

№11 (208) 2015

Выпуск 39

Научный рецензируемый журнал

Основан в 1995 г.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Издатель:

НИУ «БелГУ»,
Издательский дом «Белгород»

Адрес редакции, издателя, типографии:
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-50062 от 29 мая 2012 г.
Выходит 4 раза в год

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
ЖУРНАЛА**

Главный редактор

О.Н. Полухин,
ректор НИУ «БелГУ», доктор политических наук, профессор
Зам.главного редактора

И.С. Константинов,
проректор по научной и инновационной деятельности
НИУ «БелГУ», доктор технических наук, профессор

Научный редактор:

В.М. Московкин,
профессор кафедры мировой экономики НИУ «БелГУ»,
доктор географических наук
Ответственный секретарь:

О.В. Шевченко,
зам. начальника УНИИ НИУ «БелГУ»,
кандидат исторических наук

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

Белгородского государственного университета
Математика Физика

BELGOROD STATE UNIVERSITY
SCIENTIFIC BULLETIN
Mathematics & Physics

Содержание

МАТЕМАТИКА

Нелокальные краевые задачи в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений.

С.А. Алдашев 5

Начальная задача для нагруженного сингулярного уравнения дробного порядка. **А.В. Глушак 13**

Об одном подходе к изучению сингулярных стохастических уравнений леонтьевского типа с импульсными воздействиями.

Ю.Е. Гликлих, Е.Ю. Машков 23

Определение числа древесных графов над конечным множеством вершин. **Ю.П. Вирченко, Л.П. Остапенко 37**

Обратные коэффициентные задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа. **К.Б. Сабитов 44**

Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи, их классификация, основные свойства и приложения. **С.М. Ситник 60**

Абстрактные структуры связности на конечных множествах. **Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко 77**

Самоподобные случайные процессы. **Ю.П. Вирченко, А.Я. Дульфан 84**

Обратимые в широком смысле динамические системы.

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин 89

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Диффузионная модель в теории фрагментации.

Р.Е. Бродский, Ю.П. Вирченко 97

Задача восстановления распределения вероятностей радиусов случайных окружностей по заданному распределению вероятностей их хорд. **Ю.П. Вирченко, О.Л. Шпилинская 110**

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
СЕРИИ ЖУРНАЛА**

Главный редактор серии

Ю.П. Вирченко,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

Заместители главного редактора:

Н.В. Малай,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

А.М. Мейрманов,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

Ответственный секретарь

М.Н. Бекназаров,
кандидат физико-математических наук
(НИУ «БелГУ»)

Члены редколлегии:

С.В. Блажевич,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

А.В. Глушак,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

С.А. Гриценко,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

В.В. Красильников,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

О.М. Пенкин,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

А.П. Солдатов,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

В.В. Сыщенко,
доктор физико-математических наук,
профессор (НИУ «БелГУ»)

Оригинал-макет Ю.П. Вирченко
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Подписано в печать 18.06.2015

Формат 60×84/8

Гарнитура Courier New

Усл.п.л. 25,8

Заказ 172

Цена свободная

Тираж 1000 экз.

Дата выхода 19.06.2015

Подписной индекс в Объединенном
каталоге агентства «Пресса России» – 81631

Оригинал-макет тиражирован
в издательском доме «Белгород»

Адрес: 308015, г.Белгород, ул.Победы, 85

Математическое моделирование изменения заряда пузырьков в каплях облаков с учетом фрактальности среды. **Т.С. Кумыков 115**

Оценка энергии векторной решеточной модели с периодическими граничными условиями. **А.С. Клюев, Ю.П. Вирченко 121**

Стохастические электромагнитные поля в диэлектрической среде. 2. Вычисление корреляционных функций. **Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко 126**

Асимптотические разложения стационарных потенциальных течений в газодинамике. **Н.Н. Самойлова, Ю.П. Вирченко 141**

Классификация квантовых состояний электрона, движущегося в режиме аксиального каналирования в кристалле. **В.В. Сыщенко, А.И. Тарновский, А.Ю. Исупов 148**

Корректность стохастического уравнения генетической модели. **Фам Минь Туан, Ю.П. Вирченко 161**

Вычислительная реализация метода восстановления 3d распределения полезных ископаемых между наклонными скважинами с использованием линейной сплайн-интерлинации. **Е.С. Черная 167**

Сравнительный анализ результатов квантования классической двумерной гамильтоновой системы по правилам Вейля-Маккоя и Борна-Йордана. **Н.Н. Чеканова, И.К. Кириченко, Н.А. Чеканов 173**

Плотность потока магнитного момента сферически симметричного магнетика. **Ю.П. Вирченко, Д.А. Чурсин 191**

ФИЗИКА

Об аналогии уравнения Шредингера и уравнений Навье-Стокса потенциального течения сжимаемого газа. **В.П. Бушланов, И.В. Бушланов 197**

Электрически индуцированный молекулярный кристалл в нематике. **С.И. Кучеев 201**

Изучение получения режима сильной связи для квантовой точки InAs/GaAs, погруженной в нанокаверну.

М.Р. Мохеббифар, Р.Х. Гайнутдинов, М.А. Хамадеев 205

Емкостной контроль диэлектрической проницаемости изоляционных покрытий проводников. **А.В. Матвеев, Г.А. Пюкке 211**

К вопросу о методах повышения качества цифровых изображений. **С.В. Блажевич, Е.С. Селютина 216**

№11 (208) 2015

Issue 39

Scientific peer-reviewed journal

Founded in 1995

Journal included into the list of leading peer-reviewed journals and publications coming out in Russian Federation that are recommended for publishing key results of theses for Doktor and Kandidat degree-applicants.

Founder:

Federal state autonomous educational establishment of higher professional education «Belgorod State National Research University»

Publisher:

Belgorod State National Research University, Publishing House «Belgorod».

Address of editorial office: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor)

Mass media registration certificate
ПИ №ФЦ77-21121 May 29, 2012.

Publication frequency: 4/year

EDITORIAL BOARD

Editor-in-Chief

O.N. Polukhin,

Rector of Belgorod State National Research University, Doctor of political sciences, Professor

Deputy of Editor-in-Chief

I.S. Konstantinov,

Vice-Rector on Scientific and Innovative Work of Belgorod State National Research University, Doctor of technical sciences, Professor

Scientific Editor

V.M. Moskovkin,

Professor of World Economy Department of Belgorod State National Research University, Doctor of geographical sciences

Assistant Editor

O.V. Shevchenko,

Deputy Head of Scientific and Innovative Activity Department of Belgorod State National Research University, Candidate of Historical Sciences

Belgorod State University
Scientific Bulletin
Mathematics & Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

Белгородского государственного университета
Mathematics & Physics

Contents

MATHEMATICS

Nonlocal boundary value problems in cylindrical domain of a class multidimensional elliptic equations. **S.A. Aldashev 5**

Initial value problem for loaded singular equations of fractional order. **A.V. Glushak 13**

On a certain approach to investigation of singular stochastic leontieff's type equations with impulsive influence.

Yu.E. Gliklikh, E.Yu. Mashkov 23

Evaluation of topological types number of tree graphs with finite vertex set. **Yu.P. Virchenko, L.P. Ostapenko 37**

The inverse problem for the equation of mixed parabola-hyperbolic type. **K.B. Sabitov 44**

Buschman-Erdelyi's transmutations: classification, basic properties, applications. **S.M. Sitnik 60**

Abstract connectedness structures on finite sets. **E.S. Antonova, Yu.P. Virchenko 77**

Self-similar random processes. **Yu.P. Virchenko, A.Ya. Dulfan 84**

Reversible systems in wide sense. **Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin 89**

MATHEMATICAL PHYSICS, MATHEMATICAL MODELING

Diffusion model in fragmentation theory. **R.E. Brodskii, Yu.P. Virchenko 97**

Reconstruction of probability distribution of random circles radii based on probability distribution of their хорд. **Yu.P. Virchenko, O.L. Shpilinskaya 110**

EDITORIAL BOARD OF JOURNAL SERIES

Editor-in-Chief

Yu.P. Virchenko, Professor (Belgorod State National Research University)

Deputies of chief editor:

N.V. Malay, Professor (Belgorod State National Research University)

A.M. Meirmanov, Professor (Belgorod State National Research University)

Responsible Secretary

M.N. Beknazarov, Associated Professor (Belgorod State National Research University)

Members of Editorial Board

S.V. Blazhevich, Professor (Belgorod State National Research University)

A.V. Glushak, Professor (Belgorod State National Research University)

S.A. Gritsenko, Professor (Belgorod State National Research University)

V.V. Krasilnikov, Professor (Belgorod State National Research University)

O.M. Penkin, Professor (Belgorod State National Research University)

A.P. Soldatov, Professor (Belgorod State National Research University)

V.V. Syshchenko, Professor (Belgorod State National Research University)

Page layout: *Virchenko Yu.P.*

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Passed for printing: 18.06.2015

Format: 60×84/8

Typeface: Courier New

Printer's sheets: 25.8

Order 172

Price: free

Calculation: 1000 copies

Date of publishing: 19.06.2015

Subscription reference in Russian Press common catalogue - 81631

Dummy layout is replicated at Belgorod National Research University, Publishing House "Belgorod"

Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

Mathematical modelling of bubble charge change in droplet clouds with account of environment fractality. **T.S. Kumykov 115**

Energy estimate of vector lattice model with periodical boundary conditions. **A.S. Klyuyev, Yu.P. Virchenko 121**

Stochastic electromagnetic fields in dielectric medium. 2. Calculation of pair correlation functions. **Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko 126**

Asymptotic expansions of stationary potential flows in gas-dynamics. **N.N. Samoiloa, Yu.P. Virchenko 141**

Classification of the quantum states of an electron moving in the axial channeling regime in the crystal. **V.V. Syshchenko, A.I. Tarnovsky, A.Yu. Isupov 148**

Correctness of stochastic equation of the genetic model. **Pham Minh Tuan, Yu.P. Virchenko 161**

Computational realization method of 3d mineral distribution restoring between the inclined boreholes using linear spline-interlineation. **O. Chorna 167**

Comparative analysis of quantizations of the classical two-dimensional hamiltonian system according to Weyl-Mccoy's and Born-Jordan's rules. **N.N. Chekanova, I.K. Kirichenko, N.A. Chekanov 173**

Flux density of magnetic moment of spherically symmetric magnetic. **Yu.P. Virchenko, D. Chursin 191**

PHYSICS

On analogy of Schrödinger's equation and Navier-Stocks's equation of compressible gas potential flux. **V.P. Bushlanov, I.V. Bushlanov 197**

Electrically induced molecular crystal in nematic. **S.I. Kucheev 201**

Study on the achieving to strong coupling regime for InAs/GaAs quantum dot embedded in the nanocavity. **M.R. Mohebbifar, R.Kh. Gainutdinov, M.A. Khamadeev 205**

Capacitive control of permittivity insulating coatings of conductors. **A.V. Matveev, G.A. Pukke 211**

To methods of quality increase of digital images. **S.V. Blazhevich, E.S. Selyutina 216**



MSC 35J15

**НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА
МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

С.А. Алдашев

Казахский национальный педагогический университет им. Абая,
Институт математики, физики и информатики,
ул. Толеби, 86, Алматы, 050012, Казахстан, e-mail: aldash51@mail.ru

Аннотация. В работе доказана разрешимость нелокальных краевых задач в цилиндрической области для многомерных эллиптических уравнений с оператором Лапласа, которые являются обобщениями задач Дирихле и Пуанкаре.

Ключевые слова: нелокальные задачи, многомерные эллиптические уравнения, разрешимость.

В то время как локальные краевые задачи для многомерных эллиптических уравнений в цилиндрической области интенсивно исследовались ранее (см., например, [1 – 5]), нелокальные краевые задачи для этих уравнений почти не исследованы. В настоящей работе доказана разрешимость нелокальных краевых задач в цилиндрической области для многомерных эллиптических уравнений с оператором Лапласа, которые являются обобщениями задач Дирихле и Пуанкаре.

1. Постановка задач и результат. Пусть D_α – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_α области D_α , обозначим через $\Gamma_\alpha, S_\alpha, S_0$, соответственно.

В области D_α рассмотрим многомерные эллиптические уравнения

$$Lu \equiv \Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u_t + c(x, t)u = 0, \quad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m, m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t, r \geq 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2, 3, \dots, m - 1$.

Рассмотрим следующие нелокальные краевые задачи

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_α из класса $C(\bar{D}_\alpha) \cap C^1(D_\alpha \cup S_0 \cup S_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\beta_1 u(r, \theta, 0) = \gamma_1 u(r, \theta, \alpha) + \varphi_1(r, \theta), \quad \beta_2 u_t(r, \theta, 0) = \gamma_2 u_t(r, \theta, \alpha) + \varphi_2(r, \theta), \quad u \Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t, \theta). \quad (2)$$



Задача 2. Найти решение уравнения (1) в области D_α из класса $C(\bar{D}_\alpha) \cap C^1(D_\alpha \cup S_0) \cap C^2(D_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(r, \theta, 0) = \varphi_1(r, \theta), \quad \beta_2 u_t(r, \theta, 0) = \gamma_2 u(r, \theta, \alpha) + \varphi_2(r, \theta), \quad u \Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t, \theta), \quad (3)$$

где $\beta_j, \gamma_j = \text{const}$, $\beta_j^2 + \gamma_j^2 \neq 0$, $j = 1, 2$, которые являются обобщениями задач Дирихле и Пуанкаре.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n , $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, \dots$ – пространства Соболева.

Имеют место следующие утверждения [6]

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (4)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const}.$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r, t)$, $a_{in}^k r, t$, $\tilde{b}_n^k(r, t)$, $\tilde{c}_n^k(r, t)$, ρ_n^k , $\bar{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\bar{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, обозначим коэффициенты ряда (4), соответственно функций $a_i(r, \theta, t)\rho(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r} \rho$, $b(r, \theta, t)\rho$, $c(r, \theta, t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, \dots, m$, $\varphi_1(r, \theta)$, $\varphi_2(r, \theta)$, $\psi(t, \theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H – единичная сфера в E_m .

Пусть $a_i(r, \theta, t)$, $b(r, \theta, t)$, $c(r, \theta, t) \in W_2^l(D_\alpha) \subset C(\bar{D}_\alpha)$, $i = 1, \dots, m$, $l \geq m+1$, $\varphi_1(r, \theta)$, $\varphi_2(r, \theta) \in W_2^p(S_0)$, $\psi(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $p > \frac{3m}{2}$.

Тогда справедливы:

Теорема 1. Если выполняется условие

$$(\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) \text{ch } \mu_{s,n} \alpha \neq \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

то задача 1 разрешима.

Теорема 2. Если имеет место соотношение

$$\gamma_2 \text{sh } \mu_{s,n} \alpha \neq \mu_{s,n} \beta_2, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

то задача 2 разрешима, где $\mu_{s,n}$ – положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$.



Заметим, что в случае задачи Пуанкаре ($\beta_1 = 0, \gamma_2 = 0$) и задачи Дирихле ($\beta_2 \neq 0$), соответственно условий (5) и (6) всегда выполняются, однозначные разрешимости которых показаны в [5, 4].

2. Доказательство теоремы 1. В сферических координатах уравнения (1) имеет вид

$$Lu \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{\delta u}{r^2} + u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r, \theta, t)u_{x_i} + b(r, \theta, t)u_t + c(r, \theta, t)u = 0, \quad (7)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [6], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n + m - 2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 будем искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (8)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставляя (8) в (7), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H , для \bar{u}_n^k получим [4, 5]

$$\begin{aligned} & \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 + \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r} \rho_0^1 + \sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r} \rho_n^k + \sum_{i=1}^m a_{in}^k \right) \bar{u}_{nr}^k + \tilde{b}_n^k \bar{u}_{nt}^k + \right. \\ & \left. + \left[\tilde{c}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k) \right] \bar{u}_n^k \right\} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 + \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r} \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k + \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} \rho_1^k \bar{u}_1^k = \\ & = -\frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \end{aligned} \quad (11)$$



$$\begin{aligned}
 & \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \rho_n^k \bar{u}_n^k = \\
 & = -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + [\tilde{c}_{n-1}^k + \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1)a_{in-1}^k)] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{12}$$

Суммируя уравнение (11) от 1 до k_1 , а уравнение (12) – от 1 до k_n , а затем сложив полученные выражения вместо с (10), приходим к уравнению (9).

Отсюда следует, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$ – решение системы (10)-(12), то оно является решением уравнения (9).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (10)-(12) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k + \bar{u}_{ntt}^k = f_n^k(r, t), \tag{13}$$

где $f_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r, t) \equiv \equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (8), с учетом леммы 1 будем иметь

$$\begin{aligned}
 \beta_1 \bar{u}_n^k(r, 0) &= \gamma_1 \bar{u}_n^k(r, \alpha) + \varphi_{1n}^k(r), \quad \beta_2 \bar{u}_{nt}^k(r, 0) = \gamma_2 \bar{u}_{nt}^k(r, \alpha) + \varphi_{2n}^k(r), \\
 \bar{u}_n^k(1, t) &= \psi_n^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots
 \end{aligned} \tag{14}$$

В (13), (14) произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_n^k(t)$ получим

$$\bar{v}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{v}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{v}_n^k + \bar{v}_{ntt}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_1 \bar{v}_n^k(r, 0) &= \gamma_1 \bar{v}_n^k(r, \alpha) + \varphi_{1n}^k(r), \quad \beta_2 \bar{v}_{nt}^k(r, 0) = \gamma_2 \bar{v}_{nt}^k(r, \alpha) + \varphi_{2n}^k(r), \\
 \bar{v}_n^k(1, t) &= 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots,
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{f}_n^k(r, t) &= f_n^k(r, t) - \psi_{ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2} \psi_n^k, \quad \varphi_{1n}^k(r) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r) + \gamma_1 \psi_n^k(\alpha) - \beta_1 \psi_n^k(0), \\
 \varphi_{2n}^k(r) &= \bar{\varphi}_{2n}^k(r) + \gamma_2 \psi_{nt}^k(\alpha) - \beta_2 \psi_{nt}^k(0).
 \end{aligned}$$

Произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} v_n^k(r, t)$ задачу (15), (16) приведем к следующей задаче

$$L v_n^k \equiv v_{nrr}^k + v_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k = \tilde{f}_n^k(r, t), \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_1 v_n^k(r, 0) &= \gamma_1 v_n^k(r, \alpha) + \tilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \beta_2 v_{nt}^k(r, 0) = \gamma_2 v_{nt}^k(r, \alpha) + \tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \\
 v_n^k(1, t) &= 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots,
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}, \quad \tilde{f}_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r, t), \quad \tilde{\varphi}_{jn}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \varphi_{jn}^k(r), \quad j = 1, 2.$$



Решение задачи (13), (14) рассмотрим в виде

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \quad (19)$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k R_s(r). \quad (20)$$

Подставляя (19) в (17), (18), с учетом (20), получим

$$R_{srr} + \left(\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} + \mu \right) R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (21)$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (22)$$

$$T_{stt} - \mu T_s(t) = a_{ns}^k(t), \quad 0 < t < \alpha, \quad (23)$$

$$\beta_1 T_s(0) = \gamma_1 T_s(\alpha) + b_{ns}^k, \quad \beta_2 T_{st}(0) = \gamma_2 T_{st}(\alpha) + e_{ns}^k. \quad (24)$$

Ограниченным решением задачи (21), (22) является [7]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad (25)$$

где $\nu = n + (m - 2)/2$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (23) представимо в виде [7]

$$\begin{aligned} T_{s,n}(t) = c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t - \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi + \\ + \frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi, \end{aligned} \quad (26)$$

c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные, удовлетворив условию (24) получим алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & (\beta_1 - \gamma_1 \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha) c_{1s} - \gamma_1 c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha = \\ & = \frac{\gamma_1}{\mu_{s,n}} \left[\operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi - \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi \right] + b_{ns}^k, \\ & \gamma_2 c_{1s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha + (\gamma_2 \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha - \beta_2) c_{2s} = \\ & = [\mu_{s,n}]^{-1} \left[\gamma_2 (\operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi - \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi) - e_{ns}^k \right], \end{aligned} \right. \quad (27)$$



которое имеет единственное решение, если выполняется условие (5).

Подставляя (25) в (20) получим

$$\begin{aligned} r^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}_n^k(r, t) &= \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \\ r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Ряды (28) – разложения в ряды Фурье-Бесселя [8], если

$$\begin{aligned} a_{ns}^k(t) &= 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{f}_n^k(\xi, t) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \\ b_{ns}^k &= 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \\ e_{ns}^k &= 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (29)$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \dots$ – положительные нули функций Бесселя $J_{\nu}(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (25), (26) получим решение задачи (17), (18) в виде

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r), \quad (30)$$

где $a_{ns}^k(t)$, b_{ns}^k , e_{ns}^k , определяются из (29), а c_{1s} , c_{2s} – из (27).

Следовательно, сначала решив задачу (10), (14) ($n = 0$), а затем (11), (14) ($n = 1$) и т.д. найдем последовательно все $v_n^k(r, t)$ из (30), $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$.

Итак, в области D_{α} , имеет место

$$\int_H \rho(\theta) LudH = 0. \quad (31)$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0, V_0$ -плотна в $L_2((0, 1))$, $\rho(\theta) \in C^{\infty}(H)$ -плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1, V_1$ -плотна в $L_2((0, \alpha))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ -плотна в $L_2(D_{\alpha})$ [9].

Отсюда и из (31), следует, что

$$\int_{D_{\alpha}} f(r, \theta, t) LudD_{\alpha} = 0 \text{ и } Lu = 0, \quad \forall (r, \theta, t) \in D_{\alpha}.$$



Таким образом, решением задачи 1 является ряд

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} [\psi_n^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} v_n^k(r, t)] Y_{n,m}^k(\theta), \quad (32)$$

где $v_n^k(r, t)$ находятся из (30).

Учитывая формулу [8] $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$ оценки [10,6]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad \nu \geq 0,$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \dots,$$

а также леммы, условия на заданные функции $\varphi_1(r, \theta)$, $\varphi_2(r, \theta)$, $\psi(t, \theta)$, как в [4,5] можно показать, что полученное единственное решение (32) принадлежит классу $C(\bar{D}_\alpha) \cap C^1(D_\alpha \cup S_0 \cup S_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$.

Следовательно, разрешимость задачи 1 установлено. ■

3. Доказательство теоремы 1. Решение задачи (1), (3) будем искать в виде (8), где функции $\bar{u}_n^k(r, t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично п.2, функции $\bar{u}_n^k(r, t)$ удовлетворяют системы уравнений (10)-(12).

Далее, из краевого условия (3), в силу (8), получим

$$\bar{u}_n^k(r, 0) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \beta_2 \bar{u}_{nt}^k(r, 0) = \gamma_2 \bar{u}_n^k(r, \alpha) + \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_n^k(t), \quad (33)$$

$$k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Как ранее замечено, что каждое уравнение системы (10)-(12) представимо в виде (13).

