С.903-934.
4. Bombieri E. On the large sieve // Mathematica. – 1965. – 12. – P.201-225.
5. Горяшин Д.В. Аналоги проблемы делителей Титчмарша // Чебышевский сборник. – 2007. – 8;2. – С.44–55.

6. Виноградов И.М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Математический сборник. – 1940. – 7. – С.365-372.
7. Гриценко С.А. Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха-Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // Успехи математических наук. – 1988. – 43; 4 (262). – С.203-204.
8. Гриценко С.А. Три аддитивные задачи // Известия РАН, серия Математическая. – 1992. – 56;6. – С.1198-1216.
9. Balog A., Friedlander K.J. A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski-Shapiro // Pacific Journal of Mathematics. – 1992. – 156. – P.45-62.
10. Зинченко Н.А. Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами специального вида // Чебышевский сборник. – 2005. – 4;2(14). – С.145-162.
11. Зинченко Н.А. Две бинарные аддитивные задачи // Сибирские электронные математические известия. – 2006. – 3. – С.352-354.
12. Зинченко Н.А. Об одной аддитивной бинарной задаче // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2007. – 1;7. – С.9-13.
13. Зинченко Н.А. Асимптотическая формула для числа решений диофантова уравнения с полупростыми числами из коротких промежутков //Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. – 2014. – 7(183);35. – С.49-60.
14. Виноградов И.М. Основы теории чисел / СПб-М: Лань, 2004. – 240 с.
15. Хооли К. Применение методов решета в теории чисел/ М.: Наука, 1987. – 136 с.
16. Прахар К. Распределение простых чисел / М.: Мир, 1967. – 511 с.
17. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983. – 240 с.
18. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел / М.: Мир, 1974. – 187 с.
19. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / М.: Наука, 1971. – 162 с.
20. Чанга М.Е. Методы аналитической теории чисел / Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2013. – 228 с.

ABOUT A VARIANT OF TITCHMARSH'S DIVISOR PROBLEM WITH SEMISIMPLE NUMBERS OF A SPECIAL TYPE

N.A. Zinchenko

Belgorod State University,
Pobeda St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: zinchenko@bsu.edu.ru

Abstract. The problem of solution number of the equation $p_1p_2^a - xy = 1$ where p_1 и p_2 are primes and x and y are natural, $a \geqslant 2$ is under consideration. The problem is solved at the condition that numbers $p_1p_2^a$ are displayed in $[(2m)^c, (2m+1)^c)$ where $m \in \mathbb{N}, c \in (1,2]$ and primes p_1, p_2 satisfy some additional conditions.

Keywords: Titchmarsh's divisor problem, binary additive problem, semisimple number, method of trigonometric sums, short Vinogradov intervals.

MSC 11P32

ТЕРНАРНАЯ ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

***С.А. Гриценко, **Н.Н. Мотькина**

*Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр., 49, Москва, Россия
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва, Россия, e-mail: s.gritsenko@gmail.com
**Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, Россия, e-mail: motkina@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе решается вариант тернарной проблемы Гольдбаха с простыми числами p, такими, что $a < \{\eta p\} < b$, где a и b — произвольные числа из интервала $[0, 1]$, η — квадратичная иррациональность.

Ключевые слова: аддитивные задачи, простые числа специального вида, число решений, асимптотическая формула, квадратичная иррациональность.

1. Введение. Тернарная проблема Гольдбаха — это задача о числе решений уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3 = N \tag{1}$$

в простых числах p_1, p_2, p_3 для нечетного N, большего пяти. Обозначим количество решений задачи $I_{3,1}(N)$. В 1937 г. И.М. Виноградов получил асимптотическую формулу [1], а именно доказал, что:

$$I_{3,1}(N) = \sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\Big(\frac{N^2}{(\log N)^4}\Big)\,,$$

$$\sigma(N) = \prod_p \Big(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\Big) \prod_{p|N} \Big(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\Big) > 1\,.$$

В настоящей работе решается вариант тернарной проблемы Гольдбаха с простыми числами, на которые наложены ограничения.

Пусть N — достаточно большое нечетное натуральное число, η — квадратичная иррациональность, a и b — произвольные фиксированные действительные числа из отрезка $[0, 1]$. Обозначим $J_{3,1}(N)$ число решений уравнения (1) в простых числах p_i, удовлетворяющих условию $a < \{\eta p_i\} < b$, $i = 1, 2, 3$. Для $J_{3,1}(N)$ нами получена приближенная формула. Результат работы содержится в следующем утвереждении.

Теорема 1. *Для любого фиксированного положительного C справедливо равенство*

$$J_{3,1}(N) = I_{3,1}(N)\sigma(N, a, b) + O(N^2 \log^{-C} N)\,,$$

где

$$\sigma(N,a,b)=\sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N-1,5(a+b))}\frac{\sin^3\pi m(b-a)}{\pi^3 m^3}\,.$$

Заметим, что полученная формула будет асимптотической при большом нечетном N и $b-a>\sqrt[3]{2\zeta(3)}/\pi>0,42$. Если неравенство не выполняется, то мы не можем утверждать, что сумма ряда $\sigma(N,a,b)$ отлична от нуля.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1 ([2], с. 22). *Пусть r — натуральное число, α и β— вещественные числа, $0<\Delta<1/4$, $\Delta\le\beta-\alpha\le 1-\Delta$. Тогда существует периодическая с периодом 1 функция $\psi(x)$, удовлетворяющая условиям:*

1. *$\psi(x)=1$ в промежутке $\alpha+\Delta/2\le x\le\beta-\Delta/2$,*
2. *$0<\psi(x)<1$ в промежутках $\alpha-\Delta/2<x<\alpha+\Delta/2$ и $\beta-\Delta/2<x<\beta+\Delta/2$,*
3. *$\psi(x)=0$ в промежутке $\beta+\Delta/2\le x\le 1+\alpha-\Delta/2$,*
4. *$\psi(x)$ разлагается в ряд Фурье вида*

$$\psi(x)=\beta-\alpha+\sum_{0<|m|<\infty} c(m)e^{2\pi i m x}\,,$$

где

$$|c(m)|\le\min\Big(\beta-\alpha,\frac{1}{\pi|m|}\ ,\ \ \frac{1}{\pi|m|}\Big(\frac{r}{\pi|m|\Delta}\Big)^r\Big)\,.$$

Лемма 2 ([3], с. 158). *Пусть $\tau\ge 1$, α — вещественное число. Тогда существуют целые взаимно простые числа a и q, $1\le q\le\tau$, такие, что*

$$\Big|\alpha-\frac{a}{q}\Big|\le\frac{1}{q\tau}\,.$$

Лемма 3 ([4], с. 264). *Для любого действительного алгебраического числа α степени n можно подобрать положительное c, зависящее только от α, такое, что для всех рациональных чисел a/b ($a/b\ne\alpha$) будет иметь место неравенство*

$$\Big|\alpha-\frac{a}{b}\Big|\ge\frac{c}{b^n}\,.$$

Лемма 4 ([3], с. 29). *Пусть $f(x)$ — комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция, c_n — произвольные комплексные числа,*

$$\mathbb{C}(x)=\sum_{a<n\le x} c_n\,.$$

Тогда

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = -\int_a^b \mathbb{C}(x) f'(x)dx + \mathbb{C}(b)f(b)\,.$$

Лемма 5 ([5], с. 62). *Пусть $1 \leq U \leq N$, где N — натуральное число. Тогда для любой комплекснозначной функции $f(x)$ справедливо тождество*

$$\sum_{U<n\leq N} \Lambda(n)f(n) = W_1 - W_2 - W_3\,,$$

где

$$W_1 = \sum_{d\leq U}\mu(d)\sum_{l\leq Nd^{-1}}(\log l)f(ld)\,,$$

$$W_2 = \sum_{d\leq U}\mu(d)\sum_{n\leq U}\Lambda(n)\sum_{r\leq N(dn)^{-1}} f(ndr)\,,$$

$$W_3 = \sum_{U<m\leq NU^{-1}}\Bigl(\sum_{\substack{d|m,\\ d\leq U}}\mu(d)\Bigr)\sum_{U<n\leq Nm^{-1}}\Lambda(n)f(nm)\,.$$

Лемма 6 ([3], с. 94). *При $P \geq 1$ имеет место оценка*

$$\Bigl|\sum_{x\leq P} e^{2\pi i\alpha x}\Bigr| \leq \min(P;\ 0.5\|\alpha\|^{-1})\,.$$

Лемма 7 ([3], с. 95). *Пусть $u_\nu, v_\nu \geq 0$. Тогда*

$$\Bigl(\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu v_\nu\Bigr)^2 \leq \Bigl(\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu^2\Bigr)\Bigl(\sum_{\nu=1}^{P} v_\nu^2\Bigr)\,.$$

Лемма 8 ([6]). *При $N, k \geq 2$ и натуральном l выполняется неравенство*

$$\sum_{n\leq N}(\tau_k(n))^l \leq c(k,l)N(\log N + 1)^{k^l-1}\,.$$

Лемма 9 ([7], с. 35). *Предположим, что $(a,q) = 1$, $q \leq N$ и $|\alpha - a/q| \leq q^{-2}$. Тогда*

$$\sum_{p\leq N} e^{2\pi i\alpha p}\log p \ll (\log N)^4(Nq^{-1/2} + N^{4/5} + N^{1/2}q^{1/2})\,.$$

3. Доказательство теоремы. 1. Функцию

$$\psi_0(x)=\begin{cases}1, & \text{если } a<x<b,\\ 0\,, & \text{если } 0\le x\le a \text{ или } b\le x\le 1\end{cases}$$

продолжим периодически на всю числовую ось с периодом 1. Пусть

$$S_0(x)=\sum_{p\le N}\psi_0(\eta p)e^{2\pi ixp}\,,$$

тогда число решений уравнения (1) в простых числах p_i, удовлетворяющих условию $a<\{\eta p_i\}<b$, $i=1,2,3$, равно

$$J_{3,1}(N)=\int_0^1 S_0^3(x)e^{-2\pi ixN}dx\,.$$

В лемме о «стаканчиках» И.М. Виноградова (лемма 1) выберем $r=[\log N]$, $\Delta=\log^{-1,5C}N$. При выборе $\alpha=a+\Delta/2$ и $\beta=b-\Delta/2$ функцию ψ из леммы о «стаканчиках» обозначим как ψ_1, α и β — как α_1 и β_1, соответственно. Положив $\alpha=a-\Delta/2$ и $\beta=b+\Delta/2$, соответствующую функцию ψ обозначим ψ_2, α и β — как α_2 и β_2, соответственно.

Определим

$$J_k(N)=\int_0^1\Big(\sum_{p\le N}\psi_k(\eta p)e^{2\pi ixp}\Big)^3 e^{-2\pi ixN}dx\,,\quad k=1,2\,. \tag{2}$$

Из свойств $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ следует:

$$J_1(N)\le J_{3,1}(N)\le J_2(N)\,.$$

Для $J_1(N)$ и $J_2(N)$ выведем приближенные формулы, главные члены в которых одинаковы.

В представлении функции $\psi_k(\eta p)$ рядом Фурье

$$\psi_k(\eta p)=\sum_{|m|<\infty}c_k(m)e^{2\pi im\eta p}$$

оценим сумму при $|m|>r\Delta^{-1}$. Из леммы 1 о «стаканчиках» Виноградова имеем

$$\sum_{|m|>r\Delta^{-1}}c_k(m)e^{2\pi im\eta p}\ll\sum_{|m|>r\Delta^{-1}}\frac{1}{\pi|m|}\Big(\frac{r}{\pi|m|\Delta}\Big)^r\ll\frac{1}{\pi^{r+1}}<N^{-\log\pi}\,.$$

Разложение в ряд Фурье функции $\psi_k(\eta p)$

$$\psi_k(\eta p)=\sum_{|m|\le r\Delta^{-1}}c_k(m)e^{2\pi im\eta p}+O(N^{-\log\pi})$$

подставим в (2):

$$J_k(N) = \int_0^1 \Big(\sum_{|m| \le r\Delta^{-1}} c_k(m) \sum_{p \le N} e^{2\pi i (x+m\eta)p} \Big)^3 e^{-2\pi i x N} dx + O(N^{2-\log \pi})$$

$$= \sum_{|m_1| \le r\Delta^{-1}} c_k(m_1) \sum_{|m_2| \le r\Delta^{-1}} c_k(m_2) \sum_{|m_3| \le r\Delta^{-1}} c_k(m_3) \int_0^1 \sum_{p_1 \le N} e^{2\pi i (x+m_1\eta)p_1}$$

$$\times \sum_{p_2 \le N} e^{2\pi i (x+m_2\eta)p_2} \sum_{p_3 \le N} e^{2\pi i (x+m_3\eta)p_3} e^{-2\pi i x N} dx + O(N^{2-\log \pi}) \,.$$

2. При $m_1 = m_2 = m_3 = m$ рассмотрим

$$I_1(N) = \sum_{|m| \le r\Delta^{-1}} c_k^3(m) e^{2\pi i m \eta N} \sum_{p_1 \le N} \sum_{p_2 \le N} \sum_{p_3 \le N} \int_0^1 e^{2\pi i (x+m\eta)(p_1+p_2+p_3-N)} dx \,.$$

Учтем, что подынтегральная функция периодична по x с периодом 1, получим

$$I_1(N) = I_{3,1}(N) \sum_{|m| \le r\Delta^{-1}} c_k^3(m) e^{2\pi i m \eta N} \,.$$

Промежуток суммирования по m разобьем на два промежутка: $|m| < M$ и $M \le |m| \le r\Delta^{-1}$. На втором промежутке сумму оценим тривиально, используя известные оценки для коэффициентов Фурье (лемма 1):

$$\sum_{M \le |m| \le r\Delta^{-1}} c_k^3(m) e^{2\pi i m \eta N} = O(M^{-2}) \,.$$

Поскольку при $m \ne 0$ ([3], с. 16)

$$c_k(m) = i \, \frac{e^{-2\pi i m \beta_k} - e^{-2\pi i m \alpha_k}}{2\pi m} \Big(\frac{e^{\pi i m \Delta/r} - e^{-\pi i m \Delta/r}}{2\pi i m \Delta/r} \Big)^r$$

или после преобразования

$$c_k(m) = e^{-\pi i m(\alpha_k+\beta_k)} \frac{\sin \pi m(\beta_k - \alpha_k)}{\pi m} \Big(\frac{\sin \pi m \Delta/r}{\pi m \Delta/r} \Big)^r ,$$

то для $0 < |m| < M$

$$c_k^3(m) = e^{-3\pi i m(a+b)} \frac{\sin^3 \pi m(b-a) + O(M\Delta)}{\pi^3 m^3} \Big(1 + O\Big(M\Delta\Big)^2 \Big) =$$

$$= e^{-3\pi i m(a+b)} \frac{\sin^3 \pi m(b-a)}{\pi^3 m^3} \Big(1 + O(M\Delta) \Big) \,.$$

Тогда

$$\sum_{|m|\le r\Delta^{-1}} c_k^3(m)e^{2\pi i m\eta N} =$$

$$= \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N-1{,}5(a+b))}\frac{\sin^3 \pi m(b-a)}{\pi^3 m^3} + O(M\Delta) + O(M^{-2})\,.$$

При выборе $M = \Delta^{-1/3}$ получим

$$I_1(N) = I_{3,1}(N)(\sigma(N,a,b) + O(\Delta^{2/3}))\,.$$

3. Если среди m_1, m_2, m_3 есть два не равных друг другу числа, то допустим, что $m_1 < m_2$. Рассмотрим

$$I(N,m_1,m_2,m_3) = \int_0^1 |S(x+m_1\eta)||S(x+m_2\eta)||S(x+m_3\eta)|dx\,,$$

где

$$S(x) = \sum_{p\le N} e^{2\pi i x p}\,.$$

Сделаем замену $t = x + m_1\eta$. Поскольку подынтегральная функция является периодичной по t с периодом 1, интеграл можно рассматривать на промежутке $E = [-1/\tau; 1-1/\tau)$, где $\tau = N\log^{-B} N$, $B > 2C+8$.

По теореме Дирихле (лемма 2) о приближении действительных чисел рациональными числами t представимо в виде

$$t = \frac{d}{q} + \frac{\theta_1}{q\tau}, \quad (d,q)=1, \quad 1\le q\le \tau\,, \quad |\theta_1|\le 1\,. \tag{3}$$

Промежуток интегрирования по t разобьем на два непересекающихся множества: E_1 — «большие» дуги и E_2 — «малые» дуги. На «больших» дугах E_1 в разложении (3) выберем $q \le \log^A N$, где A — фиксированное число, $A > 2C+8$. Тогда $E_2 = E\backslash E_1$.

Обозначим $m = m_2 - m_1$, $m' = m_3 - m_1$. Тогда

$$I(N,m_1,m_2,m_3) = \int_{E_1} F(t)dt + \int_{E_2} F(t)dt\,,$$

где

$$F(t) = |S(t)||S(t+m\eta)||S(t+m'\eta)|\,.$$

4. Пользуясь неравенством Коши, оценим интеграл по множеству E_1, как

$$\int_{E_1} F(t)dt \ll \max_{t\in E_1}|S(t+m\eta)|\sqrt{\left(\int_0^1 |S(t)|^2dt\right)^2} \ll \pi(N)\max_{t\in E_1}|S(t+m\eta)|\,.$$

Для интеграла по множеству E_2 получим оценку

$$\int_{E_2} F(t)dt \ll \pi(N)\max_{t\in E_2}|S(t)|\,.$$

5. Оценим
$$\max_{t\in E_1}|S(t+m\eta)|$$
сверху. Для этого изучим рациональные приближения числа $t+m\eta$.

По теореме Дирихле (лемма 2)
$$\eta=\frac{A}{Q}+\frac{\theta}{Q\tau_1}\,,\quad (A,Q)=1,\quad |\theta|<1\,,\quad 1\le Q\le\tau_1\,. \tag{4}$$
Значение τ_1 выберем позже.

Поскольку η — квадратичная иррациональность, согласно теореме Лиувилля (лемма 3) имеем
$$\frac{c(\eta)}{Q^2}\le\left|\eta-\frac{A}{Q}\right|,\quad c(\eta)>0\,. \tag{5}$$
Из (4), (5) получаем
$$\frac{c(\eta)}{Q^2}\le\frac{1}{Q\tau_1}\,,$$
следовательно, $Q\asymp\tau_1$. Тогда
$$\eta=\frac{A}{Q}+\frac{\theta_2}{Q^2}\,,\quad |\theta_2|\le 1\,.$$

Для t, принадлежащих «большим» дугам E_1, рассмотрим $\gamma=t+m\eta$. Тогда
$$\gamma=\frac{d}{q}+\frac{A_1}{Q_1}+\frac{\theta_1}{q\tau}+\frac{\theta_2 m}{Q^2}=\frac{X}{Y}+\frac{\theta_1}{q\tau}+\frac{\theta_2 m}{Q^2}\,,$$
$$(A_1,Q_1)=1,\quad (X,Y)=1\,.$$
Поскольку
$$Y=\frac{qQ_1}{(dQ_1+A_1q,qQ_1)}\,, \tag{6}$$
то
$$Y\le qQ\,.$$
При выборе $\tau_1=\sqrt{\tau}$ выполняется
$$\frac{\theta_1}{q\tau}\ll\frac{1}{Q^2}\ll\left(\frac{q}{Y}\right)^2,$$
$$\left|\frac{\theta_1}{q\tau}+\frac{\theta_2 m}{Q^2}\right|=\frac{\theta_3}{Y^2},\quad |\theta_3|\le(1+|m|)q^2\,. \tag{7}$$

Обозначим (dQ_1+A_1q,Q_1) как δ, тогда $\delta|q$ и
$$(dQ_1+A_1q,qQ_1)\le q(dQ_1+A_1q,Q_1)=q\delta\le q^2\,. \tag{8}$$

Тогда из (6), (8) имеем

$$Y \geq \frac{Q_1}{q} \geq \frac{Q}{mq}\,. \tag{9}$$

6. К сумме $S(\gamma)$ применим интегральное преобразование Абеля (лемма 4):

$$S(\gamma) \ll |\mathbb{C}(N)|\frac{1}{\log N} + \int_2^N |\mathbb{C}(x)|\frac{dx}{x\log^2 x}\,,$$

где

$$\mathbb{C}(x) = \sum_{p\leq N} e^{2\pi i\gamma p}\log p.$$

При выборе $U = N^{0{,}02}$ имеет место соотношение

$$\mathbb{C}(x) = \sum_{U<n\leq N} e^{2\pi i\gamma n}\Lambda(n) + O(\sqrt{N})\,.$$

Действительно, оценивая тривиально разность этих сумм, имеем:

$$\sum_{\substack{p^k\leq N\\ k\geq 2}} \log p \leq \pi(\sqrt{N})\log N \ll \sqrt{N}$$

и

$$\sum_{n\leq U}\Lambda(n) = \psi(\sqrt{U}) \ll \sqrt{U}\,.$$

Для оценки тригонометрической суммы с функцией Мангольдта преобразуем ее согласно лемме 5:

$$\sum_{U<n\leq N} e^{2\pi i\gamma n}\Lambda(n) = W_1 - W_2 - W_3\,,$$

где

$$W_1 = \sum_{d\leq U}\mu(d)\sum_{l\leq Nd^{-1}}(\log l)e^{2\pi i\gamma dl}\,,$$

$$W_2 = \sum_{d\leq U}\mu(d)\sum_{n\leq U}\Lambda(n)\sum_{r\leq N(dn)^{-1}} e^{2\pi i\gamma dnr}\,,$$

$$W_3 = \sum_{U<m\leq NU^{-1}} a_m \sum_{U<n\leq Nm^{-1}}\Lambda(n)e^{2\pi i\gamma mn}\,,$$

$$a_m = \sum_{\substack{d|m,\\ d\leq U}}\mu(d)\,.$$

Из внутренней суммы W_1 с помощью формулы частного суммирования (лемма 4) вынесем множитель $\log l$. Учтем, что $|\mu(d)| \leq 1$, $\Lambda(n) \leq \log n$. Тогда

$$W_1, W_2 \ll \log N \sum_{d\leq U^2}\Big|\sum_{l\leq Nd^{-1}} e^{2\pi i\gamma dl}\Big|\,.$$

Пользуясь леммой об оценке модуля линейной тригонометрической суммы (лемма 6), получим

$$W_1, W_2 \ll \log N \sum_{d\le U^2} \min(Nd^{-1}, \|\gamma d\|^{-1}|) \,.$$

Согласно неравенствам (7), (9) для

$$\gamma d = \frac{Xd + \theta_3 d Y^{-1}}{Y}$$

имеем $|\theta_3 dY^{-1}| < 0,5$. Полагая

$$r = \begin{cases} k, & \text{если } k \le Y/2, \\ Y-k, & \text{если } Y/2 < k \le Y, \end{cases}$$

где k — наименьший неотрицательный вычет числа Xd по модулю Y, имеем

$$W_1, W_2 \ll \log^2 N \sum_{0<r\le Y/2} \frac{Y}{r-0,5} \ll Y\log^3 N \,.$$

7. Перейдем к оценке суммы W_3. Суммы по m, n разобьем каждую на $\ll \log N$ сумм с пределами, различающимися не более чем вдвое. Пусть

$$U < M \le NU^{-1}\,, \quad U < K \le NM^{-1}\,, \quad M_1 \le 2M\,, \quad K_1 \le 2K\,,$$

$$MK \le N\,.$$

Тогда

$$W_3 \ll |W_3(M,K)| \log^2 N\,,$$

где

$$W_3(M,K) = \sum_{M<m\le M_1} a_m \sum_{K<n\le K_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \gamma mn}\,.$$

Возведем сумму $W_3(M,K)$ в квадрат, с помощью неравенства Коши (лемма 7) получим неравенство:

$$W_3(M,K)^2 \ll \Big(\sum_{M<m\le M_1} a_m^2 \Big) \sum_{M<m\le M_1} \Big| \sum_{K<n\le K_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \gamma mn} \Big|^2 .$$

Поскольку $a_m \le \tau(m)$, применяя лемму 8 к первой сумме, имеем

$$\sum_{M<m\le M_1} a_m^2 \ll M \log^3 N\,.$$

Для второй суммы

$$S(M,K) = \sum_{M<m\le M_1} \Big| \sum_{K<n\le K_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \gamma mn} \Big|^2 ,$$

раскрывая квадрат модуля, делая внутренним суммирование по m, получим

$$S(M,K) \ll \log^2 N \sum_{K<n_1,n_2\le K_1} \Big| \sum_{M<m\le M_2} e^{2\pi i\gamma m(n_1-n_2)} \Big|,$$

где $M_2 = \min(M_1, N/n_1, N/n_2)$, и n_1 независимо от n_2 пробегает те же значения, что и n_2. При $n_1 = n_2$ внутренняя сумма равна $M_2 - M$, что даст оценку $\ll N\log^2 N$. В остальных случаях для оценки внутренней суммы применим лемму 6:

$$G(M,K) = \sum_{K<n_2<n_1\le K_1} \Big| \sum_{M<m\le M_2} e^{2\pi i\gamma m(n_1-n_2)} \Big| \ll$$

$$\ll \sum_{K<n_2<n_1\le K_1} \min(M, \|\gamma(n_1-n_2)\|^{-1}) \ll K \sum_{1\le h\le K} \min(M, \|\gamma h\|^{-1}).$$

Сумма по h оценивается по аналогии, что и соответствующая сумма у И.М. Виноградова ([3], с. 94). Поскольку условия леммы ([3], с. 94, лемма VI.2.5) в рассматриваемом случае не выполняются, приводим все рассуждения. Пусть $h = h_1 + Ys$, $0 \le h_1 < Y$. Тогда

$$\gamma h = \gamma h_1 + \beta_1 = \frac{Xh_1 + [\beta_1 Y] + \theta_3 h_1 Y^{-1} + \{\beta_1 Y\}}{Y},$$

где $\beta_1 = \gamma Y s$.

$$\sum_{1\le h\le K} \min(M, \|\gamma h\|^{-1} \ll \Big(\frac{K}{Y}+1\Big) \sum_{0\le h_1<Y} \min\Big(M, \frac{1}{\|\gamma h_1 + \beta_1\|}\Big).$$

Делая замену $Z = Xh_1 + [\beta_1 Y]$, учитывая периодичность функции $\|x\|$ с периодом 1, имеем

$$\sum_{0\le h_1<Y} \min\Big(M, \frac{1}{\|\gamma h_1 + \beta\|}\Big) \ll \sum_{|Z|\le 0{,}5Y} \min\Big(M, \frac{1}{\big\|\frac{Z}{Y} + \frac{\theta_4(Z)}{Y}\big\|}\Big),$$

где $|\theta_4(Z)| < 2|m|q^2$. Следовательно,

$$G(M,K) \ll$$

$$\ll K\Big(\frac{K}{Y}+1\Big)\Big(M(4|m|q^2+2) + \sum_{2|m|q^2\le|Z|\le 0{,}5Y} \frac{Y}{|Z| - 2|m|q^2}\Big).$$

Учитывая, что $q \le \log^A N$, $|m| < \Delta^{-1}\log N$, имеем

$$G(M,K) \ll K\Big(\frac{K}{Y}+1\Big)\Big(\frac{M}{\Delta}+Y\Big)\log^{1+2A} N \ll$$

$$\ll \Big(K^2 M\Big(\frac{1}{Y\Delta} + \frac{1}{M} + \frac{1}{K\Delta}\Big) + KY\Big)\log^{1+2A} N.$$

Тогда

$$W_3(M,K)^2 \ll M\log^3 N(N\log^2 N +$$

$$+K^2M\Big(\frac{1}{Y\Delta}+\frac{1}{M}+\frac{1}{K\Delta}\Big)+KY)\log^{3+2A}N)\,.$$

Поскольку

$$U<M\le NU^{-1}\,,\quad U<K\le NU^{-1}\,,\quad MK\le N\,,$$

получаем

$$W_3(M,K)^2\ll\Big(N^2\Big(\frac{1}{Y\Delta}+\frac{1}{U}+\frac{1}{U\Delta}\Big)+NY\Big)\log^{6+2A}N\,.$$

Окончательно:

$$W_3\ll\Big(N\Big(\frac{1}{\sqrt{Y\Delta}}+\frac{1}{\sqrt{U}}+\frac{1}{\sqrt{U\Delta}}\Big)+\sqrt{NY}\Big)\log^{4+A}N\,.$$

При выборе параметров

$$U=N^{0{,}02},\quad \Delta=\log^{-1{,}5C}N,\quad \frac{Q}{mq}\le Y\le qQ\,,$$

$$1\le q\le\log^A N,\quad |m|<\log^{1+1{,}5C}N,\quad Q\asymp\sqrt{N\log^{-B}N}$$

убеждаемся, что для $|W_3|$ получена требуемая оценка.

8. По лемме 9 имеем

$$\max_{t\in E_2}|S(t)|\ll\log^4 N(N\log^{-A/2}N+N^{4/5}+N^{1/2}\tau^{1/2})\,.$$

Собирая вместе полученные оценки, имеем утверждение теоремы.

Литература

1. Виноградов И.М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // ДАН СССР. –1937. –15. – С. 169-172.
2. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / М.: Наука, 1980. – 160 с.
3. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983. – 240 с.
4. Бухштаб А.А. Теория чисел / М.: Просвещение, 1966. –384 с.
5. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана / М.: Физматлит, 1994. – 376 с.
6. Марджанишвили К.К. Оценка одной арифметической суммы // ДАН СССР. – 1939. – 22;1. – С. 391-393.
7. Вон Р. Метод Харди-Литтлвуда / М.: Мир, 1985. – 184 с.

TERNARY GOLDBACH'S PROBLEM WITH PRIMES OF A SPECIAL TYPE

*S.A. Gritsenko, **N.N. Motkina

*Financial University of Russian Federation Government,
Leningradsky Av., 49, Moscow, Russia
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory, 1, Moscow, Russia, e-mail: s.gritsenko@gmail.com
**Belgorod State University,
Pobedy St., 85, 308015, Belgorod, Russia, e-mail: motkina@bsu.edu.ru

Abstract. Let η be a quadratic irrationality. The variant of ternary Goldbach's problem involving primes such that $a < \{\eta p\} < b$ where a and b are arbitrary numbers in the interval $[0, 1]$ is solved.

Key words: additive problems, primes of special type, number of solutions, asymptotic formula, quadratic irrationality.

MSC 34M50

ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.П. Солдатов, Вьонг К. Чан

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, Белгород, e-mail: soldatov48@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена классическая задача линейного сопряжения для бианалитических функций на гладком контуре. Получена явная формула решения задачи и описаны необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Ключевые слова: задача линейного сопряжения, бианалитические функции, ориентируемый контур, класс Гельдера.

Пусть на комплексной плоскости задан ориентируемый гладкий контур Γ, состоящий из простых контуров $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. Тогда дополнение к нему $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ состоит из некоторого числа областей D_0, $D_1, \dots, D_m$, из которых область D_0 бесконечна и содержит окрестность бесконечно удаленной точки ∞, а остальные области конечны. Рассмотрим в этих областях бианалитическую функцию ϕ, т.е. функцию $\phi \in C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} = 0\,.$$

Хорошо известно [1, 2], что она выражается через пару аналитических функций ϕ_0, ϕ_1 по формуле Гурса

$$\phi(z) = \phi_0(z) + \bar{z}\phi_1(z)\,, \quad z \in D\,, \tag{1}$$

где $\phi_1 = \partial\phi/\partial\bar{z}$.

Пусть бианалитическая в D функция ϕ вместе с частной производной $\phi_1 = \partial\phi/\partial\bar{z}$ непрерывна в замкнутых областях $\overline{D}_j$, так что определены односторонние граничные значения $\phi^{\pm}$ и $\phi_1^{\pm}$ на Γ. Тогда можно рассмотреть задачу линейного сопряжения

$$\phi^+ - G_0\phi^- = f_0\,, \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}\right)^+ - G_1\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}\right)^- = f_1\,, \tag{2}$$

где коэффициенты G_k и правые части f_k заданы, причем $G_k(t) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$.

В дальнейшем предполагается, что функции $G_k,\ f_k$ принадлежат классу Гельдера $C^\mu(\Gamma)$, а решение ищется в классе

$$\phi,\ \phi_1 \in C^\mu(\overline{D}_j)\,,\ 1 \le j \le m\,; \quad \phi,\ \phi_1 \in C^\mu(\overline{D}_0 \cap \{|z| \le R\})\,, \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке Международного проекта (0113РК01031) Министерства образования и науки Республики Казахстан.

где здесь и ниже $\phi_1 = \partial\phi/\partial\bar{z}$ и $R > 0$ выбрано по условию $\Gamma \subseteq \{|z| < R\}$. Кроме того, для заданного целого k поведение ϕ на бесконечности подчинено оценке

$$|\phi(z)| + |\bar{z}\phi_1(z)| \le C|z|^{k-1} \text{ при } |z| \ge R\,. \tag{4}$$

Задачи подобного типа исследовались многими авторами (см..например, [3, 4]), как правило, в классе функций, ограниченных на бесконечности. Схема ее решения хорошо известна [5]. С помощью представления (1) она последовательно сводится к задачам аналогичного вида для аналитических функций. Однако в общем случае произвольных функций G_0, G_1 явного решения получено не было (см. например, [5], стр. 318-319). В настоящей статье приведем явное решение этой задачи для любого значения k в оценке (4) и опишем точные условия ее разрешимости.

Пусть $æ_k = \operatorname{Ind} G_k,\ k = 0, 1$, есть индекс Коши функции G_k, т.е. если выбраны точки $\tau_j \in \Gamma_j$ и непрерывные на $\Gamma_j \setminus \tau_j$ ветви $\arg G_k$, то

$$æ_k = \frac{1}{2\pi}\sum\nolimits_{j=1}^{m}[(\arg G_k)(\tau_j - 0) - (\arg G_k)(\tau_j + 0)]\,, \tag{5}$$

где односторонние предельные значения в точках τ_j понимаются по отношению к ориентациям на контурах Γ_j. Пусть X_k есть каноническая функция задачи линейного сопряжения для аналитических функций, отвечающая коэффициенту G_k. Напомним [6], что эта функция всюду отлична от нуля, включая предельные значения $X_k^{\pm}$, удовлетворяет краевому условию

$$X_k^+ = G_k X_k^- \tag{6}$$

и подчинена поведению

$$\lim_{z\to\infty} z^{æ_k} X_k(z) = 1 \tag{7}$$

на бесконечности. Хорошо известно [6], что функция X_k с этими свойствами определяется единственным образом, причем $X_k^{\pm} \in C^{\mu}(\Gamma)$.

Положим

$$A(t) = \frac{\bar{t}[G_1(t) + G_0(t)]}{2G_1(t)}, \quad B(t) = \frac{\bar{t}[G_1(t) - G_0(t)]}{2G_1(t)}\,, \quad C(t) = \frac{B(t)X_1^+(t)}{X_0^+(t)}\,, \tag{8}$$

и введем сингулярный оператор

$$(N\varphi)(t_0) = A(t_0)f_1(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{X_1^+(t_0)}{X_1^+(t)}\frac{f_1(t)dt}{t - t_0}\,, \quad t_0 \in \Gamma\,, \tag{9}$$

Для целого n обозначим $P(n)$ класс многочленов $p(t)$ степени $\deg p \le n - 1$, полагая $P(n) = 0$ для $n \le 0$. Таким образом, $\dim P(n) = \max(0, n)$. Удобно еще для целого m ввести подпространство $P(n, m)$ всех многочленов $p \in P(n)$, для которых

$$\langle q, Cp\rangle = 0\,, \quad q \in P(m)\,, \tag{10}$$

где здесь и ниже для краткости

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_\Gamma \varphi(t)\psi(t)dt\,.$$

Это подпространство возникает в следующей ситуации.

Лемма 1. *Пусть функция $f \in C(\Gamma)$ удовлетворяет условию*

$$\langle f, p\rangle = \langle q, Cp\rangle\,, \quad p \in P(n)\,, \tag{11}$$

для некоторого многочлена $q \in P(m)$. Тогда это условие равносильно

$$\langle f, p\rangle = 0\,, \quad p \in P(n,m)\,.$$

□ Не ограничивая общности можно считать, что числа m, n положительны. Разложим многочлены p и q по базисным функциям $e_i(t) = t^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$, в явном виде

$$p = \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i e_i\,, \quad q = \sum\nolimits_{j=1}^{m} y_j e_j\,,$$

с некоторыми $x_i, y_j \in \mathbb{C}$. Тогда (11) можем записать в виде тождества

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i \langle f, e_i\rangle = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \sum\nolimits_{j=1}^{m} x_i y_j \langle e_j, Ce_i\rangle$$

по $x \in \mathbb{C}^n$, что равносильно разрешимости системы линейных уравнений

$$\sum\nolimits_{j=1}^{m} \langle e_j, Ce_i\rangle y_j = \langle f, e_i\rangle\,, \quad 1 \le i \le n\,.$$

Очевидно, эта система разрешима тогда и только тогда, когда ее правая часть удовлетворяет условию ортогональности

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} \langle f, e_i\rangle \xi_i = 0 \tag{12}$$

всем решениям $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ союзной однородной системы

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} \langle e_j, Ce_i\rangle \xi_i = 0\,, \quad 1 \le j \le m\,. \tag{13}$$

Полагая $p = \sum_1^n \xi_i e_i$, равенство (12) можем записать в форме $\langle f, p\rangle = 0$ для всех многочленов $p \in P(n)$, удовлетворяющих условию $\langle e_j, Cp\rangle = 0$, $1 \le j \le m$, или, что равносильно, условию (10). ■

Из доказательства леммы видно, что размерность пространства $P(n,m)$ совпадает с числом линейно независимых решений однородной системы (13). Таким образом,

$$\dim P(n,m) = n - \operatorname{rang} C(n,m)\,, \tag{14}$$

где матрица $C(n,m) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ определяется элементами $C_{ij} = \langle e_j, Ce_i\rangle$. Очевидно, эта матрица имеет следующую структуру

$$C(n,m) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{m+n-1} \end{pmatrix}, \quad c_k = \int_\Gamma C(t) t^{k-1} dt\,.$$

Сформулируем основной результат о характере разрешимости рассматриваемой задачи (2)-(4).

Теорема 1. *В классе (3), (4) задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда ее правые части f_0, f_1 удовлетворяют условиям ортогональности*

$$\begin{gathered}\langle f_1, (X_1^+)^{-1}q_1\rangle = 0, \quad q_1 \in P(-æ_1 - k + 1),\\ \langle f_0 - Nf_1, (X_0^+)^{-1}q_0\rangle, \quad q_0 \in P(-æ_0 - k, æ_1 + k - 1).\end{gathered} \tag{15}$$

При выполнении этих условий все решения задачи описываются формулой

$$\begin{gathered}\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{X_0(z)}{X_0^+(t)}\frac{f_0(t) - (Nf_1)(t)}{t - z} + \frac{\bar z X_1(z)}{X_1^+(t)}\frac{f_1(t)}{t - z}\right]dt-\\ -\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{X_0(z)}{X_0^+(t)}\frac{B(t)X_1^+(t)p_1(t)}{t - z}\right]dt + X_0(z)p_0(z) + \bar z X_1(z)p_1(z)\end{gathered} \tag{16}$$

с произвольными $p_0 \in P(æ_0 + k)$ и $p_1 \in P(æ_1 + k - 1)$.

□ Согласно (1) задачу (2) можно свести к эквивалентной системе из пары задач для двух аналитических функций:

$$\phi_1^+ - G_1\phi_1^- = f_1, \quad \phi_0^+ - G_0\phi_0^- = f_2\,, \tag{17}$$

где положено $f_2(t) = f_0(t) - \bar t[\phi_1^+(t) - G_0(t)\phi_1(t)]$. Эти задачи рассматриваются в классе функций (3) с соответствующими оценками

$$|\phi_1(z)| \le C|z|^{k-2}\,, \tag{18_1}$$

$$|\phi_0(z)| \le C|z|^{k-1}\,, \tag{18_0}$$

в окрестности бесконечности, вытекающими из (4).

В силу (6), (7) из общих результатов [6,10] о задаче линейного сопряжения следует, что первая задача для ϕ_1 разрешима в классе (3), (18_1) тогда и только тогда, когда

$$\langle f_1, (X_1^+)^{-1}q_1\rangle = 0, \quad q_1 \in P(-æ_1 - k + 1)\,, \tag{19}$$

и при выполнении этих условий все решения задачи даются формулой

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{X_1(z)}{X_1^+(t)}\frac{f_1(t)dt}{t - z} + X_1(z)p_1(z), \quad p_1 \in P(æ_1 + k - 1)\,. \tag{20}$$

Пользуясь этой формулой, вычислим функцию f_2, которую можно записать в виде

$$f_2(t) = f_0(t) - \bar t f_1(t) - \bar t[G_1(t) - G_0(t)]\phi_1^-(t)\,. \tag{21}$$

Согласно (6) и формуле Сохоцкого-Племеля, примененной к интегралу типа Коши в (20), имеем:

$$2G_1(t_0)\phi_1^-(t_0) = -f_1(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{X_1^+(t_0)}{X_1^+(t)}\frac{f_1(t)dt}{t - t_0} + 2X_1^+(t_0)p_1(t_0)\,.$$

Подставляя это выражение в (21), в обозначениях (8), (9) получим

$$f_2(t) = f_0(t) - (Nf_1)(t) - 2B(t)X_1^+(t)p_1(t)\,. \tag{22}$$

Как и выше вторая задача в (17) разрешима в классе (3), (18_0) тогда и только тогда, когда

$$\langle f_2, (X_0^+)^{-1}q_0\rangle = 0, \quad q_0 \in P(-æ_0 - k)\,, \tag{23}$$

и при выполнении этих условий все ее решения даются формулой

$$\phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{X_0(z)}{X_0^+(t)}\frac{f_2(t)dt}{t-z} + X_0(z)p_0(z)\,, \quad p_0 \in P(æ_0 + k)\,. \tag{24}$$

Рассмотрим подробнее условие (23), которое согласно (8), (18) можно переписать в форме тождества

$$\langle f_0 - Nf_1, (X_0^+)^{-1}q_0\rangle = 2\langle p_1, Cq_0\rangle, \quad q_0 \in P(-æ_0 - k)\,, \tag{25}$$

для некоторого многочлена $p_1 \in P(æ_1 + k - 1)$. На основании леммы 1, где роль f играет функция $(2X_0^+)^{-1}(f_0 - Nf_1)$ и буквы p, q следует переменить местами, условие (25) равносильно второму условию ортогональности в (15) и, следовательно, условия (19), (25) можно заменить на (15). Поскольку подстановка (20) и (22), (24) в (1) приводит к формуле (16), тем самым доказательство теоремы завершено. ■

Из теоремы 1 следует, что число линейно независимых решений однородной задачи равно $\dim P(æ_0 + k) + \dim P(æ_1 + k - 1)$, а число линейно независимых условий ее разрешимости равно $\dim P(-æ_0 - k, æ_1 + k - 1) + \dim P(-æ_1 - k + 1)$. Поэтому индекс æ задачи дается формулой

$$æ = \dim P(æ_0+k)+\dim P(æ_1+k-1)-\dim P(-æ_0-k, æ_1+k-1)-\dim P(-æ_1-k+1)\,.$$

С учетом (14) отсюда

$$æ = æ_0 + æ_1 + 2k - 1 + s, \quad s = \mathrm{rang} C(-æ_0 - k, æ_1 + k - 1)\,.$$

Конечно, в этом равенстве следует положить $s = 0$, если одно из чисел $-æ_0 - k, æ_1 + k - 1$ отрицательно.

Литература

1. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
2. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1991. – 85. – С.187–246.
3. Соколов И.А. О краевой задаче типа Римана для бианалитических функций в случае произвольного контура // Изв АН БССР, сер. физ.мат. наук. – 1969. – 6. – С.29-38.
4. Расулов К.М. О решении некоторых краевых задач типа Римана для полианалитических функций // Доклады АН СССР. – 1980. – 252. – 5. – С.1059-1063.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / М.: Физматгиз, 1977.

6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Наука, 1968.
7. Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций / М.: Высшая школа, 1991. – 266 с.
8. Солдатов А.П. Обобщенный интеграл типа Коши / Дифференц. ур-ния. – 1991. – 27, №.2. – С.3-8.
9. Солдатов А.П. Краевая задача линейного сопряжения теории функций / Изв. АН СССР (сер.матем.). – 1979. – 43, №.1. – С.184-202.
10. Аверьянов Г.Н., Солдатов А.П. Задача линейного сопряжения для аналитических функций в семействе весовых пространств Гельдера // Изв. вузов (матем.)(в печати)

THE CLASSICAL PROBLEM OF LINEAR CONJUGATION FOR BIANALYTIC FUNCTIONS

A.P. Soldatov, Wang K. Chan

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: soldatov48@gmail.com

Abstract. The classical problem of linear conjugation problem with smooth contour is under consideration for bianalytic functions. It is obtained the explicit solution formula of this problem and it is given necessary and sufficient conditions of its solvability.

Key words: linear conjugation problem, bianalytic functions, Hölder's class, oriented contour.

MSC 49J15

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ДВУМЕРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.В. Флоринский

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: flor@bsu.edu.ru

Аннотация. Для линейной задачи быстродействия с двумерным управлением доказаны условия оптимальности и предложен численный метод решения такой задачи, основанный на аналитическом решении задачи с одномерным управлением.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, область управляемости, каноническая система, опорный вектор.

1. Введение. В современной теории оптимального управления одно из центральных мест занимает проблема быстродействия. Поскольку время быстродействия является наиболее естественным критерием оптимальности, задачи на быстродействие стали одним из наиболее распространенных объектов применения различных методов оптимального управления. В последнее время существенное развитие теории линейного быстродействия было достигнуто на основе её связи с классической проблемой моментов. Одним из центральных пунктов в таком подходе стало исследование задачи быстродействия для канонической управляемой системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \qquad |u| \le 1, \\ \dot{x}_i = x_{i-1}, \quad i = \overline{2, n}, \\ x(0) = x, \quad x(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min\,. \end{cases} \tag{1}$$

В.И. Коробовым и Г.М. Скляром в [1] показано, что решение этой задачи эквивалентно степенной проблеме моментов на минимально возможном отрезке (min-проблеме моментов), что позволило впервые получить аналитическое решение задачи (1) для системы произвольного порядка n. В [1,2] даны методы нахождения времени быстродействия Θ, моментов переключения $T_1, T_2, ..., T_{n-1}$ управления $u(t)$ (точки разрыва функции $u(t)$) и рода управления $\tilde{u} = \pm 1$ – управления на конечном промежутке $[T_{n-1}, \Theta]$.

В настоящей работе для линейной задачи быстродействия с двумерным управлением

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax + b_1 u_1 + b_2 u_2, \\ |u_1| \le 1, \qquad |u_2| \le 1, \qquad x(0) = x_0, \qquad x(\Theta) = 0, \qquad \Theta \to \min \end{gathered} \tag{2}$$

доказываются условия оптимальности по быстродействию и предложен численный метод, основанный на использовании аналитического решения задачи (1), приведен алгоритм этого метода.

2. Условия оптимальности для линейной задачи быстродействия с двумерным управлением. Рассмотрим задачу быстродействия (2). Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – управления, переводящие точку $x(0)$ в 0. Обозначим через $M_1(\Theta)$ множество точек вида

$$v_0 = -\int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau,$$

а через $M_2(\Theta)$ – множество точек вида

$$w_0 = -\int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau.$$

Множества $M_1(\Theta)$ и $M_2(\Theta)$ выпуклые, содержат 0 в качестве внутренней точки.

Нетрудно видеть, что множество $M_1(\Theta)$ является областью управляемости в начало координат для системы

$$\dot{x} = Ax + b_1 u_1, \qquad |u_1| \le 1, \tag{3}$$

а множество $M_2(\Theta)$ – областью управляемости в ноль для системы

$$\dot{x} = Ax + b_2 u_2, \qquad |u_2| \le 1\,. \tag{4}$$

Пусть $M_3(\Theta) = x_0 - M_2(\Theta)$. Тогда $M_3(\Theta)$ – выпуклое множество, содержащее x_0 в качестве внутренней точки. Так как области управляемости $M_1(\Theta)$ и $M_2(\Theta)$ удовлетворяют условиям $M_1(\Theta_1) \subset M_1(\Theta_2)$ и $M_2(\Theta_1) \subset M_2(\Theta_2)$, то и $M_3(\Theta_1) \subset M_3(\Theta_2)$ при $\Theta_1 < \Theta_2$.

Теорема. *Пусть для системы (2) выполнены следующие условия:*

$$\operatorname{rank}(b_1, Ab_1, ..., A^{n-1}b_1) = n\,,$$

$$\operatorname{rank}(b_2, Ab_2, ..., A^{n-1}b_2) = n\,,$$

множества $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ выпуклые. Тогда для того, чтобы время быстродействия Θ для задачи (2) было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы пересечение множеств $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ было непустым и не содержало внутренней точки.

□ Необходимость. Предположим противное. Пусть пересечение множеств $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ содержит внутреннюю точку. Тогда время Θ не является оптимальным. Действительно, пусть $\tilde{x}_0$ – общая внутренняя точка этих множеств. Тогда из этой точки можно попасть в 0 за строго меньшее, чем Θ время Θ_1 и, аналогично, из точки $x_0 - \tilde{x}_0$ в 0 – за строго меньшее время Θ_2, чем Θ. Это значит, что существуют управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ такие, что $|u_1| \le 1$ и $|u_2| \le 1$ и такие, что выполняются равенства

$$\tilde{x}_0 = -\int_0^{\Theta_1} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau \tag{5}$$

для $\Theta_1 < \Theta$ и

$$\tilde{x}_0 - x_0 = -\int_0^{\Theta_2} e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau \tag{6}$$

для $\Theta_2 < \Theta$. Пусть для определенности $\Theta_1 \geq \Theta_2$. Тогда можно положить управление $u_1(\tau) = 0$ на отрезке $[\Theta_2, \Theta_1]$. В этом случае будут справедливы равенство (6) и равенство

$$\tilde{x}_0 = -\int_0^{\Theta_2} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau \,,$$

т.е. равенство

$$x_0 = -\int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau - \int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau$$

будет справедливым при $\Theta = \Theta_2$, а это значит, что из точки x_0 можно попасть в 0 в силу системы (2) за меньшее время. Необходимость доказана.

Достаточность. Докажем, что если $M_1(\Theta) \cap M_3(\Theta) \neq \emptyset$ и не содержит внутреннюю точку, то время быстродействия Θ оптимально.

Действительно, пусть время Θ не является временем быстродействия и пусть $\hat{\Theta}$ – время быстродействия. В этом случае $M_1(\hat{\Theta}) \subset M_1(\Theta)$ и $M_3(\hat{\Theta}) \subset M_3(\Theta)$ при $\hat{\Theta} < \Theta$, но тогда $M_1(\hat{\Theta}) \cap M_3(\hat{\Theta}) = \emptyset$, а это означает, что за меньшее, чем Θ время попасть из точки x_0 в 0 невозможно. Следовательно, Θ – оптимальное по быстродействию время. ■

Таким образом, время быстродействия Θ должно быть таково, что множества $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ должны иметь общую граничную точку, которую обозначим также через $\tilde{x}_0$. В этой точке существует (возможно, не единственная) гиперплоскость, разделяющая эти два множества. Следовательно, в этой точке существуют опорные векторы к множествам $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$. Метод нахождения опорного вектора к области управляемости канонической задачи быстродействия описан в работах [3,4]. Таким образом, решение задачи быстродействия (2) сводится к решению следующих задач быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b_1 u_1, & |u_1| \leq 1, \\ x(0) = \tilde{x}_0 & x(\Theta) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

и

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b_2 u_2, & |u_2| \leq 1, \\ x(0) = x_0 - \tilde{x}_0 & x(\Theta) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

и нахождению такой точки $\tilde{x}_0$, что время быстродействия Θ будет являться общим как для задачи (7), так и для задачи (8), и оно же будет являться временем быстродействия для задачи (2).

3. Преобразование линейной задачи быстродействия к каноническому виду. Приведем метод преобразования линейной задачи быстродействия к каноническому виду.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + bu \,, \tag{9}$$

где A – вещественная матрица $n \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Рассмотрим приведение произвольной матрицы A к форме Фробениуса. Предположим, что для системы (9) выполнено условие

$$\mathrm{rank}(b, Ab, ..., A^{n-1}b) = n\,. \tag{10}$$

Определим вектор c из следующих равенств:

$$\begin{aligned}
&c^* b = 0\,,\\
&c^* A b = 0\,,\\
&........\\
&c^* A^{n-2} b = 0\,,\\
&c^* A^{n-1} b = 1\,.
\end{aligned}$$

В силу предположения (10) эта система имеет единственное решение.

Сделаем замену:

$$y = Qx,$$

где матрица Q составлена из векторов c^*A^{n-1}, c^*A^{n-2}, ..., c^* как из строк:

$$Q = \begin{pmatrix} c^*A^{n-1} \\ c^*A^{n-2} \\ \vdots \\ c^* \end{pmatrix},$$

т.е. $y_i = c^*A^{n-i}x_i,\;\; i = \overline{1,n}$. Умножая систему (9) на матрицу Q, получим систему:

$$Q\dot{x} = QAx + Qbu,$$

которую можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1 = c^*A^n x + c^*A^{n-1}bu\,,\\
&\dot{y}_2 = c^*A^{n-1} x + c^*A^{n-2}bu\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dot{y}_n = c^*Ax + c^*bu\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

По теореме Гамильтона-Кэли,

$$A^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i\,,$$

где a_i – коэффициенты характеристического полинома матрицы A

$$\lambda^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i,$$

и учитывая, что

$$c^* A^i b = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = n-1, \\ 0, & \text{если} \quad 0 \le i < n-1, \end{cases}$$

систему (11) можно записать в виде:

$$\begin{array}{l} \dot{y}_1 = c^*(a_{n-1}A^{n-1}x + ... + a_0 x) + u, \\ \dot{y}_2 = y_1, \\ \ldots\ldots \\ \dot{y}_n = y_{n-1}. \end{array} \tag{12}$$

В случае, если матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

то, учитывая, что $\lambda^n = 0$, система (12) принимает канонический вид:

$$\begin{array}{l} \dot{y}_1 = u, \\ \dot{y}_2 = y_1, \\ \ldots\ldots \\ \dot{y}_n = y_{n-1}. \end{array} \tag{14}$$

Матрица Q^{-1}, обратная к матрице Q, имеет вид:

$$Q^{-1} = (b,\ Ab,\ \ldots,\ A^{n-1}b),$$

откуда из критерия управляемости (10) следует, что, если система (9) с матрицей A вида (13) управляемая, то она может быть приведена к каноническому виду (14).

Таким образом, при решении задачи быстродействия (2) системы (7) и (8) приводятся к каноническому виду при помощи матриц Q_1 и Q_2 соответственно и решение задачи (2) сводится к решению двух канонических задач с общим временем быстродействия Θ:

$$\begin{array}{l} \dot{y}_1 = u_1, \qquad |u_1| \le 1\,, \\ \dot{y}_i = y_{i-1}, \qquad i = \overline{2, n}\,, \\ y(0) = y_0 = Q_1 \tilde{x}_0, \qquad y(\Theta) = 0, \qquad \Theta \to \min\,, \end{array} \tag{15}$$

где $y = Q_1 x$ и

$$\begin{array}{l} \dot{z}_1 = u_2, \qquad |u_2| \le 1\,, \\ \dot{z}_i = z_{i-1}, \qquad i = \overline{2, n}\,, \\ z(0) = z_0 = Q_2(x_0 - \tilde{x}_0), \qquad z(\Theta) = 0\,, \qquad \Theta \to \min\,, \end{array} \tag{16}$$

где $z = Q_2 x$.

4. Численное решение задачи быстродействия с двумерным управлением. Опишем теперь численный метод решения задачи быстродействия с двумерным управлением. Для этого рассмотрим задачу быстродействия (2) с матрицей A вида (13). Как было показано, решение этой задачи сводится к решению задач (7) и (8) и нахождению такой точки $\tilde{x}_0$, что время Θ является временем быстродействия как для задачи (7) из точки $\tilde{x}_0$ в 0, так и для задачи (8) из точки $x_0 - \tilde{x}_0$ в 0, и оно же будет временем быстродействия для задачи (2) из точки x_0 в 0.

При помощи невырожденных матриц Q_1 и Q_2 приведем задачи (7) и (8) к каноническому виду (15) и (16) соответственно.

Обозначим через N_y опорный вектор к области управляемости системы (15) за время Θ_y, а через N_z – опорный вектор к области управляемости системы (16) за время Θ_z.

Между точками x_0 и 0 на отрезке прямой, соединяющей эти две точки, методом половинного деления находим точку $\tilde{x}$, в которой $Q_y = Q_z$. В этой точке находим опорный вектор [3,4] $N_y = N_y(Q_1\tilde{x}, \Theta_y)$ к области управляемости системы (15) за время Θ_y и опорный вектор $N_z = N_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}), \Theta_z)$ к области управляемости системы (16) за время Θ_z. Отметим, что векторы $Q_1^{-1}N_y$ и $Q_2^{-1}N_z$ являются опорными векторами в точке $\tilde{x}$ исходного пространства к областям управляемости систем (7) за время Θ_y и (8) за время Θ_z. Если угол между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ (обозначим его через $\delta = \delta(\tilde{x})$ равен π (вычислять следует $\cos\delta$), то время быстродействия системы (2) равно $\Theta = \Theta_y = \Theta_z$ и $\tilde{x}_0 = \tilde{x}$. Для каждой из систем (15) и (16) находим моменты переключения [1,2], что и будет решением исходной задачи. В противном случае находим биссектрису угла $\delta(\tilde{x})$. На этой биссектрисе находим точки минимума для Θ_y и Θ_z (при этом можно применять метод деления отрезка пополам или метод золотого сечения поиска минимума функции) и выбираем ту из точек минимума, которая находится ближе к точке $\tilde{x}$. Обозначим эту точку через $\tilde{x}_b$. Находим в этой точке $\Theta_y = \Theta_y(Q_1\tilde{x}_b)$ и $\Theta_z = \Theta_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}_b))$.

Если $\Theta_y > \Theta_z$ в точке $\tilde{x}_b$, то на отрезке прямой, соединяющей точки $\tilde{x}_b$ и 0, находим точку $\tilde{x}'$, в которой $\Theta_y = \Theta_z$; если $\Theta_y < \Theta_z$, то точку $\tilde{x}'$ находим на отрезке, соединяющем $\tilde{x}_b$ и x_0.

В точке $\tilde{x}'$ находим опорные векторы $N_y = N_y(Q_1\tilde{x}', \Theta_y)$ и $N_z = N_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}'), \Theta_z)$. Если угол δ между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ равен π, то $\Theta = \Theta_y = \Theta_z$ – время быстродействия для задачи (2) и $\tilde{x}_0 = \tilde{x}'$. В противном случае находим биссектрису угла $\delta = \delta(\tilde{x}')$ и процесс повторяется до тех пор, пока на очередном шаге угол δ между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ не станет равным π с заданной точностью ε, то есть пока не будет выполняться неравенство

$$|\cos\delta + 1| < \varepsilon.$$

Приведем результаты численного решения описанным методом задачи быстродействия:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u_1 + u_2\,,\\
\dot{x}_2 &= x_1 + u_1 + u_2\,,\\
\dot{x}_3 &= x_2 + u_2\,,\\
\dot{x}_4 &= x_3\,;
\end{aligned}$$

$$|u_1| \le 1, \qquad |u_2| \le 1\,, \qquad x(0) = x_0, \qquad x(\Theta) = 0, \qquad \Theta \to \min\,.$$

Для начальной точки $x_0 = (0; 0; 1; 1)$:

- точка $\tilde{x}_0 \approx (0,499270725; -0,69352541; -0,05530742; 1,81190481)$;
- время быстродействия $\Theta \approx 4,65060538$;
- моменты переключения для управления u_1:

$$T_1 \approx 0,60356662; \quad T_2 \approx 1,96722527; \quad T_3 \approx 3,93859669\,;$$

- моменты переключения для управления u_2:

$$T_1 \approx 0,93012912; \quad T_2 \approx 3,24907149; \quad T_3 \approx 4,39460969\,;$$

- род управления (управление на конечном промежутке): $\tilde{u}_1 = +1, \quad \tilde{u}_1 = +1.$

Для начальной точки $x_0 = (0; 1; 1; 1)$
точка $\tilde{x}_0 \approx (-0,230497; -0,229221; 0,461084; 1,174799)$;
время быстродействия $\Theta \approx 4,965695$;
моменты переключения для управления u_1:
$T_1 \approx 0,611052; \quad T_2 \approx 2,524571; \quad T_3 \approx 4,281118$;
моменты переключения для управления u_2:
$T_1 \approx 1,455239; \quad T_2 \approx 3,459045; \quad T_3 \approx 4,965696$;
род управления (управление на конечном промежутке): $\tilde{u}_1 = +1, \quad \tilde{u}_1 = +1.$

Литература

1. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Мат. сборник. – 1987. – 134(176), №2(10). – С.186 – 206.
2. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Методы построения оптимальных по быстродействию управлений для канонических управляемых систем // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999. – 6, №3/4. – С.264-287.
3. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Многочлен минимальной степени для определения всех моментов переключения в задаче быстродействия // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2000. – Т.7, №3. – С.308-320.
4. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Минимальный полином для нахождения моментов переключения и опорного вектора к области управляемости // Дифференциальные уравнения. – 2002. – 38. – С.16-19.

SOLUTION OF THE LINEAR TIME-OPTIMAL PROBLEM WITH TWO-DIMENSIONAL CONTROL

V.V. Florinsky

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: flor@bsu.edu.ru

Abstract. For the linear time-optimal problem conditions of optimality are proved and the numerical method for its solving is proposed that is based on the analytical solution of time-optimal problem with one-dimensional control.

Key words: optimal control, time-optimal problem, set of controllability, canonical system, support vector.

MSC 05A18

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА РАЗЛОЖЕНИЙ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА

Ю.П. Вирченко, Л.П. Остапенко

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается комбинаторная задача о числе разложений M_n произвольного конечного множества из n элементов. Вычисляется производящая функция числа M_n, $n \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: разложения конечного множества, производящая функция, симметричные функции, бесконечномерная алгебра.