Произведя сначала замену $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_n^k(t)$, а затем положив $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} v_n^k(r, t)$ задачу (13), (33) приведем к следующей задаче

$$Lv_n^k = \tilde{f}_n^k(r, t), \quad (17)$$

$$v_n^k(r, 0) = \tilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \beta_2 v_{nt}^k(r, 0) = \gamma_2 v_n^k(r, \alpha) + \tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \quad v_n^k(1, t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (34)$$

где $\tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} (\bar{\varphi}_{1n}^k(r) - \psi_n^k(0))$, $\tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} (\bar{\varphi}_{2n}^k(r) + \gamma_2 \psi_n^k(\alpha) - \beta_2 \psi_{nt}^k(0))$.

Если решение задачи (17), (34) будем искать в виде (19), то приходим к задаче (21), (22) и к задаче для (23) с данными

$$T_s(0) = b_{ns}^k, \quad \beta_2 T_{st}(0) = \gamma_2 T_s(\alpha) + e_{ns}^k. \quad (35)$$

Удовлетворив общее решение (26) уравнения (23) краевому условию (35) будем иметь

$$\begin{cases} c_{1s} = b_{ns}^k, \\ (\mu_{s,n} \beta_2 - \gamma_2 \operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha) c_{2s} = \\ = \gamma_2 b_{ns}^k \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha + \frac{\gamma_2}{\mu_{s,n}} (\operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi - \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi) + e_{ns}^k, \end{cases} \quad (36)$$



из которого однозначно определяются коэффициенты c_{1s} , c_{2s} , если выполняется условие (6).

Таким образом, из (25), (26) получим решение задачи (17), (34) в виде (30), где $a_{ns}^k(t)$, b_{ns}^k , e_{ns}^k находятся из (29), а c_{1s} , c_{2s} — из (36).

Далее, как в случае теоремы 1 завершается доказательство теоремы 2.

Следовательно, разрешимость задачи 2 показана. ■

Литература

1. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных / М.: Наука, 2006. — 287 с.
2. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Известия Саратовского университета, Новая серия. Серия математика, механика, информатика. — 2012. — 12;3. — С.3-7
3. Алдашев С.А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Известия НАН РК, серия физико-математическая, Алматы. — 2014. — №3(295). — С.62-67.
4. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестник НГУ. Серия математика, механика, информатика. Новосибирск. — 2012. — 12; 1. — С.7-13.
5. Алдашев С.А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. Самара. — 2014. — 10(121). — С.17-25.
6. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / М.: Физматгиз, 1962. — 254 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М.: Наука, 1965. — 703 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2 / М.: Наука, 1974. — 295 с.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / М.: Наука, 1976. — 543 с.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики / М.: Наука, 1966. — 724 с.

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN CYLINDRICAL DOMAIN OF A CLASS MULTIDIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS

S.A. Aldashev

Kazakhstan National Pedagogical University named Abay,
Institute of mathematics, physics and informatics,
Tolebi St., 86, Almaty, 050012, Kazakhstan, e-mail: aldash51@mail.ru

Abstract. Solvability of some nonlocal boundary value problems in cylindrical domain of multidimensional elliptic equations with the Laplace operator which are some generalizations of Dirichlet's and Poincaré's problems is proved.

Key words: nonlocal problems, multidimensional elliptic equations, solvability .



MSC 35Q05

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. В банаховом пространстве рассмотрена задача Коши для нагруженного уравнения с дробными производными, имеющего сингулярную особенность в коэффициенте. Доказано достаточное условие разрешимости этой задачи и найден явный вид разрешающего оператора.

Ключевые слова: абстрактная задача Коши, нагруженное сингулярное уравнение, разрешающий оператор, однозначная разрешимость.

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. При $k \geq 0$, $0 \leq \alpha < 1$ рассмотрим абстрактное уравнение дробного порядка

$$B_{k,\alpha}u(t) \equiv \frac{d}{dt} {}^C D_{0,t}^\alpha u(t) + \frac{k}{t} ({}^C D_{0,t}^\alpha u(t) - {}^C D_{0,t}^\alpha u(0)) = Au(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где ${}^C D_{0,t}^\alpha u(t)$ — дробная производная Капуто

$${}^C D_{0,t}^\alpha u(t) = \frac{d}{dt} I_{0,t}^{1-\alpha} (u(t) - u(0)), \quad {}^C D_{0,t}^\alpha u(0) = \lim_{t \rightarrow 0} {}^C D_{0,t}^\alpha u(t),$$

$$I_{0,t}^{1-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

— левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Уравнение (1) содержит значение неизвестной функции и ее дробной производной в точке $t = 0$, поэтому, следуя [1], [2], будем называть его нагруженным уравнением. Важно отметить, что наличие в уравнении (1) заданной при $t = 0$ нагрузки позволяет установить разрешимость именно задачи Коши, а не весовой начальной задачи, как это свойственно для ряда сингулярных уравнений.

При $\alpha = 1$ уравнение (1) превращается в уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t} (u'(t) - u'(0)) = Au(t), \quad t > 0, \quad (2)$$



с нагрузкой $u'(0)$, для которого задача Коши

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad (3)$$

должна исследоваться особо с учетом результатов работ [3], [4].

При $\alpha = 0$ уравнение (1) превращается в нагруженное уравнение первого порядка вида

$$u'(t) + \frac{k}{t}(u(t) - u(0)) = Au(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

для которого мы также исследуем разрешимость задачи Коши, но, естественно, уже с одним начальным условием.

Будем разыскивать решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad {}^C D_{0,t}^\alpha u(0) = u_1, \quad (5)$$

и вначале рассмотрим случай, когда $k = 0$, $u_1 = 0$.

Условие 1. Если $\operatorname{Re} \lambda > \omega \geq 0$ и $0 < \alpha < 1$, то $\lambda^{\alpha+1}$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и для всех целых $n \geq 0$ резольвента $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ удовлетворяет неравенствам

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda^\alpha R(\lambda^{\alpha+1})) \right\| \leq \frac{M n!}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{n+1}}. \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть $k = 0$, $0 < \alpha < 1$, $u_0 \in D(A)$, $u_1 = 0$ и оператор A удовлетворяет условию 1. Тогда задача (1), (5) однозначно разрешима.

□ После применения к уравнению (1) оператора дробного интегрирования $I_{0,t}^\alpha$ и дифференцирования получим следующую начальную задачу

$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

$$u(0) = u_0. \quad (8)$$

Задача (7), (8) представляет собой специальный случай задачи исследованной в [5]. В теореме 3 указанной работы [5] установлено, что условие 1 является необходимым и достаточным условием на оператор A , обеспечивающим однозначную разрешимость задачи (7), (8), а стало быть, и эквивалентной ей, при сделанных предположениях в доказываемой теореме, задаче (1), (5). Разрешающий оператор задачи (7), (8) обозначим через $Y_{0,\alpha}(t)$, при этом $u(t) = Y_{0,\alpha}(t)u_0$. Для $Y_{0,\alpha}(t)$ в [5] установлены представление и оценка

$$Y_{0,\alpha}(t)u_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{\lambda t} \lambda^\alpha R(\lambda^{\alpha+1}) u_0 d\lambda, \quad u_0 \in D(A^2),$$

$$\|Y_{0,\alpha}(t)\| \leq M e^{\sigma t}, \quad \sigma > \omega. \quad \blacksquare$$



При $k > 0$, $\alpha \geq 0$ введем в рассмотрение оператор

$$P_{k,\alpha}u(t) = c_{k,\alpha} \int_0^1 (1 - s^{\alpha+1})^{k/(\alpha+1)-1} u(ts) ds, \quad (9)$$

$$c_{k,\alpha} = \frac{\alpha + 1}{B(k/(\alpha + 1), 1/(\alpha + 1))},$$

где $B(\cdot, \cdot)$ — бета-функция, и который выражается через дробный интеграл Эрдейи-Кобера $I_{0+,\sigma,\eta}^\gamma$ (см. [6], с. 246) следующим образом

$$P_{k,\alpha}u(t) = \frac{\Gamma((k + 1)/(\alpha + 1))}{\Gamma(1/(\alpha + 1))} I_{0+,\alpha+1,-\alpha/(\alpha+1)}^{k/(\alpha+1)} u(t).$$

Постоянная $c_{k,\alpha}$ подобрана так, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_{k,\alpha}u(t) = u(0).$$

Теорема 2. Пусть $k > 0$, $\alpha \geq 0$ и функция $u(t)$ такова, что существует дробная производная вида $({}^C D_{0,t}^\alpha u(t))'$. Тогда справедливо равенство

$$B_{k,\alpha} P_{k,\alpha}u(t) = P_{k,\alpha} ({}^C D_{0,t}^\alpha u(t))' + \frac{c_{k,\alpha}}{t} {}^C D_{0,t}^\alpha u(0). \quad (10)$$

□ Применяя к (9) оператор $B_{k,\alpha}$, после интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} B_{k,\alpha} P_{k,\alpha}u(t) &= c_{k,\alpha} \int_0^1 (1 - s^{\alpha+1})^{k/(\alpha+1)-1} s^{\alpha+1} \frac{d}{d(ts)} {}^C D_{0,ts}^\alpha u(t) ds + \\ &+ \frac{k c_{k,\alpha}}{t} \int_0^1 (1 - s^{\alpha+1})^{k/(\alpha+1)-1} s^\alpha {}^C D_{0,ts}^\alpha u(t) ds = \\ &= c_{k,\alpha} \int_0^1 (1 - s^{\alpha+1})^{k/(\alpha+1)-1} s^{\alpha+1} \frac{d}{d(ts)} {}^C D_{0,ts}^\alpha u(t) ds + \\ &+ \frac{c_{k,\alpha}}{t} {}^C D_{0,t}^\alpha u(0) + c_{k,\alpha} \int_0^1 (1 - s^{\alpha+1})^{k/(\alpha+1)} \frac{d}{d(ts)} {}^C D_{0,ts}^\alpha u(t) ds = \\ &= c_{k,\alpha} \int_0^1 (1 - s^{\alpha+1})^{k/(\alpha+1)-1} (s^{\alpha+1} + 1 - s^{\alpha+1}) \frac{d}{d(ts)} {}^C D_{0,ts}^\alpha u(t) ds + \frac{c_{k,\alpha}}{t} {}^C D_{0,t}^\alpha u(0) = \\ &= P_{k,\alpha} ({}^C D_{0,t}^\alpha u(t))' + \frac{c_{k,\alpha}}{t} {}^C D_{0,t}^\alpha u(0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Непосредственным следствием теоремы 2 является разрешимость задачи (1), (5) для $k > 0$ и $u_1 = 0$.

Теорема 3. Пусть $k > 0$, $0 < \alpha < 1$, $u_0 \in D(A)$, $u_1 = 0$ и оператор A удовлетворяет условию 1. Тогда функция $u(t) = P_{k,\alpha} Y_{0,\alpha}(t) u_0$ является решением задачи (1), (5).

В дальнейшем при $0 < \alpha < 1$ будем использовать обозначение $Y_{k,\alpha}(t) = P_{k,\alpha} Y_{0,\alpha}(t)$.

Замечание 1. Если $0 < \alpha < 1$ и A — ограниченный оператор, то

$$Y_{k,\alpha}(t) = \frac{\Gamma((k+1)/(\alpha+1))}{\Gamma(1/(\alpha+1))} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1/(\alpha+1)) t^{(\alpha+1)j} A^j}{\Gamma((\alpha+1)j+1) \Gamma(j+(k+1)/(\alpha+1))}. \quad (11)$$

Отметим, что при $\alpha = 1$ ряд в правой части (11) превращается в операторную функцию Бесселя (см. [4])

$$Y_k(t) = \Gamma(k/2+1/2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\sqrt{A}/2)^{2j}}{j! \Gamma(j+k/2+1/2)} = \Gamma(k/2+1/2) (t\sqrt{A}/2)^{1/2-k/2} I_{k/2-1/2}(t\sqrt{A}),$$

где $I_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя, а при $k = 0$ — в функцию Миттаг-Леффлера $E_{\alpha+1,1}(t^{\alpha+1}A)$.

Для построенной операторной функции $Y_{k,\alpha}(t)$ справедлива формула сдвига по первому параметру.

Теорема 4. Пусть $m > k > 0$, $0 < \alpha < 1$ и оператор A удовлетворяет условию 1. Тогда

$$Y_{m,\alpha}(t) = \frac{\alpha+1}{B((m-k)/(\alpha+1), (k+1)/(\alpha+1))} \int_0^1 s^k (1-s^{\alpha+1})^{(m-k)/(\alpha+1)-1} Y_{k,\alpha}(ts) ds. \quad (12)$$

□ После ряда преобразований, используя интеграл 2.2.5.1 [7], получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t \tau^k (t^{\alpha+1} - \tau^{\alpha+1})^{(m-k)/(\alpha+1)-1} Y_{k,\alpha}(\tau) d\tau = \\ & = c_{k,\alpha} \int_0^t \tau^\alpha (t^{\alpha+1} - \tau^{\alpha+1})^{(m-k)/(\alpha+1)-1} \int_0^\tau (\tau^{\alpha+1} - \xi^{\alpha+1})^{k/(\alpha+1)-1} Y_{0,\alpha}(\xi) d\xi d\tau = \\ & = c_{k,\alpha} \int_0^t Y_{0,\alpha}(\xi) \int_\xi^t \tau^\alpha (t^{\alpha+1} - \tau^{\alpha+1})^{(m-k)/(\alpha+1)-1} (\tau^{\alpha+1} - \xi^{\alpha+1})^{k/(\alpha+1)-1} d\tau d\xi = \\ & = \frac{c_{k,\alpha}}{\alpha+1} \int_0^t Y_{0,\alpha}(\xi) \int_{\xi^{\alpha+1}}^{t^{\alpha+1}} (t^{\alpha+1} - \eta)^{(m-k)/(\alpha+1)-1} (\eta - \xi^{\alpha+1})^{k/(\alpha+1)-1} d\eta d\xi = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{c_{k,\alpha} B((m-k)/(\alpha+1), k/(\alpha+1))}{\alpha+1} \int_0^t (t^{\alpha+1} - \xi)^{m/(\alpha+1)-1} Y_{0,\alpha}(\xi) d\xi = \\
 &= \frac{\Gamma((m-k)/(\alpha+1)) \Gamma((k+1)/(\alpha+1))}{(\alpha+1) \Gamma((m+1)/(\alpha+1))} t^{m-\alpha} Y_{m,\alpha}(t),
 \end{aligned}$$

откуда и следует требуемое равенство (12). ■

Переходим к исследованию случая, когда $k = 0$, $u_0 = 0$, а $u_1 \neq 0$.

Теорема 5. Пусть $k = 0$, $0 < \alpha < 1$, $u_0 = 0$, $u_1 \in D(A)$ и оператор A удовлетворяет условию 1. Тогда задача (1), (5) однозначно разрешима.

□ После применения к уравнению (1) оператора дробного интегрирования $I_{0,t}^\alpha$ и дифференцирования получим следующую начальную задачу

$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_1, \quad t \geq 0, \tag{13}$$

$$u(0) = 0. \tag{14}$$

Также как и задача (7), (8), задача (13), (14) представляет собой специальный случай задачи исследованной в [5] и однозначно разрешима. Разрешающий оператор задачи (13), (14) обозначим через $L_{0,\alpha}(t)$, при этом $u(t) = L_{0,\alpha}(t)u_1$, а для $L_{0,\alpha}(t)$ в [5] установлено представление

$$L_{0,\alpha}(t) = I_{0,t}^\alpha Y_{0,\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Y_{0,\alpha}(s) ds. \quad \blacksquare$$

Непосредственным следствием теоремы 2 является разрешимость задачи (1), (5) для $k > 0$ и $u_0 = 0$.

Теорема 6. Пусть $k > 0$, $0 < \alpha < 1$, $u_0 = 0$, $u_1 \in D(A)$ и оператор A удовлетворяет условию 1. Тогда функция $u(t) = P_{k,\alpha} L_{0,\alpha}(t)u_0$ является решением задачи (1), (5).

В дальнейшем при $0 < \alpha < 1$ будем использовать обозначение $L_{k,\alpha}(t) = P_{k,\alpha} L_{0,\alpha}(t)$.

Замечание 2. Если $0 < \alpha < 1$ и A — ограниченный оператор, то

$$L_{k,\alpha}(t) = \Gamma(k/(\alpha+1) + 1) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1) t^{(\alpha+1)j+\alpha} A^j}{\Gamma((\alpha+1)j + \alpha + 1) \Gamma(j + k/(\alpha+1) + 1)}. \tag{15}$$

При $\alpha = 1$ ряд в правой части (15) выражается через функцию Струве

$$\begin{aligned}
 L_k(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma(k/2 + 1) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\sqrt{A}/2)^{2j}}{\Gamma(j + 3/2) \Gamma(j + k/2 + 1)} = \\
 &= \frac{2^{k/2-1/2} \sqrt{\pi} \Gamma(k/2 + 1)}{A^{k/4+1/4} t^{k/2-1/2}} \mathbf{L}_{k/2-1/2}(t\sqrt{A}),
 \end{aligned}$$



где $\mathbf{L}_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Струве ([8], с. 655), а при $k = 0$ — через функцию Миттаг-Леффлера $L_k(t) = t^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(t^{\alpha+1}A)$.

Для операторной функции $L_{k,\alpha}(t)$ справедлива формула сдвига по первому параметру, доказательство которой проводится также как и в теореме 4.

Теорема 7. Пусть $m > k > 0$, $0 < \alpha < 1$ и оператор A удовлетворяет условию 1. Тогда

$$L_{m,\alpha}(t) = \frac{\alpha + 1}{B((m - k)/(\alpha + 1), k/(\alpha + 1) + 1)} \int_0^1 s^k (1 - s^{\alpha+1})^{(m-k)/(\alpha+1)-1} L_{k,\alpha}(ts) ds.$$

Построенные операторные функции $Y_{k,\alpha}(t)$, $L_{k,\alpha}(t)$ и теоремы 3 и 6 позволяют установить разрешимость задачи (1), (5).

Теорема 8. Пусть $k > 0$, $0 < \alpha < 1$, $u_0, u_1 \in D(A)$ и оператор A удовлетворяет условию 1. Тогда функция $u(t) = Y_{k,\alpha}(t)u_0 + L_{k,\alpha}(t)u_1$ является решением задачи Коши (1), (5).

Для доказательства единственности решения задачи Коши (1), (5) сделаем дополнительное предположение. Будем считать, что с оператором A при некотором $m \geq 0$ равномерно корректна задача Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t) + \frac{m}{t}u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad (16)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \quad (17)$$

В работах [3], [4] приводятся условия на оператор A , обеспечивающие корректную разрешимость этой задачи. Они сформулированы в терминах оценки нормы дробной степени резольвенты оператора A и ее производных. Множество операторов A , с которыми задача (16), (17) равномерно корректна, обозначим через G_m , а разрешающий оператор этой задачи обозначим через $Y_m(t)$ и назовем операторной функцией Бесселя.

Теорема 9. Пусть $k > 0$, $0 < \alpha < 1$, пусть также при некотором $m \geq 0$ оператор $A \in G_m$ и $Y_m(t)$ — соответствующая операторная функция Бесселя. Тогда решение задачи Коши (1), (5) единственно.

□ Доказательство единственности решения задачи (1), (5) будем вести от противного. Если $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения задачи (1), (5), то рассмотрим функцию двух переменных $w(t, s) = f(Y_m(s)(u_1(t) - u_2(t)))$, где $f \in E^*$ (E^* — сопряженное пространство), $t, s \geq 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$B_{k,\alpha}w(t, s) = \frac{\partial^2 w(t, s)}{\partial s^2} + \frac{m}{s} \frac{\partial w(t, s)}{\partial s}, \quad t, s > 0 \quad (18)$$

и условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} w(t, s) = \lim_{t \rightarrow 0} {}^C D_{0,t}^\alpha w(t, s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial w(t, s)}{\partial s} = 0. \quad (19)$$



Подобно тому, как это было сделано в [9], истолкуем $w(t, s)$ как обобщенную функцию умеренного роста и по переменной s применим преобразование Фурье-Бесселя

$$\hat{w}(t, \lambda) = \int_0^\infty s^{2p+1} j_p(\lambda s) w(t, s) ds, \quad w(t, s) = \gamma_p \int_0^\infty \lambda^{2p+1} j_p(\lambda s) \hat{w}(t, \lambda) d\lambda,$$

$$p = \frac{1-m}{2}, \quad \gamma_p = \frac{1}{2^{2p} \Gamma^2(p+1)}, \quad j_p(s) = \frac{2^p \Gamma(p+1)}{s^p} J_p(s),$$

где $J_p(\cdot)$ — функция Бесселя.

Из (18), (19) для образа $\hat{w}(t, \lambda)$ получим следующую задачу

$$B_{k,\alpha} \hat{w}(t, \lambda) = -\lambda^2 \hat{w}(t, \lambda), \quad t > 0, \tag{20}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \hat{w}(t, \lambda) = \lim_{t \rightarrow 0} {}^C D_{0,t}^\alpha \hat{w}(t, \lambda) = 0. \tag{21}$$

В силу замечаний 1 и 2 общее решение уравнения (20) имеет вид

$$\hat{w}(t, \lambda) = \frac{d_1(\lambda) \Gamma((k+1)/(\alpha+1))}{\Gamma(1/(\alpha+1))} \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(j+1/(\alpha+1)) t^{(\alpha+1)j} (-\lambda^2)^j}{\Gamma((\alpha+1)j+1) \Gamma(j+(k+1)/(\alpha+1))} +$$

$$+ d_2(\lambda) \Gamma(k/(\alpha+1)+1) \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(j+1) t^{(\alpha+1)j+\alpha} (-\lambda^2)^j}{\Gamma((\alpha+1)j+\alpha+1) \Gamma(j+k/(\alpha+1)+1)},$$

и из начальных условий (21) следуют равенства $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 0$. Следовательно, $\hat{w}(t, \lambda) = w(t, s) = 0$ для любого $s \geq 0$. В силу произвольности функционала $f \in E^*$ при $s = 0$ получим равенство $u_1(t) \equiv u_2(t)$, и единственность решения установлена. ■

Найдем далее решение нагруженного уравнения первого порядка (4), удовлетворяющее начальному условию

$$u(0) = u_0. \tag{22}$$

Чтобы описать класс операторов A , для которого корректна задача (4), (22), напомним определение проинтегрированной полугруппы (ПП).

Определение. Пусть $\beta > 0$. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $T_\beta(t)$, $t \geq 0$ называется β раз ПП, если:

- 1) $\Gamma(\beta) T_\beta(t) T_\beta(s) = \int_s^{t+s} (t+s-r)^{\beta-1} T_\beta(r) dr - \int_0^t (t+s-r)^{\beta-1} T_\beta(r) dr, \quad t, s \geq 0;$
- 2) $T_\beta(0) = 0;$
- 3) для любого $x \in E$ функция $T_\beta(t)x$ непрерывна по $t \geq 0;$
- 4) существуют постоянные $M > 0, \omega \in R$ такие, что

$$\|T_\beta(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Генератор A ПП $T_\beta(t)$ определяется следующим образом: $D(A)$ — множество элементов $x \in E$ таких, что существует элемент $y \in E$, удовлетворяющий равенству

$$T_\beta(t)x - \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+1)} x = \int_0^t T_\beta(s)y ds, \quad t \geq 0; \tag{23}$$



в этом случае полагают $Ax = y$.

Теорема 10. Пусть $k > 0$, A — генератор k раз ПП $T_k(t)$, $u_0 \in D(A)$. Тогда функция $u(t) \equiv Y_{k,0}(t)u_0 = \Gamma(k+1) t^{-k} T_k(t)u_0$ является единственным решением задачи (4), (22).

□ Из равенства (23) следует справедливость начального условия (22). Проверим, что функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (4). Действительно,

$$\begin{aligned} u'(t) + \frac{k}{t}(u(t) - u(0)) &= \Gamma(k+1) t^{-k} T_k'(t)u_0 - \frac{k}{t}u_0 = \\ &= \Gamma(k+1) t^{-k} \left(AT_k(t)u_0 + \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}u_0 \right) - \frac{k}{t}u_0 = \Gamma(k+1) t^{-k} AT_k(t)u_0 = Au(t). \end{aligned}$$

Доказательство единственности решения задачи (4), (22) будем вести от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения этой задачи. Рассмотрим функцию $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$. Она, очевидно, удовлетворяет задаче

$$v'(t) = Av(t), \quad v(0) = 0,$$

которая имеет (см. [10]) единственное решение $v(t) \equiv 0$ и, стало быть, $u_1(t) \equiv u_2(t)$. ■

Замечание 3. Если A — ограниченный оператор, то $Y_{k,0}(t) = \Gamma(k+1) E_{1,k+1}(tA)$.

Из теоремы 2 для операторной функции $Y_{k,0}(t)$ вытекает формула сдвига по параметру.

Теорема 11. Пусть $m > k > 0$ и оператор A — генератор k раз ПП. Тогда

$$Y_{m,0}(t) = \frac{1}{B(m-k, k+1)} \int_0^1 s^k (1-s)^{m-k-1} Y_{k,0}(ts) ds. \quad (24)$$

Отметим, что формула (24) примыкает к равенству (12) при $\alpha = 0$.

Если задача (16), (17) равномерно корректна, т.е., $A \in G_m$ и $Y_m(t)$ — ОФБ для этой задачи, то, как доказано в [3], оператор A является генератором C_0 -полугруппы $T(t)$, при этом задача

$$v'(t) = Av(t), \quad v(0) = v_0 \in D(A),$$

равномерно корректна, $v(t) = T(t)v_0$ и для полугруппы $T(t)$ справедливо представление

$$T(t) = \frac{1}{2^m \Gamma(m/2 + 1/2) t^{m/2+1/2}} \int_0^\infty s^m \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) Y_m(s) ds. \quad (25)$$

Сформулируем утверждение, позволяющее выразить операторную функцию $Y_{k,0}(t)$ через операторную функцию Бесселя $Y_m(t)$. При этом будет использована $\Psi(\cdot, \cdot; \cdot)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми (см. [8], с. 365.)

Теорема 12. Пусть $k > 0$, при некотором $m \geq 0$ оператор $A \in G_m$ и $Y_m(t)$ — соответствующая операторная функция Бесселя. Тогда справедливо представление

$$Y_{k,0}(t) = \frac{\Gamma(k+1)}{2^m \Gamma(m/2 + 1/2) t^{m/2+1/2}} \int_0^\infty s^m \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) \Psi\left(k, \frac{m+1}{2}; \frac{s^2}{4t}\right) Y_m(s) ds. \quad (26)$$



□ Используя представление (25), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned}
 Y_{k,0}(t) &= \frac{\Gamma(k+1)}{t^k} I_{0,t}^k T(t) = \frac{\Gamma(k+1)}{t^k} \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^t (t-\tau)^{k-1} T(\tau) d\tau = k \int_0^1 (1-\xi)^{k-1} T(t\xi) d\xi = \\
 &= \frac{k}{2^m \Gamma(m/2 + 1/2) t^{m/2+1/2}} \int_0^1 (1-\xi)^{k-1} \xi^{-m/2-1/2} \int_0^\infty \eta^m \exp\left(-\frac{s^2}{4t\xi}\right) Y_m(s) ds d\xi = \\
 &= \frac{k}{2^m \Gamma(m/2 + 1/2) t^{m/2+1/2}} \int_0^\infty s^m Y_m(s) \int_0^1 (1-\xi)^{k-1} \xi^{-m/2-1/2} \exp\left(-\frac{s^2}{4t\xi}\right) d\xi ds = \\
 &= \frac{k}{2^m \Gamma(m/2 + 1/2) t^{m/2+1/2}} \int_0^\infty s^m Y_m(s) \int_1^\infty (\eta-1)^{k-1} \eta^{m/2-1/2-k} \exp\left(-\frac{s^2\eta}{4t}\right) d\eta ds = \\
 &= \frac{\Gamma(k+1)}{2^m \Gamma(m/2 + 1/2) t^{m/2+1/2}} \int_0^\infty s^m \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) \Psi\left(k, \frac{m+1}{2}; \frac{s^2}{4t}\right) Y_m(s) ds,
 \end{aligned}$$

при этом был использован интеграл 2.3.6.6 из [7]. ■

Отметим в заключение, что формула (26) является аналогом равенства (25) для задачи (4), (22) и превращается в нее при $k = 0$.

Литература

1. Дженалиев М.Л. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений / Алматы: Ин-т теор. и прикл. матем., 1995.
2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение / М.: Наука, 2012.
3. Глушак А.В., Покручин О.А. Необходимое условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2012. – №11(130). Вып. 27. – С.29-37.
4. Глушак А.В., Покручин О.А. Достаточное условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2014. – №19(190). Вып. 36. – С.17-26.
5. Da Prato G., Iannelli M. Linear integro-differential equations in banach spaces / Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1980. – 62. – P.207-219.
6. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции / М.: Наука, 1981.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы / М.: Наука, 1986.
9. Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Мат. сб. – 1955. – 36, №2. – С.299-310.
10. Мельникова И.В., Филинков А.И. Интегрированные полугруппы и C -полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач // УМН. – 1994. – 49, вып. 6(300). – С.111-150.



**INITIAL VALUE PROBLEM
FOR LOADED SINGULAR EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER**

A.V. Glushak

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. The Cauchy problem for loaded equation with fractional derivatives in Banach's space is under consideration. The coefficient at term of fractional derivative has a singular feature. It is proved the sufficient condition for the solvability of the problem. The explicit form of the solution operator is found.

Key words: abstract Cauchy problem, loaded singular equation, solution operator, unique solvability.



MSC 60H10, 60H30

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Ю.Е. Гликлих, Е.Ю. Машков

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: yeg@math.vsu.ru
Курский государственный университет,
ул. Радищева, 33, Курск, 305000, Россия, e-mail: mashkovevgen@yandex.ru

Аннотация. Исследуется стохастическое уравнение леонтьевского типа с сингулярным пучком постоянных матриц коэффициентов и импульсными воздействиями в правой части. Отметим, что для исследования решений таких уравнений необходимо использовать производные высших порядков от свободных членов правой части (включая винеровский процесс). В связи с этим, для дифференцирования винеровского процесса мы применяем аппарат производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, что позволяет при исследовании не использовать аппарат теории обобщенных функций. В результате получаются аналитические формулы для решений уравнения в терминах производных в среднем случайных процессов.

Ключевые слова: производная в среднем, текущая скорость, винеровский процесс, дифференциально-алгебраическое уравнение, уравнение леонтьевского типа.

Введение. Рассматривается специальная система стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито вида

$$d\tilde{L}\xi(t) = \tilde{M}\xi(t)dt + f(t)dt + dS\zeta(t) + \Lambda d\tilde{w}(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ – сингулярный пучок постоянных матриц размера $n \times m$; $\xi(t)$ – искомый случайный процесс; $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс в R^n ; Λ – невырожденная матрица размера $n \times n$; $f(t)$ – достаточно гладкая n -мерная вектор-функция, принимающая в нуле нулевое значение со всеми своими производными; $\zeta(t)$ – n -мерный процесс скачков; S – $n \times n$ -матрица. Отправной точкой для данной статьи послужила работа [1], в которой данная система рассматривается с регулярным пучком постоянных матриц коэффициентов.

Специфика уравнений леонтьевского типа предполагает рассматривать производные высших порядков от правой части (в том числе и винеровского процесса). Как известно (см., например, [1]), производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций, которые крайне трудны для использования в конкретных уравнениях. Это обстоятельство делает прямое исследование нашего уравнения сложным.

Предлагаемый в настоящей работе метод исследования (как и в [3,4]) данного уравнения основан на применении аппарата производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, для описания которых не использованы обобщенные функции. А



именно, мы применяем симметрические производные в среднем (текущие скорости) винеровского процесса. Текущие скорости, в соответствии с общей идеологией теории производных в среднем по Нельсону, являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов. В результате для изучаемого уравнения мы получаем физически осмысленные формулы для решений в терминах симметрических производных в среднем случайных процессов.

Следующий раздел посвящен описанию основ теории производных в среднем в объеме, необходимом для целей настоящей статьи. Далее, приводится описание канонической формы Кронекера-Шура сингулярного пучка постоянных матриц. Затем, изучаются вопросы о приведении стохастических дифференциальных уравнений сингулярного типа к каноническому виду. Наконец, последний раздел посвящен описанию решений сингулярных стохастических уравнений леонтьевского типа с импульсными воздействиями.

Модификации аппарата производных в среднем (разд. 1) и канонической формы Шура (разд. 2), приспособленные для целей настоящей работы, выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №13-01-00041 и №15-01-00620).

Результаты разд. 3 получены при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 годы (проект 1.1539.2014/К).

Результаты раздела 4 получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

1. Производные в среднем случайных процессов. Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ в R^n , $t \in [0, l]$, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и такой, что $\xi(t)$ является L_1 -случайной величиной для всех t . Известно, что каждый такой процесс порождает семейство σ -подалгебр σ -алгебры \mathcal{F} "настоящее" \mathcal{N}_t^ξ , которое будем считать полным, т. е. пополненным всеми множествами вероятности нуль.

Ради удобства мы обозначаем условное математическое ожидание $E(\cdot | \mathcal{N}_t^\xi)$ относительно «настоящего» \mathcal{N}_t^ξ для $\xi(t)$ через E_t^ξ . Обычное ("безусловное") математическое ожидание обозначается символом E .

Вообще говоря, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы, так что его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать использования обобщенных функций, согласно Нельсону даем следующее определение:

Определение 1 [1].

(i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1 -случайная величина вида

$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и $\Delta t \rightarrow +0$ означает, что Δt стремится к 0 и $\Delta t > 0$.



(ii) Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1 -случайная величина

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \right),$$

где (как и в (i)) предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и $\Delta t \rightarrow +0$ означает, что Δt стремится к 0 и $\Delta t > 0$.

Следует отметить, что, вообще говоря, $D\xi(t) \neq D_*\xi(t)$, но если, например, $\xi(t)$ почти наверное имеет гладкие выборочные траектории, эти производные очевидно совпадают.

Из свойств условного математического ожидания (см. [5]) следует, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий)

$$Y^0(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \mid \xi(t) = x \right)$$

$$Y_*^0(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \mid \xi(t) = x \right)$$

на R^n , то есть, $D\xi(t) = Y^0(t, \xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y_*^0(t, \xi(t))$.

Определение 2 [1]. Производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ называется симметрической производной в среднем. Производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ называется антисимметрической производной в среднем.

Рассмотрим векторные поля $v^\xi(t, x) = \frac{1}{2}(Y^0(t, x) + Y_*^0(t, x))$ и $u^\xi(t, x) = \frac{1}{2}(Y^0(t, x) - Y_*^0(t, x))$.

Определение 3 [1]. $v^\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$; $u^\xi(t) = u^\xi(t, \xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.

Текущая скорость является для случайных процессов прямым аналогом обычной физической скорости детерминированных процессов (см. [1]). Осмотическая скорость измеряет насколько быстро нарастает «случайность» процесса.

Определяющую роль в наших конструкциях играет винеровский процесс ([1]), который мы обозначим символом $w(t)$.

Лемма 1 [1, 3]. Для $t \in (0, l]$ имеют место равенства

$$Dw(t) = 0, \quad D_*w(t) = \frac{w(t)}{t}, \quad D_Sw(t) = \frac{w(t)}{2t}.$$

При целом $k \geq 2$

$$D_S^k w(t) = (-1)^{k-1} \frac{\prod_{i=1}^{k-1} (2i-1)}{2^k} \frac{w(t)}{t^k}.$$

2. Каноническая форма сингулярного пучка постоянных матриц. Приведем необходимые сведения из теории постоянных матриц, подробное изложение которых имеется в книгах [6, 7].



Определение 4. Если A и B – матрицы размера $n \times t$, то матрица $\lambda A + B$ называется матричным пучком, или просто пучком. Здесь λ является параметром, а не конкретным числом.

Определение 5. Если A и B – квадратные матрицы и $\det(\lambda A + B)$ не равен нулю тождественно, то пучок $\lambda A + B$ называют регулярным. В противном случае, пучок называется сингулярным.

Теорема 1 (Обобщенная вещественная форма Шура). Для регулярного пучка $\lambda A + B$ найдутся вещественные ортогональные матрицы Q_L и Q_R , такие, что матрица $Q_L A Q_R$ – верхняя квазитреугольная (т. е. верхняя блочно-треугольная матрица с диагональными блоками размера 1×1 и 2×2 ; блоки размера 1×1 соответствуют вещественным собственным значениям, а блоки размера 2×2 – сопряженным парам комплексных собственных значений), а матрица $Q_L B Q_R$ – верхняя треугольная.

Теорема 2. Для сингулярного пучка матриц $\lambda A + B$ размера $n \times t$ имеется преобразование Кронекера (описывается парой невырожденных матриц (операторов) P_L и P_R размеров $n \times n$ и $t \times t$ соответственно), при котором матрица $P_L B P_R + \lambda P_L A P_R$ имеет квазидиагональный вид

$$\begin{pmatrix} \lambda A_0 + B_0 & & & & & & & & 0 \\ & L_{\varepsilon_1} & & & & & & & \\ & & L_{\varepsilon_2} & & & & & & \\ & & & \dots & & & & & \\ & & & & L_{\varepsilon_p} & & & & \\ & & & & & L_{\eta_1}^T & & & \\ & & & & & & L_{\eta_2}^T & & \\ & & & & & & & \dots & \\ 0 & & & & & & & & L_{\eta_q}^T \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$(0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_p, \quad 0 < \eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_p),$$

где

$$L_\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \end{pmatrix},$$

каноническая сингулярная клетка Кронекера размера $\varepsilon \times (\varepsilon + 1)$, L_η^T – матрица, транспонированная к L_η и $\lambda A_0 + B_0$ – регулярный пучок матриц.

Таким образом, заменяя фигурирующий в (1) регулярный пучок $\lambda A_0 + B_0$ его обобщенной вещественной формой Шура, получим каноническую форму Кронекера-Шура сингулярного пучка матриц $\lambda A + B$ в самом общем случае.

Замечание 1. Стоящий в (1) регулярный пучок $\lambda A_0 + B_0$ можно также заменить его канонической формой Вейерштрасса и тогда получим каноническую форму Кронекера-Вейерштрасса сингулярного пучка постоянных матриц.



3. О приведении к каноническому виду сингулярных стохастических уравнений леонтьевского типа. Как сказано во введении, сингулярное стохастическое уравнение леонтьевского типа с импульсными воздействиями – это стохастическое дифференциальное уравнение в R^n вида

$$d\tilde{L}\xi(t) = \tilde{M}\xi(t)dt + f(t)dt + dS\zeta(t) + \Lambda d\tilde{w}(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

где все объекты, входящие в это уравнение, описаны во введении. Кроме этого, здесь процесс скачков $\zeta(t) = \zeta(t, \omega)$ задается следующим образом

$$\zeta(t, \omega) = \sum_{k=1}^N \tilde{\zeta}_k(\omega)\chi(t - t_k), \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = T,$$

где $\chi(t)$ – функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице для положительных; $\tilde{\zeta}_k(\omega)$ – случайные величины со значениями в R^n . Из вида (2) понятно, что (для простоты) начальное условие для решения (2) предполагается вида

$$\xi(0, \omega) = 0. \quad (3)$$

Скажем сразу, что выписанное ниже решение этому условию не удовлетворяет, и, более того, при $t = 0$ оно не определено. Оно представляет собой аппроксимацию решения процессами, которые удовлетворяют этому начальному условию, но становятся решениями лишь с некоторого (заранее заданного сколь угодно малого) момента времени $t_0 > 0$ (см. ниже).

Формулы для решений задачи (2), (3) будем искать среди случайных процессов $\xi(t, \omega)$, которые удовлетворяют (в том смысле как описывается ниже) стохастическим уравнениям

$$\tilde{L}\xi_k(t) = \tilde{M} \int_{t_k}^t \xi_k(\tau)d\tau + \int_{t_k}^t f(\tau)d\tau + \Lambda\tilde{w}(t), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1},$$

при всех $k = 0, 1, \dots, N$, в точках t_k P -п. н. удовлетворяют равенствам

$$\tilde{L}\xi(t_k + 0, \omega) - \tilde{L}\xi(t_k - 0, \omega) = S\tilde{\zeta}_k(\omega), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

и в начальный момент времени $t_0 = 0$ P -п. н. удовлетворяют начальному условию (3).

Итак, процесс $\xi(t)$ для решения задачи (2), (3) определяется последовательно для $k = 0, 1, \dots, N$ через случайные процессы $\xi_k(t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{L}\xi_k(t) - \tilde{L}\xi_k(t_k) = \tilde{M} \int_{t_k}^t \xi_k(\tau)d\tau + \int_{t_k}^t f(\tau)d\tau + \Lambda\tilde{w}(t),$$

п. в. $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, $\omega \in \Omega$, где

$$\xi_0(0) = 0, \quad \tilde{L}\xi_k(t_k) = \tilde{L}\xi_{k-1}(t_k, \omega) + S\tilde{\zeta}_k(\omega), \quad k = 1, \dots, N.$$



Как нетрудно видеть, уравнение (2) в общей форме неудобно для изучения, поэтому приведем его к некоторому каноническому виду, используя при этом метод, описанный в работах [3, 4] для уравнений леонтьевского типа без процесса скачков в правой части. Применим к пучку матриц $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ преобразование Кронекера-Шура, описанное в предыдущем параграфе. Тогда уравнение (2) преобразуется следующим образом

$$P_L\tilde{L}P_R\eta(t) = \int_0^t P_L\tilde{M}P_R\eta(\tau)d\tau + \int_0^t P_Lf(\tau)d\tau + P_LS\zeta(t) + C\tilde{w}(t),$$

где $C = P_L\Lambda$, $\eta(t) = P_R^{-1}\xi(t)$.

Регулярную компоненту пучка $P_L\tilde{M}P_R + \lambda P_L\tilde{L}P_R = M + \lambda L$ обозначим через $\lambda A + B$. При соответствующей нумерации векторов базиса в $M + \lambda L$ вдоль главной диагонали стоят пучок $\lambda A + B$ и канонические сингулярные клетки Кронекера L_ε , L_ε^T в порядке, указанном в (1). Элементы $\lambda A + B$ располагаются таким образом: в A сначала вдоль главной диагонали стоят блоки размера 2×2 , потом невырожденные блоки размера 1×1 , а затем вырожденные блоки размера 1×1 .

Обозначим через C^* оператор, сопряженный с C , а (\cdot, \cdot) – стандартное скалярное произведение в R^n . Введем в R^n новое скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ формулой

$$\langle X, Y \rangle = ((CC^*)^{-1}X, Y).$$

С применением методов, изложенных в работах [3, 4] несложно доказываются утверждения:

Теорема 3.

(i) Для любых векторов X и Y из R^n выполняется тождество $\langle CX, CY \rangle = (X, Y)$.

(ii) Процесс $w(t) = C\tilde{w}(t)$ является винеровским в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Следствие 1. Пусть e_1, e_2, \dots, e_n – естественный ортонормированный базис в R^n с (\cdot, \cdot) . Векторы Ce_1, Ce_2, \dots, Ce_n образуют ортонормированный базис в евклидовом пространстве R^n со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Следствие 2. В пространстве R^n с $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в разложении по ортонормированному базису Ce_1, Ce_2, \dots, Ce_n стохастическое уравнение леонтьевского типа имеет вид

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(\tau)d\tau + \int_0^t P_Lf(\tau)d\tau + P_LS\zeta(t) + w(t).$$

Напомним, что в выражения для текущей скорости винеровского процесса в данном случае входит $Grad(C^{-1}x, C^{-1}x)$, где $Grad$ – градиент относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Лемма 2. $d\langle x, x \rangle = d(C^{-1}x, C^{-1}x) = 2(C^*)^{-1}C^{-1}x$, где d – внешний дифференциал.

Лемма 3. $Grad \langle x, x \rangle = Grad(C^{-1}x, C^{-1}x) = 2x$.

Следовательно, как и в [3, 4], при отображении в R^n со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ формулы для текущих скоростей винеровского процесса сохраняют свой вид.



4. Решения сингулярных стохастических уравнений леонтьевского типа с импульсными воздействиями. Итак, если пучок $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ сингулярен, то после применения преобразования Кронекера-Шура стохастическое уравнение леонтьевского типа в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ приобретает вид

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(\tau)d\tau + \int_0^t P_L f(\tau)d\tau + P_L S\zeta(t) + w(t), \quad (4)$$

$$\eta(0) = 0. \quad (5)$$

Тогда, учитывая сказанное выше, формулы для решений $\eta(t)$ задачи (4), (5) определяется последовательно для $k = 0, 1, \dots, N$ через случайные процессы $\eta_k(t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$L\eta_k(t) - L\eta_k(t_k) = \int_{t_k}^t M\eta_k(\tau)d\tau + \int_{t_k}^t P_L f(\tau)d\tau + w(t), \quad (6)$$

п. в. $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, $\omega \in \Omega$, где

$$\eta_0(0) = 0, \quad L\eta_k(t_k) = L\eta_{k-1}(t_k, \omega) + Q\tilde{\zeta}_k(\omega), \quad k = 1, \dots, N, \quad (7)$$

и $Q = P_L S$. Как было отмечено выше, для построения процесса, описывающего модель, заданную уравнениями (6), нужны производные свободных членов (включая винеровский процесс). Производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций. Поэтому чтобы избежать использования обобщенных функций, мы для построения процесса, описывающего модель, заданную (6), будем использовать производные в среднем для случайных процессов.