1. Разложения конечного множества. Пусть $I_n = \{1, 2, ..., n\}$ – стандартное n-элементное множество. Разложением множества I_n называется неупорядоченный набор непустых множеств ω_j, $j = 1 \div s$, которые называются *компонентами* этого разложения и которые составляют дизъюнктивное разложение множества I_n:

$$\bigcup_{l=1}^{s} \omega_l = I_n \,, \quad \omega_j \cap \omega_k \neq \varnothing \,, \quad j \neq k \,, \quad j, k = 1 \div s \,.$$

Число s компонент разложения называется его *мощностью*.

Обозначим посредством M_n значения функции от $n \in \mathbb{N}$, равные числу всех возможных разложений множества I_n для фиксированного значения $n \in \mathbb{N}$. Следующий пример поясняет смысл введенных понятий.

Пример:

1. $n = 1$, $I_1 = \{1\}$. Имеется только одно разложение с $s = 1$, $\omega_1 = I_1 = \{1\}$. $M_1 = 1$.

2. $n = 2$, $I_2 = \{1, 2\}$. Имеется два разложения с $s = 1$, $\omega_1 = I_2$ и с $s = 2$, $\omega_1 = \{1\}$, $\omega_2 = \{2\}$. $M_2 = 2$.

3. $n = 3$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$. Имеется пять разложений с $s = 1$, $\omega_1 = I_3$ и с $s = 2$: $\omega_1 = \{1\}$, $\omega_2 = \{2, 3\}$; $\omega_1 = \{1, 2\}$, $\omega_2 = \{3\}$; $\omega_1 = \{1, 3\}$, $\omega_2 = \{2\}$; с $s = 3$, $\omega_1 = \{1\}$, $\omega_2 = \{2\}$, $\omega_3 = \{3\}$. $M_3 = 5$.

В связи с понятием разложения, естественным образом, возникает комбинаторная задача о вычислении числа разложений M_n для каждого значения $n \in \mathbb{N}$. Эта задача тесно связана с некоторыми вопросами статистической механики (см. [1]). Настоящее сообщение посвящено решению этой задачи, которое понимается как вычисление производящей функции (см., например, [2])

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} M_n \,, \qquad M_n = \left(\frac{d^n G(z)}{dz^n} \right)_{z=0} , \tag{1}$$

соответствующей комбинаторной функции M_n, где, по определению, $M_0 = 1$.

2. Алгебра последовательностей симметричных функций. Вычисление функции $G(z)$ будет выполнено на основе специальной алгебраической техники, используемой в статистической механике (см., например, [1]), возникновение которой было связано с преобразованиями статистических сумм [3].

Рассмотрим линейное пространство бесконечных последовательностей $\Phi = \langle \varphi_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$, в которых каждая компонента φ_m при любом $m \in \mathbb{N}_+$ является симметричной измеримой функцией на $[0,1]^m$ со значениями в $\mathbb{R}$, $\varphi_m(X_m) \equiv \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_m)$, $X_m = \langle x_1, x_2, ..., x_m \rangle$. При этом для значения $m = 0$ такие функции, полагаются константами. Это линейное пространство превращается в коммутативную алгебру $\mathbb{A}$ при определении на нем следующей бинарной операции $*$. Для каждой пары $\Phi = \langle \varphi_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ и $\Psi = \langle \psi_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ последовательностей из $\mathbb{A}$ построим последовательность $\Phi * \Psi$, компоненты которой определяются формулой (см. [1])

$$(\Phi * \Psi)_n(X(I_n)) = \sum_{\omega \subset I_n} \varphi_{|\omega|}(X(\omega)) \psi_{|I_n \setminus \omega|}(X(I_n \setminus \omega)) \,, \tag{1}$$

в которой использованы следующие обозначения: $X(\omega) = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_s} \rangle$ для каждого $\omega = \{i_1, i_2, ..., i_s\} \subset I_n$ и $|\omega| = s$ – число элементов в ω.

Очевидно, что функции $(\Phi * \Psi)_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ симметричны при любом $n \in \mathbb{N}$ и, таким образом, результатом применения операции $*$ к двум последовательностям Φ и Ψ снова является последовательность симметричных функций. Очевидным образом операция $*$ является коммутативным умножением, так как удовлетворяет всем свойствам, предъявляемым к умножению в общеалгебраическом смысле. Таким образом, линейное пространство $\mathbb{A}$, снабженное операцией $*$ является бесконечномерной коммутативной алгеброй. Единицей алгебры $\mathbb{A}$ является последовательность $\mathbf{1} = \langle 1, 0, 0, ... \rangle$.

В алгебре $\mathbb{A}$ имеется идеал $\mathbb{A}_0$, который состоит из последовательностей Φ функций с $\varphi_0 = 0$. Для элементов Φ этого идеала рассмотрим степень Φ_*^m с любым $m \in \mathbb{N}$. Тогда компоненты $(\Phi_*^m)_n$ этой последовательности равны нулю при $n > m$. Если же $n \le m$, то эти компоненты даются формулой

$$\left(\Phi_*^m\right)_n(X(I_n)) = m! \sum_{\substack{\omega_1, ..., \omega_m : \\ \omega_1 \cup \omega_2 \cup ... \cup \omega_m = I_n, \\ \omega_j \ne \varnothing, \ \omega_j \cap \omega_k = \varnothing}} \varphi_{|\omega_1|}(X(\omega_1)) \varphi_{|\omega_2|}(X(\omega_2)) ... \varphi_{|\omega_m|}(X(\omega_m)) \,,$$

то есть суммирование в правой части формулы производится по разложениям множества I_n, содержащим ровно m компонент. Тогда для элементов Φ из идеала $\mathbb{A}_0$ имеет место формула

$$\Big(\exp_* \Phi\Big)_n(X(I_n)) = (\mathbf{1})_n(X(I_n)) + \big(\Phi\big)_n(X(I_n)) + \frac{1}{2!}\big(\Phi_*^2\big)_n(X(I_n)) + \frac{1}{3!}\big(\Phi_*^3\big)_n(X(I_n)) + ... =$$

$$= \sum_{\substack{\omega_1, ..., \omega_s : \\ \omega_1 \cup \omega_2 \cup ... \cup \omega_s = I_n \,, \\ \omega_j \ne \varnothing, \ \omega_j \cap \omega_k = \varnothing}} \varphi_{|\omega_1|}(X(\omega_1)) \varphi_{|\omega_2|}(X(\omega_2)) ... \varphi_{|\omega_s|}(X(\omega_s)) \,, \tag{2}$$

где суммирование производится по всем разложениям множества I_n с любым допустимым числом $s = 1, ..., n$ компонент.

Так как

$$M_n = \sum_{\substack{\omega_1, ..., \omega_s : \\ \omega_1 \cup \omega_2 \cup ... \cup \omega_s = I_n, \\ \omega_j \neq \varnothing, \, \omega_j \cap \omega_k = \varnothing}} 1 \,,$$

то из (2) следует, что

$$M_n = \Big(\exp_* \Psi \Big)_n (X(I_n)) \,, \qquad \chi = \langle 0, 1, 1, ...\rangle = 1 - \delta_{0,n} \,, \quad n \in \mathbb{N}_+$$

для любой точки $X_n \in [0,1]^n$. Эта формула является основой для вычисления производящей функции $G(z)$.

Введем линейную форму $L(z; \cdot)$ на алгебре $\mathbb{A}$, зависящую от параметра $z \in \mathbb{C}$. Для каждого элемента Φ алгебры $\mathbb{A}$ значение $L(z; \Phi)$ этой формы определяется формулой

$$L(z; \Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int\limits_{[0,1]^n} \varphi_n(X_n) dX_n \,, \tag{3}$$

где $dX_n = dx_1 dx_2 ... dx_n$ – мера Лебега на $[0,1]^n$. Эти значения заведомо конечны в том случае, когда последовательность функций Φ равномерно ограничена.

Теорема 1. *Форма L мультипликативна, то есть для каждой пары элементов $\langle \Phi, \Psi \rangle$ с равномерно ограниченными элементами имеет место равенство*

$$L(z; \Phi * \Psi) = L(z; \Phi) L(z; \Psi) \,. \tag{4}$$

□ Доказательство проводится приводимым ниже прямым вычислением, в котором все ряды равномерно сходятся, ввиду предполагаемой равномерной ограниченности. Согласно определению (1),

$$L(z; \Phi * \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int\limits_{[0,1]^n} (\Phi * \Psi)_n (X(I_n)) dX_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int\limits_{[0,1]^n} \sum_{\omega \subset I_n} \varphi_{|\omega|}(X(\omega)) \psi_{|I_n \setminus \omega|}(X(I_n \setminus \omega)) dX_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{\omega \subset I_n} \int\limits_{[0,1]^n} \varphi_{|\omega|}(X(\omega)) \psi_{|I_n \setminus \omega|}(X(I_n \setminus \omega)) dX_n \,.$$

После замены переменных интегрирования $X(\omega)$, $|\omega| = m$ на $X(I_m)$ и $X(I_n \setminus \omega)$ на $X(I_n \setminus I_m)$ в каждом из слагаемых и используя правило перестройки суммирований

$$\sum_{\omega\in I_n}\ldots=\sum_{m=0}^{n}\sum_{\omega\in I_n:|\omega|=m}\ldots,\quad \sum_{\omega\in I_n:|\omega|=m}1=\binom{n}{m},\ \text{получаем}$$

$$L(z;\Phi*\Psi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{\omega\subset I_n}\int\limits_{[0,1]^n}\varphi_m(X_m)\psi_{n-m}(X(I_n\setminus I_m))dX_n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\int\limits_{[0,1]^n}\varphi_m(X_m)\psi_{n-m}(X(I_n\setminus I_m))dX_n=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\int\limits_{[0,1]^m}\varphi_m(X_m)dX(I_m)\int\limits_{[0,1]^{n-m}}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{z^{n-m}}{(n-m)!}\psi_{n-m}(X(I_n\backslash I_m))dX(I_{n-m})=$$

$$=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\int\limits_{[0,1]^m}\varphi_m(X_m)dX(I_m)\right)\left(\int\limits_{[0,1]^n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\psi_n(X(I_n))dX(I_n)\right)=L(z;\Phi)L(z;\Psi)\,.\ \blacksquare$$

Следствие. *Если* $\Phi\in\mathbb{A}_0$, *то*

$$L\big(z;\exp_*\Phi\big)=\exp\big(L(z;\Phi)\big)\,. \tag{5}$$

3. Вычисление производящей функции $G(z)$. Положим $\Phi=\chi\in\mathbb{A}_0$. Тогда

$$L(z;\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z-1$$

и, на основании формулы (5),

$$L(z;\exp_*\chi)=\exp\left(e^z-1\right)\,. \tag{6}$$

С другой стороны, как было сказано выше $(\exp_*\Phi)=M_n$, $n\in\mathbb{N}$, и поэтому, согласно (6),

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}M_n=L(z;\exp_*\chi)=\exp\left(e^z-1\right)\,.$$

Таким образом, производящая функция $G(z)$ числа разложений определяется формулой

$$G(z)=\exp\left(e^z-1\right)\,. \tag{7}$$

Пример. Произведем расчет первых пяти значений M_n на основе формулы (7).

$$M_n=G^{(n)}(0)\,.$$

Заметим, что $G^{(n)} = G(z)Q_n(e^z)$, где $Q_n(x)$ – полином n-й степени, где $Q_1(x) = x$. При этом полиномы Q_n вычисляются рекуррентно по формуле

$$Q_{n+1}(x) = x\big(Q_n'(x) + Q_n(x)\big)\,.$$

Это положение проверяется непосредственным дифференцированием

$$G^{(n+1)} = G'(z)Q_n(e^z) + G(z)Q_n'(e^z)e^z = G(z)\big(Q_n(e^z) + Q_n'(e^z)\big)e^z\,.$$

Так как $G(0) = 1$ и $M_n = G^{(n)}(0) = G(0)Q_n(1)$, $Q_{n+1}(1) = Q_n(1) + Q_n'(1)$, то

$$\begin{aligned}
&Q_1(x) = x && M_1 = 1\,;\\
&Q_2(x) = x + x^2 && M_2 = 2\,;\\
&Q_3(x) = x + 3x^2 + x^3 && M_3 = 5\,;\\
&Q_4(x) = x + 7x^2 + 6x^3 + x^4\,, && M_4 = 15\,;\\
&Q_5(x) = x + 15x^2 + 25x^3 + 10x^4 + x^5\,, && M_5 = 52\,;
\end{aligned}$$

то есть эти значения совпадают со значениями M_1, M_2, M_3, вычисленными выше напрямую.

Литература

1. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты / М.: Мир, 1971. – 368 с.
2. Холл М. Комбинаторный анализ / М.: Иностр.лит., 1963. – 98 с.
3. Майер Дж., Гепперт-Майер М. Статистическая механика / М.: Мир, 1980. –546 с.

CALCULATION OF PARTITION NUMBER OF FINITE SET

Yu.P. Virchenko, L.P. Ostapenko

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: soldatov48@gmail.com

Abstract. Combinatorial problem about the partition number M_n of arbitrary finite set of n elements is studied. The generation function of the number M_n, $n \in \mathbb{N}$ is calculated.

Key words: partition of finite set, generation function, symmetric functions, infinite dimensional algebra.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА,
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MSC 92B20

ИМИТАЦИЯ ОТРАБОТКИ ДЕЙСТВИЙ В АЛГОРИТМАХ САМООБУЧЕНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ НА НЕЧЕТКИХ СЕМАНТИЧЕСКИХ СЕТЯХ

Л.В. Красовская

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, Россия, e-mail: krasovskaya@bsu.edu.ru

Аннотация. Разработана методика сравнения нечетко представленных отношений в модели проблемной среды, отличающаяся от известных тем, что она позволяет выполнять несмещенную оценку равенства нечетко выраженных показателей и тем самым повысить достоверность сравнения [1,2]. Описаны алгоритмы самообучения, позволяющие формировать программы целесообразного поведения в различных проблемных средах, отличающиеся от известных, имитацией отработки пробующих действий на нечетких семантических сетях [3], что дает возможность исключить влияние интеллектуальных систем на проблемную среду в процессе изучения закономерностей среды [4].

Ключевые слова: интеллектуальные системы, проблемная среда, нечеткая семантическая сеть, множество вершин и ребер, характеристик, терм, алгоритмы самообучения.

1. Введение. Характерной особенностью интеллектуальных систем (ИС) способных функционировать в условиях неопределенности является то, что знания таких систем должны быть не только структурированы, но и представлены безотносительно к конкретным условиям функционирования [10]. Для описания ситуаций проблемной среды (ПС) безотносительно к конкретной области можно использовать нечеткие семантические сети (НСС) активного и пассивного типа [1].

2. Основная часть. Формально нечеткая семантическая сеть является ориентированным нечетким мультиграфом $G_1 = (V_1, E_1)$, где $V_1 = v_i, i = \overline{1, n-1}$ и $E_1 = e_i, \overline{i = 1, n}$ – соответственно множество вершин и ребер. Вершины $v_i \in V_1$ биективно соответствуют объектам проблемной среды (ПС), ребра – отношениям, складывающимся в среде между этими объектами. Вершины $v_i \in V_1$ могут быть двух типов: свободные v_i^* и занятые v_i^0. Каждая свободная (активная) вершина $v_i^* \in V_1$ определяется множеством характеристик X_i, которым должны обладать конкретные объекты $o_{i1} \in O$, чтобы была разрешена пометка этой вершины их именами в конкретной (текущей) ситуации ПС. После выполнения такой пометки активная вершина v_i^* становится пассивной v_i^0 и определяется множеством характеристик X_{i1} конкретного объекта, которым она помечена. Иными словами, активная вершина $v_i^* \in V_1$ помечается объектом $o_i(X_i) \in O$, если выполняется условие $X_i \subset X_{i1}$, где запись $o_{i1}(X_{i1})$ означает, что объект o_{i1} описывается множеством характеристик X_{i1}.

Ребра $e_i \in E$ или отношения между объектами ПС задаются парами $\langle \mu(x_i), T_j \rangle$, где T_j – нечеткое значение (терм) лингвистической переменной $T_j \in T^*$; $\mu(x_i) \in [0, 1]$ – степень принадлежности количественного значения лингвистической переменой $T_j \in T^*$ к интервалу численных значений терма T_j; $T^* \subset \{T_j\}$ – множество лингвистических переменных, биективно соответствующих семантическому определению различных отношений.

В рассмотренном случае, при описании НСС, ограничения, определяемые элементами терм — множествами лингвистической переменой и накладываемые на базовые переменные $x_i \in U_i$, задаются четко и вычисляются, исходя из функционального назначения и возможностей ИС. Иначе говоря, множество U разбивается на $i = \overline{1, k}$ непересекающиеся открытые справа интервалы согласно заданному на его элементах отношению эквивалентности «находиться внутри j интервала» [7].

Для перехода от количественных значений отношений между объектами ПС [5], измеренных при помощи информационно-измерительной системы ИС и определяемых базовыми значениями x_i лингвистических переменных, к их качественным значениям, т.е. к одному из термов T_j можно использовать преобразования следующего вида [1, 2]:

$$F : i \longrightarrow \begin{cases} T_j, \text{если } 0 \le x_i < x_i^*; \\ T_j', \text{если } x_i^* < x_i^{**} \le x_{i+1}^*; \\ T_j'', \text{если } x_{ik-1}^* < x_{i+1}^* \le x_{ik}^*; \end{cases} \tag{1}$$

где x_i^* и $x_{i+1}^*, i = \overline{1, k}$, соответственно, – нижняя и верхняя граница числовых значений x_i^{**} терма T_j', $\lfloor x_i^{**} \rfloor$ — середина интервала числовых значений этого терма; x_{ik-1}^*, x_{ik}^*, соответственно, — нижняя и верхняя граница числовых значений терма T_j'', x_{i+1}^* — середина интервала числовых значений терма T_j''.

Степень принадлежности $\mu(x_i)$ значений базовой переменной x_i к множеству числовых значений терма T_j может вычисляться согласно следующему характеристическому уравнению [1]:

$$\mu(x_i) = \begin{cases} \dfrac{x_i - x_i^*}{x_i^{**} - x_i}, \text{если } x_i \in [x_i^*, x_i^{**}] \ ; \\ \dfrac{x_i - x_i^{**}}{x_{i+1}^* - x_i}, \text{если } x_i \in \left[x_i^{**}, x_{i+1}^*\right] \ . \end{cases} \tag{2}$$

Для сравнения двух значений отношений между собой, заданных тройками $\langle x_i, \mu(x_i), T_j \rangle$ и $\langle x_i, \mu(x_i'), T_j' \rangle$, введем характеристику степени их равенства (близости)

$\rho(x_i, x_i')$, которая может вычисляться следующим образом:

$$\rho(x_i, x_i') = \begin{cases} \textbf{а)}\ 1, \text{если } (|x_i - x_i'| < \varepsilon_0)\&(T_j = T_j'); \\ \textbf{б)}\ \mu(x_i) \leftrightarrow \mu(x_i'), \text{если } (|x_i - x_i'| > \varepsilon_0)\&(T_j = T_j')\& \\ \&((x_i, x_i') \in [x_i^*, x_i^{**}] \vee (x_i, x_i') \in [x_i^*, x_{i+1}^*]); \\ \textbf{в)}\ (\mu(x_i) \leftrightarrow (1 - \mu(x_i'))), \text{если } |x_i - x_i'| > \varepsilon_0)\&(T_j = T_j')\& \\ \&((x_i, x_i') \notin [x_i^*, x_i^{**}] \vee (x_i, x_i') \notin [x_i^{**}, x_{i+1}^*]); \\ \textbf{г)}\ 0, \text{если } T_j \neq T_j', \end{cases} \tag{3}$$

где ε_0 – параметр, задающий приведенное значение точности сравнения величины отношения; x_i' – базовая переменная к множеству числовых значений терма T_j; $\leftrightarrow$ – операция расплывчатой эквивалентности, определяемая по формуле $\min(\max(\mu(x_i), (1-\mu(x_i'))), \max(\mu(x_i'), (1-\mu(x_i))))$ [2] ; & – конъюнкция, оказывающая одновременность выполняющихся условий.

Предложенное выражение для определения степени близости позволяет избежать искажения получаемого результата, когда степени принадлежности сравниваемых значений отношений равны, но находятся по разные стороны от центра тяжести функции принадлежности.

Выражение 3 можно обосновать следующим образом. Два количественных значения отношения равны между собой, если они попадают в интервал численных значений одного и того же терма T_j в окрестность одной и той же точки, определяемую значением параметра ε_0(случай а); два количественных значения x_i и x_i' нечетко равны между собой, если они принадлежат интервалу численных значений одного и того же терма T_j. Причем, если оба значения степени принадлежности сравниваемых значений попадают в одну и ту же половину интервала численных значений терма, то степень сравнения вычисляется по «б», в противном случае, она определяется по «в». Значения x_i и x_i' не равны между собой, если они попадают в интервалы численных значений различных термов лингвистической переменной T_j (случай г). Следовательно, два значения одного и того же отношения равны при $\rho(x_i, x_i') = 1$. Эти значения отношения являются нечетко равными, если $\rho(x_i, x_i') > 0$ и они не равны в случае, когда $\rho(x_i, x_i') = 0$.

Рассмотрим ПС как множество взаимосвязанных между собой объектов и независимых от ИС событий $Q = \{q_{i_1}\}$, $i_1 = \overline{i, n_1}$. В каждый дискретный момент времени t среду можно охарактеризовать текущей ситуацией s_i^t , определяемой текущими состояниями находящихся в ней объектов и характером отношений между этими объектами. Часть ситуаций S – множество $C_2 = \{c_{i_2}\}, \overline{i_2 = 1, n_2}$ будем называть стандартными (безусловными). Эти ситуации определяют различные цели и подцели условного функционирования ИС и вызывают у нее при восприятии соответствующие стандартные реакции (СР), связанные с достижением заданной цели $S_{\text{цел}}$. Для имитации отработки действий на НСС каждое из них определяется с помощью следующего формата описания $\langle\langle$имя действия$\rangle\langle$ НСС, определяющая допустимые условия отработки действия$\rangle\langle$НСС, описывающая результат отработки$\rangle\rangle$, которое будем называть фреймом действия (ФД).

Первая часть – ⟨имя действия⟩ является идентификатором действия. Вторая часть – ⟨условия, выполнение которых в ПС требуется для успешной отработки действия⟩ – представляет собой активную НСС, формальное описание которой является мультиграфом $G_1 = (V_1, E_1)$, где V_1 – множество свободных вершин, каждая из которых помечается списком характеристик X_i, которыми должны обладать объекты, чтобы было допустимым выполнение над ними действия ФД.

Третья часть ФД – ⟨результат отработки действия⟩ – представляет собой НСС получаемую из сети G_1 после отработки действия этого фрейма.

Имитация отработки действий проводится следующим образом [2,6]. На первом этапе определяются все действия, которые можно непосредственно выполнить в ПС согласно содержанию второй части соответствующих действиям ФД. Затем выбирается конкретное действие для отработки и осуществляется имитация его отработки на НСС, определяющая текущие условия функционирования. В НСС, определяющей текущую ситуацию ПС по содержанию третьей части ФД вносятся соответствующие изменения значений отношений между объектами среды, которые получаются в результате непосредственной отработки действия в ПС. Если в результате имитации отработки действия получается ситуация, которая приближается к целевой ситуации по своему содержанию, то формируется звено в цепи поведения в форме импликативного решающего правила $S_{\text{тек}}\&b_j^1 \to S'$, где приведенная запись означает, что, при восприятии текущей ситуации ПС $S_{\text{тек}}$, отработка действия b_j^1 приводит к ее преобразованию в результирующую ситуацию $S'_{\text{тек}}$. Причем степень близости $\rho(S_{i+1,\text{тек}}, S_{\text{цел}}) > \rho(S_{i\text{тек}}, S_{\text{цел}})$, т.е. действие b_j^1 преобразует ситуацию $S_{i\text{тек}}$ в ситуацию $S_{i+1,\text{тек}}$, между вновь полученной и целевой ситуациями наблюдается меньшее число различий, чем между целевой и исходной ситуациями. В результате формируется модель целесообразного поведения следующего вида $L(x) = S_{T_{i+1}}\&b_j \to S^2_{T_{i+1}}\&b_{j+1} \to \cdots \to S_{T_{i+n}}\&b_{j+n} \to S_{\text{цел}}$.

Полученная в процессе самообучения модель поведения закрепляется окончательным образом достижением цели после ее непосредственной реализации в ПС.

Приведем описание различных алгоритмов самообучения интеллектуального робота на нечетких семантических сетях [5]. Таких алгоритмов может быть два: с активной логикой поведения и активно-пассивной логикой поведения [9]. Алгоритм с активной логикой поведения предназначен для самообучения ИС в статических средах, т.е. средах, в которых преобразование ситуаций происходит только в результате отрабатываемых системой действий. В алгоритме с активно-пассивной логикой сначала формируем текущую ситуацию. Выполняем наблюдения за изменением ситуации. Если произошло самопроизвольное изменение преобразованной ситуации, то формируем множество выполненных в нем действий и проверяем условие путем имитации отработки действий: «находятся среди них действия, приводящие к достижению цели». Если таких действий не наблюдается, то продолжаем наблюдать за изменением среды. Иначе запоминаем цепочку $S_{i\text{тек}}\&b_j \to S_{\text{цел}}$. Далее принимаем $S_{\text{цел}}$ за $S_{i\text{тек}}$, наблюдая за изменением среды. Если процесс не привел к достижению цели через заданный интервал времени, то переходим к активной логике поведения. Адаптация ИС в ПС происходит в динамике реального времени по мере изменения ситуаций в среде путем перехода системы от детерминированного функционирования, определяемого отработкой действий импликативных решающих правил, закрепленных в цепи формируемой программы целесообразного поведения, к самообучению при попадании в новые условия среды [8]. При этом функционирование ИС должно носить только активный характер, по истечению заданного интервала времени, при условии, что в ПС не происходит самопроизвольных преобразований, ИС переходит к активным манипуляциям.

3. Заключение. Таким образом, процесс самообучения ИС можно рассматривать как автоматическую генерацию графа [5] при условии, что ей априорно не известны результаты, к которым могут привести отрабатываемые действия. Практическая ценность заключается в возможности использования разработанных алгоритмов целесообразного поведения для самообучения интеллектуальных систем [7] в реальных труднодоступных для человека проблемных средах.

Выводы. Предложена оригинальная модель ПС [11] в виде нечеткой семантической сети, отличающаяся от известных наличием вершин, определяемых независимые от ИС события, что позволяет моделировать динамические проблемные среды, и обеспечивать имитацию самообучения ИС в недоопределенных [12] динамических средах.

Литература

1. Красовская Л.В. Несмещенные оценки сравнения отношений в нечетких семантических сетях // Вестник ДГТУ. Технические науки. – Махачкала, 2005. – №7.
2. Красовская Л.В. Алгоритмы самообучения интеллектуальных систем на нечетких семантических сетях с имитацией отработки действий // Радиоэлектроника. Известия вузов России. – 2006. – – № 4.
3. Берштейн Л.С., Мелехин В.Б. Планирование поведения интеллектуального робота / М.: Энергоатомиздат, 1994. – 238 с.
4. Мелехов А.Н., Берштейн Л.С., Коровин С.П. Экспертные соответствующие системы с нечеткой логикой / М.: Наука, 1991. -– 270 с.
5. V.V. Tarasevich, I.G.Popov, Yu.A.Zagorullko. Use of Constraint Propagation Technique on a Semantic Network for the Solution of Problems Defined on Graphs and Networks // Proc. 2000 ERCIM/Compulog Net Workshop on Constraints (ERCIM-2000). -Padova, Italy, June 2000. 6 pages.
6. Мелехин А.В., Кагиров К.А., Красовская Л.В. Организация самообучения интеллектуальных систем на основе имитации целесообразного поведения // Вестник ДГТУ. Технические науки. – Махачкала: ДГТУ, 2002. – №5
7. George F. Luger. Artificial Intelligence: Structures and Strategies for Complex Problem Solving / Addison Wesley, 2004.
8. Tarasevich V.V., Narinjani A.S., Zagorulko Yu.A. Piping network design under the condition of subdefinite and incomplete data // Proceedings of XXX IAHR Congress, Theme D «Hydroinformatics and advanced data technology in engineering practice» (August 2003, AUTh, Thessaloniki, Greece). Series Eds. Prof. Ganoulis J., Prof. Prinos P. Theme Eds. Dr. Korfiatis G., Prof. Christodoulou G. ISBN 960-243-598-1, 2003. pp.391– 98.
9. Мелехин В. Б., Красовская Л. В. Организация самообучения интеллектуального робота на нечетких семантических сетях // Неделя науки- 2004. Сборник докладов XXV итоговой научно-технической конференции преподавателей, сотрудников, аспирантов и студентов ДГТУ. -– Махачкала: ДГТУ, 2004.
10. A.S. Narin'yani. To interact means to understand each other // Сб. Трудов 9-th International Conference «Speech and Computer (SPECOM'2004)» & INTAS Strategic Scientific Workshop. СПБ 2004.

11. Красовская Л.В. Моделирование алгоритмов самообучения интеллектуальных систем на нечетких семантических сетях // Научные ведомости БелГУ. – 2012. – №7(126). – Вып. 22/1. – С.137-142.
12. Yury A. Zagorulko, Ivan G. Popov, Yury V. Kostov. Subdefinite Data Types and Constraints in Knowledge Representation Language // Joint Bulletin of the Novosibirsk Computing Center and Institute of Informatics Systems. Series: Computer Science. 16 (2001), NCC Publisher. Novosibirsk, 2001.

IMITATION OF ACTIONS OF SELF-TRAINING ALGORITHMS OF SAVVY SYSTEMS ON ILL-DEFINED SEMANTIC NETWORK

L.V. Krasovskaya

Belgorod State University,
ул. Победы, 85, Белгород, Россия, e-mail: krasovskaya@bsu.edu.ru

Abstract. It is developed of comparison method of ill-definitely represented relations for problem-solving ambience model that is differed from the known ones. It permits to fulfil the unbiased estimate of equality of the ill-definitely expressed characteristics and to magnify the reliability comparison [1, 2]. Self-training algorithms are described which permit to form programs of rational behavior at different problem-solving ambiences and imitation of probe actions on ill-defined semantic networks [3]. It gives the possibility to exclude the savvy systems influence on problem-solving ambience at its study [4].

Key words: Savvy systems, problem-solving ambience, ill-defined semantic network, ensemble of tops and ribs, features, terms, algorithms of self-training.

MSC 80A30

МОМЕНТЫ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЕНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Фам Минь Туан, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Вычисляется асимптотика статистических моментов стационарного распределения вероятностей стохастической модели бинарной циклической химической реакции при неограниченном увеличении их порядка. Показывается согласованность вычисленной асимптотики со стационарным состоянием цепочки эволюционных уравнения для моментов распределения.

Ключевые слова: стохастическая модель, уравнение Фоккера-Планка, стационарная плотность распределения, статистические моменты.

1. Введение. Существует целый ряд моделей теоретической физики, которые связаны со стохастическими динамическими системами. Математическое исследование таких моделей и получение физических следствий из результатов такого исследования обычно является объектом статистической физики. Одной из таких стохастических моделей является т.н. *генетическая модель*, которая, в частности, имеет отношение к описанию кинетики бинарных циклических химических реакций при наличии катализаторов [1]. Потребность введения стохастических возмущений в рамках этой модели связана с учетом влияния тепловых флуктуаций среды на протекание реакции, что предопределяет использования именно стохастической модели для теоретического описания ее эволюции во времени t в виде семейства марковских диффузионных процессов для относительной концентрации $x \in [0,1]$ двух участвующих в реакции реагентов. Это семейство параметризуется физическими параметрами $\alpha \in (0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ и каждый процесс определяется математически посредством соответствующего уравнения Колмогорова (см. [1])

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \big(\hat{H}p\big)(x,t)\,, \tag{1}$$

$$\big(\hat{H}p\big)(x,t) \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\Big[\alpha - x + \lambda x(1-x) + \frac{\sigma^2}{2}x(1-x)(1-2x)\Big]p(x,t)\Big) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^2(1-x)^2 p(x,t)\right] \tag{2}$$

для плотности распределения $p(x,t)$ частного одноточечного распределения вероятностей или плотности условных вероятностей перехода. В физической терминологии такое уравнение, обычно, называют уравнением Фоккера-Планка. Стохастическая система в виде указанного диффузионного процесса обладает стационарным состоянием, то есть уравнение (1) имеет стационарное решение $p(x)$ при граничных условиях отсутствия потока через границы пространства концентраций – отрезка $[0,1]$. Известно, что это стационарное состояние обладает бифуркацией при изменении параметров $\alpha, \lambda, \sigma^2$, которая состоит в том, что плотность $p(x)$ из унимодальной перестраивается в бимодальную. Довольно полное исследование этого перехода дано нами в работах [2], [3]. Однако, до настоящего времени неизвестно: является ли это состояние равновесным, т.е. финальным для марковского процесса. Иными словами, вопрос состоит в том, является ли плотность $p(x)$ предельной при $t \to \infty$ для решений $p(x,t)$ уравнения (1) с произвольными начальными условиями, представляющими собой плотности распределения на отрезке $[0,1]$ и подчиненных указанным граничным условиям. Одним из мыслимых подходов к решению этой математической проблемы является изучение системы эволюционных уравнений для моментов

$$\varphi_n(t) = \int\limits_0^1 x^n p(x,t)dx\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

плотности распределения, которая, в случае, если $p(x)$ является равновесным решением уравнения (1), с необходимостью, должна обладать равновесным решением φ_n, $n \in \mathbb{N}$.

Настоящая работа посвящена доказательству того, что моменты φ_n, вычисленные на основе $p(x)$,

$$\varphi_n = \int\limits_0^1 x^n p(x)dx \tag{4}$$

как раз, представляют такое равновесное решение, и вычислению асимптотики значений этих моментов при $n \to \infty$.

2. Уравнения для моментов $\varphi_n(t)$. Найдем уравнения для моментов $\varphi_n(t)$ исходя из уравнения (1). Запишем действие оператора $\big(\hat{H}p\big)(x,t)$ в виде

$$\big(\hat{H}p\big)(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} J[p](x,t)\,,$$

где $J[p](x,t)$ – поток вероятности,

$$J[p](x,t) = \Big[\alpha - x + \lambda x(1-x) + \frac{\sigma^2}{2} x(1-x)(1-2x)\Big] p(x,t) - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2(1-x)^2 p(x,t)\right]\,. \tag{5}$$

Исследуемый случайный процесс хорошо определен в том случае, если поток $J[p](x,t)$ равен нулю при $x = 0, 1$.

Умножая обе части уравнения на x^n и интегрируя от 0 до 1 по частям, получим, используя явное выражение для действия оператора $\hat{H}$ и пользуясь граничными условиями для потока $J[p](x,t)$:

$$\dot{\varphi}_n(t) = n\left[\frac{\sigma^2}{2}(n+1)\varphi_{n+2}(t) - \left(\frac{\sigma^2}{2}\Big(n+\frac{1}{2}\Big) + \lambda\right)\varphi_{n+1}(t) + \right.$$
$$\left. + \ \Big(n\frac{\sigma^2}{2} + \lambda - 1\Big)\varphi_n(t) + \alpha\varphi_{n-1}(t)\right]\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{6}$$

В уравнении при $n = 1$ нужно положить $\varphi_0(1) \equiv 1$, согласно свойству плотности $p(x,t)$.

Согласно своему определению, моменты $\varphi_n(t)$ образуют монотонно убывающую, стремящуюся к нулю и сосредоточенную на $(0,1)$ последовательность при любой интегрируемой плотности $p(x,t)$. Более того, для них справедливы неравенства Ляпунова $\varphi^{1/(n+1)} < \varphi^{1/n}$ (см., например, [4]).

Равновесные статистические моменты φ_n плотности распределения обязаны, соответственно, удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\sigma^2}{2}(n+1)\varphi_{n+2} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)+\lambda\right)\varphi_{n+1} \ + $$

$$+ \ \left(n\frac{\sigma^2}{2}+\lambda-1\right)\varphi_n + \alpha\varphi_{n-1} = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{7}$$

Исходя из этой системы, можно вычислить все равновесные моменты φ_n, если задать значения первых двух моментов φ_1 и φ_2.

Замечательно, что только для фиксированных значений φ_1, φ_2 разностное уравнение, определяемое системой уравнений (7), определяет последовательность моментов какой-либо плотности распределения. В противном случае, существовали бы две различные стационарные плотности распределения, удовлетворяющие уравнению (7) и граничным условиям $J[p](x) = 0$ при $x = 0, 1$.

Так как плотность распределения $p(x)$ является стационарной, то моменты φ_n, вычисленные на ее основе, должны удовлетворять этой системе уравнений. Если, кроме того, она является равновесной, то решения системы уравнений (6) в том случае, когда они соответствуют начальным условиям $\varphi_n(0)$, вычисленным на основе какой-либо начальной плотности распределения $p(x,0)$, должны стремится к моментам φ_n. Обратно, если последнее имеет место, то говорят, что соответствующее решение уравнения (1) – плотность $p(x,t)$ слабо стремится к плотности $p(x)$. Это связано с тем, что, одновременно со стремлением $\varphi_n(t)$ к φ_n при $t \to \infty$, выполняется также предельное соотношение для характеристических функций плотностей $p(x,t)$ и $p(x)$ (это связано с тем, что эти плотности определены на компактном отрезке).

3. Вычисление асимптотики моментов распределения. Плотность распределения вероятностей $p(x)$, которая удовлетворяет уравнению $\hat{H}p(x) = 0$ и граничным условиям $J[p](x) =$ при $x = 0, 1$, определяется явной формулой (см. [2])

$$p(x) = \frac{A}{x(1-x)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\beta} \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{1-\alpha}{1-x}+\frac{\alpha}{x}\right)\right\}, \tag{8}$$

$$A = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{2}{\sigma^2}+\beta\ln\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right\}\left[K_{-\beta}\left(-\frac{4}{\sigma^2}\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\right)\right]^{-1},$$

где $K_{-\beta}(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода с показателем $(-\beta)$ и $\beta = 2(2\alpha+\lambda-1)/\sigma^2$.

В интеграле (4), определяющем моменты φ_n совершим замену переменной интегрирования $x = 1 - y/\sqrt{n}$. В результате, получим

$$\varphi_n = An^{\beta/2}\int\limits_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^{\beta+n-1}\exp\left[-\frac{2}{\sigma^2}\Big(\frac{\alpha}{1-y/\sqrt{n}}+\frac{1-\alpha}{y}\Big)\right]\frac{dy}{y^{\beta+1}}\,.$$

Для вычисления асимптотики этого интеграла при $n\to\infty$ применим метод Лапласа (см., например, [5]). Во-первых, воспользуемся предельным соотношением $(1-y/\sqrt{n})^{\sqrt{n}}\to e^{-y}$ при $n\to\infty$, что допустимо при вычислении главного члена асимптотики, а затем определим функцию

$$S(y) = \frac{2}{\sigma^2}\,\frac{1-\alpha}{y} + y\,.$$

Тогда, для вычисления главного члена асимптотики, представим последний интеграл в виде

$$\varphi_n = A\exp\Big(-\frac{2\alpha}{\sigma^2}\Big)\,n^{\beta/2}(1+o(1))\int\limits_0^{\sqrt{n}}\exp\left[-\sqrt{n}S(y)\right]\frac{dy}{y^{\beta+1}}\,,$$

Согласно методу Лапласа вычислим стационарную точку показателя экспоненты. Так как $S'(y) = 1-2(1-\alpha)/\sigma^2y^2$, то стационарная точка y_*, удовлетворяющая $S'(y_*)=0$ единственна. Она равна

$$y_* = \sqrt{\frac{2(1-\alpha)}{\sigma^2}}\,,\qquad S(y_*) = 2y_*\,.$$

При этом

$$S''(y) = \frac{4}{\sigma^2}\,\frac{(1-\alpha)}{y^3}\,,\quad S''(y_*) = \sqrt{\frac{2\sigma^2}{1-\alpha}} > 0\,,$$

что дает возможность применить для вычисления асимптотики интеграла основную теорему метода Лаплса (см. [5]). Единственным препятствием для ее непосредственного применения, является наличие особенности на левом конце интервала интегрирования, из-за чего невозможна замена в подинтегральном выражении функции $S(y)$ на ее разложение в окрестности стационарной точки. Это связано с тем, что $S(y)$ обеспечивает сходимость интеграла в окрестности этой особенности и замена ее на квадратичную функцию приведет к расходимости интеграла. Поэтому применим основную формулу метода Лапласа к интегралу

$$\int\limits_\varepsilon^{\sqrt{n}}\exp\left[-\sqrt{n}S(y)\right]\frac{dy}{y^{\beta+1}} = \left(\frac{2\pi}{S''(y_*)}\right)^{1/2}\frac{\exp\big(-\sqrt{n}\,S(y_*)\big)}{n^{1/4}y_*^{(\beta+1)}}\,(1+o(1))\,, \tag{9}$$

где $0<\varepsilon<y_*$. После этого оценим остаточный интеграл

$$\int\limits_0^{\varepsilon}\exp\left[-\sqrt{n}S(y)\right]\frac{dy}{y^{\beta+1}} < \int\limits_0^{\varepsilon}\exp\left[-\frac{2\sqrt{n}}{\sigma^2y}\right]\frac{dy}{y^{\beta+1}} = n^{-\beta/2}\int\limits_0^{\varepsilon/\sqrt{n}}\exp\Big(-\frac{2}{\sigma^2y}\Big)\frac{dy}{y^{\beta+1}} <$$

$$< n^{1/2}\varepsilon^{-(\beta+1)} \exp\Big(-\frac{2\sqrt{n}}{\varepsilon\sigma^2}\Big)\,,$$

что, при достаточно малом ε, асимптотически более высокого порядка, чем выражение в правой части в (9). Таким образом, окончательно, получаем, что

$$\int\limits_0^{\sqrt{n}} \exp\left[-\sqrt{n}S(y)\right]\frac{dy}{y^{\beta+1}} = \left(\frac{2\pi}{S''(y_*)}\right)^{1/2} \frac{\exp\big(-\sqrt{n}\,S(y_*)\big)}{n^{1/4}y_*^{(\beta+1)}}\,(1+o(1))$$

и, следовательно,

$$\varphi_n = A\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sigma^2}{2(1-\alpha)}\right)^{\beta/2}\exp\Big(-\frac{2\alpha}{\sigma^2}\Big)n^{\beta/2-1/4}\exp\left(-2\Big(\frac{2n(1-\alpha)}{\sigma^2}\Big)^{1/2}\right)(1+o(1))\,. \quad (10)$$

Легко показать, что это асимптотическое выражение удовлетворяет уравнению (7) с точностью до $O(n^{-1})$. С этой целью, исходя из полученного выражения (10), вычисляется асимптотика отношения

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta/2-1/4}\exp\left(-\Big(\frac{2(1-\alpha)}{\sigma^2}\Big)^{1/2}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right) =$$

$$= \left(1+\frac{\beta-1/2}{2n}+O(n^{-2})\right)\left(1-\Big(\frac{2(1-\alpha)}{n\sigma^2}\Big)^{1/2}+\frac{1-\alpha}{n\sigma^2}+O(n^{-3/2})\right) =$$

$$= 1-\Big(\frac{2(1-\alpha)}{n\sigma^2}\Big)^{1/2}+\frac{\alpha+\lambda}{n\sigma^2}+O(n^{-3/2})\,,$$

подстановкой которой в (7) получаем требуемое тождественное равенство.

Литература

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии / Пер. с англ. /М.: Мир, 1987. – 400 с.
2. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Анализ стохастической модели химической кинетики бинарной автокаталитической реакции // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 11(154);31. – С.130-146.
3. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Анализ критической поверхности стохастической модели бинарной циклической реакции с фазовым переходом // Belgorod State University Scientific. Bulletin Mathematics & Physics. – 2014. – №25(196); 37. – С.108-118.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / М.: Эдиториал, УРСС, 2005. – 448 с.
5. Федорюк М.В. Метод перевала / М: Наука, 1977. – 368 с.

STATISTICAL MOMENTS OF STATIONARY PROBABILITY DISTRIBUTION DENSITY IN STOCHASTIC GENETIC MODEL

Pham Minh Tuan, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru,

Abstract. Asymptotic dependence of statistical moments of stationary probability distribution density in the stochastic model of binary cyclic chemical reaction proposed by Horsthemke W. and Lefever R. is calculated when order of the later tends to infinity. It is shown that such a calculated asymptotic corresponds to stationary state of the evolution equation system of the moments.

Key words: stochastic model, Fokker-Plank's equation, stationary distribution density, statistical moments.

MSC 76N15, 76M45

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ СТАЦИОНАРНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Ю.П. Вирченко, Н.Н. Самойлова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Предлагается общая конструкция построения асимптотических разложений решений системы уравнений газодинамики, которые описывают безвихревые стационарные течения газа.

Ключевые слова: уравнение Навье-Стокса, стационарные задачи, сжимаемость, потенциальное течение, асимптотические разложения.

1. Введение. Как известно [1], полная система дифференциальных уравнений газодинамики (и гидродинамики ньютоновских сжимаемых жидкостей) состоит из уравнения Навье-Стокса

$$\dot{u}_j + (\mathbf{u}, \nabla)u_j = -\frac{\nabla_j P}{\rho} + \nabla_k \mu \left(\nabla_k u_j + \nabla_j u_k - \frac{2}{3}\delta_{jk} \right) + (\nabla, \eta \nabla) u_j \,, \quad j = 1, 2, 3\,; \qquad (1)$$

уравнения непрерывности

$$\dot{\rho} + (\nabla, \rho \mathbf{u}) = 0 \qquad (2)$$

и уравнения переноса тепла

$$\rho c_p \left(\dot{T} + (\mathbf{u}, \nabla) T \right) = (\nabla, \varkappa \nabla) T + \frac{\mu}{2} \left(\nabla_k u_j + \nabla_j u_k - \frac{2}{3}\delta_{jk} \right)^2 + \eta (\nabla, \mathbf{u})^2 \,. \qquad (3)$$

Система уравнений (1-3), с физической точки зрения, записана с точностью до второго порядка по градиентам полей $\mathbf{u}$, ρ, T. Она определяет эволюцию во времени t для поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \in \Omega$, распределений плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ и температуры $T(\mathbf{x}, t)$ при определенных граничных и начальных условиях, связанных со спецификой физической постановки задачи. Для полной постановки задачи, в этой системе уравнений должны быть заданы коэффициенты вязкости μ и η, давления P, теплоемкости при постоянном давлении c_p и коэффициента теплопроводности $\varkappa$, которые, в общем случае, для каждой пространственно-временно́й точки, являются функциями от величин ρ и T, которые вычислены в этой точке. Заметим, что транспортные коэффициенты μ, η не зависят от $\mathbf{u}$, что как раз соответствует понятию ньютоновских сплошных сред.

При сформулированных условиях становится осмысленной постановка задачи Коши для системы уравнений (1-3), то есть поиска ее решения при заданных начальных значениях $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$, $\rho(\mathbf{x}, 0)$ и $T(\mathbf{x}, 0)$. Однако, в настоящее время, неизвестно разрешима ли задача Коши в сколько-нибудь общей постановке для этой системы уравнений (и даже для более простой системы, например, получаемой при $T = \mathrm{const}$, $\mu = 0$, $(\nabla, \mathbf{u}) = 0$ и $P \sim \rho$, $\eta = \mathrm{const}$). При тех же общих условиях постановки задачи неизвестен также ответ на вопрос: если решение задачи Коши существует, то является ли оно единственным при заданных начальных условиях и глобальным (то есть возможно ли его продолжение на сколь угодно большие отрезки времени)? Само собой разумеется, что в этих условиях совершенно немыслимо ставить вопрос о построении аналитических решений в рамках сколько-нибудь общих условий постановки задачи. Что касается построения решений численным образом, то так как любое конструктивное доказательство существования решения у системы (1-3) и ее упрощений неявно должно содержать алгоритм численной схемы определения решения, и этот алгоритм обязательно должен сходиться, может быть, довольно медленно, то наличие сходящейся численной схемы содержит в себе конструктивное доказательство существования и единственности решения. Отсутствие такого доказательства в настоящее время указывает на то, что численные процедуры, применяемые в газодинамике, не являются математически строго обоснованными.

Остановимся отдельно на задаче поиска стационарных решений системы (1-3), которые не зависят от t и поэтому удовлетворяют этой системе при равенстве в ней производных по t нулю,

$$(\mathbf{u}, \nabla) u_j = -\frac{\nabla_j P}{\rho} + \nabla_k \mu \left(\nabla_k u_j + \nabla_j u_k - \frac{2}{3}\delta_{jk} \right) + (\nabla, \eta \nabla) u_j \,, \quad j = 1, 2, 3 \,; \tag{4}$$

$$(\nabla, \rho \mathbf{u}) = 0 \,, \tag{5}$$

$$\rho c_p (\mathbf{u}, \nabla) T = (\nabla, \varkappa \nabla) T + \frac{\mu}{2} \left(\nabla_k u_j + \nabla_j u_k - \frac{2}{3}\delta_{jk} \right)^2 + \eta (\nabla, \mathbf{u})^2 \,. \tag{6}$$

Эта система, вообще говоря, не имеет единственного решения при заданных граничных условиях для полей $\mathbf{u}$, ρ, T. Это связано с тем, что стационарные течения в сплошной среде, которые должны описываться решениями этой системы уравнений, всегда содержат вихревую составляющую (с отличными от нуля интегралами от поля $\mathbf{u}$ по некоторым замкнутым контурам). Примером такого положения является решение Бенара (см., например, [1]) в физических условиях стационарного переноса тепла в слое жидкости между двумя параллельными плоскостями с различными температурами на них, когда возникает вихревое конвективное течение в слое жидкости, наряду с существованием формального решения с нулевым полем $\mathbf{u}$. Можно надеяться на единственность решения краевой задачи для системы (4-6) при исключении вихревой составляющей течения, то есть в условиях, когда поле $\mathbf{u}$ является потенциальным, когда существует скалярное поле $\Psi(\mathbf{x})$ на Ω такое, что $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla \Psi(\mathbf{x})$.

По описанным выше причинам, особое значение в газодинамике приобретают построение асимптотических разложений для полей $\mathbf{u}$, ρ, T по каким-то параметрам, характеризующим среду и совершаемое ею движение. Это касается как построения решений задачи Коши с фиксированными начальными условиями для системы (1-3), так и стационарных задач – решений системы (4-6) с фиксированными граничными условиями. Неизвестно, являются такие разложения, удовлетворяющие с контролируемой степенью точности системе уравнений по параметру(ам) разложения, сходящимися, так как их сходимость, как раз, и приводила бы к доказательству существования решения. Однако, ввиду их прикладной ценности, они являются самостоятельным объектом математического исследования. В настоящей работе предлагается схема построения асимптотических разложений по малому параметру решений стационарной системы уравнений в том частном случае, когда уравнение (6) исключается из рассмотрения. При этом мы ограничиваемся постоянными коэффициентами μ и η, а в уравнении состояния газа (жидкости) функция $P(\rho)$ $(T = \mathrm{const})$ полагается линейной, то есть

$$P = \nu^2(\rho - \rho_0) + P_0 \,,$$

где ν – скорость звука в среде. Таким образом, физически, допустимы только очень малые изменения плотности ρ в процессе движения. Исследуемая система уравнений в этом случае приобретает вид

$$\frac{\nu^2}{\rho}\nabla_k\rho + (\mathbf{u},\nabla)u_k = (\mu+\eta)\Delta u_k + \frac{\mu}{3}\nabla_k(\nabla,\mathbf{u})\,, \tag{7}$$

$$(\nabla\rho,\mathbf{u}) + \rho(\nabla,\mathbf{u}) = 0\,. \tag{8}$$

Ввиду сказанного выше, поле $\mathbf{u}$ предполагается потенциальным. Покажем, что такая постановка задачи является самосогласованной для системы (7), (8), так как в условиях потенциальности поля $\mathbf{u}$ система (7), (8) становится переопределенной. Положим в этой системе уравнений $\mathbf{u} = \nabla\Psi$. Тогда она преобразуется в систему

$$\frac{\nu^2}{\rho}\nabla_k\rho + \nabla_m\Psi\nabla_m\nabla_k\Psi = \nabla_k\Big(4\mu/3 + \eta\Big)\Delta\Psi\,, \tag{9}$$

$$(\nabla_m\rho)(\nabla_m\Psi) + \rho\Delta\Psi = 0\,. \tag{10}$$

Здесь и далее мы используем соглашение о применении повторяющихся индексов, принятое в тензорной алгебре. Система уравнений (9),(10) — переопределенная, так как она представляет собой 4 уравнения для двух функций Ψ и ρ. Так как $\nabla_k\rho/\rho = \nabla_k g$, то для самосогласованности системы (9), (10) нужно, чтобы выражение $\nabla_m\Psi\nabla_m\nabla_k\Psi$ являлось градиентом какой-то функции. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\varepsilon_{jkl}\nabla_k\nabla_m\Psi\nabla_m\nabla_l\Psi \equiv 0\,,$$

где ε_{jkl} – тензорный символ Леви-Чивитта. Выражение в левой части преобразуется к виду

$$\varepsilon_{jkl}\Big(\nabla_k\nabla_m\Psi\Big)\Big(\nabla_m\nabla_l\Psi\Big) + \nabla_m\Psi\nabla_m\Big(\varepsilon_{jkl}\nabla_k\nabla_l\Psi\Big)\,,$$

из которого его тождественное равенство нулю становится очевидным, так как антисимметричный символ Леви-Чивитта сворачивается по индексам k, l с симметричными в обоих слагаемых по этим индексам выражениями.

2. Построение асимптотических разложений. Будем изучать стационарные течения газа в следующих физических условиях. Во-первых, будем предполагать малой в каждой пространственной точке $\mathbf{x}$ абсолютную величину скорости $|\mathbf{u}|$. Кроме того, будем считать малыми все пространственные производные от этих величин. Причем, если ввести малый параметр ε, который является мерой малости указанных физических величин, то мы положим, что $\mathbf{u} \sim \varepsilon$, $\nabla_j u_k \sim \varepsilon^2$, $\nabla_j \rho \sim \varepsilon^2$ (для этого градиента такое положение связано с тем, что в задаче предполагаются малыми отклонения $(\rho-\rho_0)$). Соответственно, вторые производные по пространственным координатам предполагаются пропорциональными ε^3. Тогда, для формулировки системы уравнений, для которой будут строиться асимптотические разложения решений произведем в уравнениях (7), (8) замены $\mathbf{u} \Rightarrow \varepsilon\mathbf{u}$, $\nabla_j u_k \Rightarrow \varepsilon^2 \nabla_j u_k$, $\nabla_j \rho \Rightarrow \varepsilon^2 \nabla_j \rho$ и, соответственно, умножим частные производные второго порядка от ρ и $\mathbf{u}$ на ε^3. Тогда, вводя, вместо ρ функцию $\ln\rho = g$ так, что $\nabla g = \nabla\rho/\rho$ получим исследуемую в дальнейшем систему уравнений

$$(\nabla, \mathbf{u}) + \varepsilon(\nabla g, \mathbf{u}) = 0\,, \tag{11}$$

$$\nu^2 \nabla_k g + \varepsilon(\mathbf{u}, \nabla)u_k = \varepsilon(\mu+\eta)\Delta u_k + \varepsilon\frac{\mu}{3}\nabla_k(\nabla, \mathbf{u})\,, \quad k = 1, 2, 3\,. \tag{12}$$

Для построения асимптотического разложения по степеням параметра ε решений этой системы нужно, чтобы были однозначно разрешимы уравнения нулевого приближения

$$\nabla_k g = 0\,, \qquad g = \mathrm{const}\,; \qquad (\nabla, \mathbf{u}) = 0\,.$$

Отсюда следует, что для однозначности построения конструируемых нами асимптотических разложений необходима потенциальность поля $\mathbf{u} = \nabla\Psi$. В этом случае последнее уравнение принимает вид $\Delta\Psi = 0$, которое однозначно (с точностью до постоянной) разрешимо при заданных граничных условиях для $\nabla\Psi$.

Производя замену поля $\mathbf{u}$ на $\nabla\Psi$ в уравнения (11), (12) или, что то же самое, вводя параметр ε в уравнения (9), (10) получим исходную систему уравнений для построения асимптотических разложений решений системы (7), (8):

$$\varepsilon(\nabla g, \nabla\Psi) + \Delta\Psi = 0\,, \tag{13}$$

$$\varkappa \nabla_k g + \varepsilon(\nabla\Psi, \nabla)\nabla_k\Psi = \varepsilon\Big(4\mu/3 + \eta\Big)\nabla_k\Delta\Psi\,, \quad k = 1, 2, 3\,. \tag{14}$$

Заметим, что для плотности ρ (и, соответственно, для функции g) граничные условия не задаются. Ее достаточно задать хотя бы в одной пространственной точке. Это тесно связано с тем, что исходная система уравнений содержит только частные производные первого порядка от ρ.

Наконец, укажем, что в совокупность граничных условий для поля скоростей $\mathbf{u}$ нужно обязательно включить условие непротекания газа (жидкости) через границу области Ω.[1)] С точки зрения потенциала Ψ это означает, что нормальная по отношению к границе производная от него должна обращаться на границе $\partial\Omega$. Однако, это условие не

[1] Мыслимы постановки задачи с полупроницаемой границей, где придется отказаться от этого условия.

означает, что решение уравнения $\Delta\Psi = 0$ сведется к постоянной, так как такое положение имеет место, главным образом, для компактных областей Ω, в которых строиться решение.

Выясним теперь, наконец, структуру асимптотических разложений решений. Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Асимптотические степенные ряды для потенциала Ψ и плотности ρ вида*

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k}\Psi^{(2k)}\,, \tag{15}$$

$$g = g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k-1} g^{(2k-1)} \tag{16}$$

удовлетворяют системе уравнений (13), (14) и заданным граничным условиям краевой задачи, если $\Psi^{(0)}$ удовлетворяет этим же граничным условиям и уравнению $\Delta\Psi^{(0)} = 0$, а $g^{(0)} = const$.

При определении каждого приближения $\Psi^{(2k)}$, $g^{(2k-1)}$ порядка $k \in \mathbb{N}$ сначала вычисляется градиент $\nabla g^{(2k-1)}$ по формуле

$$\nu^2\nabla_m g^{(2k-1)} = -\sum_{l=0}^{k-1}\big(\nabla\Psi^{(2(k-l-1))},\nabla\big)\nabla_m\Psi^{(2l)} + \big(4\mu/3+\eta\big)\nabla_m\Delta\Psi^{(2(k-1))}\,, \qquad m = 1,2,3\,, \tag{17}$$

а затем находится решение неоднородного уравнения

$$\Delta\Psi^{(2k)} = Q_k(\nabla g^{(l)}, \nabla\Psi^{(m)})$$

с нулевыми граничными условиями, в котором правая часть полностью определяется приближениями $\Psi^{(2(l-1))}, g^{(2l-1)}$, $l = 1 \div k$.

□ Доказательство производится непосредственной подстановкой (15), (16) в уравнения (13), (14) и балансом по степеням параметра ε. Из уравнения (13) получаем

$$(\nabla g, \nabla\Psi) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{2m+2l-1}(\nabla g^{(2m-1)}, \nabla\Psi^{(2l)}) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k-1}\sum_{l=0}^{k-1}(\nabla g^{2(k-l)-1}, \nabla\Psi^{(2l)})\,,$$

$$\Delta\Psi^{(2k)} + \sum_{l=0}^{k-1}(\nabla g^{2(k-l)-1}, \nabla\Psi^{(2l)}) = 0\,,$$

где в правую часть входят только функции $g^{(2l+1)}$ и $\Psi^{(2l)}$ с $l = 0 \div (k-1)$.

Из уравнения (14) имеем

$$\nu^2\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k+1}\nabla_m g^{(2k+1)} + \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}\sum_{l=0}^{k}(\nabla\Psi^{(k-l)},\nabla)\nabla_m\Psi^{(l)} = \varepsilon\big(4\mu/3+\eta\big)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}\nabla_m\Delta\Psi^{(2k)}\,,$$

так, что степенной баланс приводит к формуле (17), в правую часть которой входят только функции $g^{(2l-1)}$ и $\Psi^{(2(l-1))}$ с $l = 1 \div k$. ■

3. Пример. В заключение рассмотрим точно решаемый пример, который несколько проясняет смысл построенных асимптотических разложений. Рассмотрим одномерное течение (например по трубе без трения о стенки и с перепадом давления на концах трубы) так, что скорость течения $\mathbf{u}$ заменяется на u, которая является функцией только одной координаты x. Тогда уравнения (11), (12) при $\varepsilon = 1$ запишутся в виде

$$uu' + \nu^2 g' = (4\mu/3\mu + \eta)u'' , \quad g'u + u' = 0 .$$

Из второго уравнения имеем $u'/u = -g'$ или, после интегрирования, $u = u_0\rho_0/\rho$. Подстановка в первое уравнение приводит к уравнению

$$uu' - \nu^2 \frac{u'}{u} = (4\mu/3 + \eta)u'' ,$$

которое решается в квадратурах

$$\frac{u^2}{2} - \nu^2 \ln\, u + c = (4\mu/3 + \eta)u' ,$$

где c – постоянная интегрирования, которая может быть как положительной, так и отрицательной,

$$(4\mu/3 + \eta) \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u^2/2 - \nu^2 \ln\, u + c} = x .$$

Если ввести в уравнения малый параметр ε, как это сделано в (11), (12), то

$$\frac{u'}{u} + \varepsilon g' = 0 \tag{18}$$

$$\varepsilon uu' + \nu^2 g' = \varepsilon(4\mu/3 + \eta)u'' , \tag{19}$$

и, следовательно, квадратура заменится на следующую

$$(4\mu/3 + \eta) \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u^2/2 - (\nu^2/\varepsilon^2) \ln\, u + c} = x ,$$

которая не допускает разложения по степеням малого параметра. Однако, если действовать напрямую, то есть строить ряд по степеням ε исходя из уравнений (18), (19), то получим особое решение, которое не содержится в квадратуре, ввиду обращения в нуль знаменателя. Оно в нулевом приближении по ε дает $u' = 0$, $u = u_0$, $g' = 0$, а все последующие приближения, как легко проверить, равны нулю.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / М.: Наука, 1986.
2. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М.: Мир. 1967. -– 310 с.