Замечание 2. Переписав (6) в виде

$$L\eta_k(t) - L\eta_k(t_k) - M \int_{t_k}^t \eta_k(\tau)d\tau - \int_{t_k}^t P_L f(\tau)d\tau = w(t),$$

видно, что «настоящее» для процесса, стоящего в левой части, совпадает с «настоящим» для $w(t)$. Поэтому последнюю σ -алгебру мы и будем использовать при нахождении производных в среднем, т. е. применять к (6) производные D^w , D_*^w или D_S^w .

Учитывая структуру пучка матриц $\lambda L + M$ нетрудно видеть, что задачи (4), (5) и, следовательно, (6), (7) распадаются на несколько независимых систем уравнений пяти типов (три типа систем соответствуют регулярному пучку $\lambda A + B$, два типа систем соответствуют сингулярным клеткам L_ε и L_ε^T). Обозначим через $\eta(t)$, $\zeta(t)$ и $\theta(t)$ компоненты вектора $\eta(t)$, соответствующие пучку $\lambda A + B$ и клеткам L_ε , L_ε^T соответственно. Также через $g(t)$, $u(t)$, $v(t)$ обозначим соответствующие компоненты вектора $P_L f(t)$. Соответствующие компоненты винеровского процесса будут тоже винеровскими процессами и будем обозначать их как и сам винеровский процесс через $w(t)$. Исследуем каждый тип уравнений.



В соответствии с канонической формой Кронекера-Шура, уравнение, соответствующее пучку $\lambda A + B$, как и в работе [8] распадается на стохастические уравнения следующих типов. Для блоков размера 2×2 получаем подсистему¹⁾ из пары уравнений

$$\begin{aligned} & a_{ii}\eta_k^i(t) + a_{i,i+1}\eta_k^{i+1}(t) + a_{i,i+2}\eta_k^{i+2} + \dots + a_{is}\eta_k^s = \\ & = \int_{t_k}^t (b_{ii}\eta_k^i(\tau) + b_{i,i+1}\eta_k^{i+1}(\tau) + \dots + b_{is}\eta_k^s(\tau))d\tau + \int_{t_k}^t g^i(\tau)d\tau + w^i(t), \\ & a_{i+1,i}\eta_k^i(t) + a_{i+1,i+1}\eta_k^{i+1}(t) + a_{i+1,i+2}\eta_k^{i+2} + \dots + a_{i+1,s}\eta_k^s = \\ & = \int_{t_k}^t (b_{i+1,i+1}\eta_k^{i+1}(\tau) + b_{i+1,i+2}\eta_k^{i+2}(\tau) + \dots + b_{i+1,s}\eta_k^s(\tau))d\tau + \\ & \quad + \int_{t_k}^t g^{i+1}(\tau)d\tau + w^{i+1}(t). \end{aligned}$$

В матричной форме в новых обозначениях эта подсистема уравнений принимает вид

$$\bar{\eta}_k(t) + \vartheta(t) = \int_{t_k}^t K\bar{\eta}_k(\tau)d\tau + \int_{t_k}^t v(\tau)d\tau + \int_{t_k}^t \bar{g}(\tau)d\tau + J\bar{w}(t),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \begin{pmatrix} \eta^i \\ \eta^{i+1} \end{pmatrix}, \quad B_{ii} = \begin{pmatrix} b_{ii} & b_{i,i+1} \\ 0 & b_{i+1,i+1} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} \\ a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix}^{-1}, \\ \vartheta &= J \begin{pmatrix} a_{i,i+2} & \dots & a_{is} \\ a_{i+1,i+2} & \dots & a_{i+1,s} \end{pmatrix} (\eta_k^{i+2} \dots \eta_k^s)^T, \quad v(t) = J \begin{pmatrix} b_{i,i+2} & \dots & b_{is} \\ b_{i+1,i+2} & \dots & b_{i+1,s} \end{pmatrix} (\eta_k^{i+2} \dots \eta_k^s)^T, \\ \bar{g} &= J \begin{pmatrix} g^i \\ g^{i+1} \end{pmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} w^i \\ w^{i+1} \end{pmatrix}, \quad K = JB_{ii}. \end{aligned}$$

Для этой подсистемы уравнений имеет место аналитическая формула для решений

$$\bar{\eta}_k(t) = \int_{t_k}^t e^{K(t-\tau)} Jd\bar{w}_\tau + \int_{t_k}^t e^{K(t-\tau)} (v(\tau) + \bar{g}(\tau) - K\vartheta(\tau)) d\tau - \vartheta(t).$$

Складывая все $\bar{\eta}_k(t)$, получим выражение для $\bar{\eta}(t)$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(t) &= \sum_{k=1}^N e^{K(t-t_k)} Q\tilde{\zeta}_k(\omega)\chi(t-t_k) + \int_0^t e^{K(t-\tau)} Jd\bar{w}_\tau + \\ & \quad + \int_0^t e^{K(t-\tau)} (v(\tau) + \bar{g}(\tau) - K\vartheta(\tau)) d\tau - \vartheta(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где из произведения $Q\tilde{\zeta}_k(\omega)$ берутся только элементы из $i, i+1$ строк.

¹⁾Отметим, опечатки в [8]: там на стр. 124 в подсистеме такого же вида в левой части последнего уравнения ошибочно отсутствует слагаемое $a_{i+1,i}\eta^i$, в связи с чем приведены ошибочные формулы для ее решений.



Для блоков размера 1×1 получаем уравнения

$$\begin{aligned} & a_{jj}\eta_k^j(t) + a_{j,j+1}\eta_k^{j+1}(t) + \dots + a_{js}\eta_k^s(t) = \\ & = \int_{t_k}^t (b_{jj}\eta_k^j(\tau) + b_{j,j+1}\eta_k^{j+1}(\tau) + \dots + b_{js}\eta_k^s(\tau))d\tau + \int_{t_k}^t g^j(\tau)d\tau + w^j(t), \end{aligned}$$

Для такого типа уравнений тоже есть аналитическая формула для решений

$$\begin{aligned} \eta_k^j(t) = & \int_{t_k}^t e^{b_{jj}(t-\tau)/a_{jj}} \frac{dw_\tau^j}{a_{jj}} + \int_{t_k}^t e^{b_{jj}(t-\tau)/a_{jj}} \left[\frac{1}{a_{jj}} g^j(\tau) + \frac{b_{j,j+1}}{a_{jj}} \eta_k^{j+1}(\tau) + \dots \right. \\ & \left. + \frac{b_{js}}{a_{jj}} \eta_k^s(\tau) - \frac{b_{jj}}{a_{jj}^2} (a_{j,j+1}\eta_k^{j+1}(\tau) + \dots + a_{js}\eta_k^s(\tau)) \right] d\tau - \frac{a_{j,j+1}}{a_{jj}} \eta_k^{j+1} - \dots - \frac{a_{js}}{a_{jj}} \eta_k^s. \end{aligned}$$

Суммируя все $\eta_k^j(t)$, получим формулу для вычисления $\eta^j(t)$

$$\begin{aligned} \eta^j(t) = & \sum_{k=1}^N e^{b_{jj}(t-t_k)/a_{jj}} Q\tilde{\zeta}_k(\omega)\chi(t-t_k) + \int_0^t e^{b_{jj}(t-\tau)/a_{jj}} \frac{dw_\tau^j}{a_{jj}} + \\ & + \int_0^t e^{b_{jj}(t-\tau)/a_{jj}} \left[\frac{1}{a_{jj}} g^j(\tau) + \frac{b_{j,j+1}}{a_{jj}} \eta_k^{j+1}(\tau) + \dots + \frac{b_{js}}{a_{jj}} \eta_k^s(\tau) \right. \\ & \left. - \frac{b_{jj}}{a_{jj}^2} (a_{j,j+1}\eta_k^{j+1}(\tau) + \dots + a_{js}\eta_k^s(\tau)) \right] d\tau - \frac{a_{j,j+1}}{a_{jj}} \eta_k^{j+1} - \dots - \frac{a_{js}}{a_{jj}} \eta_k^s, \quad (9) \end{aligned}$$

где из произведения $Q\tilde{\zeta}_k(\omega)$ берется только элемент из j строки.

Компоненты процесса η_k , соответствующие нулевым диагональным блокам, соберем в одно матричное уравнение

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & a_{p,p+1} & a_{p,p+2} & \dots & a_{ps} \\ 0 & 0 & a_{p+1,p+2} & \dots & a_{p+1,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_k^p(t) \\ \eta_k^{p+1}(t) \\ \vdots \\ \eta_k^s(t) \end{pmatrix} = \\ & - \begin{pmatrix} 0 & a_{p,p+1} & a_{p,p+2} & \dots & a_{ps} \\ 0 & 0 & a_{p+1,p+2} & \dots & a_{p+1,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_k^p(t_k) \\ \eta_k^{p+1}(t_k) \\ \vdots \\ \eta_k^s(t_k) \end{pmatrix} = \\ & = \int_{t_k}^t \begin{pmatrix} b_{pp} & b_{p,p+1} & \dots & b_{ps} \\ 0 & b_{p+1,p+1} & \dots & b_{p+1,s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_k^p(\tau) \\ \eta_k^{p+1}(\tau) \\ \vdots \\ \eta_k^s(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \\ & + \int_{t_k}^t \begin{pmatrix} g^p(\tau) \\ g^{p+1}(\tau) \\ \vdots \\ g^s(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \begin{pmatrix} w^p(t) \\ w^{p+1}(t) \\ \vdots \\ w^s(t) \end{pmatrix}, \quad (10) \end{aligned}$$



Из последнего уравнения системы (10) получаем, что

$$\int_{t_k}^t b_{ss} \eta_k^s(\tau) d\tau = - \int_{t_k}^t g^s(\tau) d\tau - w^s(t).$$

Так как именно текущая скорость (симметрическая производная в среднем) соответствует физической скорости, из этого уравнения мы находим $\eta_k^s(t)$ применением к обеим частям производной D_S^w . Легко видеть, что применение производных в среднем D^w и D_*^w (и, следовательно, D_S^w) к интегралу в левой части дает одинаковый результат $\eta_k^s(t)$. Таким образом, в соответствии с Леммой 1, мы получаем, что

$$\eta_k^s(t) = -\frac{1}{b_{ss}} g^s(t) - \frac{1}{b_{ss}} D_S w^s(t) = -\frac{1}{b_{ss}} g^s(t) - \frac{1}{b_{ss}} \cdot \frac{w^s(t)}{2t}. \quad (11)$$

Из предпоследнего уравнения системы (10) мы получаем, что

$$a_{s-1,s} \eta_k^s = \int_{t_k}^t (b_{s-1,s-1} \eta_k^{s-1}(\tau) + b_{s-1,s} \eta_k^s(\tau)) d\tau + \int_{t_k}^t g^{s-1}(\tau) d\tau + w^{s-1}(t),$$

откуда, проведя рассуждения, аналогично сделанным выше, выводим

$$\eta_k^{s-1}(t) = \frac{a_{s-1,s}}{b_{s-1,s-1}} D_S \eta_k^s - \frac{b_{s-1,s}}{b_{s-1,s-1}} \eta_k^s - \frac{1}{b_{s-1,s-1}} g^{s-1}(t) - \frac{1}{b_{s-1,s-1}} D_S w^{s-1}(t).$$

Подставляя в последнее равенство выражение для $\eta_k^s(t)$ и используя Лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} \eta_k^{s-1}(t) = & -\frac{a_{s-1,s}}{b_{ss} b_{s-1,s-1}} \frac{dg^s(t)}{dt} + \frac{a_{s-1,s}}{b_{ss} b_{s-1,s-1}} \frac{w^s(t)}{4t^2} + \\ & + \frac{b_{s-1,s}}{b_{ss} b_{s-1,s-1}} g^s(t) + \frac{b_{s-1,s}}{b_{ss} b_{s-1,s-1}} \frac{w^s(t)}{2t} - \frac{1}{b_{s-1,s-1}} g^{s-1}(t) - \frac{1}{b_{s-1,s-1}} \frac{w^{s-1}(t)}{2t}. \end{aligned}$$

В точности также, для $p \leq l \leq s-1$ получаем формулу для определения $\eta_k^l(t)$

$$\begin{aligned} D_S(a_{l,l+1} \eta_k^{l+1} + a_{l,l+2} \eta_k^{l+2} + \dots + a_{ls} \eta_k^s) = & b_{ll} \eta_k^l + b_{l,l+1} \eta_k^{l+1} + \dots \\ & + b_{l,s} \eta_k^s + g^l(t) + D_S w^l(t). \quad (12) \end{aligned}$$

С помощью Леммы 1 и формулы (12) нетрудно получить явное выражение для любого $\eta_k^l(t)$. Стало быть, компоненты процесса $\eta^l(t)$, соответствующие нулевым диагональным блокам в A , находятся из следующих соотношений

$$\eta^s(t) = -\frac{1}{b_{ss}} g^s(t) - \frac{1}{b_{ss}} \cdot \frac{w^s(t)}{2t}, \quad (13)$$

$$D_S(a_{l,l+1} \eta^{l+1} + a_{l,l+2} \eta^{l+2} + \dots + a_{ls} \eta^s) = b_{ll} \eta^l + b_{l,l+1} \eta^{l+1} + \dots + b_{l,s} \eta^s + g^l(t) + D_S w^l(t), \quad (14)$$



где в точках t_k эти компоненты должны удовлетворять ограничениям (7).

Клеткам L_l соответствует уравнение, которое в координатной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_k^1(t) \\ \varsigma_k^2(t) \\ \vdots \\ \varsigma_k^l(t) \\ \varsigma_k^{l+1}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_k^1(t_k) \\ \varsigma_k^2(t_k) \\ \vdots \\ \varsigma_k^l(t_k) \\ \varsigma_k^{l+1}(t_k) \end{pmatrix} =$$

$$= \int_{t_k}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_k^1(\tau) \\ \varsigma_k^2(\tau) \\ \vdots \\ \varsigma_k^l(\tau) \\ \varsigma_k^{l+1}(\tau) \end{pmatrix} d\tau +$$

$$+ \int_{t_k}^t \begin{pmatrix} u^1(\tau) \\ u^2(\tau) \\ \vdots \\ u^{l-1}(\tau) \\ u^l(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^{l-1}(t) \\ w^l(t) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

т.е.

$$\begin{cases} \varsigma_k^2(t) - \varsigma_k^2(t_k) = \int_{t_k}^t (\varsigma_k^1(\tau) + u^1(\tau))d\tau + w^1, \\ \varsigma_k^3(t) - \varsigma_k^3(t_k) = \int_{t_k}^t (\varsigma_k^2(\tau) + u^2(\tau))d\tau + w^2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varsigma_k^{l+1}(t) - \varsigma_k^{l+1}(t_k) = \int_{t_k}^t (\varsigma_k^l(\tau) + u^l(\tau))d\tau. \end{cases}$$

Это означает, что можно взять в качестве ς_k^{l+1} произвольный случайный процесс, для которого можно вычислить симметрическую производную порядка l , а потом рекуррентно получить все остальные компоненты процесса ς_k . Дело обстоит таким образом потому, что в системе число неизвестных на единицу больше, чем число уравнений, т. е. система недоопределена. Аналогично случаю первой независимой системы, имеют место формулы:

$$\begin{aligned} \varsigma_k^l(t) &= D_S^w \varsigma_k^{l+1} - D_S^w w^l - u^l(t) = D_S^w \varsigma_k^{l+1} - \frac{w^l(t)}{2t} - u^l(t), \\ \varsigma_k^l(t) &= \int_{t_k}^t (\varsigma_k^{l-1}(s) + u^{l-1}(s))ds + w^{l-1}, \\ \varsigma_k^{l-1}(t) &= D_S^w \varsigma_k^l - D_S^w w^{l-1} - u^{l-1}(t) = D_S^2 \varsigma_k^{l+1} + \frac{w^l(t)}{4t^2} - \frac{w^{l-1}}{2t} - u^{l-1}. \end{aligned}$$



а также условие согласования

$$\int_{t_k}^t v^{r+1}(s)ds + w^{r+1}(t) = -v^r(t) - \frac{dv^{r-1}(t)}{dt} - \dots - \frac{d^{r-1}v^1(t)}{dt^{r-1}} - D_S w^r(t) - D_S^2 w^{r-1}(t) - \dots - D_S^r w^1(t). \quad (20)$$

Если компоненты w^i не удовлетворяют этому условию, то система не имеет решений. Здесь число уравнений на единицу больше, чем число неизвестных, т. е. данная подсистема переопределена. Как и ранее, для $2 \leq i \leq r$ имеет место рекуррентная формула

$$\theta_k^i(t) = -v^i(t) + D_S^w \theta_k^{i-1} - D_S^w w^i(t). \quad (21)$$

Следовательно, имеют место соотношения для определения компонент $\theta^i(t)$

$$\theta^1 = -v^1 - \frac{w^1}{2t}, \quad (22)$$

$$\theta^i(t) = -v^i(t) + D_S^w \theta^{i-1} - D_S^w w^i(t), \quad (23)$$

причем, прежде чем воспользоваться этой формулой, сначала проверяем условия согласования (20). Кроме всего, вычисленные компоненты $\theta^i(t)$ должны удовлетворять ограничениям (7).

Вернемся к вопросу о нулевых начальных условиях (при $k = 0$) для решений систем (10), (15) и (18). Из определения симметрических производных в среднем видно, что они корректно определены только на открытых промежутках времени, поскольку в их конструкции использованы, как приращения по времени вправо, так и влево. Принимая во внимание Лемму 1, а также формулы (11) и (12), (16), (19) и (21), нетрудно видеть, что полученные выше решения $\eta^i(t)$, $\zeta^i(t)$, и $\theta^i(t)$ описываются как суммы, в которых каждое слагаемое содержит сомножитель вида $\frac{w^j(t)}{t^k}$, $k \geq 1$. Так что решения стремятся к бесконечности при $t \rightarrow 0$, т. е. значения решений при $t = 0$ не существуют.

Один из вариантов разрешения указанной ситуации состоит в следующем. Зафиксируем сколь угодно малый момент времени $t_0 \in (0, l)$ и зададим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0, & \text{если } 0 \leq t \leq t_0; \\ t, & \text{если } t_0 \leq t. \end{cases}$$

Элементы $w^j(t)/t^k$ при вычислении $\eta^i(t)$, $\zeta^i(t)$ и $\theta^i(t)$ по формулам (13) и (14), (17), (22) и (23) заменим на $\frac{w^j(t)}{(t_0(t))^k}$. Полученные процессы в момент времени $t = 0$ будут принимать нулевые значения, однако они станут решениями (10), (15) и (18) только при $t > t_0$. Отметим, что для двух разных моментов времени $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$ при $t > \max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ значения соответствующих процессов п. н. совпадают.

Таким образом, суммируя выше сказанное, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. При условиях, указанных выше, уравнение (2) с нулевыми начальными условиями трансформируется к каноническому уравнению (4) с нулевыми начальными



условиями, формулы для вычисления решений которого имеют вид (8), (9), (13) и (14), (17), (22) и (23).

Литература

1. Vlasenko L.A., Lyshko S.L., Rutkas A.G. On a stochastic impulsive system // ISSN 1025-6415 Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2012. – №2. – P.50-55.
2. Гликлик Ю.Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / М.: Комкнига, 2005. – 416 с.
3. Гликлик Ю.Е., Машков Е.Ю. Стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. – 2013. – 6, №2. – С.25-39.
4. Машков Е. Ю. Сингулярные стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов // Научные Ведомости Белгородского государственного университета. Математика и Физика. - 2014. – №5(176), Вып.34. – С.49-60.
5. Парасарати К.Р. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / М.: Мир, 1988. - 343 с.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / М.: Физматлит, 1967. – 575 с.
7. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра / М.: Мир, 2001. – 435 с.
8. Машков Е.Ю. О стохастических уравнениях леонтьевского типа / Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика и Математика. – 2014. – №3. – С.121-128.

ON A CERTAIN APPROACH TO INVESTIGATION OF SINGULAR STOCHASTIC LEONTIEFF'S TYPE EQUATIONS WITH IMPULSIVE INFLUENCE

Yu.E. Gliklikh, E.Yu. Mashkov

Voronezh State University,
Univesitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: yeg@math.vsu.ru
Kursk State University,
Radishcheva St., 33, Kursk, 305000, Russia, e-mail: mashkovevgen@yandex.ru

Abstract. Stochastic Leontieff type equation with singular pencil of constant matrices and with impulsive influence in the right-hand side is investigated. For the study of solutions of such equations it is necessary to use high order derivatives of free terms in the right-hand side including the Wiener process. For differentiation of the Wiener process, the machinery of Nelson's mean derivatives of stochastic processes is applied. It allows us to avoid using the generalized functions theory. As a result, we obtain analytical formulae for solutions in terms of mean derivatives of stochastic processes.

Key words: mean deivative, current velocity, Wiener process, differential-algebraic equation, Leontieff's type equation.



MSC 05A18

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ДРЕВЕСНЫХ ГРАФОВ НАД КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ВЕРШИН

Ю.П. Вирченко, Л.П. Остапенко

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучается комбинаторная задача о числе N_n топологически различных древесных связных графов над произвольным конечным множеством из n занумерованных вершин. Вычисляется производящая функция F значений функции N_n , $n \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: разложения конечного множества, производящая функция, алгебра симметричных функций, древесные графы.

1. Постановка задачи. Неориентированный конечный *простой* граф (т.е. граф с одним типом вершин и ребер и не имеющий петель и кратных ребер) представляется парой $\langle V, \Phi \rangle$, в которой V – конечное множество, элементы которого называются *вершинами* и $\Phi \subset V^{(2)}$, где $V^{(2)}$ – множество всех пар элементов из V . Элементы множества Φ называются *ребрами* графа (см., например, [1]).

Множество Φ порождает бинарное отношение *смежности* на V . Оно порождает бинарное отношение *связности* на V . А именно, пара $\{x, y\} \subset V$ определяется как связная, если существует последовательность $\langle x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y \rangle$ вершин из V такая, что $\{x_j, x_{j+1}\} \in \Phi$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $x_0 = x$, $x_n = y$. Эта последовательность называется *путем* на графе $\langle V, \Phi \rangle$. Если множество всех возможных путей на этом графе дополнить тривиальными путями $\langle x, x \rangle$, $x \in V$, то таким образом определенное отношение связности становится *рефлексивным*. Тогда, очевидно, что оно является отношением *эквивалентности*. Следовательно, отношение связности, согласно основному свойству отношений эквивалентности, разбивает множество V на непересекающиеся подмножества связных между собой вершин. Каждое такое связное множество V' , вместе со всеми ребрами, которые образованы парами $\{x', y'\}$ вершин из V' такими, что $\{x', y'\} \in \Phi$ составляет отдельный граф. Он называется *связной компонентой* исходного графа.

Граф $\langle V, \Phi \rangle$ называется *связным*, если у него, при указанном разбиении, имеется только одно подмножество эквивалентности, то есть он состоит из одной связной компоненты.

Путь $\langle x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y \rangle$ на графе, в составе которого имеется не менее трех различных вершин и такой, что $x = y$ называется *циклом*. Если на графе $\langle V, \Phi \rangle$ отсутствуют циклы, то такие графы называются *древесными*.