3. Хаппель Дж., Бреннер Х. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / М.: Мир, 1976. (пер. с англ. Happel J., Brenner H. Low Reynolds Namber Hydrodynamics /Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1965).
4. Найфе А. Введение в методы возмущений / М.: Мир. 1984. – 535 с.

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF GAS-DYNAMICS EQUATIONS SOLUTIONS OF STATIONARY POTENTIAL FLOWS

Yu.P. Virchenko, N.N. Samoilova

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.com

Abstract. It is proposed the general construction of asymptotic expansions of gas-dynamics equations solutions which describe stationary vortex-free flows.

Key words: Navier-Stokes equation, stationary problems, compressibility, potential flow, asymptotic expansion.

MSC 81P20

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ. 1. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Л.Т. Фат, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Конструируется случайное поле, описывающее стохастическое электромагнитное поле в диэлектрической среде, которое порождается ее тепловыми флуктуациями. Это поле является гауссовским. Оно описывается стохастической динамической системой, эволюционными уравнениями которой являются уравнения Максвелла с аддитивным шумом. При этом шум определяется локальными флуктуациями заряда в среде, вызванными тепловыми колебаниями атомов диэлектрической среды.

Ключевые слова: стохастическое электромагнитное поле, гауссовское поле, уравнения Максвелла, стохастическая модель, корреляционная функция.

1. Постановка задачи. Понятие о стохастическом электромагнитном поле возникает естественным образом при описании электромагнитного поля, имеющего тепловое происхождение. Происхождение такой точки зрения восходит к работам, связанным с построением статистической физики теплового излучения абсолютно черного тела (см., например, [1-2]). Однако, в то время авторы стохастической концепции относительно теплового электромагнитного поля не могли последовательно использовать формализм теории вероятностей при построении его статистической теории. Это связано с тем, что соответствующего ее раздела – теории случайных процессов, в рамках которого можно было бы реализовать идею о статистическом описании теплового электромагнитного поля, еще не существовало. В более позднее время, когда математическая теория случайных процессов уже достигла того уровня зрелости и, пользуясь ее представлениями, стало допустимым конструирование вероятностных моделей случайных эволюционирующих во времени полей, то есть появилась возможность, по-новому, подойти к задаче математического описания теплового электромагнитного поля (см., например, монографии [3, 4]). Отметим в этой связи, что основным здесь является не тепловое излучение в вакууме, изучение которого более относится к вопросам *квантовой оптики*, в которой, в настоящее время, имеются хорошо разработанные физические представления и математические методы, а именно процессы излучения, поглощения и переноса электромагнитного излучения в среде (главным образом, твердотельной), тесно связанного с тепловыми колебаниями составляющих ее атомов (молекул). Изучение этих процессов с макроскопической точки зрения относится к разделу теоретической физики, которая называется *теорией переноса излучения*. Предметом же изучения статистической теории теплового излучения являются микроскопические процессы, которые лежат в основе такого переноса изучения, то есть, в конце концов, ее целью является обоснование основных положений, на которых покоится эта теория, и их уточнение. Это находится в полной аналогии с теми традиционными задачами статистической физики, решение которых, согласно основной идее статистического подхода, должно обеспечивать конкретной информацией о зависимостях между макроскопическими характеристиками сред при изучении в них макроскопических эволюционных процессов.

При исследовании процессов переноса теплового электромагнитного излучения в среде центральным является вопрос о физических микроскопических механизмах, посредством которых этот перенос осуществляется. Исходя из представления о том, что на микроскопическом уровне электромагнитные процессы, происходящие в твердом теле, носят квантовый характер и поэтому должны описываться в рамках представлений квантовой теории, следовало бы строить статистическую теорию переноса теплового излучения на основе таких представлений. Однако, в настоящее время мы еще далеки от создания такой последовательной теории. Более того, так как процессы переноса излучения в твердотельных средах играют заметную роль только при достаточно больших температурах, то можно было бы, на начальном этапе развития теории, ограничиться построениями, основанными на классической электродинамике процессов излучения и поглощения электромагнитного излучения. Но создание даже такой теории в рамках статистической физики сопряжено с большими трудностями, так как это требует последовательного описания кинетических процессов атомов твердого тела и электромагнитного излучения. В связи с этим, в уже цитировавшихся выше монографиях развивался иной полуфеноменологический подход, основанный на описании кинетики тепловых флуктуаций электромагнитного излучения в твердом теле. При этом случайные флуктуации излучения математически описывались посредством математического аппарата теории случайных процессов. Настоящая работа направлена на развитие такого подхода.

В рамках указанного полуфеноменологического подхода к изучению процессов переноса теплового излучения в среде центральным является вопрос о выборе модели стохастического электромагнитного поля, на основе которой возможно было бы вычисление потока энергии теплового электромагнитного излучения, описывающего локальный баланс тепла в каждой малой области среды. Именно дивергенция этого потока входит в качестве одного из слагаемых в уравнение переноса тепла в среде.

В более ранних публикациях [5-7] одного из авторов настоящего сообщения был исследован частный случай стохастического электромагнитного поля – т.н. *гауссовская модель* со статистически независимыми и эквивалентными электрической и магнитной составляющими, которая естественна в том случае, когда имеется физическая малость величины поля в среднем квадратичном. Существенным недостатком теории являлось то, что механизм генерации излучения в ней математически связывался со случайными флуктуациями электрической восприимчивости среды, что не могло объяснить, адекватным образом, поглощение излучения, и, следовательно, его перекачку в тепловую энергию колебаний атомов среды. В этой работе мы предлагаем другую модель, основанную на представлениях о флуктуациях заряда в среде, имеющих место, даже в диэлектриках, на масштабах порядка нескольких средних расстояний между атомами, и, соответственно, вызванных этими флуктуациями заряда флуктуациях электрического тока на тех же пространственных масштабах. В рамках такой модели, по нашему мнению, ввиду феноменологической связи между интенсивностью флуктуаций и их затуханием (т.н. флуктуационно-диссипационная теорема), естественным образом, возможно объяснение механизма переноса теплового электромагнитного излучения в среде.

Работа состоит из двух частей. В настоящей первой части мы строим математическую модель стохастического электромагнитного поля в диэлектрической среде. В следующей второй части вычислены парные корреляционные функции стохастического электромагнитного поля, которые полностью определяют его распределение вероятностей и, тем самым, полностью определяют физические характеристики теплового электромагнитного излучения, моделью которого это поле служит.

2. Построение модели. Как известно, физические характеристики электромагнитного поля в среде подчинены *уравнениям Максвелла*, которые представляют собой дифференциальные связи

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} &= [\nabla, \mathbf{H}]\,, \quad (\nabla, \mathbf{D}) = 4\pi\rho\,, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -[\nabla, \mathbf{E}]\,, \qquad (\nabla, \mathbf{B}) = 0\,, \end{aligned} \tag{1}$$

между, соответственно, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ – напряженностями электрического и магнитного полей и $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ – электрической и магнитной индукциями в среде и $\mathbf{j}$, ρ – плотности электрических тока и заряда.

Эта система является переопределенной. Для ее совместности, то есть для существования у нее решения, необходимо, чтобы величины ρ и $\mathbf{j}$ были связаны дифференциальной связью

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \mathbf{j}) = 0\,, \tag{2}$$

которая называется *уравнением непрерывности заряда.*

Для того чтобы система (1) представляла собой систему дифференциальных уравнений, к ней должны быть добавлены функциональные связи между парами величин $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, понижающие число независимых полей. Эти связи называются *материальными уравнениями.* В рамках линейной электродинамики, без учета магнитоэлектрических эффектов, они имеют вид [2)]

$$D_i(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \int_{-\infty}^{t} \hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) E_j(\mathbf{y}, s) ds\,, \tag{3}$$

$$B_i(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \int_{-\infty}^{t} \hat{\mu}_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) H_j(\mathbf{y}, s) ds\,, \tag{4}$$

[2]Мы используем общепринятые индексные обозначения и правила их использования для векторных и тензорных величин. Далее, все нижние индексы пробегают значения 1, 2, 3.

Кроме того, должна быть задана связь между плотностью тока $\mathbf{j}$ с полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, так как эта плотность не является полностью независимым внешним источником в уравнениях (1). При тех же предположениях, что и выше, эта связь записывается следующим образом:

$$j_k(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \int_{-\infty}^{t} \hat{\sigma}_{kl}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) E_l(\mathbf{y},s) ds + \tilde{j}_k(\mathbf{x},t)\,. \tag{5}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{j}}$ является источником электромагнитных волн. В рассматриваемом нами случае, этот источник имеет флуктуационное происхождение и, следовательно, носит стохастический характер. Среднее значение флуктуаций тока будем считать равным нулю $\langle\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)\rangle = 0$, где угловые скобки здесь и далее будут обозначать усреднение по распределению вероятностей тепловых флуктуаций.

Для диэлектрической среды, исследуемой в настоящей работе, мы будем считать, что эффекты пространственной и временной дисперсии среды носят несущественный характер. Поэтому, в указанных интегральных преобразованиях, ядра $\hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x},t)$, $\hat{\mu}_{ij}(\mathbf{x},t)$, $\hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{x},t)$ пропорциональны $\delta(t)\delta(\mathbf{x})$. Кроме того, среду полагаем локально пространственно-изотропной, то есть тензорная структура этих ядер имеет тривиальный характер. Таким образом,

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x},t) = \varepsilon\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{x})\,\delta(t-0)\,,\ \ \hat{\mu}_{ij}(\mathbf{x},t) = \mu\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{x})\,\delta(t-0)\,,\ \ \hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{x},t) = \sigma\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{x})\,\delta(t-0)\,. \tag{6}$$

В этих условиях материальные уравнения (3-5) принимают вид

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\,, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mu\mathbf{H}(\mathbf{x},t)\,,$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = \sigma\mathbf{E}(\mathbf{x},t) + \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)\,, \tag{7}$$

где ε, μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости, соответственно, а σ – некоторая эффективная проводимость, которая определяется конструируемой нами моделью стохастического электромагнитного поля, имеющего тепловое происхождение.

В дальнейшем, нам построение математической модели флуктуационного электромагнитного поля будут основаны на пространственных фурье-компонентах физических величин. В связи с этим, введем фурье-компоненты плотностей электрических заряда и тока

$$\bar{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x},t) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} d\mathbf{x}\,, \quad \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{k},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j}(\mathbf{x},t) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} d\mathbf{x}\,,$$

его флуктуационной части

$$\bar{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} d\mathbf{x}\,,$$

а также, – фурье-компоненты электрического и магнитного полей

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E}(\mathbf{x},t) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} d\mathbf{x}\,, \quad \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H}(\mathbf{x},t) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

и электрической и магнитной индукций

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{k},t)=\int_{\mathbb{R}^3}\mathbf{D}(\mathbf{x},t)e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})}d\mathbf{x}\,,\quad \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{k},t)=\int_{\mathbb{R}^3}\mathbf{B}(\mathbf{x},t)e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})}d\mathbf{x}\,.$$

Тогда уравнения Максвелла (1-4), для фурье-компонент, принимают вид

$$\frac{\varepsilon}{c}\dot{\bar{\mathbf{E}}}+\frac{4\pi}{c}(\sigma\bar{\mathbf{E}}+\tilde{\bar{\mathbf{j}}})=i[\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}]\,,\quad (\mathbf{k},\bar{\mathbf{E}})=-\frac{4\pi i}{\varepsilon}\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)\,, \tag{8}$$

$$\frac{\mu}{c}\dot{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)=-i[\mathbf{k},\bar{\mathbf{E}}]\,,\quad (\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}})=0\,. \tag{9}$$

Кроме того, из уравнения непрерывности (2) электрического заряда следует

$$\dot{\tilde{\bar{\rho}}}+i(\mathbf{k},\bar{\mathbf{j}})=0$$

или, после подстановки выражения

$$\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{k},t)=\sigma\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)+\tilde{\bar{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)\,, \tag{10}$$

следующего из (7), получаем

$$\dot{\tilde{\bar{\rho}}}+\gamma\tilde{\bar{\rho}}+i(\mathbf{k},\tilde{\bar{\mathbf{j}}})=0\,, \tag{11}$$

где

$$\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}=\gamma>0\,.$$

В силу вещественности всех пространственно-распределенных физических характеристик, их фурье-компоненты обладают свойствами

$$\tilde{\bar{E}}_l^*(\mathbf{k},t)=\tilde{\bar{E}}_l(-\mathbf{k},t)\,,\quad \tilde{\bar{H}}_l^*(\mathbf{k},t)=\tilde{\bar{H}}_l(-\mathbf{k},t)\,,$$

$$\tilde{\bar{D}}_l^*(\mathbf{k},t)=\tilde{\bar{D}}_l(-\mathbf{k},t)\,,\quad \tilde{\bar{B}}_l^*(\mathbf{k},t)=\tilde{\bar{B}}_l(-\mathbf{k},t)\,;$$

$$\tilde{\bar{\rho}}^*(\mathbf{k},t)=\tilde{\bar{\rho}}(-\mathbf{k},t)\,,\quad \tilde{\bar{j}}_l^*(\mathbf{k},t)=\tilde{\bar{j}}_l(-\mathbf{k},t)\,.$$

Построение математической модели стохастического электромагнитного поля завершается определением векторного случайного процесса $\tilde{\bar{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)$ В настоящей работе мы принимаем простейшую модель. А именно, мы будем считать, что имеется случайное комплекснозначное гауссовское поле векторное поле $\tilde{\psi}_l(\mathbf{k})$, $l=1,2,3$ на пространстве волновых векторов $\mathbf{k}$ с нулевым средним значением. Выбор в пользу модели гауссовского случайного поля связан с тем, что оно является хорошей (с точки зрения близости вычисляемых на ее основе значений средних физических величин) моделью при малости случайных флуктуаций.

Комплекснозначное гауссовское случайное поле с нулевым средним полностью характеризуется парой корреляционных функций

$$K_{lm}(\mathbf{k},\mathbf{k}')=\langle\tilde{\psi}_l(\mathbf{k})\tilde{\psi}_m^*(\mathbf{k}')\rangle\,,\qquad L_{lm}(\mathbf{k},\mathbf{k}')=\langle\tilde{\psi}_l(\mathbf{k})\tilde{\psi}_m(\mathbf{k}')\rangle\,.$$

Потребуем, чтобы фурье-преобразование этого поля было вещественным с вероятностью единица. Это означает, что с вероятностью единица для каждой реализации выполняется соотношение $\psi_l^*(\mathbf{k}) = \psi_l(-\mathbf{k})$ для любого волнового вектора $\mathbf{k}$. Это требование приводит к тому, что

$$K_{lm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = L_{lm}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}')\,,$$

и поэтому такое случайное комплекснозначное поле полностью определяется только одной корреляционной функцией, в качестве которой мы далее примем функцию $K_{lm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$.

Мы принимаем в этой работе модель случайного процесса $\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k}, t)$, которая определяется формулой

$$\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k}, t) = \varphi(t)\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})\,, \tag{12}$$

где символом $\varphi(t)$ мы обозначаем обобщенный случайный процесс «белого шума», определяющего временну́ю зависимость. При таком определении, случайные зависимости от времени и от пространственных переменных (представленных волновыми векторами $\mathbf{k}$) статистически независимы. При этом, так как на случайное гауссовское поле $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})$ с нулевым средним значением на пространстве волновых векторов $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ не накладывается никаких ограничений, и поэтому, в общем случае, $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})$ и $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})$ – статистически зависимые гауссовские поля. В частном случае модель флуктуационного тока можно упростить, положив эти вещественные случайные поля статистически независимыми.

Независимость временно́й зависимости от пространственной в принятой модели для плотности флуктуационного электрического тока оправдывается тем, что при исследовании тепловых электромагнитных колебаний представляет интерес область малых длин волн, соответствующая видимым световым волнам и инфракрасной области спектра, где сосредоточены волны в интересующем нас диапазоне температур. Тогда типичные значения волновых векторов $\mathbf{k}$ для волн испускаемых флуктуационным источником таковы, что $|\mathbf{k}|^{-1}$ намного превосходят среднее расстояние между атомами, на котором формируются тепловые флуктуации заряда в среде. В этой ситуации за период колебаний теплового излучения, распространяемого внутри среды, совершается очень большое число тепловых колебаний атомов, формирующих временну́ю зависимость флуктуационного источника.

Подстановка выражения (12) в (11) дает стохастическое уравнение, определяющее случайный процесс флуктуаций заряда

$$\dot{\tilde{\tilde{\rho}}} + \gamma\tilde{\tilde{\rho}} + i\varphi(t)(\mathbf{k}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})) = 0\,,$$

которое показывает, что заряд представляет собой комплекснозначный элементарный гауссовский процесс по времени t (если $(\mathbf{k}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})) \neq 0$ тождественно, т.е. не равен нулю продольный флуктуационный ток), реальная и мнимая части которого статистически зависимы или независимы, в зависимости от того, зависимы или независимы статистически реальная и мнимая части случайного поля $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})$. Причем временна́я и пространственная зависимости статистически независимы. Временная зависимость определяется интегралом с дифференциалом $\varphi(t)dt = dw(t)$ по винеровскому процессу,

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k},t) = e^{-\gamma t}\tilde{\rho}(\mathbf{k},0) - i(\mathbf{k},\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}))\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}\varphi(s)ds\,.$$

При $t \to \infty$ случайный процесс $\tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t)$ приближается комплекснозначным стационарным марковским гауссовским процессом, аналогичным известному процессу Орнштейна-Уленбека.

Заметим, что динамическое уравнение для заряда согласуется с условием $\tilde{\tilde{\rho}}^*(\mathbf{k},t) = \tilde{\tilde{\rho}}(-\mathbf{k},t)$.

Задание распределения вероятностей случайного процесса $\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)$, вместе с распределением вероятностей начальных состояний компонент электромагнитного поля полностью определяет стохастическое электромагнитное поле. Так как случайный процесс $\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)$ является гауссовским, то, в силу линейности связей (8, 9, 10) между его компонентами и компонентами электромагнитного поля, стохастическое электромагнитное поле является также гауссовским. Наконец, так как процесс $\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)$ обладает нулевым средним значением, то стохастическое электромагнитное поле также обладает нулевыми средними значениями для электрической и магнитной составляющих $\langle \bar{E}_j(\mathbf{k},t)\rangle = 0$, $\langle \bar{H}_j(\mathbf{k},t)\rangle = 0$, $j = 1,2,3$, если их начальные состояния имеют нулевые средние значения. В дальнейшем, Нашей задачей является вычисление корреляционных функций $\langle \bar{E}_j(\mathbf{k},t)\bar{E}'_{j'}(\mathbf{k}',t)\rangle$, $\langle \bar{H}_j(\mathbf{k},t)\bar{H}'_{j'}(\mathbf{k}',t)\rangle$, $\langle \bar{E}_j(\mathbf{k},t)\bar{H}'_{j'}(\mathbf{k}',t)\rangle$, $j,j' = 1,2,3$ таким образом определенного стохастического электромагнитного поля, которые его полностью характеризуют.

3. Траектории случайного процесса $\langle \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t), \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)\rangle$. Вычисление корреляционных функций электромагнитного поля, подчиняющегося уравнениям (8),(9), в нашем случае, ввиду постоянства коэффициентов в системе уравнений (8),(9), наиболее просто выполнить, решив эволюционные уравнения для полей $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)$, $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)$. Здесь мы решим эту задачу, чтобы впоследствии завершить стохастического электромагнитного поля в диэлектрической среде. Неудобством при решении уравнений является наличие требования на поперечные составляющую поля $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)$ (второе уравнение в (8)). С целью устранения этого положения, введем поле

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t) + i\frac{4\pi}{\varepsilon}\tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t)\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t)\,, \tag{13}$$

которое уже будет поперечным,

$$(\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}) = (\mathbf{k},\bar{\mathbf{E}}) + \frac{4\pi i}{\varepsilon}\tilde{\tilde{\rho}} = 0\,. \tag{14}$$

Так как из (8) следует, то

$$\dot{\bar{\mathbf{E}}} + \gamma\bar{\mathbf{E}} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\tilde{\tilde{\mathbf{j}}} = i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}]\,,$$

и, следовательно,

$$\dot{\bar{\mathbf{F}}} = \dot{\bar{\mathbf{E}}} + \frac{4\pi i}{\varepsilon} \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\,\dot{\tilde{\bar{\rho}}} = -\gamma\Big(\bar{\mathbf{E}} + i\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\frac{4\pi}{\varepsilon}\,\tilde{\bar{\rho}}\Big) + i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}] - \frac{4\pi}{\varepsilon}\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp\,,$$

где введена функция $\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp(\mathbf{k},t)$, которая представляет фурье-компоненты плотности *поперечного флуктуационного тока*,

$$\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp = \tilde{\bar{\mathbf{j}}} - \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}(\mathbf{k},\tilde{\bar{\mathbf{j}}}). \tag{15}$$

Тогда система уравнений для пары полей $\bar{\mathbf{F}}$ и $\bar{\mathbf{H}}$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{F}}} + \gamma\bar{\mathbf{F}} &= i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}] - \frac{4\pi}{\varepsilon}\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp\,,\\ \dot{\bar{\mathbf{H}}} &= -i\frac{c}{\mu}[\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}]\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Она допускает уже решение в пространстве пар поперечных полей $\langle\bar{\mathbf{F}},\bar{\mathbf{H}}\rangle$, для которых имеют место $(\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t)) = 0$, $(\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)) = 0$.

Запишем систему (16) в векторно-матричной форме

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{F}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{H}}} \end{pmatrix} = \mathsf{G}\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}} \\ \bar{\mathbf{H}} \end{pmatrix} - \frac{4\pi}{\varepsilon}\begin{pmatrix} \tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где 6×6-матрица G имеет следующий блочный вид

$$\mathsf{G} = \begin{pmatrix} -\gamma\mathbf{1} & i\dfrac{c}{\varepsilon}[\,\mathbf{k},\cdot\,] \\ -i\dfrac{c}{\mu}[\,\mathbf{k},\cdot\,] & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

($\mathbf{1}$ обозначает единичную 3×3-матрицу).

Введя матрицу $\mathsf{S}(t)$ эволюции системы

$$\mathsf{S}(t) = \exp\Big(\mathsf{G}t\Big)\,,$$

которая имеет 3×3-блочную структуру

$$\mathsf{S}(t) = \begin{pmatrix} \mathsf{S}^{(E)}(t) & \mathsf{S}^{(EH)}(t) \\ \mathsf{S}^{(HE)}(t) & \mathsf{S}^{(H)}(t) \end{pmatrix},$$

запишем решение системы (17) в виде

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}}(t) \\ \bar{\mathbf{H}}(t) \end{pmatrix} = \mathsf{S}(t)\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}}_0 \\ \bar{\mathbf{H}}_0 \end{pmatrix} - \frac{4\pi}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mathsf{S}(t-s)\begin{pmatrix} \tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp(\mathbf{k},s) \\ 0 \end{pmatrix} ds\,.$$

Матрицу $\mathsf{S}(t)$ мы вычислим косвенным образом. Сначала получим из системы (16) эволюционное однородное уравнение только для поля $\mathbf{F}(\mathbf{k},t)$, затем найдем его общее решение и вычислим функцию $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)$ и, наконец, на основании этих двух функцию, определяющих общее решение однородной системы уравнений, которая получается из (17) обращением в нуль $\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp$, найдем выражение для матрицы $\mathsf{S}(t)$.

Продифференцируем первое уравнение системы (17) по t. Воспользовавшись вторым уравнением (17) и условием поперечности поля $\bar{\mathbf{F}}$, получим уравнение второго порядка для $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t)$,

$$\ddot{\bar{\mathbf{F}}} + \gamma\dot{\bar{\mathbf{F}}} + a^2\mathbf{k}^2\bar{\mathbf{F}} = 0\,, \quad a = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\,. \tag{19}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t) = \bar{\mathbf{F}}_+ \exp\left(r_+ t\right) + \bar{\mathbf{F}}_- \exp\left(r_- t\right)\,, \tag{20}$$

в котором

$$r \equiv r(\mathbf{k}) = \left(\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - a^2\mathbf{k}^2\right)^{1/2}, \qquad r_\pm \equiv r_\pm(\mathbf{k}) = -\frac{\gamma}{2} \pm r\,.$$

В формуле (19) $\bar{\mathbf{F}}_+$, $\bar{\mathbf{F}}_-$ – произвольные поперечные векторы. Из условия $\big(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{F}}(t)\big) = 0$ при всех $t \geq 0$ следует, что эти векторы поперечные $\big(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{F}}_\pm\big) = 0$.

Подставляя общее решение (19) в

$$i\frac{\varepsilon}{c\mathbf{k}^2}[\,\mathbf{k}, \dot{\bar{\mathbf{F}}} + \gamma\bar{\mathbf{F}}] = \bar{\mathbf{H}}\,,$$

получим

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t) = i\frac{\varepsilon}{c\mathbf{k}^2}\Big(r_-[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_+]e^{r_+ t} + r_+[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_-]e^{r_- t}\Big)\,, \tag{21}$$

где мы воспользовались тождествами $r_\pm + \gamma = r_\mp$.

Теперь наша задача состоит в том, чтобы выразить векторы $\bar{\mathbf{F}}_+$, $\bar{\mathbf{F}}_-$ через начальные данные $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},0) \equiv \bar{\mathbf{F}}_0$, $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},0) \equiv \bar{\mathbf{H}}_0$. Полагая в (19) и (21) $t = 0$, получим систему уравнений для векторов $\bar{\mathbf{F}}_+$, $\bar{\mathbf{F}}_-$,

$$\bar{\mathbf{F}}_0 = \bar{\mathbf{F}}_+ + \bar{\mathbf{F}}_-\,, \qquad -i\frac{c\mathbf{k}^2}{\varepsilon}\bar{\mathbf{H}}_0 = r_-[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_+] + r_+[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_-]\,.$$

Так как $[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_0] = [\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_+] + [\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_-]$, то из этой системы находим

$$[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_\pm] = \pm\frac{1}{2r}\left[r_\pm[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_0] + i\frac{c\mathbf{k}^2}{\varepsilon}\bar{\mathbf{H}}_0\right]\,, \tag{22}$$

где мы воспользовались тождеством $r_+ - r_- = 2r$. Умножим векторно на $\mathbf{k}$ полученные выражения и воспользуемся поперечностью векторов $\bar{\mathbf{F}}_+$, $\bar{\mathbf{F}}_-$. В результате, получим

$$\bar{\mathbf{F}}_\pm = \pm\frac{1}{2r}\left[r_\pm\bar{\mathbf{F}}_0 - i\frac{c}{\varepsilon}[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}_0]\right]\,. \tag{23}$$

Подстановка выражений (22) и (23) в (20) и (21) дает нам окончательные выражения для полей $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t)$ и $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)$ в зависимости их от начальных данных,

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t)=\frac{1}{2r}\Big((r_+\bar{\mathbf{F}}_0-i\frac{c}{\varepsilon}[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}_0])\exp\big(r_+t\big)-(r_-\bar{\mathbf{F}}_0-i\frac{c}{\varepsilon}[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}_0])\exp\big(r_-t\big)\Big)\,, \tag{24}$$

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)=-\frac{i\varepsilon}{2rc\mathbf{k}^2}\Big(r_-\big(r_+[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_0]+i\frac{c\mathbf{k}^2}{\varepsilon}\bar{\mathbf{H}}_0\big)\exp\big(r_+t\big)-r_+\big(r_-[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_0]+i\frac{c\mathbf{k}^2}{\varepsilon}\bar{\mathbf{H}}_0\big)\exp\big(r_-t\big)\Big)\,. \tag{25}$$

Полученные выражения представим в пространстве пар векторов $\langle\bar{\mathbf{F}},\bar{\mathbf{H}}\rangle$,

$$\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t)\\ \\ \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)\end{pmatrix}=\frac{1}{2r}\left[\exp\big(r_+t\big)\begin{pmatrix}r_+\bar{\mathbf{F}}_0-i\dfrac{c}{\varepsilon}[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}_0]\\ \\ r_-\bar{\mathbf{H}}_0-i\dfrac{\varepsilon a^2}{c}[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_0]\end{pmatrix}-\exp\big(r_-t\big)\begin{pmatrix}r_-\bar{\mathbf{F}}_0-i\dfrac{c}{\varepsilon}[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}_0]\\ \\ r_+\bar{\mathbf{H}}_0-i\dfrac{\varepsilon a^2}{c}[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_0]\end{pmatrix}\right]\,,$$

где мы воспользовались тождеством $r_+r_-=a^2\mathbf{k}^2$. Отсюда следует, что матрица эволюции $\mathsf{S}(t)=\exp(\mathsf{G}t)$ определяется следующие ее действием на вектор $\langle\bar{\mathbf{F}}_0,\bar{\mathbf{H}}_0\rangle$:

$$\exp\big(\mathsf{G}t\big)\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{F}}_0\\ \\ \bar{\mathbf{H}}_0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2r}\left[\exp\big(r_+t\big)\begin{pmatrix}r_+\mathbf{1} & -i\dfrac{c}{\varepsilon}[\,\mathbf{k},\cdot\,]\\ \\ -i\dfrac{\varepsilon a^2}{c}[\,\mathbf{k},\cdot\,] & r_-\mathbf{1}\end{pmatrix}+\exp\big(r_-t\big)\begin{pmatrix}-r_-\mathbf{1} & i\dfrac{c}{\varepsilon}[\,\mathbf{k},\cdot\,]\\ \\ i\dfrac{\varepsilon a^2}{c}[\,\mathbf{k},\cdot\,] & -r_+\mathbf{1}\end{pmatrix}\right]\,.$$

Выпишем теперь 3×3-блоки эволюционной матрицы $\mathsf{S}(t)$:

$$\mathsf{S}^{(E)}(t)=\frac{1}{2r}\Big(r_+\exp\big(r_+t\big)-r_-\exp\big(r_-t\big)\Big)\,\mathbf{1}\,, \tag{26}$$

$$\mathsf{S}^{(H)}(t)=\frac{1}{2r}\Big(r_-\exp\big(r_+t\big)-r_+\exp\big(r_-t\big)\Big)\,\mathbf{1}\,, \tag{27}$$

$$\mathsf{S}^{(EH)}(t)=-\frac{ic}{2r\varepsilon}\Big(\exp\big(r_+t\big)-\exp\big(r_-t\big)\Big)\,[\mathbf{k},\cdot\,]\,,\quad \mathsf{S}^{(HE)}(t)=\Big(\frac{a\varepsilon}{c}\Big)^2\mathsf{S}^{(EH)}(t)\,. \tag{28}$$

4. Выводы. Мы построили, по нашему мнению, простейшую стохастическую динамическую модель генерации стохастического электромагнитного поля, осуществляющего радиационно-кондуктивный перенос тепла в конденсированной среде. В этой части работы нами были вычислены в явном виде траектории случайного процесса, соответствующего этой модели. При этом мы не упрощали ситуацию заведомо, а проводили вычисления в наиболее общем виде, допускаемым моделью. Так, в простейшей ситуации, можно положить, что продольный флуктуационный ток равен нулю, так как его наличие не соответствует описанию реальной физической ситуации. В этом случае $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t) = \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)$. Кроме того, естественно с физической точки зрения положить, что реальная и мнимая части плотности флуктуационного тока статистически независимы. В следующей части работы мы вычислим корреляционные функции стохастического электромагнитного поля, в рамках построенной модели.