Поставим комбинаторную задачу об определении числа N_n всех возможных различных связных древесных графов, которые можно построить на заданном множестве V , $|V| = n$ вершин. При этом графы считаются топологически различными, если имеется такая биекция множества V с самим собой, которая порождает биекцию с самим собой



множества ребер Φ . Такое определение топологической эквивалентности графов предполагает, что все вершины из V суть различные элементы и их перестановка может изменить топологический тип графа. Поставленная задача возникает при построении разложений специального вида в статистической механике решеточных систем [2]. Поясним, что понимается под числом N_n , вычислением его в простейших случаях.

Пример: Определим несколько первых значений числа N_n . Начиная с $n = 4$ перебор всех возможных связанных деревьев становится очень рутинным.

1. При $n = 1$, $V = \{1\}$ имеется только один граф $\langle \{1\}, \emptyset \rangle$, состоящий из единственной вершины 1. Он же, по определению, является связным и древесным, то есть $N_1 = 1$.

2. При $n = 2$, $V = \{1, 2\}$ имеется только один связный граф $\langle \{1, 2\}, \Phi = \{1, 2\} \emptyset \rangle$, который, из-за наличия только двух вершин, не содержит циклов. Следовательно, он является древесным, то есть $N_2 = 1$.

3. При $n = 3$, $V = \{1, 2, 3\}$ имеется три связанных графа без циклов, соответственно, со следующими множествами смежности: $\Phi = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, $\Phi = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$, $\Phi = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. Все они различны в смысле данного выше определения топологической эквивалентности. Следовательно, $N_3 = 3$.

4. При $n = 4$, $V = \{1, 2, 3, 4\}$. Имеется 16 различных древесных графов, соответствующие множества смежности которых мы распределим на две группы:

$\Phi = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}$, $\Phi = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$, $\Phi = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$, $\Phi = \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$;

$\Phi = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$, $\Phi = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$, $\Phi = \{\{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}$, $\Phi = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\}$, $\Phi = \{\{1, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}\}$, $\Phi = \{\{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}\}$;

$\Phi = \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}\}$, $\Phi = \{\{1, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3\}\}$, $\Phi = \{\{2, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}\}$, $\Phi = \{\{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3\}\}$, $\Phi = \{\{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 2\}\}$, $\Phi = \{\{3, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2\}\}$.

Следовательно, $N_4 = 16$.

В настоящей работе мы дадим решение поставленной задаче определения функции N_n в смысле вычисления ее производящей функции [3]

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} N_{n+1}, \quad (1)$$

которая предполагается определенной в достаточно малой окрестности точки 0 в комплексной плоскости z . При изложении мы используем некоторые определения и обозначения нашей предыдущей работы [4].

2. Рекуррентная формула. Пусть $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ – стандартное n -элементное множество. Разложением множества I_n называется неупорядоченный набор непустых множеств ω_j , $j = 1 \div s$, которые называются *компонентами* этого разложения и которые составляют дизъюнктивное разложение множества I_n ,

$$\bigcup_{l=1}^s \omega_l = I_n, \quad \omega_j \cap \omega_k \neq \emptyset, \quad j \neq k, \quad j, k = 1 \div s,$$



где s – мощность разложения.

Пусть \mathcal{P}_n – класс всех разложений Ω множества $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Теорема 1. *Справедлива следующая рекуррентная формула*

$$N_{n+1} = \sum_{\Omega \in \mathcal{P}_n} \prod_{\omega \in \Omega} |\omega| N_{|\omega|}. \quad (2)$$

□ Для каждого древесного графа $\mathfrak{G} = \langle V, \Phi \rangle$ над множеством вершин $V = I_{n+1}$ выполним следующее построение. Сопоставим графу \mathfrak{G} совокупность связанных графов $\mathfrak{G}_j, j = 1, \dots, s$, получающихся из \mathfrak{G} удалением из него вершины $(n+1)$ вместе со всеми ребрами, в состав которых входит эта вершина. Иными словами, строится следующий граф $\langle V \setminus \{n+1\}, \Phi \setminus \{x \in V \setminus \{n+1\} : \{n+1, x\} \in \Phi\} \rangle$. Затем в этом графе выделяются связанные компоненты. Именно эти связанные компоненты представляют совокупность графов $\mathfrak{G}_j, j = 1, \dots, s$. Каждая из этих связанных компонент является древесным графом, так как если в какой-то из них имелся цикл, то этот цикл присутствовал бы и в исходном графе. Каждая из них образована некоторым подмножеством вершин $\omega_j \subset I_n$ и множеством ребер Φ_j .

Отметим вершины $x_j \in \omega_j, j = 1 \div s$ такие, что ребро $\{x_j, n+1\}$ содержится в Φ , но которые удаляются вместе с удалением вершины $(n+1)$.

Для всей совокупности множеств $\{\omega_j; j = 1 \div s\}$ и связанных с ними ребер $\{\Phi_j; j = 1 \div s\}$ выполняется

$$\bigcup_{j=1}^s \omega_j = I_n, \quad \omega_k \cap \omega_l = \emptyset; \quad \bigcup_{j=1}^s \Phi_j = \Phi \setminus \{\{x_j, n+1\}; j = 1 \div s\}, \quad \Phi_k \cap \Phi_l = \emptyset \text{ при } k \neq l.$$

Таким образом, каждому графу \mathfrak{G} на основе описанной конструкции, сопоставляется, сначала, разложение $\Omega \in \mathcal{P}_n$, затем, на основе этого разложения, множество отмеченных вершин $\{x_j \in \omega_j : \omega_j \in \Omega, j = 1 \div s\}$ и набор древесных графов $G_j = \langle \omega_j, \Phi_j \rangle, j = 1 \div s$. Они характеризуют граф \mathfrak{G} , то есть при фиксации указанных математических объектов однозначно восстанавливается граф \mathfrak{G} . Это достигается присоединением к вершинам I_n вершины $(n+1)$ и ребер $\{x_j, n+1\}, j = 1 \div s$ к совокупности ребер $\bigcup_{j=1}^s \Phi_j$.

В связи с доказанной характеристикой каждого из деревьев на множестве вершин $V = I_{n+1}$, распределим все деревья над V по классам, занумерованным разложениями $\Omega \in \mathcal{P}_n$ так, что каждому древесному графу из фиксированного класса $\mathfrak{P}(\Omega), \Omega \in \mathcal{P}_n$ соответствует одно и то же разложение Ω . Тогда

$$N_{n+1} = \sum_{\Omega \in \mathcal{P}_n} |\mathfrak{P}(\Omega)|. \quad (3)$$

Найдем число элементов в каждом классе $\mathfrak{P}(\Omega), \Omega \in \mathcal{P}_n$. Для этого заметим, что для фиксированного $\Omega = \{\omega_j; j = 1 \div s\}$ каждая из вершин x_j и каждый древесный граф \mathfrak{G}_j над множеством вершин $\omega_j, j = 1 \div s$ могут быть выбраны независимо от



всех остальных вершин x_k из множеств ω_k и всех графов \mathfrak{G}_k над этими множествами, $k \in I_s \setminus \{j\}$. Следовательно, в силу принципа умножения (см., например, [3]), $|\mathfrak{P}(\Omega)| = \prod_{\omega \in \Omega} S(\omega)$, где $S(\omega)$ – число способов выбора отмеченной вершины x в ω и, одновременно, выбора древесного графа над множеством вершин ω . Так как каждый из этих объектов может быть выбран независимо от другого, то, в силу принципа умножения, $S(\omega)$ равно произведению числа вершин в ω на число древесных графов, которые можно построить на множестве ω , $S(\omega) = |\omega|N_{|\omega|}$. Тогда из (3) следует

$$|\mathfrak{P}(\Omega)| = \prod_{\omega \in \Omega} |\omega|N_{|\omega|}. \quad \blacksquare$$

3. Производящая функция. Вычислим теперь производящую функцию (1). Вычисление функции $F(z)$ будет выполнено на основе специальной алгебраической техники, используемой в статистической механике (см., например, [2]), возникновение которой было связано с преобразованиями статистических сумм [5]. Для этого заметим, что последовательность $\Psi = \langle nN_n; n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ можно рассматривать как элемент идеала \mathbb{A}_0 коммутативной алгебры \mathbb{A} последовательностей $\langle \varphi_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ симметричных функций φ_m , определенных и измеримых на $[0, 1]^m$ со значениями в \mathbb{R} , $\varphi_m(X_m) \equiv \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $X_m = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$. При $m = 0$ элементы этих последовательностей полагаются константами. Линейные операции в этой алгебре определяются естественным образом как линейные операции с последовательностями. Произведение $*$ в этой алгебре определяется для каждой пары последовательностей $\Upsilon = \langle v_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ и $\Psi = \langle \psi_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ на основе формулы (см. [2])

$$(\Upsilon * \Psi)_n(X(I_n)) = \sum_{\omega \subset I_n} v_{|\omega|}(X(\omega)) \psi_{|I_n \setminus \omega|}(X(I_n \setminus \omega)),$$

в которой использованы следующие обозначения: $X(\omega) = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s} \rangle$ для каждого $\omega = \{i_1, i_2, \dots, i_s\} \subset I_n$ и $|\omega| = s$ – число элементов в ω .

Единицей алгебры \mathbb{A} является последовательность $\langle 1, 0, 0, \dots \rangle$. При этом максимальный идеал \mathbb{A}_0 этой алгебры состоит из последовательностей Υ функций с $v_0 = 0$. Для элементов Υ из \mathbb{A}_0 имеет место формула (см., например, [2],[4])

$$\begin{aligned} (\exp_* \Upsilon)_n(X(I_n)) &= \left[\mathbf{1} + \Upsilon + \frac{1}{2!} \Upsilon_*^2 + \frac{1}{3!} \Upsilon_*^3 + \dots \right]_n(X(I_n)) = \\ &= \sum_{\Omega \in \mathcal{P}_n} \prod_{\omega \in \Omega} v_{|\omega|}(X(\omega)), \end{aligned} \quad (4)$$

где суммирование производится по всем разложениям множества I_n .

Рассмотрим линейную форму $L(z; \cdot)$ на алгебре \mathbb{A} , зависящую от параметра $z \in \mathbb{C}$. Для каждого элемента Υ алгебры \mathbb{A} значение $L(z; \Upsilon)$ этой формы определяется формулой

$$L(z; \Upsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{[0,1]^n} v_n(X_n) dX_n, \quad (5)$$



где $dX_n = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ – мера Лебега на $[0, 1]^n$. Значения формы заведомо конечны в том случае, когда последовательность функций Υ равномерно ограничена.

Форма L мультипликативна, то есть для каждой пары элементов $\langle \Upsilon, \Psi \rangle$ с равномерно ограниченными элементами имеет место равенство (см., например, [4])

$$L(z; \Upsilon * \Psi) = L(z; \Upsilon)L(z; \Psi). \tag{6}$$

Следствием линейности и мультипликативности формы $L(z; \cdot)$ является формула

$$L(z; \exp_* \Upsilon) = \exp(L(z; \Upsilon)), \tag{7}$$

имеющая место для любого элемента $\Upsilon \in \mathbb{A}_0$.

Теорема 2. *Производящая функция (1) является аналитической функцией, определяемой в достаточно малой окрестности нуля на вещественной оси z наименьшим решением уравнения*

$$F(z) = \exp(zF(z)). \tag{8}$$

□ Определим последовательность функций $S = \langle S(I_n); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$, которая находится в \mathbb{A}_0 . Согласно формуле (2),

$$N_{n+1} = \int_{[0,1]^n} (\exp_* S)_n(X_n) dX_n.$$

Тогда определение производящей функции (1) может быть представлено в виде

$$F(z) = L(z; \exp_* S).$$

Воспользовавшись (8), запишем это равенство в виде

$$F(z) = \exp L(z; S).$$

Наконец, преобразуем форму, стоящую в экспоненте,

$$L(z; S) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{[0,1]^n} S(X_n) dX_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} N_n = zF(z). \blacksquare$$

Замечание. Уравнение определяет аналитическую функцию в круге с радиусом e^{-1} . В самом деле, ввиду выпуклости функции e^{zF} относительно F , ее график имеет два пересечения с графиком линейной функции от F , если $z > 0$ и достаточно мало. Он имеет одно пересечение при $z < 0$. Следовательно, уравнение (8) относительно (8) имеет два решения при вещественных положительных и достаточно близких к нулю z . В этом случае мы выбираем, в качестве значения неявно заданной функции $F(z)$, наименьший корень уравнения. Именно он, по непрерывности, переходит в единственный корень



уравнения (8) при $z < 0$. Исчезновение же корней уравнения (8) при $z > 0$ происходит в той точке z_* , в которой происходит бифуркация исчезновения пересечений линейной по F функции с функцией e^{zF} . Для этого необходимо и достаточно, чтобы в этой точке, кроме равенства $F = e^{z_*F}$, имело место равенство производных по F , $z_*e^{z_*F} = 1$. Из этой системы двух уравнений находим $z_*F = 1$, то есть такое положение достигается в точке $F = e$ при $z_* = e^{-1}$. Следовательно, радиус сходимости степенного по z ряда для функции $F(z)$ равен e^{-1} .

Пример: С целью проверки правильности полученного уравнения для производящей функции, вычислим значения N_n при $n = 1, 2, 3, 4$, исходя из уравнения для производящей функции $F(z)$.

Положим $F(z) = \exp R(z)$, $R(z) = zF(z)$. Тогда при $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$R^{(n)} = zF^{(n)} + nF^{(n-1)}. \quad (9)$$

Определим функции $G_n(z)$ равенством $F^{(n)}(z) = e^{R(z)}G_n(z)$. Из этого определения следует рекуррентное соотношение

$$G_{n+1}(z) = G_n(z)R'(z) + G'_n(z), \quad (10)$$

справедливое при $n \in \mathbb{N}$, при котором $G_1(z) = zF'(z) + F(z)$. Равенство (9) при $n = 2, 3, \dots$ запишем в виде

$$R^{(n)}(z) = zG_n(z) + nG_{n-1}(z). \quad (11)$$

Вычислим теперь N_n при $n = 1, 2, 3, 4$, исходя из неявно заданной уравнением (8) производящей функции, $N_n = F^{(n-1)}(0)$. Из (9) следует, что $R'(0) = 1$, а из (11) – $R^{(n)}(0) = G_{n-1}(0)$. Тогда $N_1 = F(0) = 1$, $N_2 = F'(0) = R'(0) = 1$.

Для вычисления значений N_3, N_4 нужно вычислить $G_2(0), G_3(0)$ на основе рекуррентности (10). Для этого нужно вычислить значения производных $G'_1(0), G'_2(0)$. Они получаются из рекуррентного соотношения

$$G'_{n+1}(z) = G''_n(z) + G'_n(z)R'(z) + G_n(z)R''(z), \quad n \in \mathbb{N} \quad (12)$$

и отдельно

$$G'_1(z) = zF''(z) + 2F'(z).$$

Отсюда следует при $n = 1$, что $G'_2(0) = G''_1(0) + G'_1(0)R'(0) + G_1(0)R''(0)$. Так как $G'_1(0) = 2F'(0) = 2$ и из (11) следует $R''(0) = 2G_1(0) = 2F(0) = 2$, то $G'_2(0) = G_1(0) + G'_1(0) = 3$ и, следовательно, $N_3 = 3$.

Далее, из вычисленных значений также следует, что $G'_2(0) = G''_1(0) + 4$, и, так как $G''_1(z) = zF'''(z) + 3F''(z)$, то $G''_1(0) = 3F''(0) = 3G_2(0) = 9$. Поэтому $G'_2(0) = 13$ и, следовательно, из (11) следует $N_4 = G_3(0) = G_2(0) + G'_2(0) = 16$. Полученные значения совпадают со значениями, вычисленными во вводной части статьи посредством непосредственного перебора возможных древесных графов.

Литература

1. Оре О. Теория графов / М.: Наука, 1980. – 336 с.



2. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты / М.: Мир, 1971. – 368 с.
3. Холл М. Комбинаторный анализ / М.: Иностранлит., 1963. – 98 с.
4. Вирченко Ю.П., Остапенко Л.П. Определение числа разложений конечного множества // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – №5(202); 38 – С.84-88.
5. Майер Дж., Гешперт-Майер М. Статистическая механика / М.: Мир, 1980. – 546 с.

**EVALUATION OF TOPOLOGICAL TYPES NUMBER
OF TREE GRAPHS WITH FINITE VERTEX SET**

Yu.P. Virchenko, L.P. Ostapenko

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. Combinatorial problem about the number N_n of topologically different tree connected graphs with arbitrary finite set of n numbered vertexes is studied. It is calculated the generation function F of values N_n , $n \in \mathbb{N}$.

Key words: partition of finite set, generation function, algebra of symmetric functions, tree graphs.



MSC 35M10

ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К.Б. Сабитов

Институт прикладных исследований Республики Башкортостан,
ул. Одесская, 68, г. Стерлитамак, 453103, Россия, e-mail: sabitov_fmfm@mail.ru

Аннотация. Для одного класса уравнений смешанного типа в прямоугольной области изучена начально-граничная задача с краевыми условиями третьего рода. Установлен критерий единственности. Решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. При обосновании сходимости возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость ряда. При условии, когда отношение сторон прямоугольника, являющегося областью гиперболичности, является рациональным числом, показана сходимость ряда в классе регулярных решений. После чего приведены постановки обратных задач для данного уравнения смешанного типа с неизвестными коэффициентами при неизвестной функции и граничных условиях. Опираясь на теорию обратных задач Штурма-Лиувилля доказаны теоремы единственности поставленных обратных задач и для некоторых из них приведены необходимые и достаточные условия их разрешимости.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, прямая и обратные задачи, единственность, существование.

§1. Прямая начально-граничная задача

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + q(x)u = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, t) | 0 < x < \pi, -\alpha < t < \beta\}$, где α и β – заданные положительные числа. Потенциал (или коэффициент теплообмена) $q(x)$ – определенная на $[0, \pi]$ достаточно гладкая функция, причем $q(x) \geq 0$.

В начале рассмотрим случай, когда потенциал (или коэффициент теплообмена) $q(x)$ известен, т.е. изучим следующую прямую начально-граничную задачу.

Начально-граничная задача. Найти в области D функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, t) \in C^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \quad (2)$$

$$Lu(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D_+ \cup D_-; \quad (3)$$

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) + Hu(\pi, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, -\alpha) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (5)$$



где h и H – заданные положительные постоянные, $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям согласования с граничными условиями (4):

$$\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(\pi) + H\varphi(\pi) = 0. \quad (6)$$

Отметим, что предложенная начально-граничная задача (2)-(5) впервые изучена в нашей работе [1] при $q(x) = b^2 = \text{const}$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $-\alpha \leq t \leq \beta$, где установлен критерий единственности и решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье.

На необходимость изучения задач с условиями сопряжения для волнового уравнения в одной части области и уравнения диффузии в остальной части области было указано Гельфандом И.М. [2]. Стручина Г.М. [3], Уфлянд Я.С. [4], Золина Л.А. [5] показали важные приложения этих задач в различных областях. Затем краевые задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа изучались многими авторами [6, 7] (см. приведенную там библиографию). В последние годы значительные результаты получены в работах Капустина Н.Ю. [8]. В этих работах краевые задачи изучались в смешанной области, у которой гиперболическая часть представляет характеристический треугольник. Теоремы единственности доказывались на основании принципа максимума или метода интегральных тождеств, а существование – методом интегральных уравнений или априорных оценок.

В этом параграфе единственность решения задачи (2)-(5) доказана на основании свойства полноты соответствующей одномерной задачи на собственные значения. Ранее такой подход применялся в работах Смолицкого Х.Л. [9], Ильина В.А. [10, 11] при доказательстве единственности решения начально-граничных (смешанных) задач для уравнений гиперболического и параболического типов. Существование решения задачи (2)-(5) построено в виде суммы ряда по системе собственных функций. При обосновании сходимости возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость ряда. При условии, когда число α/π является рациональным, получена оценка об отдаленности от нуля малого знаменателя. Эта оценка при определенных условиях на функции $q(x)$ и $\varphi(x)$ позволяет доказать сходимость построенного ряда в пространстве функций (2).

1.2. Единственность решения задачи. В уравнении (1), разделяя переменные $u(x, t) = X(x)T(t)$, относительно $X(x)$ получим спектральную задачу:

$$X''(x) + (\lambda - q(x))X(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad (7)$$

$$X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(\pi) + HX(\pi) = 0. \quad (8)$$

Как известно [12, §2], что при $q(x) \in C^1[0, \pi]$ задача (7) и (8) имеет счетное множество положительных собственных значений λ_n , $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, все они являются простыми, а соответствующая система собственных функций $\{X_n(x)\} = \{X(x, \lambda_n)\}_{n=0}^{+\infty}$ ортогональна и полна в пространстве $L_2[0, \pi]$, и поэтому в нем образует ортогональный базис. При этом справедливы следующие асимптотические формулы при больших n :

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (9)$$



$$X_n(x) = \cos nx + \frac{\xi_n(x)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (10)$$

$$\alpha_n = \int_0^\pi X_n^2(x) dx = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$\omega = h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x) dx, \quad \xi_n(x) = \sin nx \left(-\frac{\omega x}{\pi} + h + \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) d\tau \right),$$

числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ называются спектральными данными задачи (7) и (8).

Справедлива также теорема В.А. Стеклова о разложении [13, с. 173]: если функция $f(x) \in C^1[0, \pi]$ и удовлетворяет граничным условиям (6), то справедливо разложение в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n X_n(x), \quad f_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^\pi f(x) X_n(x) dx,$$

причем данный ряд сходится абсолютно и равномерно на $[0, \pi]$, и справедливо равенство замкнутости системы $X_n(x)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n f_n^2 = \int_0^\pi f^2(x) dx.$$

Пусть существует решение $u(x, t)$ задачи (2)–(5). Рассмотрим функции

$$u_n(t) = \int_0^\pi X_n(x) u(x, t) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (11)$$

Дифференцирую равенство (11) по t при $t > 0$ один раз, при $t < 0$ два раза, затем учитывая уравнение (1) и интегрирую по частям два раза интеграла, содержащего производную u_{xx} , с учетом граничных условий (4) и (8), получим

$$u'_n(t) + \lambda_n u_n(t) = 0, \quad t > 0, \quad (12)$$

$$u''_n(t) + \lambda_n u_n(t) = 0, \quad t < 0. \quad (13)$$

Дифференциальные уравнения (12) и (13) имеют соответственно общие решения

$$u_n(t) = \begin{cases} c_n e^{-\lambda_n t}, & t > 0, \\ a_n \cos \rho_n t + b_n \sin \rho_n t, & t < 0, \end{cases} \quad (14)$$

где a_n, b_n и c_n – произвольные постоянные. В силу (2) для функций (14) справедливы условия сопряжения

$$u_n(0+0) = u_n(0-0), \quad u'_n(0+0) = u'_n(0-0). \quad (15)$$



Удовлетворяя функции (14) условиям (15), получим $a_n = c_n, b_n = -c_n \rho_n$. Тогда функции (14) примут вид

$$u_n(t) = \begin{cases} c_n e^{-\rho_n^2 t}, & t > 0, \\ c_n (\cos \rho_n t - \rho_n \sin \rho_n t), & t < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Теперь для нахождения постоянных c_n воспользуемся граничным условием (5) и формулой (11):

$$u_n(-\alpha) = \int_0^\pi \varphi(x) X_n(x) dx = \varphi_n. \quad (17)$$

Тогда удовлетворяя (16) к граничному условию (17), найдем

$$c_n = \frac{\varphi_n}{\delta_\alpha(n)}, \quad (18)$$

при условии, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$

$$\delta_\alpha(n) = \cos \rho_n \alpha + \rho_n \sin \rho_n \alpha \neq 0. \quad (19)$$

Подставляя (18) в (16) найдем окончательный вид функций

$$u_n(t) = \begin{cases} \varphi_n \delta_\alpha^{-1}(n) e^{-\rho_n^2 t}, & t > 0, \\ \varphi_n \delta_\alpha^{-1}(n) [\cos \rho_n t - \rho_n \sin \rho_n t], & t < 0. \end{cases} \quad (20)$$

Докажем теорему единственности решения задачи (2)–(5). Пусть $\varphi(x) \equiv 0$ и выполнены условия (19) при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $\varphi_n \equiv 0$ и из формул (20) и (11) следует, что

$$\int_0^\pi u(x, t) X_n(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда в силу полноты системы $\{X_n(x)\}$ в пространстве $L_2[0, \pi]$ следует, что $u(x, t) = 0$ почти всюду на $[0, \pi]$ при любом $t \in [\alpha, \beta]$. Поскольку $u(x, t)$ непрерывна на \overline{D} , то $u(x, t) \equiv 0$ в \overline{D} .

Пусть при некоторых α и $n = p \in \mathbb{N}_0$ нарушено условие (19), т.е. $\delta_\alpha(p) = 0$. Тогда однородная задача (2)–(5) (где $\varphi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x, t) = \begin{cases} e^{-\rho_p^2 t} X_p(x), & t > 0, \\ (\cos \rho_p t - \mu_p \sin \rho_p t) X_p(x), & t < 0. \end{cases} \quad (21)$$

Возникает вопрос о существовании нулей уравнения $\delta_\alpha(p) = 0$. Для этого его представим в виде

$$\delta_\alpha(p) = \sqrt{1 + \rho_p^2} \sin(\rho_p \alpha + \gamma_p) = 0, \quad (22)$$



где $\gamma_p = \arcsin 1/\sqrt{1+\rho_p^2}$. Отсюда видно, что уравнение (22) имеет счетное множество нулей относительно α :

$$\alpha = \frac{\pi k}{\rho_p} - \frac{\gamma_p}{\rho_p}, \quad p \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

Таким образом, нами установлен критерий единственности.

Теорема 1. *Если существует решение задачи (2)-(5), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия (19) при всех $n \in \mathbb{N}_0$.*

1.3. Существование решения задачи. Поскольку α – любое положительное число, то выражение $\delta_\alpha(n)$ при больших n может стать достаточно малым, т.е. возникает проблема "малых знаменателей"[1]. Поэтому для обоснования существования решения задачи (2)-(5) надо показать существование чисел α , при которых выражение $\delta_\alpha(n)$ при больших n отделено от нуля.

Лемма 1. *Если $\tilde{\alpha} = \alpha/\pi$ является рациональным числом, то существуют положительные постоянные C_0 и n_0 ($n_0 \in \mathbb{N}_0$), такие, что при $n > n_0$ справедлива оценка*

$$|\delta_\alpha(n)| \geq C_0 > 0. \quad (24)$$

□ На основании представлений (9) и (22) при больших n имеем

$$|\delta_\alpha(n)| \geq n |\sin(\tilde{\alpha}\pi\mu_n + \gamma_n)| = n \left| \sin\left(\pi n \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\alpha}\omega}{n} + \gamma_n\right) \right|. \quad (25)$$

Пусть $\tilde{\alpha} = p \in \mathbb{N}$. Тогда выражение (25) примет вид

$$|\delta_\alpha(n)| \geq n \left| \sin\left(\frac{p\omega}{n} + \gamma_n\right) \right|.$$

Отсюда на основании неравенства $\sin x > 2x/\pi$, $0 < x < \pi/2$, при больших n , получим

$$|\delta_\alpha(n)| > \frac{2n}{\pi} \left(\frac{p\omega}{n} + \gamma_n\right) > \frac{2p(h+H)}{\pi},$$

так как $n\gamma_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow +\infty$.

Пусть $\tilde{\alpha} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $\frac{p}{q} \notin \mathbb{N}$. Разделим np на q с остатком: $np = sq + r$, где $s, r \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq r < q$. Если $r = 0$, то этот случай сводится к предыдущему, когда $\tilde{\alpha}$ – натуральное число. Пусть $r > 0$. Тогда $1 \leq n \leq q - 1$, $q \geq 2$, и из (25) будем иметь

$$|\delta_\alpha(n)| \geq n \left| \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \frac{p\omega}{n} + \gamma_n\right) \right|. \quad (26)$$

Поскольку последовательность γ_n – бесконечно малая, то существует конечный предел

$$\lim_n \left| \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \frac{p\omega}{qn} + \gamma_n\right) \right| = \left| \sin \frac{\pi r}{q} \right| = \sin \frac{\pi r}{q} \geq \sin \frac{\pi}{q} > 0. \quad (27)$$



Тогда из соотношений (26) и (27) следует, что

$$|\delta_\alpha(n)| > n \sin \frac{\pi}{q} \geq \sin \frac{\pi}{q} > 0.$$

Тем самым справедливость оценки (24) установлена. ■

Отметим, что если $\tilde{\alpha}$ является иррациональным числом, то на основании множества (23) можно подобрать такие числа, которые являются нулями $\delta_\alpha(n) = 0$.

Если теперь для чисел $\tilde{\alpha}$ из Леммы 1 выполнены условия (19) при $n \in [0, n_0]$ и оценка (24) при $n > n_0$, то решение задачи (2)-(5) можно определить как сумму ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{28}$$

где $u_n(t)$ определяются по формулам (20), а $X_n(x)$ – система собственных функций задачи (7), (8).

Лемма 2. Пусть выполнена оценка (24) при $n > n_0$. Тогда для таких n справедливы оценки

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq C_1 n |\varphi_n|, \quad |u'_n(t)| \leq C_2 n^2 |\varphi_n|, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \\ |u''_n(t)| &\leq C_3 n^3 |\varphi_n|, \quad -\alpha \leq t \leq 0, \end{aligned}$$

где C_i – здесь и далее положительные постоянные, независимые от $x, t, \varphi(x)$ и n .

Доказательство этих оценок, в силу Леммы 1, непосредственно следует из формулы (20).

Ряд (28) и его производные первого порядка в замкнутой области \bar{D} мажорируются числовым рядом

$$C_4 \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 |\varphi_n|. \tag{30}$$

В силу теоремы Стеклова ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n X_n(x). \tag{30}$$

сходится абсолютно и равномерно на $[0, \pi]$, когда $\varphi(x) \in C^3[0, \pi]$, $q(x) \in C^1[0, \pi]$ и

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0, \quad \varphi'''(0) - h\varphi''(0) = 0, \quad \varphi'''(\pi) + H\varphi''(\pi) = 0. \tag{31}$$

Действительно, в силу условий (6)-(8) имеем

$$\begin{aligned} \lambda_n \varphi_n &= \int_0^\pi \varphi(x) \lambda_n X_n(x) dx = \int_0^\pi \varphi(x) [q(x) X_n(x) - X_n''(x)] dx = \\ &= \int_0^\pi \varphi(x) q(x) X_n(x) dx - \int_0^\pi \varphi(x) X_n''(x) dx = \end{aligned}$$



$$= \int_0^{\pi} [\varphi(x)q(x) - \varphi''(x)]X_n(x) dx = \int_0^{\pi} \psi(x)X_n(x) dx = \psi_n.$$

Поскольку функция $\psi(x) \in C^1[0, \pi]$ и в силу (31) удовлетворяет условиям (6), то на основании теоремы Стеклова ряд (30) сходится абсолютно и равномерно на $[0, \pi]$. Отсюда следует сходимость ряда (29), так как из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \psi_n^2$ (см. [13, с. 184]) получим, что

$$|\psi_n| = \frac{|\varepsilon_n|}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n^2 < +\infty. \quad (32)$$

Тогда из (31) и (32) найдем оценку:

$$n^2 |\varphi_n| \leq \lambda_n |\varphi_n| = |\psi_n| = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\lambda_n}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_n} + \varepsilon_n^2 \right),$$

из которой вытекает уже сходимость ряда (29).

Ряды из производных второго порядка по x и t соответственно в замкнутых областях \overline{D}_+ и \overline{D}_- мажорируются рядом

$$C_5 \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} n^3 |\varphi_n|. \quad (33)$$

Для обоснования сходимости ряда (33) рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \lambda_n \varphi_n^{(2)} &= \int_0^{\pi} \varphi''(x) \lambda_n X_n(x) dx = \int_0^{\pi} \varphi''(x) [q(x)X_n(x) - X_n''(x)] dx = \\ &= \int_0^{\pi} \varphi''(x) q(x) X_n(x) dx - \int_0^{\pi} \varphi''(x) X_n''(x) dx. \end{aligned} \quad (34)$$

Последний интеграл интегрируя два раза по частям, с учетом условий (8) и (31), будем иметь

$$\int_0^{\pi} \varphi''(x) X_n''(x) dx = \int_0^{\pi} \varphi^{IV}(x) X_n(x) dx. \quad (35)$$

Тогда из равенств (34) и (35), получим

$$\lambda_n \varphi_n^{(2)} = \int_0^{\pi} [q(x)\varphi''(x) - \varphi^{IV}(x)] X_n(x) dx = \int_0^{\pi} g(x) X_n(x) dx.$$



Если функция $g(x) = q(x)\varphi''(x) - \varphi^{IV}(x) \in C^1[0, \pi]$ и удовлетворяет условиям (6), т.е. когда $\varphi(x) \in C^5[0, \pi]$ и $\varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$, $\varphi^{(5)}(0) - h\varphi^{(4)}(0) = 0$, $\varphi^{(5)}(\pi) + H\varphi^{(4)}(\pi) = 0$, то по теореме Стеклова ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n^{(2)} X_n(x) \tag{36}$$

сходится абсолютно и равномерно на $[0, \pi]$. Из равенства (31) следует, что

$$\lambda_n \varphi_n = f_n - \varphi_n^{(2)}, \tag{37}$$

где $f_n = \int_0^\pi q(x)\varphi(x)X_n(x)dx$, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n X_n(x)$ – сходится абсолютно и равномерно на $[0, \pi]$ к функции $f(x) = q(x)\varphi(x)$, так как $f(x) \in C^1[0, \pi]$ и $f(0) = f(\pi) = 0$.

Подставляя (37) в ряд (36), будем иметь

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_n f_n - \lambda_n^2 \varphi_n) X_n(x). \tag{38}$$

Если функция $f(x) \in C^3[0, \pi]$ и удовлетворяет условиям (6), т.е. когда $q(x) \in C^3[0, \pi]$, $q'(0) = q'(\pi) = 0$ и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (6), то аналогично обоснованию сходимости ряда (30) получим, что ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f_n X_n(x) \tag{39}$$

сходится абсолютно и равномерно на $[0, \pi]$. Тогда из рядов (38) и (39) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2 \varphi_n X_n(x),$$

из которого вытекает сходимость ряда (33).

Если для чисел $\tilde{\alpha}$, указанных в лемме 1, при некоторых $n = n_1, n_2, \dots, n_m$, где $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_m \leq n_0$, $n_i, i = \overline{1, m}$, и m – заданные неотрицательные целые числа, выполняется равенство $\Delta_\alpha(n) = 0$, то для разрешимости задачи (2) – (5) необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi_n = \int_0^\pi \varphi(x) X_n(x) dx = 0, \quad n = n_1, n_2, \dots, n_m. \tag{40}$$

В этом случае решение задачи (2) – (5) определяется в виде суммы ряда

$$u(x, t) = \left(\sum_{n=0}^{n_1-1} + \dots + \sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m-1} + \sum_{n=n_m+1}^{+\infty} \right) u_n(t) X_n(x) + \sum_p A_p u_p(x, t), \tag{41}$$



где в последней сумме p принимает значения n_1, n_2, \dots, n_m , A_p – произвольные постоянные, функции $u_p(x, t)$ определяются по формуле (21), если в конечных суммах в правой части (41) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $q(x) \in C^3[0, \pi]$, $\varphi(x) \in C^5[0, \pi]$, $\varphi^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(\pi) = 0$, $j = 1, 2, 3$; $\varphi^{(5)}(0) - h\varphi^{(4)}(0) = 0$, $\varphi^{(5)}(\pi) + H\varphi^{(4)}(\pi) = 0$ и выполнена оценка (24) при $n > n_0$. Тогда если $\delta_\alpha(n) \neq 0$ при всех $n = 0, n_0$, то существует единственное решение задачи (2)-(5), и оно определяется рядом (28); если $\delta_\alpha(n) = 0$ при некоторых $n = n_1, n_2, \dots, n_m \leq n_0$, то задача (2)-(5) разрешима только тогда, когда выполнены условия (40) и решение определяется рядом (41).

§2. Обратные задачи

Отметим, что различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных, т.е. для параболических, гиперболических и эллиптических уравнений, изучены достаточно полно; усилиями многих математиков создана теория обратных задач (см. монографии [14-20] и приведенную там обширную библиографию). А также отметим работы [21, 22], посвященные вопросам разрешимости коэффициентных обратных задач для уравнений параболического типа.

Пусть теперь в постановке задачи (2)-(5) неизвестны функции $u(x, t)$, $q(x)$ и постоянные h и H . В связи с этим надо ввести дополнительные условия. Эти условия могут быть заданы по разному. На основании теории обратной задачи Штурма-Лиувилля [23, 12, 24] будем предполагать выполнение одного из следующих условий (A_i) , $i = \overline{1, 4}$:

- известны спектральные данные $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ задачи (7), (8) с неизвестным потенциалом из класса $C^3[0, \pi]$ и неизвестными коэффициентами h и H (условие (A_1));
- известны собственные значения λ_n и μ_n соответственно спектральных задач (7), (8) и (7),

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(\pi) - H X(\pi) = 0, \quad (42)$$

здесь h_1 и H – действительные числа, $h_1 \neq h$ (условие (A_2));

- известна дополнительная информация о решении задачи (2)-(5) на стороне $x = \pi$:

$$u(\pi, t) = \psi(t), \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (A_3)$$

или на стороне $x = 0$:

$$u(0, t) = \psi_0(t), \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (A_4)$$

где $\psi(t)$ и $\psi_0(t)$ – заданные достаточно гладкие функции.

На основании условий (A_1) – (A_4) можно поставить следующие обратные задачи для уравнения (1) в области D .

Первая обратная задача. Найти функцию $u(x, t)$ и коэффициенты $q(x)$, h и H , удовлетворяющие условиям (2)-(5) и (A_1) .

Вторая обратная задача. Найти функцию $u(x, t)$ и коэффициенты $q(x)$, h и H , удовлетворяющие условиям (2)-(5) и (A_2) .



Третья обратная задача. Найти функции $u(x, t)$, $q(x)$ и число h , удовлетворяющие условиям (2), (3), (5), (A_3) и

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = \mu(t), \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (43)$$

где $\mu(t)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Четвертая обратная задача. Найти функции $u(x, t)$ и $q(x)$, удовлетворяющие условиям (2), (3), (5), (43) и (A_4) , здесь h – известная постоянная.

Отметим, что постановка задач 3 и 4 исходит из работы [18, с. 159-163], где для уравнения теплопроводности рассмотрены аналоги этих задач при $h = H = 0$ и доказаны соответствующие теоремы единственности.

Приведем для удобства дальнейшего изложения точные формулировки теорем единственности решения обратной задачи Штурма-Лиувилля [23, 12, 25].

Теорема 3. Пусть $q(x)$ и $\tilde{q}(x)$ непрерывные на $[0, \pi]$ функции, а наборы чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ и $\{\tilde{\lambda}_n, \tilde{\alpha}_n\}_{n \geq 0}$ – спектральные данные задачи (7), (8) с соответствующими коэффициентами $q(x)$, h , H и $\tilde{q}(x)$, \tilde{h} , \tilde{H} . Тогда если $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ и $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ при всех $n \geq 0$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $[0, \pi]$, $h = \tilde{h}$ и $H = \tilde{H}$.

Отметим, что в случае симметричности функции $q(x)$ относительно точки $x = \pi/2$, т.е. когда $q(\pi - x) = q(x)$, и $H = h$ для определения потенциала $q(x)$ и коэффициента h достаточно задать только спектр $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$.

Теорема 4. Если $q(x) = q(\pi - x)$, $\tilde{q}(x) = \tilde{q}(\pi - x)$, $H = h$, $\tilde{H} = \tilde{h}$ и $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $n \geq 0$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $[0, \pi]$ и $h = \tilde{h}$.

Теорема 5. Пусть $q(x)$ и $\tilde{q}(x)$ – непрерывные на $[0, \pi]$ функции, а $\{\lambda_n\}$ и $\{\tilde{\lambda}_n\}$ – собственные значения задачи (7) и (8) с соответствующими коэффициентами $q(x)$, h , H и $\tilde{q}(x)$, \tilde{h} , \tilde{H} ; $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ и $\{\tilde{\mu}_n\}_{n \geq 0}$ – собственные значения задачи (7), (42) с соответствующими коэффициентами $q(x)$, h_1 , H и $\tilde{q}(x)$, \tilde{h}_1 , \tilde{H} . Тогда если $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ и $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ при всех $n \geq 0$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $[0, \pi]$, $h = \tilde{h}$, $H = \tilde{H}$.

Теорема 6. Пусть $u(x, t)$, $q(x)$, h , H и $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{q}(x)$, \tilde{h} , \tilde{H} – решения первой обратной задачи и выполнены условия (19) при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $[0, \pi]$, $h = \tilde{h}$, $H = \tilde{H}$ и $u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$ на \overline{D} .

□ В силу теоремы 3 по спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ однозначно определяются коэффициенты задачи (7) и (8), т.е. $q(x) \equiv \tilde{q}(x)$, $h = \tilde{h}$ и $H = \tilde{H}$. Тогда из теоремы 1 при условии (19) следует, что $u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$ в \overline{D} . ■

Теорема 7. Пусть $u(x, t)$, $q(x)$, h , H и $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{q}(x)$, \tilde{h} , \tilde{H} – решения второй обратной задачи и выполнены условия (19) при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $[0, \pi]$, $h = \tilde{h}$, $H = \tilde{H}$ и $u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$ в \overline{D} .

□ Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 6 с применением теорем 5 и 1. ■

Теорема 8. Пусть $u_1(x, t)$, $q_1(x)$, h_1 и $u_2(x, t)$, $q_2(x)$, h_2 – решения третьей обратной задачи и выполнены условия (19) при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $q_1(x) = q_2(x)$ на $[0, \pi]$ и $h_1 = h_2$, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в \overline{D} .



□ Пусть $u(x, t)$, $q(x)$ и h – решение третьей обратной задачи. Следуя [18, с. 160] введем функцию

$$v_n(x, p) = \int_{-\alpha}^{\beta} e^{-pt} \xi_n(t) u(x, t) dt, \quad (44)$$

где p – комплексный параметр, $\xi_n(t) \in C^\infty(-\alpha, \beta)$, $0 \leq \xi_n(t) \leq 1$, $\xi_n(t) = 0$ при $t \in [-\alpha, 1/(2n)] \cup [\beta - 1/2, \beta]$ и $\xi_n(t) = 1$ при $t \in [1/n, \beta - 1/n]$. В силу определения функции $\xi_n(t)$ интеграл (44) примет вид

$$v_n(x, p) = \int_0^{\beta} e^{-pt} \xi_n(t) u(x, t) dt,$$

который является решением уравнения

$$v_n''(x, p) = (q(x) + p) v_n(x, p) - \int_0^{\beta} e^{-\beta t} u(x, t) \xi_n'(t) dt.$$

Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получим

$$v''(x, p) - (q(x) + p)v(x, p) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad (45)$$

$$v'(0, p) - hv(0, p) = 0, \quad (46)$$

$$v'(\pi, p) = \int_0^{\beta} e^{-pt} \mu(t) dt = \nu(p). \quad (47)$$

Рассмотрим функцию $w(x, p)$, которая является решением задачи Коши для уравнения (45) с начальными условиями

$$w(0, p) = 1, \quad w'(0, p) = h. \quad (48)$$

Функции $v(x, p)$ и $w(x, p)$ являются решениями уравнения (45) и определитель Вронского в точке $x = 0$:

$$W[w, v] = \begin{vmatrix} w & v \\ w' & v' \end{vmatrix} = w(0, p)v'(0, p) - v(0, p)w'(0, p) = v'(0, p) - hv(0, p) = 0$$

в силу граничного условия (46). Тогда они линейно зависимы на $[0, \pi]$, поэтому $v(x, p) = c(p)w(x, p)$. Используя граничное условие (47), найдем

$$c(p) = \frac{\nu(p)}{w'(\pi, p)}$$

и

$$v(x, p) = \frac{\nu(p)w(x, p)}{w'(\pi, p)}. \quad (49)$$



Пусть $q_i(x)$, $u_i(x, t)$ и h_i , $i = 1, 2$, – решения обратной задачи (2), (3), (5), (43), (A₃); $v_i(x, p) = \int_0^\beta e^{-pt} u_i(x, t) dt$, $w_i(x, t)$ – решения задачи Коши для уравнения (45) с $q(x) = q_i(x)$ и начальными условиями (48) с $h = h_i$. Из дополнительного условия (A₃) следует, что $v_1(\pi, p) = v_2(\pi, p)$. Тогда в силу формулы (49) имеем

$$\frac{w_1(\pi, p)}{w_1'(\pi, p)} = \frac{w_2(\pi, p)}{w_2'(\pi, p)}. \quad (50)$$

Поскольку функции $w_i(x, p)$ являются решениями уравнения (45) с $q(x) = q_i(x)$ и начальными условиями (48) с $h = h_i$, то $w_i(x, p)$ и $w_i'(x, p)$ при фиксированном x как функции комплексной переменной p являются аналитическими во всей комплексной плоскости. Тогда отношения

$$\frac{w_i(x, p)}{w_i'(x, p)}$$

также являются аналитическими на комплексной плоскости, за исключением нулей $w_i'(x, p)$, являющихся особыми точками. Из равенства (50) следует, что нули и особые точки функций

$$\frac{w_1(\pi, p)}{w_1'(\pi, p)} \quad \text{и} \quad \frac{w_2(\pi, p)}{w_2'(\pi, p)}$$

совпадают. Покажем, что нули функций $w_1(\pi, p)$ и $w_1'(\pi, p)$ не совпадают. Допустим, что при $p = p_0$

$$w_1(\pi, p_0) = w_1'(\pi, p_0) = 0. \quad (51)$$

По построению функция $w_1(x, p_0)$ является решением уравнения (45) с $q(x) = q_1(x)$ и удовлетворяет нулевым начальным условиям (51). Тогда $w_1(x, p_0) = 0$ на $[0, \pi]$, что противоречит тому, что $w_1(0, p_0) = 1$. Таким образом, нули функций $w_1(\pi, p)$ и $w_1'(\pi, p)$ не совпадают. Аналогично не совпадают нули функций $w_2(\pi, p)$ и $w_2'(\pi, p)$. Тогда из (50) следует, что все нули функций $w_1(\pi, p)$ и $w_2(\pi, p)$ совпадают, также совпадают все нули функций $w_1'(\pi, p)$ и $w_2'(\pi, p)$.