Литература

1. Борн М. Атомная физика/ М.: Мир, 1965 - 492с.
2. Планк М. О законе распределения энергии в нормальном спектре // Избранные труды / М.: Наука, 1975. – С.259-267.
3. Рытов С.М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения.- М.: Изд. АН СССР, 1953.
4. Рытов С.М., Татарский В.И., Кравцов Ю.А. Введение в статистическую радиофизику, ч.2 Случайные поля/ С.М. Рытов.- М.: Наука, 1978.- 464с.
5. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Одномерная задача радиационно-кондуктивного теплообмена. Флуктуационный подход // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика, Математика. – 2009. - 5(60);16. – С.47-67.
6. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Построение гауссовской флуктуационной модели равновесного теплового излучения // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика. Математика. – 2010. – 11(82);19. – С.144-156.
7. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Флуктуационный подход в теории радиационно-кондуктивного теплообмена // Доповiдi НАНУ. – 2010. – 12. – С.63-69.

STOCHASTIC ELECTROMAGNETIC FIELDS IN DIELECTRIC MEDIUM. 1. MODEL CONSTRUCTION

Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. The stochastic model that describes random electromagnetic field in dielectrics caused by heat fluctuations in them is built. This field is gaussian. Evolutions equations of the system are Maxwell's ones with additive noise. The noise is determined by charge fluctuations in the medium. They are caused by thermal oscillations of dielectric medium atoms.

Key words: stochastic electromagnetic field, gaussian random field, Maxwell's equations, stochastic model, correlation function.

MSC 74F15

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ В БОРНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В.В. Сыщенко, Э.А. Ларикова

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия

Аннотация. В статье развит приближенный метод вычисления характеристик электромагнитного излучения, рассеиваемого на диэлектрической мишени произвольной структуры, аналогичный борновскому приближению в квантовой теории рассеяния. Полученные результаты применены к задаче о рассеянии электромагнитной волны при наклонном падении на однородный круглый цилиндр.

Ключевые слова: рассеяние волн, борновское приближение, диэлектрическая нить.

1. Введение. Исследование рассеяния электромагнитного излучения во всем диапазоне частот на мишенях различной геометрии и в структурированных средах представляет собой важную в прикладном отношении задачу. Достаточно упомянуть, например, использование волоконных структур (световодов) для управления потоком оптического излучения (см., например, недавний обзор [1] и имеющиеся там ссылки).

В настоящей работе развивается приближенный метод описания взаимодействия электромагнитных волн с диэлектрической мишенью произвольной геометрии, аналогичный борновскому приближению в квантовомеханической теории рассеяния (см., например, [2]). В качестве примера рассмотрено рассеяние электромагнитной волны, наклонно падающей на бесконечный круглый цилиндр. Точное решение этой задачи в виде бесконечного ряда для случая однородного цилиндра было получено в [3,4]. В предельном случае тонкой диэлектрической нити результаты настоящей работы согласуются с результатами [4].

2. Описание рассеянной волны методом функции Грина. Запишем систему уравнений Максвелла в среде [5] (пренебрегая ее магнитными свойствами):

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0\,, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\,\hat{\varepsilon}\,\mathbf{E}}{\partial\,t} + \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}\,, \\ \operatorname{div}\hat{\varepsilon}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho\,. \end{cases}$$

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской федерации (проектная часть государственного задания № 3.500.2014/К в сфере научной деятельности).

Для монохроматической волны вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t}$$

действие оператора $\hat{\varepsilon}$ на электрическое поле сводится к умножению на функцию частоты (и, быть может, координат)

$$\hat{\varepsilon}\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t}.$$

В этом случае уравнения Максвелла (в отсутствие зарядов и токов) примут вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\dfrac{\omega}{c}\mathbf{H}\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0\,, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\dfrac{\omega}{c}\varepsilon\,\mathbf{E}\,, \\ \operatorname{div}(\varepsilon\,\mathbf{E}) = 0\,. \end{cases}$$

Применяя операцию rot к первому уравнению и подставляя $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ из третьего, получим:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon\right)\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} = \nabla(\nabla\mathbf{E})\,, \tag{1}$$

где $\Delta = \nabla^2$ — оператор Лапласа.

Имея в виду случай, когда диэлектрическая проницаемость мишени мало отличается от единицы,

$$|1-\varepsilon| \ll 1,$$

перепишем уравнение (1) в виде

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2}(1-\varepsilon)\mathbf{E} + \nabla(\nabla\mathbf{E}), \tag{2}$$

а четвертое уравнение Максвелла — в виде

$$\nabla\mathbf{E} = \nabla((1-\varepsilon)\mathbf{E}). \tag{3}$$

Подстановка (3) в (2) дает нам

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2}(1-\varepsilon)\mathbf{E} + \nabla(\nabla((1-\varepsilon)\mathbf{E})). \tag{4}$$

Будем искать решение в виде суммы

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)}, \tag{5}$$

где величина $\mathbf{E}^{(0)}$ описывает падающую на мишень плоскую волну

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_i\, A\, e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}}$$

(A — амплитуда волны, $\mathbf{e}_i$ — ее вектор поляризации), удовлетворяющую невозмущенному уравнению

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\mathbf{E}^{(0)} = 0,$$

так что $\mathbf{k}_i^2 = \omega^2/c^2$. Тогда слагаемое $\mathbf{E}^{(1)}$ в (5) будет описывать поле рассеянного мишенью излучения; именно решение в виде (5) будет обладать характерной для квантовой теории рассеяния асимптотикой «плоская волна плюс сферическая расходящаяся волна».

После подстановки (5) наше уравнение (4) примет вид

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\mathbf{E}^{(1)} = \frac{\omega^2}{c^2}(1-\varepsilon)\mathbf{E} + \nabla(\nabla((1-\varepsilon)\mathbf{E}))\,. \tag{6}$$

Это уравнение может быть переписано в интегральной форме:

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\left\{\frac{\omega^2}{c^2}(1-\varepsilon(\mathbf{r}'))\mathbf{E}(\mathbf{r}') + \nabla\left(\nabla\left((1-\varepsilon(\mathbf{r}'))\mathbf{E}(\mathbf{r}')\right)\right)\right\} d^3r'\,, \tag{7}$$

где $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ — функция Грина уравнения (6),

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \int \frac{e^{i\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\omega^2-\kappa^2+i0}\cdot\frac{d^3\kappa}{(2\pi)^3}\,. \tag{8}$$

Для нахождения поля рассеянного излучения требуется знать асимптотику функции Грина на больших расстояниях от области, где $\varepsilon(\mathbf{r})$ отлична от единицы. Эта асимптотика, как легко проверить, имеет следующий вид:

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|_{r\to\infty} \to -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{e^{ik_f r}}{r}\,e^{-i\mathbf{k}_f\mathbf{r}'}\,, \tag{9}$$

где $\mathbf{k}_f = (\omega/c)\mathbf{r}/r$ — волновой вектор рассеянной волны, $|\mathbf{k}_f| = |\mathbf{k}_i|$. Подставляя это соотношение в (7), приходим к следующему выражению для поля рассеянного излучения:

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{scat})}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})\big|_{r\to\infty} = \tag{10}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik_f r}}{r}\int\left\{\frac{\omega^2}{c^2}(1-\varepsilon(\mathbf{r}'))\mathbf{E}(\mathbf{r}') + \nabla\left(\nabla\left((1-\varepsilon(\mathbf{r}'))\mathbf{E}(\mathbf{r}')\right)\right)\right\} e^{-i\mathbf{k}_f\mathbf{r}'}d^3r'\,.$$

Производя во втором слагаемом двукратное интегрирование по частям, получаем

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{scat})}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik_f r}}{r}\left(\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{I} - \mathbf{k}_f(\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{I})\right)\,, \tag{11}$$

где

$$\mathbf{I} = \int (1-\varepsilon(\mathbf{r}))\,\mathbf{E}(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{k}_f\mathbf{r}}d^3r\,. \tag{12}$$

Мы видим, что подынтегральное выражение в (12) будет отлично от нуля только в той области пространства, где диэлектрическая проницаемость отлична от единицы. Этим иллюстрируется тот факт, что рассеянное излучение порождается движением электронов среды, возбуждаемым электромагнитным полем падающей волны.

Плотность потока энергии в волне (вектор Пойнтинга) описывается формулой [5]

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{Re}\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathrm{Re}\,\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{c}{4\pi}\,\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\mathbf{E}^*(\mathbf{r},t)}{2}\times\frac{\mathbf{H}(\mathbf{r},t)+\mathbf{H}^*(\mathbf{r},t)}{2} = \tag{13}$$

$$= \frac{c}{16\pi}\left(\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}+\mathbf{E}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}\right)\times\left(\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}+\mathbf{H}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}\right)\,,$$

где знак $\times$ обозначает векторное умножение. При усреднении по периоду волны члены с $e^{\pm i\omega t}$ занулятся, и останется

$$\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle = \frac{c}{16\pi}\left\{\mathbf{E}(\mathbf{r})\times\mathbf{H}^*(\mathbf{r})+\mathbf{E}^*(\mathbf{r})\times\mathbf{H}(\mathbf{r})\right\} = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}(\mathbf{r})\times\mathbf{H}^*(\mathbf{r})\right)\,. \tag{14}$$

Но в электромагнитной волне $\mathbf{H} = (\mathbf{k}\times\mathbf{E})/k$ и, учитывая, что $\mathbf{k}\perp\mathbf{E}$, имеем

$$\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle = \frac{c}{8\pi}\frac{\mathbf{k}}{k}\left|\mathbf{E}(\mathbf{r})\right|^2\,. \tag{15}$$

Подставляя в (15) в качестве $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ поле рассеянной волны (11), находим для нашего случая

$$\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle = \frac{c}{2(4\pi)^3}\cdot\frac{\mathbf{k}_f}{k_f}\cdot\frac{1}{r^2}\left(\mathbf{k}_f^2\mathbf{I}-\mathbf{k}_f(\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{I})\right)\cdot\left(\mathbf{k}_f^2\mathbf{I}^*-\mathbf{k}_f(\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{I}^*)\right) = \frac{\mathbf{k}_f}{r^2}\cdot\frac{\omega}{2(4\pi)^3}\left|\mathbf{k}_f\times\mathbf{I}\right|^2\,. \tag{16}$$

Тогда средний по времени поток энергии в элемент телесного угла $d\Omega$ на большом расстоянии от мишени составит

$$d\mathcal{E} = \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle\cdot\frac{\mathbf{k}_f}{k_f}\,r^2d\Omega = \frac{\omega^2}{2(4\pi)^3c}\left|\mathbf{k}_f\times\mathbf{I}\right|^2d\Omega\,. \tag{17}$$

Разделив на плотность потока энергии в падающей волне,

$$\left|\left\langle\boldsymbol{\sigma}^{(0)}\right\rangle\right| = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\left|\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})\right|^2 = \frac{c}{8\pi}A^2\,, \tag{18}$$

получим сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\omega^2}{(4\pi)^2c^2}\cdot\frac{\left|\mathbf{k}_f\times\mathbf{I}\right|^2}{A^2}\,. \tag{19}$$

2. Борновское приближение и рассеяние на диэлектрическом цилиндре. В борновском приближении разность $(1-\varepsilon)$ рассматривается как малое возмущение, и тогда фигурирующее в (12) полное поле в мишени $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ может быть приближенно заменено полем падающей на мишень волны $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})$. В этом случае (12) дает нам

$$\mathbf{I}^{(B)} = A\mathbf{e}_i \int (1-\varepsilon(\mathbf{r}))\, e^{i(\mathbf{k}_i-\mathbf{k}_f)\mathbf{r}} d^3r = A\mathbf{e}_i \int (1-\varepsilon(\mathbf{r}))\, e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3r\,, \tag{20}$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ — разность волновых векторов падающей и рассеянной волн.

В качестве примера использования борновского приближения рассмотрим простой случай, когда мишень представляет собой однородный круглый цилиндр радиуса a и длиной $L \to \infty$, причем ось цилиндра составляет угол ψ с направлением падающей волны (рис. 1). Интегралы в (20) в этом случае легко вычисляются, если повернуть систему координат таким образом, чтобы ось z' новой системы координат была параллельна оси цилиндра. При этом интегрирование по координате z' даст нам дельта-функцию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(iq_\| z')\, dz' = 2\pi\delta(q_\|)\,,$$

а интегрирование в поперечной плоскости даст функцию Бесселя, и тогда

$$\mathbf{I}^{(B)}_{cyl} = (1-\varepsilon)\, A\mathbf{e}_i\; 2\pi\delta(q_\|) \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{iq_\perp \rho\cos\phi} d\phi = (1-\varepsilon)\, A\mathbf{e}_i\; 2\pi\delta(q_\|)\; 2\pi \int_0^a J_0(q_\perp\rho)\rho d\rho =$$

$$= (1-\varepsilon)\, A\mathbf{e}_i\, (2\pi a)^2\, \delta(q_\|) \frac{J_1(q_\perp a)}{q_\perp a}\,, \tag{21}$$

где $q_\|$ и $q_\perp$ — компоненты $\mathbf{q}$, параллельная и перпендикулярная оси цилиндра. Наличие дельта-функции выражает равенство компонент $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_f$, параллельных оси цилиндра, и означает, что рассеяние будет носить чисто азимутальный характер: волновые векторы рассеянного излучения $\mathbf{k}_f$ будут направлены по образующим конуса с осью, совпадающей с осью цилиндра, и углом полураствора ψ.

Подстановка в формулу для сечения (19) даст нам (с учетом того, что $[\delta(q_\|)]^2 = \delta(q_\|)\cdot L/2\pi$, где L — длина цилиндра)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\, |\mathbf{k}_f \times \mathbf{e}_i|^2\, La^4(1-\varepsilon)^2\; \delta(q_\|) \left(\frac{J_1(q_{\perp'} a)}{q_{\perp'} a}\right)^2. \tag{22}$$

Сечение рассеяния с выделяемой детектором поляризацией $\mathbf{e}_f$ будет описываться формулой

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi}{2}\frac{\omega^4}{c^4}\, |\mathbf{e}_f \cdot \mathbf{e}_i|^2\, La^4(1-\varepsilon)^2\; \delta(q_\|) \left(\frac{J_1(q_{\perp'} a)}{q_{\perp'} a}\right)^2. \tag{23}$$

В пределе бесконечно тонкой нити, $a \to 0$, формула (23) согласуется с результатами статьи [4].

Для нахождения сечения рассеяния неполяризованного света усредним формулу (22) по поляризациям падающей волны. С учетом того, что

$$\frac{1}{2}\left(|\mathbf{k}_f \times \mathbf{e}_x|^2 + |\mathbf{k}_f \times \mathbf{e}_y|^2\right) = \frac{1}{2}\left((k_f)_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right),$$

получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi}{4}\frac{\omega^2}{c^2}\left((k_f)_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) La^4(1-\varepsilon)^2\ \delta(q_\parallel)\left(\frac{J_1(q_{\perp'}a)}{q_{\perp'}a}\right)^2 . \tag{24}$$

Диаграмма направленности рассеянного излучения представлена на рис. 1. При построении использованы следующие соотношения:

$$q_{\perp'} = 2\frac{\omega}{c}\sin\psi\,\sin\frac{|\phi|}{2}\,, \qquad (k_f)_z = \frac{\omega}{c}\cos\left[2\arcsin\left(\sin\psi\,\sin\frac{|\phi|}{2}\right)\right],$$

где угол ϕ отсчитывается от направления $(\mathbf{k}_i)_{\perp'}$.

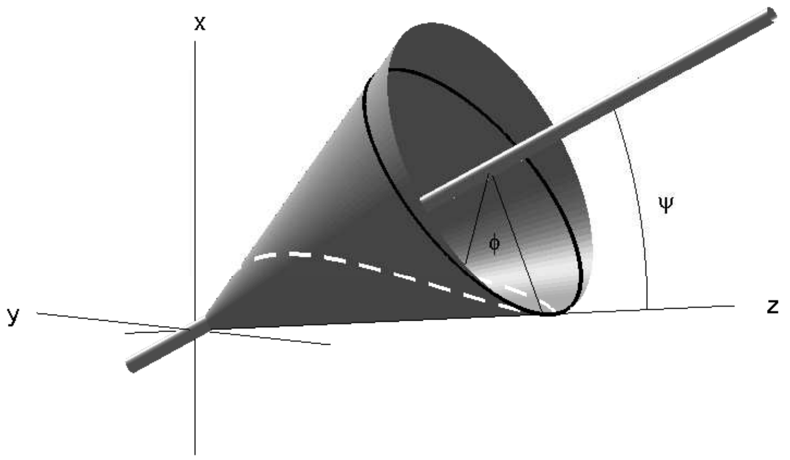

Рис. 1. Диаграмма направленности излучения, рассеиваемого круглым однородным цилиндром; ось z совпадает с направлением падения излучения, угол падения составляет $\psi = 0.4$ радиан. Штриховой кривой показана относительная интенсивность излучения, рассеянного в различных направлениях согласно (24) для случая $a\omega/c = 3$, сплошной кривой — то же в пределе бесконечно тонкой нити, когда $J_1(q_{\perp'}a)/q_{\perp'}a \to 1/2$.

Азимутальный характер рассеяния на нитевидной мишени допускает наглядную интерпретацию как проявление черенковского механизма. Действительно, падающая под углом ψ к нити электромагнитная волна создает в ней возмущение, движущееся вдоль нити со сверхсветовой фазовой скоростью

$$v_{\rm pert} = \frac{\omega}{(k_i)_\parallel} = \frac{c}{\cos\psi} > c\,. \tag{25}$$

Действительно, при смещении фронта падающей волны на величину $c\,dt$ в направлении оси z (см. рис. 2) точка пересечения фронта волны с нитью сместится на расстояние

$$\frac{z + c\,dt}{\cos\psi} - \frac{z}{\cos\psi} = \frac{c\,dt}{\cos\psi}\,, \tag{26}$$

то есть скорость движения возмущения вдоль нити будет $c/\cos\psi > c$. Такое сверхсветовое движение возмущения приводит к возникновению излучения, аналогичного черенковскому. При этом угол полураствора черенковского конуса, определяемый соотношением $\cos\theta_{Ch} = c/v_{\mathrm{pert}}$, как раз будет равен ψ.

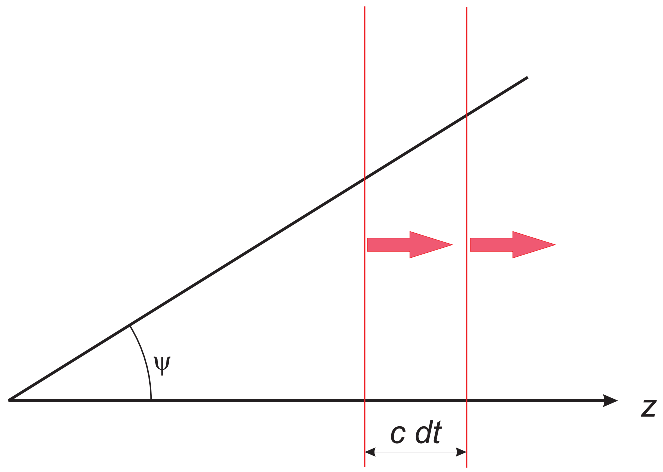

Рис. 2. Точка пересечения фронта волны (вертикальая линия), смещающегося в направлении оси z со скоростью c, с нитевидной мишенью (наклонная линия) будет смещаться со скоростью $c/\cos\psi > c$.

3. Заключение. В статье развито приближенное описание процесса рассеяния электромагнитных волн, аналогичное борновскому приближению в квантовомеханической теории рассеяния частиц. В качестве примера вычислено сечение рассеяние электромагнитной волны, наклонно падающей на бесконечный однородный круглый диэлектрический цилиндр. Дана интерпретация азимутального характера рассеяния как черенковского излучения создаваемых падающей волной возмущений, смещающихся вдоль цилиндра со сверхсветовой скоростью. В предельном случае цилиндра малого радиуса наши результаты согласуются с результатами, полученными ранее в [4].

Литература

1. Прямиков А.Д., Бирюков А.С. Возбуждение циклических волн Зоммерфельда и аномалии Вуда при скользящем падении плоской волны на диэлектрический цилиндр // УФН. – 2013. – 138, №8. – С.863-873.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика / М.: Наука, 1988. – 768 с.
3. Kerker M. The scattering of light and other electromagnetic radiation / New York: Academic Press, 1969. – 666 p.
4. Kerker M., Cooke D.D., Carlin J.M.// Journal of the Optical Society of America. – 1970. – 60. – P.1236.
5. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т.1 / М.: Наука, 1969. – 912 с.

SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVE ON DIELECTRIC CYLINDER AT BORN's APPROXIMATION

V.V. Syshchenko, E.A. Larikova

Belgorod State University,
Studencheskya St., 14, Belgorod, 308007, Russia

Abstract. The approximating method analogous to Born approximation in the quantum theory of scattering for computation of the electromagnetic radiation scattering on the dielectric target of arbitrary structure is developed. The results are applied to the problem of the electromagnetic wave scattering under oblique incidence on the uniform cylinder.

Key words: Wave scattering, Born approximation, dielectric fiber.

MSC 37J05

О ПОНЯТИИ ОБРАТИМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. В статье рассматриваются возможные определения класса конечномерных автономных систем, более широкого, чем класс гамильтоновых систем. Системы этого класса сохраняют основные качественные черты динамики гамильтоновых систем. Такое обобщение основано на свойстве обратимости движения, которое свойственно динамике гамильтоновых систем.

Ключевые слова: обратимые динамические системы, касательная динамическая система, обратимость движения, симметричное спектральное разложение.

1. Введение. В механике и электродинамики сплошных сред, в последние десятилетия, выкристаллизовалась проблема. Она заключается в необходимости разработки метода построения эволюционных уравнений для описания динамики конденсированных сред со сложной внутренней структурой. Возникновение такой проблемы связано с тем, что чисто геометрические построения с применением принципов пространственного баланса основных механических интегралов движения (энергии, импульса, числа частиц), которые используются при конструировании уравнений гидродинамики простых жидкостей (см., например, [1], [2]) оказываются уже недостаточными, при конструировании полной системы динамических уравнений для конденсированных сред, у которых локальное термодинамическое состояние характеризуется параметрами порядка, связанными со спонтанно нарушенными симметриями. Заметим, что эта проблема тесно примыкает к проблеме формулировки достаточно общего теоретического подхода в неравновесной термодинамике (см., например, [3], [4]). Еще в семидесятых годах прошлого столетия для решения указанной проблемы стал применяться так называемый *гамильтонов подход*, который основан на применении в физике конденсированных сред конструкций, принятых в фундаментальной теоретической физики.

Кратко, основная идея гамильтонова подхода заключается в том, что уравнения теории конструируются как бы в два этапа: сначала решается задача о построении адекватной для рассматриваемой физической ситуации бездиссипативной динамики, а затем для учета диссипации уравнения модифицируются в некотором смысле минимальным образом. На первом этапе, как в теоретической механике [5] или в классической теории поля [6], уравнения имеют гамильтонову (лагранжеву) форму. В отсутствии внешних сил, они описывают собственную «инерционную» динамику системы, описание которой в физике конденсированных сред как раз и представляет проблему. Учет диссипативных процессов производится феноменологически в виде «малых» слагаемых, которые, с математической точки зрения, обеспечивают диссипативность суммарного генератора эволюции.

Заметим, что такой путь построения эволюционных уравнений используется и в теоретической механике. Учет диссипации осуществляется видоизменением первоначально бездиссипативных гамильтоновых (лагранжевых) уравнений посредством добавления к ним слагаемых, которые представляются частными производными так называемой диссипативной функции. Последняя вводится феноменологически в виде неотрицательной квадратичной формы по переменным, затухание которых предполагается учесть в динамике, управляемой конструируемыми уравнениями. Реже диссипативная функция определяется так, что к квадратичной форме добавляются форма четвертого порядка, но без нарушения положительности суммарной функции при достаточно больших значений переменных. Такое построение диссипативной функции, в виде полинома от динамических переменных с наинизшими их степенями отражает относительную малость диссипации. В соответствии с таким подходом, при построении динамических уравнений для конденсированных сред, в сконструированные бездиссипативные уравнения, по-видимому, должны быть добавлены диссипативные слагаемые в виде дифференциальных знакоопределенных операторов второго порядка, обеспечивающих феноменологическое описание диссипации.

Итак, следуя описанной стратегии, основная проблема состоит в построении бездиссипативной динамики. Именно эта задача решается в рамках гамильтонова подхода.

По-видимому, первыми работами, в которых для построения бездиссипативной динамики конденсированной среды было предложено использовать лагранжевы уравнения, были статьи Волкова Д.В. с сотрудниками [7-9]. Эти работы были затем заново пересмотрены авторами [10-11], когда возник интерес к этой тематике [12-14]. Во всех указанных работах для построения бездиссипативной динамики магнитоупорядоченных сред использовался лагранжев формализм. При этом, в результате, получались динамические уравнения, обобщающие известное уравнение ферродинамики – уравнение Ландау-Лифшица [15, 16]. На более позднем этапе развития стало ясно, что лагранжев формализм несколько неестественен для решения подобных задач в физике конденсированного состояния. В связи с чем, метод построения бездиссипативных динамических уравнений был сформулирован в терминах гамильтонова формализма.

Как известно, построение гамильтоновых уравнений при заданном гамильтониане можно осуществить двумя способами. Первый из них состоит в определении набора канонически сопряженных пар фазовых переменных так, что производная гамильтониана по каждой из этих переменных определяет скорость изменения сопряженной переменной (в бесконечномерном случае должны, очевидно, использоваться вариационные производные). Второй способ состоит во введении симплектической структуры посредством определения специальной бинарной операции на алгебре функций от фазовых переменных – т.н. скобки Пуассона, которая подчиняется специальному набору аксиом. Технически, последний способ оказывается более предпочтительным для пространственно распределенных динамических систем, ввиду их бесконечномерности, так как разделение на пары сопряженных переменных в бесконечномерном случае может быть довольно искусственным. Поэтому, на следующем этапе разработки гамильтонова подхода к построению бездиссипативных динамических уравнений, его формализм был модифицирован и сформулирован в терминах скобок Пуассона [17, 18].

Развитие гамильтонова формализма на основе техники скобок Пуассона привело к разработке специальных приемов их определения. На этом пути были разработаны алгебры скобок Пуассона для нормальных жидкостей, твердых тел, для сред с магнитным упорядочением [17, 18], для жидкостей с мезофазным состоянием (жидких кристаллов) различного типа [19]. Наконец, такой подход был применен для конденсированных сред, в термодинамике которых проявляется спонтанное нарушение симметрии, имеющее квантовое происхождение – для сверхтекучих жидкостей и квантовых кристаллов [21].

Следует заметить, что в формализме скобок Пуассона имеется одно неприятное положение. В списке аксиом, которым должна удовлетворять конструируемая бинарная операция присутствует так называемое тождество Якоби, которое невозможно прозрачным образом интерпретировать с физической точки зрения. Это затрудняет целенаправленное использование формализма при конструировании динамических моделей, описывающих конкретную физическую ситуацию. Указанное обстоятельство не могло не проявиться при практическом применении формализма скобок Пуассона на каком-то этапе его развития. Действительно, несмотря на то, что гамильтонов подход оказался очень плодотворным при решении многих задач построения динамических уравнений конденсированных сред со сложной структурой, было подмечено, что в его рамках невозможно сконструировать такие эволюционные уравнения для жидкокристаллических сред, чтобы физические предсказания, основанные на этих уравнениях, полностью согласовывались с экспериментальными данными. Впервые на это было указано в монографии [22]. Оказалось, что формализм алгебры скобок Пуассона является в указанном случае слишком стеснительным. При этом оказывается, что именно требование выполнимости тождества Якоби для скобок Пуассона не позволяет ввести достаточно широкий набор феноменологических параметров, чтобы привести характеристики динамики жидких кристаллов, к согласию с экспериментальными данными. В связи с создавшимся положением возникает вопрос о том, как усовершенствовать гамильтонов подход так, чтобы приспособить его к описанию проблемных физических ситуаций.

В процитированной монографии авторы пошли в построении динамики нематических жидких кристаллов по простому пути. Они ограничили рамки построения динамики только самыми общими требованиями: генератор сдвига по времени всякой распределенной в пространстве полевой динамической переменной $\varphi(\boldsymbol{x})$ должен порождаться некоторой бинарной билинейной антисимметричной операцией, удовлетворяющей тождеству Лейбница (то есть она должна представлять собой т.н. операцию алгебраического дифференцирования). Уравнение движения для поля $\varphi(\boldsymbol{x})$ строится применением этого генератора к паре, состоящей из гамильтониана – функционала от полевых переменных и поля $\varphi(\boldsymbol{x})$. При этом не требуется, чтобы вводимая бинарная операция обязательно удовлетворяла тождеству Якоби. Однако, если следовать такому подходу неизбежно приходится сталкиваться с такой ситуацией, что указанным требованиям удовлетворяет динамика систем, которые с физической точки зрения являются диссипативными. В связи с таким положением, возникает вопрос о том, можно ли построить такое обобщение гамильтоновой динамики, чтобы, с одной стороны, она оставалась бездиссипативной, а, с другой стороны, чтобы оно оказалось настолько широким, чтобы имелась возможность согласования ее предсказаний с экспериментальными данными.

В настоящей работе обсуждаются возможности обобщений гамильтоновой динамики, удовлетворяющих указанным требованиям. Мы ограничиваемся только конечномерными динамическими системами, не требующими для своего изучения применения аппарата бесконечномерных алгебр Ли. Кроме того, далее мы, не оговаривая дополнительно, везде изучаем только автономные динамические системы. Основной идеей наших построений является понятие *обратимости* движения, присущее гамильтоновым системам. В предшествующих работах авторов было введено понятие обратимой динамической системы, которое естественно было бы назвать *спектральной обратимостью* [23-30]. А именно, исследовались четномерные динамические системы. Требование обратимости сводилось к тому, чтобы в каждой точке фазового пространства которых генератор линейной динамической системы, касательной к исходной в этой точке, обладал симметричным спектральным разложением.

2. Понятие обратимости динамической системы. Определение класса динамических систем, более широкого чем класс гамильтоновых систем, сохраняющих основные качественные черты динамики последних, связан осознанием того, какие именно свойства динамики гамильтоновых систем при этом нужно взять за основу. С нашей точки зрения, таким качественным свойством, которое отличает поведение гамильтоновых систем и которое мы интуитивно связываем с отсутствием в них диссипативного поведения, является *обратимость движения*.

Будем рассматривать конечномерные автономные динамические системы размерности n. Пусть фазовым пространством каждой из таких систем, не ограничивая общности, является $\mathbb{R}^n$. Пусть $X = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle \in \mathbb{R}^n$ и $\mathsf{F} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$. Динамическая система, соответствующая диффеорморфизму F, имеет вид

$$\dot{X} = \mathsf{F}(X)\,. \tag{1}$$

Частным случаем динамических систем рассматриваемого типа, который будут служить ориентиром в наших построениях, являются гамильтоновы системы. Они являются четномерными $n = 2m$. Каждая из таких систем порождается некоторой функцией $\mathsf{H} : \mathbb{R}^{2m} \mapsto \mathbb{R}$, которая называется гамильтонианом. Система, определяемая гамильтонианом H, имеет вид

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial Q}\,, \qquad \dot{Q} = \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial P}\,, \tag{2}$$

где $P = \langle p_1, p-2, ..., p_m \rangle$, $Q = \langle q_1, q_2, ..., q_m \rangle$.

Обсудим, что нужно понимать под понятием обратимости движения. Наши рассуждения будут опираться на следующее положение. Мы считаем, что обратимость движения не является свойством выбора координат описания движения, а, наоборот, это свойство не должно зависеть от их выбора. Это означает, что любая система (1), если она рассматривается как обратимая, то и любая система, которая получается из нее невырожденной заменой координат $\mathsf{V}(X) = Y$,

$$\dot{Y} = \mathcal{W} F(\mathsf{V}^{-1}(Y))\,, \qquad \mathcal{W} = \left(\frac{\partial \mathsf{V}}{\partial X}\right) \text{– матрица,} \tag{3}$$

также является обратимой.

Обратимся к гамильтоновым системам. Понятие их обратимости можно рассматривать с двух различных точек зрения, которые мы будем, в дальнейшем, называть *локальной* и *глобальной* и которые при изучении гамильтоновых систем совпадают. Локальная точка зрения состоит в том, что в том случае, когда $\mathsf{H}(-P,Q) = \mathsf{H}(P,Q)$, [3] система уравнений (2) инвариантна относительно замены $t \Rightarrow -t$, $P \Rightarrow -P$.

Самое широкое и, вместе с тем, естественное обобщение такой трактовки понятия обратимости заключается в следующем.

Определение 1. *Систему (1) назовем локально-обратимой в широком смысле, если существует диффеоморфизм* V *такой, что он переводит (1) в систему*

$$\dot{Y} = -\mathsf{F}(Y)\,, \qquad Y = \mathsf{V}(X) \tag{4}$$

и при этом $\mathsf{V}^2 = \mathrm{id}$, $\mathsf{V}(\mathsf{V}(X)) = X$, $X \in \mathbb{R}^n$.

Изучение примеров показывает, что определенный таким образом класс локально-обратимых в широком смысле систем оказывается очень широким. Он допускает существование систем такого типа любой размерности. При этом одномерные обратимые системы допускают простое описание. А именно, при $n = 1$ представим (1) в виде

$$\dot{x} = f(x)\,. \tag{5}$$

Согласно определению, система локально обратима в широком смысле, если существует функция v такая, что

$$v'(x)f(x) = -f(v(x))\,, \qquad v(v(x)) = x\,.$$

Из второго соотношения следует $v(x) = v^{-1}(x)$, то есть обратная функция совпадает с исходной. Из простых геометрических соображений следует, что имеется только две возможности $v(x) = x$ и $v(x) = a - x$ с произвольной постоянной a. Первый случай приводит только тривиальной динамической системе $f = 0$. Второй накладывает следующее ограничение на функцию f: $f(x) = f(a-x)$. В частности, при $a = 0$ это требование сводится к тому, что f является четной функцией.

Несмотря на то, что введенный класс локально-обратимых в широком смысле динамических систем может представлять самостоятельный интересный объект для математического исследования, мы сосредоточимся на динамических системах, которые, заведомо, принадлежат этому классу, но составляют в нем специальный более узкий подкласс. Это связано с тем, что класс локально обратимых в широком смысле систем настолько широк, что большая часть из них, по-видимому, не имеет отношения к той физической проблеме, о которой шла речь во введении. В частности, в рассмотренном одномерном примере, только тривиальную систему, описывающую состояние покоя, можно было бы назвать обратимой в физическом смысле. Заметим, что в определении

[3] В механике приходится рассматривать ситуации, когда это свойство не имеет места, например, при наличии внешнего магнитного поля, но мы, упрощая рассмотрения, такие системы не будем рассматривать.

этого класса отсутствует разделение координат системы на два класса, в котором параметры первого класса, которые условно назовем пространственными координатами, и параметры, второго класса, которые условно назовем импульсами. Именно преобразование (обращение знака) параметров второго класса приводит к тому, что движение системы в пространстве параметров первого класса, происходит в обратном направлении. В связи с этим, дадим другое определение локальной обратимости динамической системы (1), в рамках которого уже вводится такое разделение.

Определение 2. *Систему (1) назовем локально-обратимой, если существует диффеоморфизм* U *такой, что преобразованная вектор-функция* $(\mathsf{U}X)(t) = \langle P(t), Q(t), Y(t)\rangle$, $P(t) = \langle p_1(t), ..., p_m(t)\rangle$, $Q(t) = \langle q_1(t), ..., q_m(t)\rangle$, $2m \le n$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\dot{P} = \mathsf{A}(P, Q)\,, \qquad \dot{Q} = \mathsf{B}(P, Q)\,, \qquad \dot{Y} = 0\,, \tag{6}$$

где дифференцируемые отображения $\mathsf{A} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$; $\mathsf{A} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ *обладают свойствами* $\mathsf{B}(-P, Q) = -\mathsf{B}(A, B)$, $\mathsf{A}(-P, Q) = \mathsf{A}(P, Q)$.

Легко видеть, что системы (6) являются локально обратимыми в широком смысле, так как для них отображение V является линейным и представляется матрицей

$$\mathsf{V} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & | & 0 & | & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & | & \mathbf{1} & | & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & | & 0 & | & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Легко видеть также, что системы (6), в общем случае, не являются гамильтоновыми. В этом смысле, локально обратимые системы не сводимы к гамильтоновым системам посредством какого-либо диффеоморфизма U. Для того чтобы система (6) была гамильтоновой, необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество

$$\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial P} + \frac{\partial B}{\partial Q} = 0\,. \tag{7}$$

Перейдем теперь к обсуждению глобальной трактовки понятия обратимости динамической системы. Заметим, что для гамильтоновых систем (2) в том случае, когда $\mathsf{H}(-P, Q) = \mathsf{H}(P, Q)$, их решения $P(t) = \mathsf{P}(t; P_0, Q_0)$, $Q(t) = \mathsf{Q}(t; P_0, Q_0)$ с начальными данными $P_0 = \mathsf{P}(0; P_0, Q_0)$, $Q_0 = \mathsf{Q}(0; P_0, Q_0)$, удовлетворяют соотношениям

$$P_0 = -\mathsf{P}(t; -P(t), Q(t))\,, \quad Q_0 = \mathsf{Q}(t; -P(t), Q(t))\,. \tag{8}$$

Именно это свойство естественно взять за определение понятия *глобальной обратимости* динамической системы

Определение 3. *Систему (1) назовем глобально-обратимой в широком смысле, если существует диффеоморфизм* W *такой, что* $\mathsf{W}^2 = \mathrm{id}$ *и для решений* $X = \mathsf{X}(t; X_0)$ *с начальными данными* X_0 *имеет место*

$$X_0 = \mathsf{X}(t, \mathsf{W}(X(t)))\,. \tag{9}$$

Класс глобально-обратимых систем в широком смысле оказывается также, как и класс локально-обратимых систем в широком смысле, является очень обширным и, по-видимому, большая часть из систем такого типа не имеет отношения к поставленной во введении задаче математического моделирования. В связи с этим, мы, по аналогии с тем, как было введено понятие локальной обратимости, дадим следующее определение, которое обобщает указанное выше свойство глобальной обратимости гамильтоновых систем.

Определение 4. *Систему (1) назовем глобально-обратимой, если существует диффеоморфизм* U *такой, что эта система преобразованная вектор-функция* $(\mathsf{U}X)(t) = \langle P(t), Q(t), Y(t)\rangle$, $P(t) = \langle p_1(t), ..., p_m(t)\rangle$, $Q(t) = \langle q_1(t), ..., q_m(t)\rangle$, $2m \le n$ *удовлетворяет системе уравнений (6) с дифференцируемыми отображениями* $\mathsf{A} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$; $\mathsf{A} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ *и ее решения* $P(t) = \mathsf{P}(t; P_0, Q_0)$, $Q(t) = \mathsf{Q}(t; P_0, Q_0)$ *с начальными данными* $P_0 = \mathsf{P}(0; P_0, Q_0)$, $Q_0 = \mathsf{Q}(0; P_0, Q_0)$, *удовлетворяют соотношениям (8)*

3. Теорема эквивалентности. Докажем теперь основное утверждение, связанное со введенными понятиями.

Теорема. *Для того, чтобы система (1) была глобально обратимой, необходимо и достаточно, чтобы она была обратимой локально.*

□ Необходимость. Пусть соотношения (8) выполняются для решений системы уравнений (6) для любой точки $\langle P_0, Q_0\rangle$ в качестве начальных данных. Возьмем решение $\langle P(t), Q(t)\rangle$ с начальной произвольно выбранной точкой. Тогда при $\Delta \to 0$ имеем

$$P(\Delta) = P_0 + \mathsf{A}(P_0, Q_0)\Delta + o(\Delta)\,, \qquad Q(\Delta) = Q_0 + \mathsf{B}(P_0, Q_0)\Delta + o(\Delta)\,. \tag{10}$$

С другой стороны, из (8) следует, что

$$P_0 = -\mathsf{P}(\Delta; -P(\Delta), Q(\Delta))\,, \qquad Q_0 = \mathsf{Q}(\Delta; -P(\Delta), Q(\Delta))\,,$$

то есть

$$P_0 = P(\Delta) - \mathsf{A}(-P(\Delta), Q(\Delta))\Delta + o(\Delta)\,, \qquad Q_0 = Q(\Delta) + \mathsf{B}(-P(\Delta), Q(\Delta))\Delta + o(\Delta)\,. \tag{11}$$

Учитывая, что

$$\mathsf{A}(-P(\Delta), Q(\Delta)) = \mathsf{A}(-P_0, Q_0) + o(1)\,, \qquad \mathsf{B}(-P(\Delta), Q(\Delta)) = \mathsf{B}(-P_0, Q_0) + o(1)\,,$$

получаем из (11)

$$P_0 = P(\Delta) - \mathsf{A}(-P_0, Q_0)\Delta + o(\Delta)\,, \qquad Q_0 = Q(\Delta) + \mathsf{B}(-P_0, Q_0)\Delta + o(\Delta)\,.$$

Сравнивая эти выражения с (10), получаем соотношения $\mathsf{A}(-P_0, Q_0) = \mathsf{A}(P_0, Q_0)$, $\mathsf{B}(-P_0, Q_0) = -\mathsf{B}(P_0, Q_0)$, которые, в силу произвольности точки $\langle P_0, Q_0\rangle$, означают локальную обратимость системы.

Достаточность. Представим решения системы (6) с начальными данными $\langle P_0, Q_0\rangle$ в виде

$$\mathsf{P}(t; P_0, Q_0) = P_0 + \int_0^t \mathsf{A}(P(s), Q(s))ds\,, \quad \mathsf{Q}(t; P_0, Q_0) = Q_0 + \int_0^t \mathsf{B}(P(s), Q(s))ds\,. \tag{12}$$

где правые части определяют отображения P и Q. Обозначим $P^*(s) = -P(t-s)$, $Q^*(s) = Q(t-s)$, где $P(t) = \mathsf{P}(t; P_0, Q_0)$, $Q(t) = \mathsf{Q}(t; P_0, Q_0)$. Эти функции удовлетворяют, соответственно, уравнениям

$$\dot{P}^*(s) = -\frac{d}{ds}P(t-s) = \frac{d}{dt}P(t-s) = \mathsf{A}(P(t-s), Q(t-s)) =$$
$$= \mathsf{A}(-P(t-s), Q(t-s)) = \mathsf{A}(P^*(s), Q^*(s))\,,$$
$$\dot{Q}^*(s) = \frac{d}{ds}Q(t-s) = -\frac{d}{dt}Q(t-s) = -\mathsf{B}(P(t-s), Q(t-s)) =$$
$$= \mathsf{B}(-P(t-s), Q(t-s)) = \mathsf{B}(P^*(s), Q^*(s))\,.$$

Тогда, как и в (12),

$$P^*(t) = \mathsf{P}(t; P_0^*, Q_0^*) = P_0^* + \int_0^t \mathsf{A}(P^*(s), Q^*(s))ds\,,$$

$$Q^*(t) = \mathsf{Q}(t; P_0^*, Q_0^*) = Q_0^* + \int_0^t \mathsf{B}(P^*(s), Q^*(s))ds\,.$$

Подставляя явные выражения для $P^*(t), P_0^*$ и $Q^*(t), Q_0^*$,

$$-P_0 = -P(t) + \int_0^t \mathsf{A}(P^*(s), Q^*(s))ds\,, \qquad Q_0 = Q(t) + \int_0^t \mathsf{B}(P^*(s), Q^*(s))ds\,,$$

что означает $-P_0 = \mathsf{P}(t; -P(t), Q(t))$ и $Q_0 = \mathsf{Q}(t; -P(t), Q(t))$. ■

Таким образом, понятия локальной и глобальной обратимости во введенной нами расширенной негамильтоновой динамике совпадают и поэтому нужно говорить просто об *обратимости* таких систем, если выполняется одно из свойств, указанных, соответственно, в определениях 2 и 4.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / Теоретическая физика / М.: Наука, 1986. – 736 с.
2. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / М: Мир, 1975. – 592 с.

3. Гуров К.П. Феноменологическая термодинамика необратимых процессов / М.: Наука, 1978. – 128 с.
4. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы / М.: Мир, 1974. – 404 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика / Теоретическая физика. Учеб. пособие в 10-ти томах. т.1 / М.: Наука, 1988. – 216 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля / Теоретическая физика / М.: Наука, 1988. – 512 с.
7. Волков Д.В. Феноменологический лагранжиан взаимодействия голдстоуновских частиц / Препринт ИТФ-69-75, Киев, 1969. – 51 с.
8. Волков Д.В., Желтухин А.А., Блиох Ю.П. Феноменологический лагранжиан спиновых волн // ФТТ. – 1971. – 13, № 6. –С.1668-1678.
9. Волков Д.В. Феноменологические лагранжианы // ЭЧАЯ. – 1973. – 4, № 1. – С.3-41.
10. Волков Д.В., Желтухин А.А. Феноменологический лагранжиан спиновых волн в пространственно-неупорядоченных средах // ФНТ. – 1979. – 5, №11. – С.1359-1363.
11. Волков Д.В., Желтухин А.А. О распространении спиновых волн в пространственно-неупорядоченных средах // ЖЭТФ. – 1980. – 78, № 5. – С.I867-1878.
12. Андреев А.Ф., Марченко В.И. Макроскопическая теория спиновых волн // ЖЭТФ. – 1976. – 70, № 4. – С.1522-1532.
13. Андреев А.Ф. Магнитные свойства неупорядоченных сред // ЖЭТФ. – 1978. – 74. – № 2. – С.786-797.
14. Андреев А.Ф., Марченко В.И. Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков // УФН. – 1980. – 130, № 1. – С.37-63.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // Phys. Zs. Sowjet. – 1935. – 8. – С.153-169.
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // Ландау Л.Д. Собрание трудов в 2 т. Под ред. Е.М. Лифшица / М.: Наука, 1969. – Т.1. – С.128.
17. Dsyaloshinskii I.E., Volovick G.E. Poisson brackets in condensed matter physics // Ann. Phys. – 1980. – 125:1. – P.67–97.
18. Вирченко Ю.П., Пелетминский С.В. Скобки Пуассона и дифференциальные законы сохранения в теории магнитоупругих сред / Проблемы физической кинетики и физики твердого тела / Киев: Наукова думка, 1990. – С.63-77.
19. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. О гамильтоновом подходе к динамике сплошных сред // ТМФ. – 1995. – 102:2. – С.283–296.
20. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. Гамильтонов подход к теории антиферромагнитных систем // ТМФ. – 1993. – 95:1. – С.58–73.
21. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. Гамильтонов подход в теории конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией / Физика элементарных частиц и атомного ядра.– 1996. – 27. – 2. – С.431-492.
22. Кац Е.И., Лебедев В.В. Динамика жидких кристаллов / М.: Наука, 1988.
23. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Свойство локальной обратимости гамильтоновых динамических систем // Материалы Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел» Белгород, 17-21 октября 2011 / С.37-38.
24. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Симметричность спектра линейных гамильтоновых систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2011. – 17(112);24. – С.179-180.
25. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Полностью вырожденные линейные гамильтоновы системы // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2012. – 23(142);29. – С.215-218.
26. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Характеризация линейных гамильтоновых систем // Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» 26-31 мая 2013, Белгород / Белгород: Политерра, 2013. – С.180-181.

27. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. О спектральном разложении генераторов гамильтоновых систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2013. – 5(148);30. – С.135-141.
28. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. О классе гамильтоновых матриц // Belgorod State University Scientific. Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 11(154);31. – С.183-185.
29. Субботин А.В., Вирченко Ю.П. Обратимые динамические системы // Тезисы зимней математической школы С.Г.Крейна / Воронеж: ВГУ, 2014. – С.337-341.
30. Субботин А.В., Вирченко Ю.П. Обратимые динамические системы // Proceedings XII of young scientists school "Non-local boundary value problems and problems of modern analysis and informatics", KBR, Terskol 3-7 December 2014 // Нальчик: Институт прикладной математики и автоматизации, 2014. – С.65-67.

CONCEPT OF DYNAMIC SYSTEMS REVERSIBILITY

Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch48@bsu.edu.ru

Abstract. Some possible generalizations of the class of hamiltonian system are under considerations. Finite dimensional autonomous systems such that some main qualitative features of their dynamics are under study. Generalizations are based on the property of motion reversibility that is connected with dynamics of hamiltonian systems.

Key words: reversible dynamic systems, tangential dynamic system, reversibility, symmetric spectral decomposition.

ФИЗИКА

УДК 669.046:536.2.083:519.876.5

ИНЖЕНЕРНАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВОЙ РАБОТЫ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В.В. Стерлигов, Д.А. Шадринцева

Сибирский государственный индустриальный университет,
ул. Кирова, 42, Новокузнецк, Россия, 654000, e-mail: schadrintseva.darya@yandex.ru

Аннотация. В статье представлен новый подход к интерпретации коэффициента теплопроводности пористых теплоизоляционных материалов. Приведены опытные данные по проверке гипотезы.

Ключевые слова: огнеупоры, пористость, теплопроводность, теплоизоляционный, «мостик».

С каждым годом возрастает необходимость в энерго- и ресурсосбережении с использованием современных технологий. Выбор оптимального теплоизоляционного материала с точки зрения структуры и теплофизических свойств во многом определяет эффективность использования тепла и экономию материалов, поэтому исследование теплопроводности тел неоднородной структуры является актуальной задачей. В статье представлены результаты нового подхода к интерпретации коэффициента теплопроводности пористых (теплоизоляционных) материалов.

Огнеупор – среда с равномерно распределенной пористостью, реализуемой пузырьками с газовыми заполнением. В первом приближении, все пузырьки одного размера (гомогенная среда) и они равномерно распределены в теле огнеупора, поскольку нет никаких предпочтений для другого распределения. На рис. 1 представлена схема структуры пористого материала.

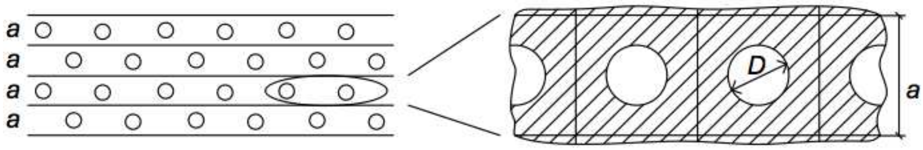

Рис. 1. Схема структуры пористого материала.

Если из схемы выделить монослой толщиной , то в нем будут расположены пузырьки (газовые полости) размером D. Отношение площадей $S_D/S_a = \Pi$ равно пористости (порозности) материала. Так как $S_D = \dfrac{\pi D^2}{4}$, а $S_a = a^2$, то

$$S_D = \frac{\pi D^2}{4}\Big/ a^2\,. \tag{1}$$

Таким образом, можно пористость выразить через геометрию системы, используя отношение D/a.

Из уравнения (1) можно найти

$$D/a = \sqrt{\frac{4\Pi}{\pi}} = 1.128\sqrt{\Pi}\,. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) можно рассчитать величину D/a для разных значений Π, свести в табл. 1 и представить в виде графика (рис. 2).

Таблица 1

Значения отношения диаметра поры к толщине монослоя при различной пористости

П	0,200	0,250	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,750	0,785
D	0.504	0.564	0.618	0,713	0,798	0,873	0,943	0,976	0,999

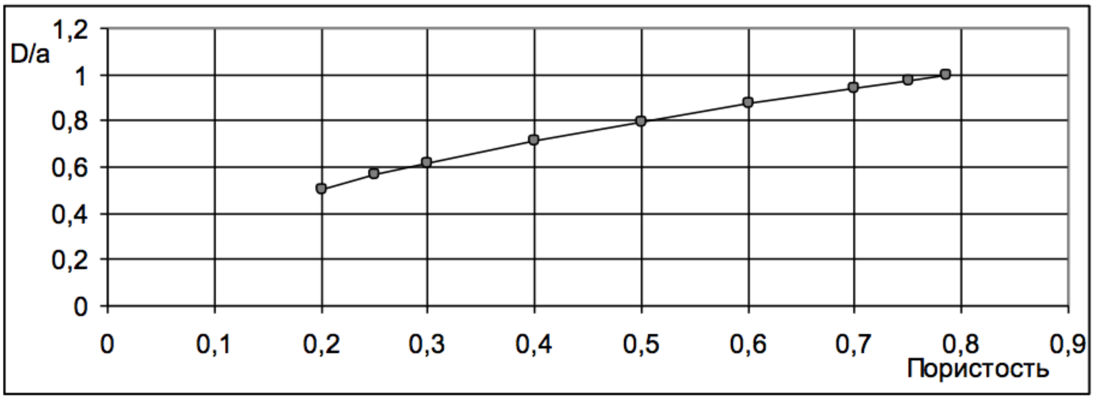

Рис. 2. Структура слоя пористого материала при различных пористости.

Очевидно, что при $D/a = 1$ и соответствующей ей пористости $\Pi = 0,785$ произойдет соединение отдельных пузырьков. Возникшая структура при $\Pi > 0,785$ представляет собой качественно иную картину: единая газовая полость, имеющая внутри некоторые элементы из основного материала, позволяющие сохранить геометрию структуры. Это свойственно волокнистым материалам. Поэтому предлагаемая гипотеза применима только для материалов с $\Pi < 0,785$.

Этот характерный размер используем для расчета теплопроводности. Эта задача решается как одномерная для плоской системы толщиной с пузырьками внутри ее. Тепло проходит через «мостик» шириной b (рис. 3), определяемой из предположения, что площадь мостика в плоскости, перпендикулярной направлению потока q, $F_{\text{м}} = a^2 \cdot b$ численно равна площади, не занятой пузырьком, т.е. $F_{\text{м}} = a^2 \cdot (1 - \Pi)$.

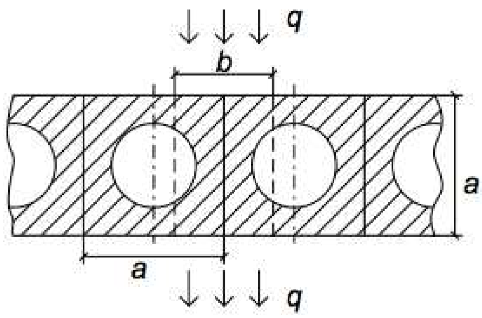

Рис. 3. Схема расположения «мостика» в пористом материале.

Отсюда можем записать

$$b = a \cdot (1 - \Pi)\,. \qquad (3)$$

Такое представление геометрии мостика позволяет заменить сложное сечение стенки по глубине на параллелепипед. Для более точного расчета можно использовать методику расчета теплопроводности через клиновидную стенку.

Количество тепла через ячейку (через все сечение) и через мостик будет соответственно:

$$Q_a = q \cdot a^2\,, \qquad Q_b = q \cdot a \cdot b\,. \qquad (4)$$

Сравнение этих двух случаев дает отношение, которое показывает долю тепла, проходящего через материал.

$$Q_b \Big/ Q_a = \frac{q \cdot a^2 \cdot (1 - \Pi)}{q \cdot a^2} = (1 - \Pi)\,. \qquad (5)$$

Величина q в обоих случаях принимается одна и та же, что предполагает условие отсутствия теплового потока через газовые пузырьки, т. е. $q_r = 0$, все тепло передается только через «мостик» основного материала.

Уравнение (5), по сути своей, представляет отношение теплового потока в классической интерпретации Q_a и теплового тока с «эквивалентной» теплопроводностью, т.е. $Q_b \Big/ Q_a = \dfrac{q_{\text{экв}} \cdot F_{\text{геом}}}{q \cdot F_{\text{геом}}}$, где $q_{\text{экв}} = \dfrac{\lambda_{\text{экв}} \cdot \Delta t}{a}$ и $q = \dfrac{\lambda_{\text{экв}} \cdot \Delta t}{a}$. Из этого следует

$$\lambda^{\text{м}}_{\text{экв}} = \lambda_{\text{м}} \cdot (1 - \Pi)\,. \qquad (6)$$

Полученное выражение отличается от уравнения Г.П. Иванцова, о чем упоминается в [1], и не содержит «газовой» составляющей теплопроводности.

Влияние «газовой» теплопроводности можно учесть аналогичным образом, что дает

$$\lambda^{\text{г}}_{\text{экв}} = \left(\frac{\Pi}{\lambda_{\text{г}}} + \frac{(1 - \Pi)}{\lambda_{\text{м}}}\right)^{-1} = \frac{\lambda_{\text{г}}}{\Pi + (1 - \Pi)\dfrac{\lambda_{\text{г}}}{\lambda_{\text{м}}}} = \frac{\lambda_{\text{м}}}{(1 - \Pi) + \Pi\dfrac{\lambda_{\text{м}}}{\lambda_{\text{г}}}}\,. \qquad (7)$$

Эта величина учитывает влияние «газового» компонента. Для оценки вклада каждой составляющей определим отношение, используя уравнения (6) и (7),

$$\bar{\lambda}_{\text{экв}} = \frac{\lambda^{\text{м}}_{\text{экв}}}{\lambda^{\text{г}}_{\text{экв}}} = \lambda_{\text{м}}(1-\Pi) \Bigg/ \frac{\lambda_{\text{м}}}{(1-\Pi)+\Pi\left(\lambda_{\text{м}}/\lambda_{\text{г}}\right)} = \left[\Pi\left(\lambda_{\text{м}}/\lambda_{\text{г}}\right)+(1-\Pi)\right](1-\Pi)\,. \quad (8)$$

Рассчитаем $\bar{\lambda}_{\text{экв}} = f(\Pi)$, приняв из практики $\lambda_{\text{м}} = 1.0\,\frac{Bm}{м\cdot град}$ (для шамота) и $\lambda_{\text{г}} = 0.02\,\frac{Bm}{м\cdot град}$ (для воздуха). Тогда для расчетов уравнение (8) трансформируется в выражение

$$\bar{\lambda}_{\text{экв}} = \left(\Pi\frac{1.0}{0.02} + (1-\Pi)\right)(1-\Pi) = (49\Pi+1)(1-\Pi)\,,$$

на основании которого построен график (рис. 4).

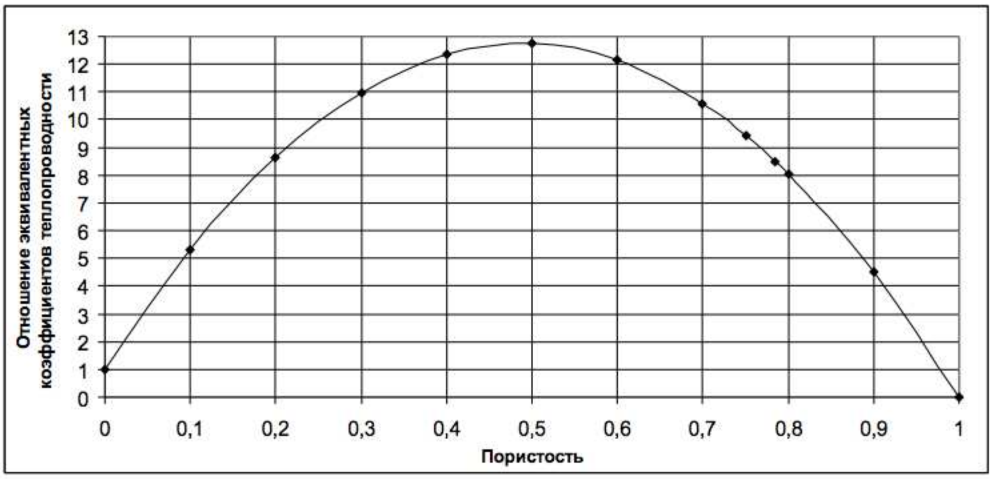

Рис. 4. Влияние пористости материала на отношение эквивалентных коэффициентов теплопроводности $\bar{\lambda}_{\text{экв}}$.

Предложенная гипотеза является общей для всех возможных материалов, что позволяет построить общую функцию $\Delta\bar{\lambda} = f(\Pi)$, при этом $\overline{\Delta\lambda} = \Delta\lambda/\Delta\lambda_{\text{ ст}}$.

На основании литературных данных для огнеупоров [2], со свойствами, представленными в табл. 2, была построена обобщенная зависимость $\bar{\lambda} = f(\Pi)$ на основе методики аффинных преобразований (рис. 5). [1]

Для оценки адекватности полученных зависимостей и проверки правильности гипотезы была проведена экспериментальная проверка на комплексе ЛКТТ-2. Коэффициент теплопроводности для шамота-легковеса ШЛ-1,0 определялся методом плоской стенки. Результаты опытов представлены точкой на рис. 5, что позволяет судить о правильности предложенной гипотезы.