Пусть $p = p_0^i$ является нулем функции $w_i(\pi, p)$, $i = 1, 2$. Покажем, что $\lambda_0^i = -p_0^i$ являются собственным значением задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q_i(x)y = \lambda_i y, \quad (52)$$

$$y'(0) - h_i y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (53)$$

В самом деле, поскольку функция $w_i(x, p)$ является решением уравнения (45) с $q(x) = q_i(x)$ и $p = p_0^i$, то функция $y_i(x) = w_i(x, p_0^i)$ является решением уравнения (52) с $\lambda = \lambda_0^i = -p_0^i$. Первое граничное условие из (53) следует из (48), а второе из того, что p_0^i нуль функции $w_i(\pi, p)$. Это решение ненулевое, так как в силу (48) $y_i(0) = w_i(0, p_0^i) = 1$. Следовательно, λ_0^i являются собственным значением задачи (52), (53), т.е. любой нуль функции $w_i(\pi, p)$, взятый со знаком минус, является собственным значением этой задачи. Справедливо и обратное утверждение. Если λ_0^i являются собственным значением, а $y_i(x)$ – соответствующей собственной функцией задачи (52), (53), то $p_0^i = -\lambda_0^i$ является



нулем функции $w_i(\pi, p)$. Таким образом, существует биекция между нулями функции $w_i(\pi, p)$ собственными значениями задачи (52), (53) с $q(x) = q_i(x)$ и $h = h_i$. Аналогично, можно показать, что существует биекция между нулями функции $w'_i(\pi, p)$ и собственными значениями спектральной задачи для уравнения (52) с граничными условиями

$$y'(0) - h_i y(0) = 0, y'(\pi) = 0. \quad (54)$$

Пусть λ_n^i , $n = 0, 1, 2, \dots$, собственные значения задачи (52), (53), а μ_n^i – собственные значения задачи (52), (54). Из совпадения нулей функций $w_1(\pi, p)$ и $w_2(\pi, p)$ следует равенство $\lambda_n^1 = \lambda_n^2$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$, а из совпадения нулей функций $w'_1(\pi, p)$ и $w'_2(\pi, p)$ следует, что $\mu_n^1 = \mu_n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Следовательно, спектральные задачи (52), (53) и (52), (54) с $q_1(x)$, h_1 и $q_2(x)$, h_2 имеют одинаковые собственные значения. Тогда в силу теоремы 5 получим, что $q_1(x) \equiv q_2(x)$ при $x \in [0, \pi]$ и $h_1 = h_2$. При $q_1(x) = q_2(x) = q(x)$, $h_1 = h_2 = h$ и функции $u_i(x, t)$, $i = 1, 2$, являются решениями задачи (2), (3), (5) и (43). Их разность $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ является решением однородной задачи (2), (3), (5), (42) с $\mu(t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$. Теперь, применяя теорему 1 при условии (19), получим, что $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в \overline{D} . ■

Теорема 9. Пусть $u_i(x, t)$ и $q_i(x)$, $i = 1, 2$, решения четвертой обратной задачи с $q_1(x) = q_2(\pi - x)$ и $h = H = 0$, и выполнены условия (19) при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $q_1(x) = q_2(x)$ на $[0, \pi]$ и $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в \overline{D} .

□ Доказательство аналогично обоснованию теоремы 8. Аналогично вводится функция (44) и для предельной функции $v(x, p)$ получаем задачу (45)–(47). Точно также определяется функция $w(x, p)$ и устанавливается справедливость равенства (49). Из условия переопределения (A_4) имеем, что $v_1(0, p) = v_2(0, p)$. Тогда из представления (49) с учетом условия $w_1(0, p) = w_2(0, p) = 1$, получим

$$\frac{1}{w'_1(\pi, p)} = \frac{1}{w'_2(\pi, p)}, \quad (55)$$

где $w_i(x, p)$ – решения задачи Коши для уравнения (45) с $q(x) = q_i(x)$, $i = 1, 2$, и начальными условиями (48). Из равенства (55) аналогично доказательству теоремы 8 получим совпадение собственных значений: $\mu_n^1 = \mu_n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$, задачи (52), (54) с $q(x) = q_i(x)$, $i = 1, 2$. Тогда на основании теоремы 4 о единственности решения обратной задачи с потенциалом, симметричным относительно точки $\pi/2$, получим, что $q_1(x) = q_2(x)$ на $[0, \pi]$. После чего аналогично Теореме 8 имеем, что $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в \overline{D} . ■

Отметим, что установленные выше теоремы 6–9 являются утверждениями о единственности решения рассматриваемых нами обратных задач. Теперь остановимся на вопросах существования решения поставленных обратных задач 1 и 2. Для этого снова обратимся к теории обратной задачи для оператора Штурма-Лиувилля. Приведем следующую теорему [22, с. 45], которая позволяет строить алгоритм решения обратной задачи (7) и (8) с неизвестными коэффициентами $q(x)$, h и H , и в ней приведены необходимые и достаточные условия ее разрешимости по спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$.

Теорема 10. Для того вещественные числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ были спектральными данными обратной задачи (7) и (8) с $q(x) \in L_2[0, \pi]$, необходимо и достаточно, чтобы вы-



полнялись равенства

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n}, \quad \lambda_n \neq \lambda_m \text{ при } n \neq m,$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\varkappa_{1n}}{n}, \quad \alpha_n > 0,$$

где

$$\varkappa_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q(t) \cos 2nt \, dt + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \varkappa_{1n} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi - t)q(t) \sin 2nt \, dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Кроме того, $q(x) \in C^3[0, \pi]$ тогда и только тогда, когда для $\sqrt{\lambda_n}$ и α_n справедливы представления

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \sum_{i=1}^4 \frac{\omega_i}{n^i} + \frac{\omega_n}{n^4}, \quad \omega_1 = \frac{\omega}{\pi}, \quad \omega_{2p} = 0, \quad p \geq 1, \quad \lambda_n \neq \lambda_m \text{ при } n \neq m; \quad (56)$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^4 \frac{\omega_i^+}{n^i} + \frac{\omega_{1n}}{n^4}, \quad \omega_{2p+1}^+ = 0, \quad p \geq 0, \quad \alpha_n > 0, \quad (57)$$

где $\omega_n, \omega_{1n} \in l_2$, при этом функция $h(x)$ и числа h, H строятся по следующему алгоритму:

1. По заданным числам $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ строится функция

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\cos \rho_n x \cos \rho_n t}{\alpha_n} - \frac{\cos nx \cos nt}{\alpha_n^0} \right),$$

здесь $\alpha_n^0 = \pi/2$ при $n > 0$ и $\alpha_n^0 = \pi$ при $n = 0$.

2. Находим функцию $G(x, t)$ из интегрального уравнения Гельфанда-Левитана

$$G(x, t) + F(x, t) + \int_0^x G(x, s)F(s, t) \, ds = 0, \quad 0 < t < x,$$

которое имеет единственное решение в $L_2[0, x]$ при любом фиксированном $x \in (0, \pi]$.

3. Вычисляем $q(x)$, h и H по формулам

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} G(x, x), \quad h = G(0, 0), \quad H = \omega - h - \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) \, dt.$$



Таким образом, если для чисел $\sqrt{\lambda_n}$ и α_n выполнены условия (56) и (57), то по указанному алгоритму восстанавливаются коэффициенты $q(x)$, h и H , при этом $q(x) \in C^3[0, \pi]$. Тогда на основании теоремы 2 находим функцию $u(x, t)$.

Теперь приведем условия разрешимости второй обратной задачи по двум известным спектрам λ_n и μ_n соответственно задач (7), (8) и (7), (42) [12, гл. VI, § 11], [23].

Теорема 11. *Для того чтобы вещественные числа λ_n и μ_n , $n \geq 0$, были соответственно спектрами задач (7), (8) и (7), (42) с $q(x) \in C^3[0, \pi]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (56) и*

$$\sqrt{\mu_n} = n + \sum_{i=1}^4 \frac{\omega'_i}{n^i} + \frac{\omega'_n}{n^4}, \quad \omega'_1 = \frac{\omega'}{\pi}, \quad \omega'_{2p} = 0, \quad p \geq 1, \quad (58)$$

где $\omega' = h_1 + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x) dx$,

$$\lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}, \quad n \geq 0. \quad (59)$$

При этом функция $q(x)$ и числа h и H строятся по следующему алгоритму:

1) по заданным числам λ_n и μ_n находятся числа

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{+\infty} \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \mu_n}; \quad (60)$$

2) по числам λ_n и μ_n по указанному в теореме 10 алгоритму строится $q(x)$, h и H .

Отметим, что в теореме 11 самым сложным является вычисление α_n по формуле (60). В работах [12, гл. V, § 11], [25] получены асимптотические формулы для чисел α_n в виде формул (57).

В заключение отметим, что вопросы о разрешимости обратных задач 3 и 4 остаются открытыми.

Литература

1. Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 273-279.
2. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. 1959. Т. 14. № 3. С. 3-19.
3. Стручина Г.М. Задача о сопряжении двух уравнений // Инженерно-физический журнал. 1961. Т. 4. № 11. С. 99-104.
4. Уфлянд Я.С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженерно-физический журнал. 1966. Т. 7. № 1. С. 89-92.
5. Золина Л.А. О краевой задаче для модельного уравнения парабола-гиперболического типа // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6. № 6. С. 991-1001.
6. Джураев Т.Д., Согуев А., Мамажанов А. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. Ташкент: Изд-во "Фан". 1986. 220 с.
7. Сабитов К.Б. К теории уравнений парабола-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 117-126.



8. Капустин Н.Ю. Задачи для парабола-гиперболических уравнений и соответствующие спектральные вопросы с параметром в граничных точках. Автореферат ... доктора ф.-м.н. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. 2012. 29 с.
9. Смолицкий Х.Л. Предельная задача для волнового уравнения. Дисс. ... доктора ф.-м.н. Л.: Ленингр. Краснознам. воен.-воздуш. инж. акад. 1950. 138 с.
10. Ильин В.А. Единственность и принадлежность W_2^1 классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения // Мат. заметки. 1975. Т. 17. № 1. С. 91–101.
11. Ильин В.А. Теорема о единственности и принадлежности классу W_2^1 классического решения смешанной задачи для несамосопряженного гиперболического уравнения в произвольном цилиндре // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 1. С. 60–65.
12. Левитан Б.М., Саргсян Н.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука. 1988. 432 с.
13. Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. М.: Наука. 1983. 432 с. (изд. 2).
14. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука. СО. 1972. 164 с.
15. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука. 1980. 286 с.
16. Иванов В.К., Васин В.В., Танан В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука. 1978. 206 с.
17. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука. СО. 1982. 88 с.
18. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ. 1994. 208 с.
19. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: Marcel Dekker Inc. 2000.
20. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство. 2009. 457 с. (изд. 2)
21. Кожанов А.И. О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 46. № 5. С. 1053–1071.
22. Кожанов А.И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом поглощения // Доклады Академии наук. 2006. Т. 409. № 6. С. 740–743.
23. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука. 1984.
24. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит. 2007. 384 с.
25. Левитан Б.М., Гасымов М.Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам // УМН. 1964. Т. 19. № 2 (116). С. 3–63.

THE INVERSE PROBLEM FOR THE EQUATION OF MIXED PARABOLA-HYPERBOLIC TYPE

K.B. Sabitov

Applied researches institute of of Bashkortostan Republic,
Odessa St., 68, Sterlitamak, 453103, Russia, e-mail: sabitov_fmfm@mail.ru

Abstract. For a class of equations of mixed type in a rectangular area is studied initial-boundary value problem with boundary conditions of the third kind. The criterion of uniqueness. The solution is built as the sum of series on the system of eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem. There are small denominators when convergence of series is justified. When the aspect ratio of the rectangle which is the region of hyperbolicity, is a rational number, it is shown the convergence of the series in the class of regular solutions. Then the above formulation of the inverse problems for the mixed type equation with unknown coefficients at the unknown function and boundary conditions. Based on the theory of Sturm-Liouville's inverse problems, it is proved sufficient conditions for their solvability.

Key words: equation of mixed type, direct and inverse problems, uniqueness, existence.



MSC 44A05

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БУШМАНА-ЭРДЕЙИ, ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ, ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ

С.М. Ситник

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru

Аннотация. В обзоре рассматриваются операторы преобразования Бушмана-Эрдейи, ядра которых выражаются через функции Лежандра. Приводятся исторические сведения об этом классе операторов преобразования, их классификация и основные свойства. Выделяются несколько классов определяемых операторов: операторы преобразования Бушмана-Эрдейи трёх родов, операторы преобразования Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости, унитарные операторы преобразования Сони́на-Катрахова и Пуассона-Катрахова. Рассматриваются приложения введённых классов операторов преобразования Бушмана-Эрдейи к различным задачам дифференциальных уравнений и теории функций.

Ключевые слова: операторы преобразования, операторы Бушмана-Эрдейи, оператор Бесселя.

1. Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи

Обзор посвящен теории операторов преобразования Бушмана-Эрдейи, ядра которых выражаются через функции Лежандра. В первом разделе рассматриваются основные определения теории операторов преобразования, приводятся исторические сведения об интегральных операторах Бушмана-Эрдейи. Во втором разделе вводятся и изучаются операторы преобразования Бушмана-Эрдейи первого рода, а также их предельный подкласс – операторы нулевого порядка гладкости. Ядра операторов этого класса выражаются через функции Лежандра первого рода. Частными случаями являются известные операторы преобразования Сонина и Пуассона, а также некоторые классические интегральные преобразования. В третьем разделе вводятся операторы преобразования Бушмана-Эрдейи второго рода, ядра которых выражаются через функции Лежандра второго рода. В четвёртом разделе вначале излагается общая схема построения операторов преобразования композиционным методом, на основе комбинирования классических операторов преобразования с произвольными мультипликаторами. Затем рассматривается пример применения композиционного метода к определению и изучению операторов преобразования Бушмана-Эрдейи третьего рода, определяемых степенными мультипликаторами. Показано, что к этому классу относятся унитарные операторы преобразования Сонина-Катрахова и Пуассона-Катрахова. В заключительном разделе кратко рассматриваются некоторые приложения операторов Бушмана-Эрдейи: формулы связи для решений сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных, эквивалентность норм в пространствах И.А. Киприянова и С.Л. Соболева, обобщения неравенств Харди и условий унитарности «сдвинутых» неравенств Харди, приложения к теории преобразования Радона.



2. Основные понятия теории операторов преобразования

Теория операторов преобразования – это существенное обобщение теории подобия конечномерных матриц. Дадим основное определение.

Определение 1. Пусть дана пара операторов (A, B) . Оператор T называется «оператором преобразования» (ОП, сплетающий оператор, transmutation, intertwining operator), если на элементах подходящих функциональных пространств выполняется соотношение

$$T A = B T. \quad (1)$$

Ясно, что понятие ОП является прямым и далеко идущим обобщением понятия подобия матриц из линейной алгебры. Но ОП *не сводятся к подобным (или эквивалентным) операторам*, так как сплетаемые операторы как правило являются неограниченными в естественных пространствах, к тому же обратный к ОП не обязан существовать, действовать в том же пространстве или быть ограниченным. Так что спектры операторов, сплетаемых ОП, как правило не совпадают. Кроме того, сами ОП могут быть неограниченными. Это имеет место, например, в теории преобразований Дарбу, предметом которой является нахождение дифференциальных операторов преобразования (подстановок или замен) между парой дифференциальных операторов, таким образом в этом случае все три рассматриваемых оператора являются неограниченными в естественных пространствах. При этом теория преобразований Дарбу как соответствующий раздел теории дифференциальных уравнений также вписывается в общую схему теории операторов преобразования при её расширенном понимании. Кроме того, можно рассматривать операторы преобразования не только для пары дифференциальных операторов. В теории ОП встречаются задачи для следующих разнообразных типов операторов: интегральных, интегро-дифференциальных, дифференциально-разностных (например, типа Дункла), дифференциальных или интегро-дифференциальных бесконечного порядка (например, в вопросах, связанных с леммой Шура о дополняемости), общих линейных в фиксированных функциональных пространствах, псевдодифференциальных и операторно-дифференциальных (абстрактных дифференциальных).

Возможность того, чтобы исходная и преобразованная функции принадлежали различным пространствам, что принято подчёркивать использованием различных обозначений для переменных, позволяет включить в общую схему ОП все классические интегральные преобразования: Фурье, Лапласа (на самом деле, Петцваля), Меллина, Ханкеля, Вейерштрасса, Конторовича-Лебедева, Мелера-Фока, Станковича и другие. В общую схему ОП также включаются конечные интегральные преобразования Г.А.Гринберга.

В квантовой физике при рассмотрении уравнения Шрёдингера и задач теории рассеяния встречается специальный класс ОП — волновые операторы.

Коммутирующие операторы любой природы также подходят под определение ОП. Наиболее близко к духу и задачам теории ОП относится изучение операторов, коммутирующих с производными. Сами ОП в этом случае зачастую представляются формальными рядами, псевдо-дифференциальными операторами или дифференциальными



операторами бесконечного порядка. Описание коммутантов напрямую связано с описанием всего семейства ОП для заданной пары по его единственному представителю. В этом классе задач фундаментальные приложения нашла теория операторных свёрток, особенно свертки Берга-Димовски. Начинают находить приложения в теории ОП и результаты для коммутирующих дифференциальных операторов, восходящие к классическим работам Бёрчнела и Чонди (J.L. Burchnell, T.W. Chaundy). Теория ОП также связана с вопросами факторизации дифференциальных операторов.

Отдельный класс ОП составляют преобразования, которые для одного и того же уравнения связывают краевые условия различных типов, например, Неймана и Дирихле.

Как же обычно используются операторы преобразования? Пусть, например, мы изучаем некоторый достаточно сложно устроенный оператор A . При этом нужные свойства уже известны для модельного более простого оператора B . Тогда, если существует ОП (??), то часто удаётся перенести свойства модельного оператора B и на A . Такова в нескольких словах примерная схема типичного использования ОП в конкретных задачах.

В частности, если рассматривается уравнение $Au = f$ с оператором A , то применяя к нему ОП T со сплетающим свойством (??), получаем уравнение с оператором B вида $Bv = g$, где обозначено $v = Tu$, $g = Tf$. Поэтому, если второе уравнение с оператором B является более простым, и для него уже известны формулы для решений, то мы получаем и представления для решений первого уравнения $u = T^{-1}v$. Разумеется, при этом обратный оператор преобразования должен существовать и действовать в рассматриваемых пространствах, а для получения явных представлений решений должно быть получено и явное представление этого обратного оператора. Таково одно из простейших применений техники ОП в теории дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными.

Изложению теории ОП и их приложениям посвящены монографии [1]- [12], а также подробные обзоры автора [13]- [14].

Сделаем одно терминологическое замечание. В западной литературе принят для ОП термин «transmutation», восходящий к Ж. Дельсарту. Как отмечает Р. Кэрролл, похожий термин "transformation" при этом закрепляется за классическими интегральными преобразованиями Фурье, Лапласа, Меллина, Ханкеля и другими подобными им. Приведём дословную цитату из [3]: «Such operators are often called transformation operators by the Russian school (Levitan, Naimark, Marchenko et. al.), but transformation seems too broad a term, and, since some of the machinery seems "magical" at times, we have followed Lions and Delsarte in using the word transmutation».

В настоящее время теория операторов преобразования представляет собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, находящийся на стыке дифференциальных и интегральных уравнений, функционального анализа, теории функций, комплексного анализа, теории специальных функций и дробного интегрирования. Необходимость теории операторов преобразования доказана большим числом её приложений. Методы операторов преобразования применяются в теории обратных задач, определяя обобщённое преобразование Фурье, спектральную функ-



цию и решения знаменитого уравнения Левитана; в теории рассеяния через операторы преобразования выписывается другое знаменитое уравнение Марченко; в спектральной теории получаются известные формулы следов и асимптотика спектральной функции; оценки ядер операторов преобразования отвечают за устойчивость обратных задач и задач рассеяния; в теории нелинейных дифференциальных уравнений метод Лакса использует операторы преобразования для доказательства существования решений и построения солитонов. Определёнными разновидностями операторов преобразования являются части теорий обобщённых аналитических функций, операторов обобщённого сдвига и обобщённых операторных свёрток, метод преобразования Дарбу. В теории уравнений с частными производными методы операторов преобразования применяются для построения явных выражений для решений возмущённых задач через решения невозмущённых, изучении сингулярных и вырождающихся краевых задач, псевдодифференциальных операторов, задач для решений с существенными особенностями на части границы во внутренних или угловых точках, оценки скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений. Теория операторов преобразования позволяет дать новую классификацию специальных функций и интегральных операторов со специальными функциями в ядрах, в том числе различных операторов дробного интегродифференцирования. В теории функций найдены приложения операторов преобразования к вложениям функциональных пространств и обобщению операторов Харди, расширению теории Пэли-Винера, построению различных конструкций обобщённого сдвига и основанным на них обобщённым вариантам гармонического анализа. Методы теории операторов преобразования с успехом применяются во многих прикладных задачах: оценках решений Йоста в квантовой теории рассеяния, обратных задачах, исследовании системы Дирака и других матричных систем дифференциальных уравнений, операторных и дифференциально-операторных уравнениях, различных интегральных уравнениях, в том числе со специальными функциями в ядрах, теории вероятностей и случайных процессов, линейном стохастическом оценивании, фильтрации, стохастических случайных уравнениях, обратных задачах геофизики и трансзвуковой газодинамики. Кроме уже известных для метода Лакса и преобразований Дарбу всё время увеличивается число новых приложений ОП к нелинейным дифференциальным уравнениям и исследованию солитонов.

Фактически современная теория операторов преобразования возникла из двух примеров, ставших классическими [13]- [14]. Первым примером являются ОП, переводящие оператор Штурма-Лиувилля с некоторым потенциалом $q(x)$ во вторую производную:

$$D^2y(x) + q(x)y(x) = D^2Ty(x), \quad D^2y(x) = y''(x) \quad (2)$$

при некотором выборе естественных краевых условий [7]- [11].