Таблица 2

Литературные данные по свойствам огнеупоров разных стран

№	Страна	Марка	ρ	П	λ	1-П	ρ_0	$\bar{\rho}_0$
1	Япония	LBK-20	0,47	0,83	0,13	0,17	2,764706	2,565985
2		LBK-23	0,51	0,81	0,14	0,19	2,684211	
3		A-2	0,46	0,80	0,13	0,20	2,30	
4		A-6K	0,68	0,75	0,18	0,25	2,72	
5		B-5H	0,85	0,64	0,2	0,36	2,361111	
6		C1-E	1,35	0,48	0,4	0,52	2,596154	
7		4-HB	1,42	0,44	0,47	0,56	2,535714	
8	США	K-16	0,35	-	0,18			
9		K-20	0,46	-	0,226			
10		K-23	0,50	-	0,226			
11		K-26	0,071	-	0,406			
12		ДЖМ-26	0,86	-	0,332			
13	Франция	Savoie di-20	0,44	-	0,18			2,566279
14		Savoie di-23	0,47	0,828	0,185	0,172	2,732558	
15		Savoie di-28	0,70	-	0,3			
16		Ref-750	0,72	0,70	0,36	0,30	2,40	

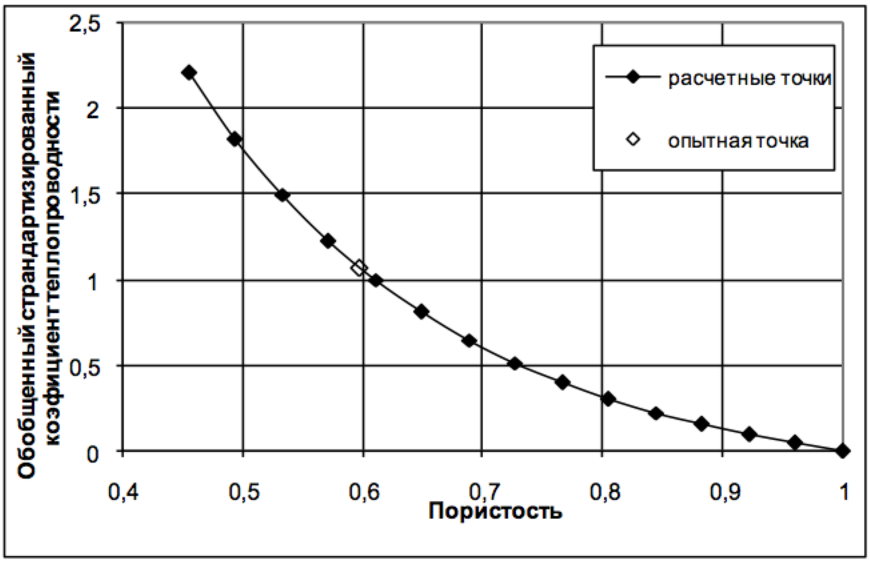

Рис. 5. Зависимость обобщенного стандартизированного коэффициента теплопроводности от пористости.

Выводы. Предложенная гипотеза влияния структуры пористого материала была подтверждена экспериментально, что в совокупности с ранее предложенной методикой получения обобщенной характеристики позволяет легко и точно определять коэффициент теплопроводности теплоизоляционных материалов, используемых в теплотехнических агрегатах.

Литература

1. Стерлигов В.В., Чекулаев А.А. Создание обобщенной модели теплопроводности для тел с анизотропными свойствами // Изв. вуз. Черная металлургия. -– 2011. -– №8. -– С.45–48.
2. Стерлигов В.В., Михайличенко Т.А., Шадринцева Д.А. Создание обобщенной инженерной методики определения коэффициента теплопроводности теплоизоляционных материалов // Вестник СибГИУ. – 2012. – №2. – С.24–26.

HEAT OPERATION ENGINEERING MODEL OF THERMAL INSULATING MATERIALS

V.V. Sterligov, D.A. Shadrintseva

Siberian State Industrial University,
St. Kirov, 42, Novokuznetsk, 654000, Russia, e-mail: schadrintseva.darya@yandex.ru

Abstract. New approach to interpretation of the thermal conductivity coefficient of porous insulating materials is presented. Experiments data verified the proposed hypothesis.

Key words: refractories, porosity, conductivity, thermal insulation.

УДК 621.746.47: 621.74.047:669.18

ВЛИЯНИЕ РЕЖИМА ОХЛАЖДЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО СЛИТКА НА ОБРАЗОВАНИЕ ГОРЯЧИХ ТРЕЩИН

С.В. Порядин, В.И. Дождиков, О.А. Коваленко

Липецкий государственный технический университет,
ул. Московская, 30, Липецк, Россия, 398600, e-mail: poryadscorpio@mail.ru

Аннотация. В работе предлагается методика исследования влияния режима охлаждения непрерывного слитка на образование горячих трещин, основанная на определении предельной скорости деформации, которая связана с давлением кавитации и скоростью кристаллизации металла. Обосновывается необходимость совместного рассмотрения решения задачи определения влияния режима охлаждения металла на его пластические свойства и результатов вычисления значений предельной скорости деформации при этих условиях.

Ключевые слова: непрерывная разливка стали, кристаллизация, оптимизация, дефекты слитка.

Введение. Одним из видов дефектов непрерывного слитка являются горячие трещины, которые зарождаются на фронте кристаллизации. На процесс их формирования оказывают влияние такие факторы, как ферростатическое давление столба жидкой стали, давление кавитации, создаваемое растворенными в расплаве газами, и расстояние между ветвями дендритов второго порядка.

Теоретическая часть. В работе [1] предложена формула для расчета предельно допустимой скорости деформации в зависимости от перечисленных факторов. Кроме того, в ней учитывается скорость роста твердой корочки и вязкость жидкой стали, и особое влияние оказывает соотношение жидкой и твердой фазы в двухфазном состоянии в зависимости от температуры. Таким образом, условием отсутствия развития горячих трещин является выражение [1]:

$$\dot{\varepsilon} \geq \frac{l}{R}\left[\frac{\lambda_2^2\|\nabla T\|}{180\mu_1}\,\frac{\rho_{_L}}{\rho_{_S}}\,(p_m - p_c) - \nu_{_T}\,\frac{\rho_{_S}-\rho_{_L}}{\rho_{_S}}\,H\right], \qquad (1)$$

где $\dot{\varepsilon}$ –скорость деформации слитка, λ_2^2 – расстояние между вторичными ветвями дендритов, $\|\nabla T\|$ – среднее значение градиента температур в двухфазной зоне, μ_1 – коэффициент динамической вязкости стали, $\rho_{_L}$, $\rho_{_S}$ – плотность стали в жидком и твердом состоянии, соответственно, p_m – сумма атмосферного и ферростатического давлений, p_c – давление кавитации газов растворенных в стали, $\nu_{_T}$ – скорость движения фронта кристаллизации;

$$R = \int_{T_S}^{T_L} \frac{g_{_S}^2 F(T)}{g_{_L}^3}\,dT\,, \quad \text{где} \quad F(T) = \frac{1}{\|\nabla T\|}\int_{T_S}^{T_L} g_{_S} dT\,, \qquad (2)$$

$$H = \int_{T_S}^{T_L} \frac{g_S^2}{g_L^2}\, dT\,; \tag{3}$$

где T_L, T_S – температуры ликвидуса и солидуса, соответственно, g_L, g_S – доли жидкой и твердой фазы, соответственно.

Давление кавитации принимается равным давлению газов, скапливающихся в междендритном пространстве. Его можно найти по формуле Сивертса [2, 3]:

$$p_c = \left(\frac{V_\text{г}}{K}\right)^2, \tag{4}$$

где $V_\text{г}$ – содержание газа, растворенного в расплаве [3], K – константа, зависящая от температуры и состава сплава. Для стали с содержанием 0,1 масс.% углерода эта константа находится по формуле [3]:

$$K = 88 \cdot 10^{-8} \cdot T - 37,2 \cdot 10^{-5}\,. \tag{5}$$

Уравнение для нахождения расстояния между ветвями дендритов второго порядка, согласно [4] имеет вид:

$$\lambda_2 = 64,8 \cdot C_R^{-0,36} \cdot \exp(2,12 \cdot C)\,, \tag{6}$$

где C_R – скорость охлаждения, К/с; C – содержание углерода в стали, масс.%.

Среднее значение градиента температур в двухфазной зоне, скорость движения фронта кристаллизации определяли с помощью математической модели охлаждения и затвердевания непрерывнолитого слитка, построенной в рамках теории квазиравновесной двухфазной зоны [5, 6, 7, 10].

Экспериментальная часть.

Рис. 1. Режимы охлаждения непрерывного слитка
(1 – мягкий режим, 2 – режим средней интенсивности охлаждения,
3 – жесткий режим)..

На основе описанной методики был проведен вычислительный эксперимент для непрерывного слитка с содержанием 0,1 масс.% углерода толщиной 250 мм. Температура разливки составляла 1532°C, скорость разливки – 1 м/мин. Длина кристаллизатора – 0,8 м, длина зоны вторичного охлаждения – 14,2 м. Условия охлаждения слитка в кристаллизаторе полагали неизменным. Режимы охлаждения в ЗВО заданы тремя способами распределения температуры на поверхности слитка (рис.1).

Изменение значения расстояния между ветвями дендритов второго порядка, согласно выбранным режимам охлаждения, представлено на рис 2. Из рисунка видно, что большие значения междендритного расстояния соответствуют более мягкому режиму охлаждения.

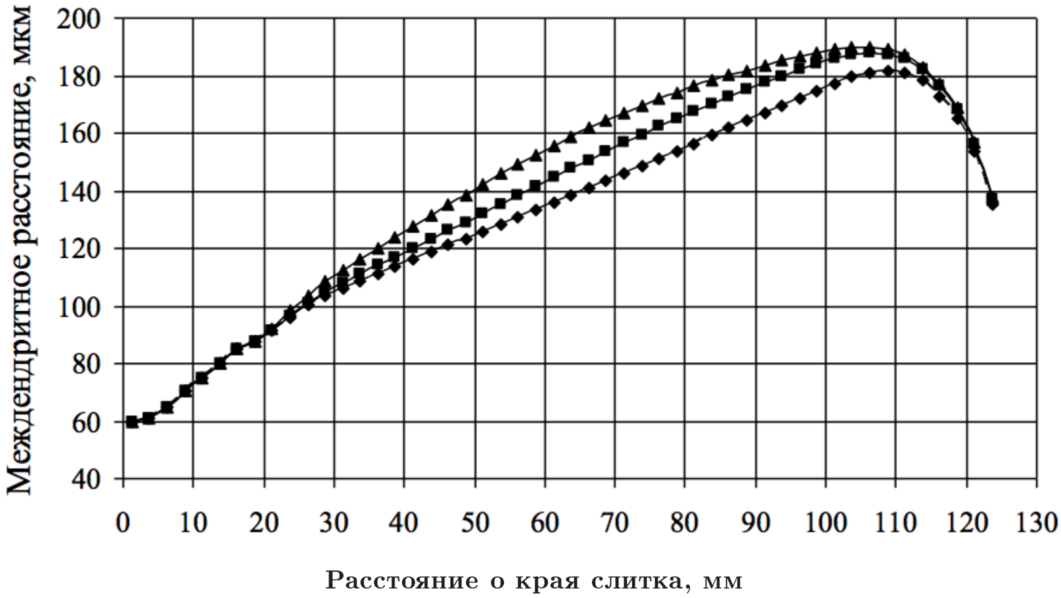

Рис. 2. Расстояние между ветвями дендритов второго порядка
(▲ – мягкий режим, ■ – режим средней интенсивности охлаждения,
♦ – жесткий режим).

Средние значения градиента температур в двухфазной зоне и скорости кристаллизации, полученные в результате моделирования процесса затвердевания непрерывного слитка, представлены на рис. 3 и рис. 4, соответственно. Из рисунков видно, что применение более мягкого режима охлаждения приводит к меньшим значениям указанных параметров.

Найденные по приведенной методике значения предельных скоростей деформации (рис. 5) в зависимости от способа охлаждения показывают их снижение при менее интенсивном охлаждении.

Известно, что в соответствии с законом Холла-Петча [8, 9] соотношение между пределом текучести τ и размером зерна d описывается выражением:

$$\tau = \tau_0 + K d^{-1/2}\,, \tag{7}$$

где τ_0 – напряжение, необходимое для скольжения дислокаций, K – коэффициент, характеризующий прочность блокирования дислокаций.

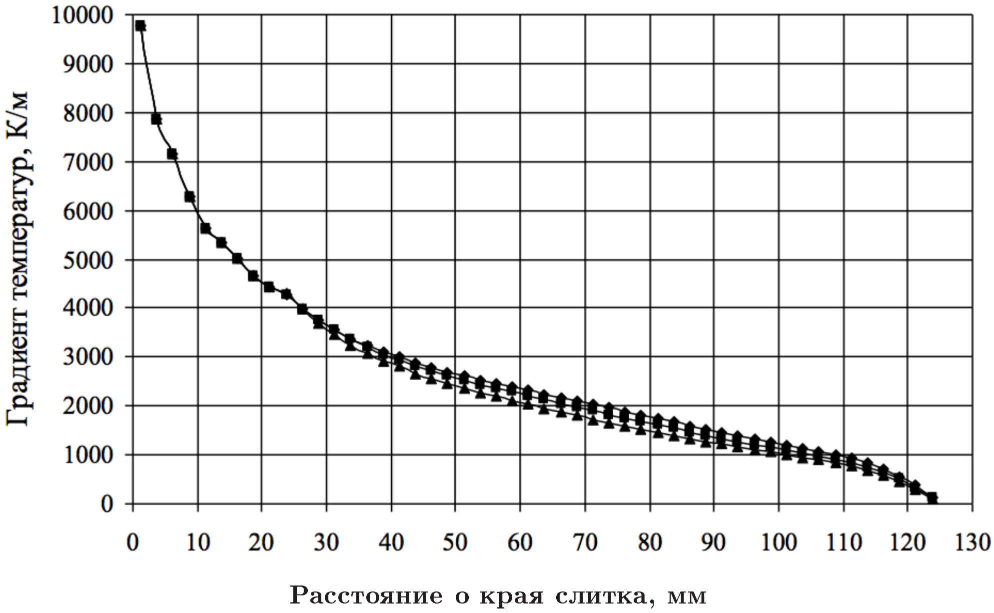

Рис. 3. Среднее значение градиента температур в двухфазной зоне
(▲ – мягкий режим, ■ – режим средней интенсивности охлаждения,
♦ – жесткий режим).

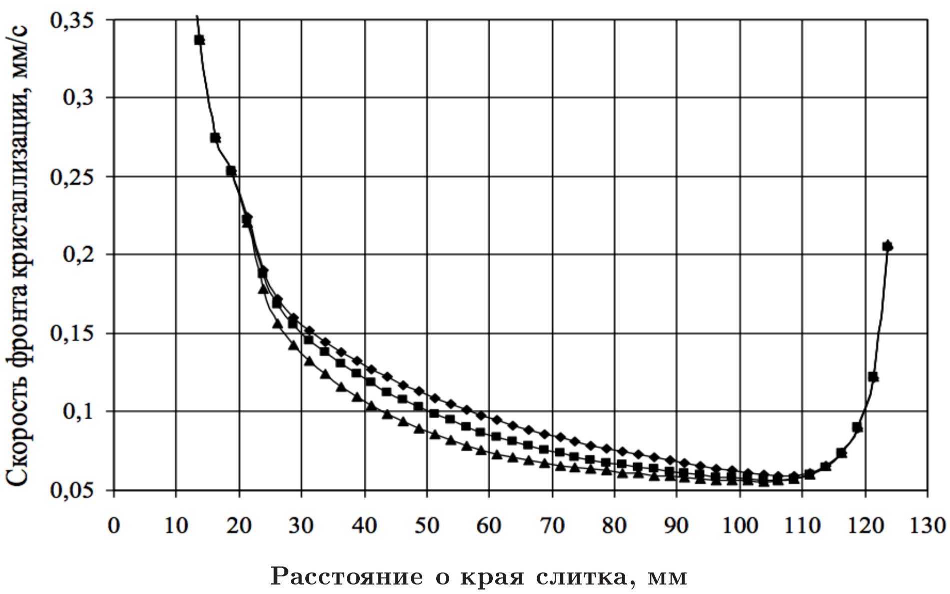

Рис. 4. Скорость движения фронта кристаллизации
(▲ – мягкий режим, ■ – режим средней интенсивности охлаждения,
♦ – жесткий режим).

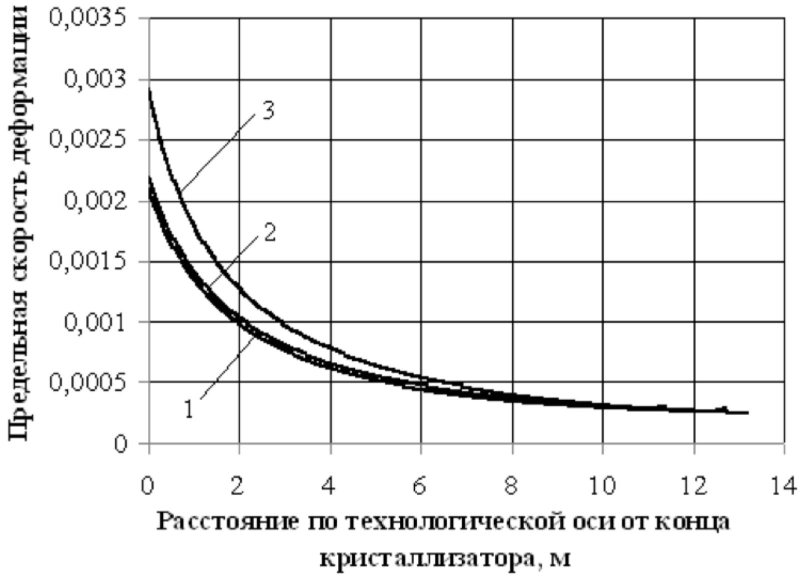

Рис. 5. Предельная скорость деформации для предотвращения образования горячих трещин (1 – мягкий режим, 2 – режим средней интенсивности охлаждения, 3 – жесткий режим).

Размер зерна, в свою очередь, определяется междендритным расстоянием, которое зависит от скорости охлаждения металла. Увеличение скорости охлаждения приводит к уменьшению междендритного расстояния, к уменьшению размеров зерна и к повышению предела текучести металла, его пластичности. Все это обеспечивает снижение вероятности трещинообразования в непрерывном слитке.

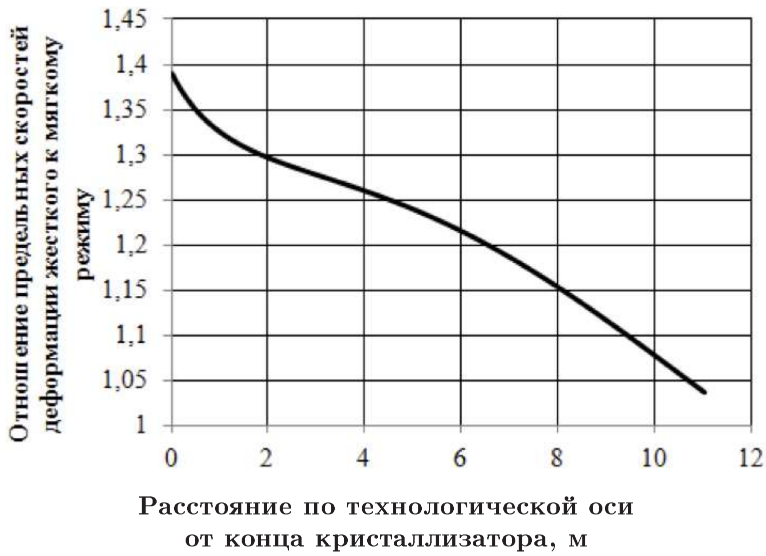

Рис. 6. Отношение предельных скоростей деформации жесткого режима к мягкому (1 – мягкий режим, 2 – режим средней интенсивности охлаждения, 3 – жесткий режим).

С другой стороны, увеличение интенсивности охлаждения, приводящее к уменьшению расстояния между вторичными ветвями дендритов, приводит к увеличению предельной скорости деформации, увеличивая, таким образом, вероятность образования трещин.

Сравнение отношений предельных скоростей деформации (рис. 6) для жесткого и мягкого режимов охлаждения (рис. 1) в различных зонах ЗВО позволяет сделать следующие выводы. Так, в начале ЗВО предельная скорость деформации для жесткого режима на 30-40 % выше, чем для мягкого. Различие уменьшается при движении в ЗВО вдоль технологической оси МНЛЗ. Отсюда следует, что изменение режима охлаждения влияет на предельные значения скорости деформации в поверхностном слое непрерывного слитка, а, следовательно, на склонность к образованию горячих трещин. В центральной части сляба влияние режима охлаждения на эти процессы незначительно.

Выводы. Результаты проведенных исследований показали, что, несмотря на то, что при более интенсивном охлаждении сляба возрастает вероятность появления горячих трещин в поверхностном слое металла в соответствии с изменением предельных значений скорости деформации, для оценки склонности слитка к образования горячих трещин необходимо совместное рассмотрение решения задачи определения влияния режимов охлаждения металла на его пластические свойства и на значение предельной скорости деформации. Это позволит произвести выбор оптимального режима непрерывной разливки стали на основе сравнительного анализа скоростей деформации металла вдоль технологической оси реальной МНЛЗ и предельных скоростей деформации, полученными в результате использования предлагаемой методики.

Литература

1. Thomas B.G. // Fundamentals of Modeling for Metals Processing. – 2009. – 22A. – P.362-374.
2. Самойлович Ю.А. Микрокомпьютер в решении задач формирования непрерывного слитка / М.: Металлургия, 1977. – 160 с.
3. Самойлович Ю.А. Формирование слитка / М.: Металлургия, 1977. – 160 с.
4. Weisgerber B., Hect M., Harste K. // Steel Research. – 1999. – №10. – P.403-422.
5. Борисов В.Т. Теория двухфазной зоны металлического слитка / М.: Металлургия, 1987. – 224 с.
6. Самойлович Ю.А. Системный анализ кристаллизации слитка / Киев: Наук. думка, 1983. – 248 с.
7. Коваленко О.А., Дождиков В.И. // Современная металлургия начала нового тысячелетия: Сб. науч. тр., Часть 2 / Липецк, 2010. – С.154-159.
8. Материаловедение: Учебник для вузов / Под ред. Б.Н. Арзамасова, Г.Г. Мухина / М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 648 с.
9. Гуляев А.П. Металловедение / Учебник для вузов / М.: Металлургия, 1986. – 544 с.
10. Шарапов А.И., Дождиков В.И. Оптимизация температурных полей процессов нестационарной теплопроводности // Вести высших учебных заведений Черноземья. – 2008. – №3. – С.93-97.

INFLUENCE OF THE COOLING CONDITIONS ON HOT CRACKING IN CONTINUOUS CAST

S.V. Poryadin, V.I. Dozhdikov, O.A. Kovalenko

Lipetsk State Technical University,
Moskovskaya St., 30, Lipetsk, 398600, Russian Federation, e-mail: poryadscorpio@mail.ru

Abstract. It is proposed the method for searching of cooling conditions on hot cracking. It is based on determination of critical strain rate which is associated with cavitation pressure and speed of crystallization steel. The necessity of joint investigation of the cooling conditions influence on plastic properties of metal and the calculation of the critical strain rate under these conditions.

Key words: continuous cast of steel, optimization, control, defects in continuous slab.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика» выходит четыре раза в год. В журнале печатаются статьи по всем направлениям чистой и прикладной математики (за исключением текстов, имеющих чисто компьютерное содержание и вычислительной эмпирики).

Редколлегия журнала принимает от авторов рукописи статей, написанные на русском или на английском языках. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора(ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором(ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности и с таким расчетом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором(ами) направлению исследований, но более широкому кругу математиков. Ни в коем случае рукопись не должна представлять собой краткий отчет о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи. В связи с этим, рукопись должна быть структурирована — разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае, рукопись должна содержать введение и заключение. Разделы должны быть пронумерованы и иметь заголовки.

Во введении должны быть описаны: проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объёме физико-математического знания, представлены краткая история вопроса и полученный автором(ами) результат. В заключении работы должна быть дана характеристика полученного результата с указанием его значения для дальнейшего развития темы исследования.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются и для обзорной статьи, с той лишь разницей, что их содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Возможна также публикация статьи, носящей методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается редколлегией отдельно.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в чисто математических текстах должны быть четко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объём рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата А4. Она должна быть написана шрифтом 12pt через два интервала. Объём обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлегией журнала.

После подготовки одним из членов редколлегии заключения о соответствии рукописи нормам журнала «Научные ведомости» она рассматривается на общем собрании редколлегии. В отдельных случаях редколлегией может быть принято решение о более тщательном изучении рукописи внешним (не входящем в состав редколлегии журнала) рецензентом. Редколлегия оставляет за собой право на мелкие стилистические исправления текста рукописи после принятия решения о её публикации.

В редакцию присылается следующая информация:

1) основная содержательная часть статьи, представляемая на русском или английском языках. При этом название статьи должно состоять не более чем из 20 слов.

2) индекс MSC (см. Mathematical Subject Classification) того научного направления, которому посвящена статья;

3) список авторов с указанием порядка их размещения при публикации статьи;

4) аннотация на русском языке; её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;

5) список ключевых слов (не более 10-12);

6) текст перевода заголовка статьи, аннотации и ключевых слов на английском языке;

7) список литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;

8) данные об авторах статьи с указанием места их работы, точного почтового адреса предприятия. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить также на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;

9) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи.

Порядок оформления этой информации в электронном файле указан в приложении в конце настоящих правил (см. п.5) требований к электронному набору).

В редакцию присылается электронный файл работы. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). **Файлы, приготовленные в другом редакторе, рассматриваться редколлегией не будут**. При этом нужно присылать файл работы с расширением «tex» и pdf-копию файла с расширением «dvi» работы, для того, чтобы редакция имела возможность сравнения его с авторским оригиналом при редактировании и верстке журнала. Присылать сам dvi-файл при этом не нужно.

Особые требования к электронному набору в редакторе LaTeX (и тому подобным редакторам) следующие.

1) Нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды.

2) «Выключные» формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерации соответствующих номеров формул в тексте. Допускается применение для меток формул цифр, снабженных штрихами (или цифр совместно с буквами латинского алфавита). Однако этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста.

3) В случае, если в статье имеются разделы в виде *приложений* в конце основного текста работы, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть независимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложения. Каждый из разделов-приложений начинается словом ПРИЛОЖЕНИЕ с порядковым номером этого приложения. Это слово должно быть выровнено по правому полю страницы. Затем следует заголовок этого приложения.

4) Литературные источники в ссылках на основе команд cite (или непосредственно) в электронном тексте рукописи нужно обозначать цифрами, соответствующими их порядковому номеру появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.

5) Ниже прилагается шаблон, согласно которому должен оформляться файл статьи. Для авторов **следование этому шаблону обязательно**.

Шаблон для приготовления файла с рукописью

```
\setcounter{figure}{0}
\setcounter{equation}{0}
MSC XXX (по индекс научного направления Mathematical Subject Classification)
\vskip 0.3cm

\begin{center}
{\bf НАЗВАНИЕ СТАТЬИ}
\medskip
{\bf И.О. Автор1, И.О. Автор2, ... }
\medskip
{\small {\sf  Учреждение,\\
ул. Название улицы (пр. Название проспекта, пл. Название площади и т.д.),
Номер дома, Город, Индекс, Страна, e-mail: \underline{имя@адрес}}}
\end{center}

{\small {\bf Аннотация.} Текст аннотации.
\medskip
{\bf Ключевые слова:} слово1, слово2, ...\ .}
\vskip 1 cm

Текст статьи
\vskip 1 cm

\renewcommand\baselinestretch{0.6}

{\small
\centerline{{\bf Литература}}

\def\sk{\vskip - 0.25cm}

\begin{enumerate}
\bibitem{1}     Источник 1
\bibitem{2} \sk Источник 2
...
\end{enumerate}
\vskip 0.5cm

\begin{center}
{\bf TITLE 1st line \\
\vskip 0.1cm

2d   line \\
\vskip 0.1cm and so on }\medskip
```

```
{\bf  N.N. Author1, N.N. Author2, ...}
\medskip
{\small  {\sf Enterprize,\\
Street St. (Avenue Av., Square Sq. and so on), Number, City, Index, Country,
e-mail: \underline{name@address}}}
\end{center}

{\small {\bf Abstract.} Text of abstract. {\bf Key words:} word1, word2, ...\ .}}
\newpage

\renewcommand\baselinestretch{1.0}
```

Рисунки

Особое внимание при подготовке рукописи к печати должно быть уделено рисункам, если они имеются в тексте работы. Они должны быть качественно выполнены и представлены в редакцию в электронной форме в виде отдельных файлов в формате «ps». Файлы рисунков необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам. При этом в название каждого из файлов рисунков, чтобы избежать путаницы при верстке выпуска журнала, должна входить фамилия одного из авторов, записанная латиницей (например, Ivanov1.ps, Petrov2.ps и т.д.).

На представляемых в электронном формате рисунках **не следует** наносить те комментирующие их подписи, которые присылаются в редколлегию отдельным списком.

Внимание! В случае присылки в редакцию работы с некачественно выполненными рисунками, она **будет возвращена автору(ам) на доработку**.

Таблицы

Если в тексте работы есть таблицы, то их следует формировать на основе программы LaTeX и ни в коем случае не оформлять в виде рисунков.

Список литературных источников

Обращаем внимание авторов на требование к качественному оформлению списка используемых в работе литературных источников. В связи с тем, что требования, предъявляемые ГОСТом, при оформлении такого списка весьма сложны и ориентированы на решение задач, связанных с централизованным поиском и хранением научной информации, которые не специфичны для научно-исследовательской практики, в журнале используется собственная система его оформления. Типы литературных источников качественно довольно разнообразны. Поэтому редакция не предлагает универсальный рецепт их оформления. Единственным общим принципом, которым должен руководствоваться автор, состоит в том, литературная ссылка должна оформляться так, чтобы читатель имел максимально точную информацию о том, как найти и ознакомиться с научным результатом, на который опирается его работа.

Несмотря на отсутствие общего рецепта оформления списка, редакция требует соблюдение строгих правил оформления ссылок на литературные источники двух типов, которые являются наиболее распространенными. Это касается статей в регулярных периодических изданиях (в журналах) и книг (монографий и учебников). Принятые в журнале правила оформления литературных источников указанных двух типов демонстрируются следующими примерами:

Журнальные статьи –

```
\item  Цегельник В.В. Гамильтонианы, ассоциированные с третьим и пятым уравнениями

Пенлеве~// Теоретическая и математическая физика.~-- 2010.~-- 162;1.~-- С.69-74.

\item Demidov A.S., Kochurov A.S., Popov A.Yu. To the problem of the recovery of

non-linearities in equations of mathematical physics~// Journal of Mathematical

Sciences.~-- 2009.~-- 163;1.~-- P.46-77.
```

Книги (в частности, многотомные издания) –

```
Рытов~С.М., Кляцкин Ю.А., Татарский~В.И. Введение  в статистическую радиофизику~/

Случайные поля, т.2~/ М.: Наука, 1978.~-- 464~с.
```

(если издание однотомное, то позиция между двумя слэш-черточками становится ненужной и, поэтому исчезает).

Обращаем внимание на то, что:

1) должны быть указаны полные названия журнальных статей, а также указаны не только начальные страницы этих статей, но обязательно также и конечные;

2) при указании журнальных статей после года издания стоит номер (обязательно арабскими цифрами) тома журнала (если он имеется) и через точку с запятой стоит дополнительная информация (номер внутри тома, в частности, номер выпуска и т.д.); при этом номер тома может иметь сложное начертание и не выражаться только одним числом;

3) название журнала нужно давать полностью без сокращений;

4) каждая из книг в списке цитируемой литературы обязательно должна быть дана с указанием полного числа страниц.

При несоблюдении описанных правил оформления литературных источников **работа будет возвращена автору(ам) на доработку**.