Второй пример – задача о преобразовании оператора Бесселя во вторую производную:

$$TB_\nu f = D^2Tf, \quad B_\nu = D^2 + \frac{2\nu + 1}{x}D, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \nu \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

На этом пути возникли ОП Сонины-Пуассона-Дельсарта, Бушмана-Эрдейи и их многочисленные обобщения [1]- [3], [13]- [15]. Такие операторы преобразования находят



многочисленные приложения при изучении уравнений с частными производными с особенностями.

2. Исторические сведения об операторах Бушмана-Эрдейи

Операторы Бушмана-Эрдейи имеют многочисленные модификации. Автором предложена удобная классификация их различных вариантов. Операторы Бушмана-Эрдейи первого рода содержат ядра, выражающиеся через функции Лежандра первого рода. Их предельным случаем являются операторы нулевого порядка гладкости, играющие важную роль в различных приложениях. Операторы Бушмана-Эрдейи второго рода содержат ядра, выражающиеся через функции Лежандра второго рода. Комбинация операторов первого и второго родов приводит к операторам Бушмана-Эрдейи третьего рода. При специальном выборе параметров они сводятся к унитарным операторам преобразованиям, которые автор назвал унитарными операторами преобразования Сони́на-Катрахова и Пуассона-Катрахова, в честь В.В. Катрахова, начавшего их изучение.

Рассмотрим важный класс интегральных операторов, который при определённом выборе параметров является одновременным обобщением ОП Сони́на-Пуассона-Дельсарта и их сопряжённых, операторов дробного интегрирования Римана-Лиувилля и Эрдейи-Кобера, а также интегральных преобразований Мелера-Фока.

Определение 2. Операторами Бушмана-Эрдейи первого рода называются интегральные операторы

$$(4) \quad B_{0+}^{\nu, \mu} f = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\frac{\mu}{2}} P_{\nu}^{\mu} \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt,$$

$$(5) \quad E_{0+}^{\nu, \mu} f = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_{\nu}^{\mu} \left(\frac{t}{x} \right) f(t) dt,$$

$$(6) \quad B_{-}^{\nu, \mu} f = \int_x^{\infty} (t^2 - x^2)^{-\frac{\mu}{2}} P_{\nu}^{\mu} \left(\frac{t}{x} \right) f(t) dt,$$

$$(7) \quad E_{-}^{\nu, \mu} f = \int_x^{\infty} (t^2 - x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_{\nu}^{\mu} \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt.$$

Здесь $P_{\nu}^{\mu}(z)$ – функция Лежандра первого рода [16], $P_{\nu}^{\mu}(z)$ – та же функция на разрезе $-1 \leq t \leq 1$, $f(x)$ – локально суммируемая функция, удовлетворяющая некоторым ограничениям на рост при $x \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$. Параметры μ, ν – комплексные числа, $\operatorname{Re} \mu < 1$, можно ограничиться значениями $\operatorname{Re} \nu \geq -1/2$.

Интегральные операторы Бушмана-Эрдейи возникли впервые в теории уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу в 1957 году в работе Копсона [17], см. также [18]. Приведём соответствующий результат, имеющий в том числе исторический интерес, который мы назовём «Лемма Копсона».

Лемма 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных с двумя переменными:



$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \frac{2\beta}{y} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

(обобщённое уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу или V -гиперболическое уравнение по терминологии И.А. Киприянова) в открытой четверти плоскости $x > 0, y > 0$ при положительных параметрах $\beta > \alpha > 0$ с краевыми условиями на осях координат (характеристиках)

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, y) = g(y), \quad f(0) = g(0).$$

Пусть решение $u(x, y)$ является непрерывно дифференцируемым в замкнутом первом квадранте, имеет непрерывные вторые производные в открытом квадранте, граничные функции $f(x), g(y)$ являются непрерывно дифференцируемыми.

Тогда, если решение поставленной задачи существует, то для него выполняются соотношения:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \tag{8}$$

$$2^\beta \Gamma(\beta + \frac{1}{2}) \int_0^1 f(xt) t^{\alpha+\beta+1} {}_1F_1 - t^{2\frac{\beta-1}{2}} P_{-\alpha}^{1-\beta} t dt = \tag{9}$$

$$= 2^\alpha \Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \int_0^1 g(xt) t^{\alpha+\beta+1} {}_1F_1 - t^{2\frac{\alpha-1}{2}} P_{-\beta}^{1-\alpha} t dt,$$

↓

$$g(y) = \frac{2\Gamma(\beta + \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})\Gamma(\beta - \alpha)} y^{1-2\beta} \int_0^y x^{2\alpha-1} f(x) y^2 - x^{2\beta-\alpha-1} x dx, \tag{10}$$

где $P_\nu^\mu(z)$ – функция Лежандра первого рода [16].

Таким образом, содержание леммы Копсона сводится к тому, что начальные данные на характеристиках нельзя задавать произвольно, они должны быть связаны операторами Бушмана-Эрдейи первого рода. Более подробное обсуждение этой леммы и соответствующие ссылки см. в [13]- [14], [19]- [20]. Доказательства в работе Копсона носят нестрогий характер, из приведённой леммы не следует формула обращения для операторов Бушмана-Эрдейи.

Поэтому справедливо считается, что изучение данного класса интегральных операторов было проведено впервые в ряде работ Р. Бушмана и А. Эрдейи [22]- [25]. Эти результаты изложены в монографии [21], хотя случай выбранных нами пределов интегрирования считается там особым и не рассматривается. Операторы Бушмана-Эрдейи или их аналоги изучались также в работах Т.Р. Higgins, Та Li, E.R. Love, Динь Хоанг Ань, В.И. Смирнова, В.В. Катрахова, Н.А. Вирченко, А.А. Килбаса, О.В. Скоромник, Б. Рубина и ряде других. При этом изучались задачи о решении интегральных уравнений с этими операторами, их факторизации и обращения, см. [26]- [29].

Автором было замечено новое основное свойство интегральных операторов Бушмана-Эрдейи, которое заключается в том, что они являются ОП и сплетают вторую производную с оператором Бесселя [30]- [31]. Затем в работах автора этот класс операторов преобразования и их приложения были подробно изучены, см. [13], [19]- [20], [30]- [40].



Важность операторов Бушмана-Эрдейи во многом обусловлена их многочисленными приложениями. Например, они встречаются в следующих вопросах теории уравнений с частными производными: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу в четверти плоскости, установлении соотношений между значениями решений уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике, теории преобразования Радона, так как в силу результатов Людвига действие преобразования Радона при разложении по сферическим гармоникам сводится как раз к операторам Бушмана-Эрдейи по радиальной переменной, при исследовании краевых задач для уравнений с особенностями внутри области, см. [13]- [14], [19]- [20].

3. Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи первого рода

Приведём основные свойства введённых выше ОП (4). Вначале распространим определение 2 на случай значения параметра $\mu = 1$.

Определение 3. Введём при $\mu = 1$ операторы Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости по формулам

$$(11) \quad {}_l B_{0+}^{\nu,1} f = \frac{d}{dx} \int_0^x P_\nu \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt,$$

$$(12) \quad E_{0+}^{\nu,1} f = \int_0^x P_\nu \left(\frac{t}{x} \right) \frac{df(t)}{dt} dt,$$

$$(13) \quad B_-^{\nu,1} f = \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{t}{x} \right) \left(-\frac{df(t)}{dt} \right) dt,$$

$$(14) \quad E_-^{\nu,1} f = \left(-\frac{d}{dx} \right) \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt,$$

где $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$ – функция Лежандра.

Теорема 1. Справедливы следующие формулы факторизации операторов Бушмана-Эрдейи на подходящих функциях через дробные интегралы Римана-Лиувилля и Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости:

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = I_{0+}^{1-\mu} {}_1 S_{0+}^\nu f, \quad B_-^{\nu,\mu} f = {}_1 P_-^\nu I_-^{1-\mu} f, \quad (15)$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} f = {}_1 P_{0+}^\nu I_{0+}^{1-\mu} f, \quad E_-^{\nu,\mu} f = I_-^{1-\mu} {}_1 S_-^\nu f. \quad (16)$$

Эти формулы позволяют «разделить» параметры ν и μ . Мы докажем, что операторы (11-14) являются изоморфизмами пространств $L_2(0, \infty)$, если ν не равно некоторым исключительным значениям. Поэтому операторы (11-14) по действию в пространствах типа L_2 в определённом смысле подобны операторам дробного интегродифференцирования $I^{1-\mu}$, с которыми они совпадают при $\nu = 0$. Далее операторы Бушмана-Эрдейи будут доопределены при всех значениях μ .

Исходя из этого, введём следующее



Определение 3. Число $\rho = 1 - \operatorname{Re} \mu$ назовём порядком гладкости операторов Бушмана-Эрдейи (11-14)

Таким образом, при $\rho > 0$ (то есть при $\operatorname{Re} \mu > 1$) операторы Бушмана-Эрдейи являются сглаживающими, а при $\rho < 0$ (то есть при $\operatorname{Re} \mu < 1$) уменьшающими гладкость в пространствах типа $L_2(0, \infty)$. Операторы (11)-(14), для которых $\rho = 0$, являются по данному определению операторами нулевого порядка гладкости.

Перечислим основные свойства операторов Бушмана-Эрдейи первого рода (11-14) с функцией Лежандра I рода в ядре. При некоторых специальных значениях параметров ν, μ операторы Бушмана-Эрдейи сводятся к более простым. Так при значениях $\mu = -\nu$ или $\mu = \nu + 2$ они являются операторами Эрдейи-Кобера; при $\nu = 0$ операторами дробного интегродифференцирования $I_{0+}^{1-\mu}$ или $I_-^{1-\mu}$; при $\nu = -\frac{1}{2}, \mu = 0$ или $\mu = 1$ ядра выражаются через эллиптические интегралы; при $\mu = 0, x = 1, v = it - \frac{1}{2}$ оператор $B_-^{\nu, 0}$ лишь на постоянную отличается от преобразования Мелера-Фока.

Будем рассматривать наряду с оператором Бесселя также тесно связанный с ним дифференциальный оператор

$$L_\nu = D^2 - \frac{\nu(\nu + 1)}{x^2} = \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x} \right) \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x} \right), \quad (17)$$

который при $\nu \in \mathbb{N}$ является оператором углового момента из квантовой механики. Их взаимосвязь устанавливает

Теорема 2. Пусть пара ОП X_ν, Y_ν сплетают L_ν и вторую производную:

$$X_\nu L_\nu = D^2 X_\nu, \quad Y_\nu D^2 = L_\nu Y_\nu. \quad (18)$$

Введём новую пару ОП по формулам

$$S_\nu = X_{\nu-1/2} x^{\nu+1/2}, \quad P_\nu = x^{-(\nu+1/2)} Y_{\nu-1/2}. \quad (19)$$

Тогда пара новых ОП S_ν, P_ν сплетают оператор Бесселя и вторую производную:

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, \quad P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu. \quad (20)$$

Теорема 3. Пусть $\operatorname{Re} \mu \leq 1$. Тогда оператор $B_{0+}^{\nu, \mu}$ является оператором преобразования типа Сонина и удовлетворяет на подходящих функциях соотношению (18).

Аналогичный результат справедлив и для других операторов Бушмана-Эрдейи. При этом $E_-^{\nu, \mu}$ также является оператором типа Сонина, а $E_{0+}^{\nu, \mu}$ и $B_-^{\nu, \mu}$ – операторами типа Пуассона.

Теперь сделаем важное замечание. Из приведённой теоремы следует, что ОП Бушмана-Эрдейи связывают собственные функции операторов Бесселя и второй производной. Таким образом, половина ОП Бушмана-Эрдейи переводят тригонометрические или экспоненциальные функции в приведённые функции Бесселя, а другая половина наоборот. Эти формулы здесь не приводятся, их нетрудно выписать явно. Все они являются обобщениями исходных формул Сонина и Пуассона и представляют существенный



интерес. Ещё раз отметим, что подобные формулы являются непосредственными следствиями доказанных сплетающих свойств ОП Бушмана-Эрдейи, и могут быть непосредственно проверены при помощи таблиц интегралов от специальных функций.

Важнейшим свойством операторов Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости является их унитарность при целых ν . Отметим, что при интерпретации L_ν как оператора углового момента в квантовой механике, параметр ν как раз и принимает целые неотрицательные значения.

Теорема 4. Для унитарности в L_2 операторов (11-14) необходимо и достаточно, чтобы число ν было целым. В этом случае пары операторов $({}_1S_{0+}^\nu, {}_1P_-^\nu)$ и $({}_1S_-^\nu, {}_1P_{0+}^\nu)$ взаимно обратны.

4. Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи второго рода

Теперь определим и изучим операторы Бушмана-Эрдейи второго рода.

Определение 3. Введём новую пару операторов Бушмана-Эрдейи с функциями Лежандра второго рода в ядре

$${}_2S^\nu f = \frac{2}{\pi} \left(- \int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy + \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy \right), \quad (21)$$

$${}_2P^\nu f = \frac{2}{\pi} \left(- \int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{y}{x} \right) f(y) dy - \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{y}{x} \right) f(y) dy \right). \quad (22)$$

Эти операторы являются аналогами операторов первого рода нулевого порядка гладкости. При $y \rightarrow x \pm 0$ интегралы понимаются в смысле главного значения. Отметим без доказательства, что эти операторы определены и являются сплетающими при некоторых условиях на функции $f(x)$ (при этом оператор (21) будет типа Сонина, (22) – типа Пуассона).

Теорема 5. Справедливы формулы для норм

$$(23) \quad \|{}_2S^\nu\|_{L_2} = \max(1, \sqrt{1 + \sin \pi\nu}),$$

$$(24) \quad \|{}_2P^\nu\|_{L_2} = 1/\min(1, \sqrt{1 + \sin \pi\nu}).$$

Оператор ${}_2S^\nu$ ограничен при всех ν . Оператор ${}_2P^\nu$ не является непрерывным тогда и только тогда, когда $\sin \pi\nu = -1$.

Для унитарности в L_2 операторов ${}_2S^\nu$ и ${}_2P^\nu$ необходимо и достаточно, чтобы параметр ν был целым числом.

Операторы второго рода связаны с преобразованиями Гильберта на полуоси.

Теорема 6. Справедливы представления

$$(25) \quad {}_2S^0 f = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{y}{x^2 - y^2} f(y) dy,$$



$$(26) \quad {}_2S^{-1}f = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 - y^2} f(y) dy.$$

Для операторов второго рода введём также более общие аналоги операторов преобразования Бушмана-Эрдейи первого рода с двумя параметрами по формулам:

$$(27) \quad {}_2S^{\nu, \mu} f = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^x (x^2 + y^2)^{-\frac{\mu}{2}} e^{-\mu\pi i} Q_{\nu}^{\mu}\left(\frac{x}{y}\right) f(y) dy + \int_x^{\infty} (y^2 + x^2)^{-\frac{\mu}{2}} Q_{\nu}^{\mu}\left(\frac{x}{y}\right) f(y) dy \right),$$

где $Q_{\nu}^{\mu}(z)$ – функция Лежандра второго рода, $Q_{\nu}^{\mu}(z)$ – значение этой функции на разрезе, $\text{Re } \nu < 1$. Второй подобный оператор определяется как формально сопряжённый в $L_2(0, \infty)$ к (27).

5. Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи третьего рода

Перейдём к построению операторов преобразования, унитарных при всех ν . Такие операторы определяются по формулам:

$$(28) \quad S_U^{\nu} f = -\sin \frac{\pi\nu}{2} {}_2S^{\nu} f + \cos \frac{\pi\nu}{2} {}_1S_{-}^{\nu} f,$$

$$(29) \quad P_U^{\nu} f = -\sin \frac{\pi\nu}{2} {}_2P^{\nu} f + \cos \frac{\pi\nu}{2} {}_1P_{-}^{\nu} f.$$

Для любых значений $\nu \in \mathbb{R}$ они являются линейными комбинациями операторов преобразования Бушмана-Эрдейи 1 и 2 рода нулевого порядка гладкости. Их можно отнести к операторам Бушмана-Эрдейи третьего рода (см. ниже). В интегральной форме эти операторы имеют вид:

$$S_U^{\nu} f = \cos \frac{\pi\nu}{2} \left(-\frac{d}{dx} \right) \int_x^{\infty} P_{\nu} \frac{x}{y} f(y) dy + \tag{30}$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi\nu}{2} \left(\int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_{\nu}^1 \frac{x}{y} f(y) dy - \int_x^{\infty} (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_{\nu}^1 \frac{x}{y} f(y) dy \right),$$

$$P_U^{\nu} f = \cos \frac{\pi\nu}{2} \int_0^x P_{\nu} \frac{y}{x} \left(\frac{d}{dy} \right) f(y) dy - \tag{31}$$

$$- \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi\nu}{2} \left(-\int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_{\nu}^1 \frac{y}{x} f(y) dy - \int_x^{\infty} (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_{\nu}^1 \frac{y}{x} f(y) dy \right).$$



Теорема 7. Операторы (28-29), (30-31) при всех $\nu \in \mathbb{R}$ являются унитарными, взаимно сопряжёнными и обратными в L_2 . Они являются сплетающими и действуют по формулам (17). При этом S_U^ν является оператором типа Сонина (Сонина-Катрахова), а P_U^ν — типа Пуассона (Пуассона-Катрахова).

ОП в форме подобной (30)-(31), но только с ядрами, выражающимися через общую гипергеометрическую функцию Гаусса, были впервые построены в 1980 г. В.В. Катраховым. Поэтому автор предлагает названия: операторы преобразования Сонина-Катрахова и Пуассона-Катрахова. Их выражение через функции Лежандра первого и второго родов получено автором, кроме того их удаётся включить в общую схему построения операторов преобразования композиционным методом [35]- [38]. При этом основными становятся наиболее простые формулы факторизации вида (28-29). На этом пути построение подобных операторов перестаёт быть специальным искусственным приёмом, а встраивается в общую методику построения целых классов подобных операторов преобразования композиционным методом, схему которого мы сейчас кратко рассмотрим.

Рассмотрим синус и косинус-преобразования Фурье и обратные к ним

$$F_c f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(y) \cos(ty) dy, \quad F_c^{-1} = F_c, \quad (32)$$

$$F_s f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(y) \sin(ty) dy, \quad F_s^{-1} = F_s. \quad (33)$$

Определим преобразование Фурье-Бесселя по формулам

$$\begin{aligned} F_\nu f &= \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \int_0^\infty f(y) j_\nu(ty) y^{2\nu+1} dy = \\ (34) \quad &= \int_0^\infty f(y) \frac{J_\nu(ty)}{(ty)^\nu} y^{2\nu+1} dy = \frac{1}{t^\nu} \int_0^\infty f(y) J_\nu(ty) y^{\nu+1} dy, \end{aligned}$$

$$(35) \quad F_\nu^{-1} f = \frac{1}{(y)^\nu} \int_0^\infty f(t) J_\nu(yt) t^{\nu+1} dt.$$

Здесь $J_\nu(\cdot)$ — обычная [16], а $j_\nu(\cdot)$ — нормированная [15] функции Бесселя. Операторы 1-2 самосопряженные унитарные в $L_2(0, \infty)$. Операторы 3-4 самосопряженные унитарные в $L_{2,\nu}(0, \infty)$.

Тогда первая пара операторов преобразования Бушмана-Эрдейи третьего рода на подходящих функциях с произвольной весовой функцией определяется формулами

$$(36) \quad S_{\nu,c}^{(\varphi)} = F_c^{-1} ([\varphi(t)]^{-1} F_\nu),$$

$$(37) \quad P_{\nu,c}^{(\varphi)} = F_\nu^{-1} (\varphi(t) F_c),$$



а вторая пара – формулами

$$(38) \quad S_{\nu, s}^{(\varphi)} = F_s^{-1}([\varphi(t)]^{-1}F_\nu),$$

$$(39) \quad P_{\nu, s}^{(\varphi)} = F_\nu^{-1}(\varphi(t)F_s),$$

где $\varphi(t)$ – произвольная весовая функция.

Введенные операторы преобразования на подходящих функциях сплетают B_ν и D^2 , можно дать их интегральное представление.

Теорема 8. *Определим операторы преобразования, сплетающие B_ν и D^2 , согласно формулам*

$$S_{\nu, \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix} \right\}}^{(\varphi)} = F_s^{-1}([\varphi(t)]^{-1}F_\nu), \quad P_{\nu, \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix} \right\}}^{(\varphi)} = F_\nu^{-1}(\varphi(t)F_s).$$

Тогда для оператора типа Сонина справедливо представление (формальное)

$$\left(S_{\nu, \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix} \right\}}^{(\varphi)} f \right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty K(x, y) f(y) dy, \quad (40)$$

где

$$K(x, y) = y^{\nu+1} \int_0^\infty [\varphi(t) t^\nu]^{-1} \left\{ \begin{smallmatrix} \sin(xt) \\ \cos(xt) \end{smallmatrix} \right\} J_\nu(yt) dt.$$

Представление для оператора типа Пуассона имеет вид

$$\left(P_{\nu, \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix} \right\}}^{(\varphi)} f \right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty G(x, y) f(y) dy, \quad (41)$$

где

$$G(x, y) = \frac{1}{x^\nu} \int_0^\infty \varphi(t) t^{\nu+1} \left\{ \begin{smallmatrix} \sin(yt) \\ \cos(yt) \end{smallmatrix} \right\} J_\nu(xt) dt.$$

Частным случаем введённых операторов третьего рода являются определённые выше унитарные операторы Сонина-Катрахова и Пуассона-Катрахова, которые получаются при выборе весовой функции $\varphi(t)$ в виде некоторой зависящей от параметра ν степени.

6. Приложения операторов Бушмана-Эрдейи

Приведём краткий список приложений, подробное изложение в [13]- [14], [19]- [20].

• С помощью ОП Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости дан положительный ответ на вопрос, который давно обсуждался в устном «фольклоре» – *пространства*



И.А.Киприянова изоморфны весовым пространствам С.Л.Соболева. Разумеется, с помощью ОП Бушмана-Эрдейи рассмотрен только самый простой случай, результаты можно обобщать на другие виды нормировок, многомерный случай, замену неограниченных областей на ограниченные, что ещё предстоит рассмотреть в будущем, но это не изменит принципиально основного вывода. Сказанное ни в коем случае не умаляет ни существенного значения, ни необходимости использования пространств И.А. Киприянова для подходящего круга задач теории функций и дифференциальных уравнений с частными производными. Принципиальная важность пространств И.А. Киприянова для теории уравнений в частных производных различных типов с операторами Бесселя отражает общий методологический подход, который выразил в виде афоризма чл.-корр. РАН Л.Д. Кудрявцев:

«Каждое уравнение должно изучаться в своём собственном пространстве!»

Полученные вложения могут быть использованы для прямого переноса известных оценок для решений B -эллиптических уравнений в пространствах И.А. Киприянова [15] на оценки в весовых пространствах С.Л. Соболева, это непосредственное применение приведённых в статье условий ограниченности и сплетающих свойств операторов преобразования Бушмана-Эрдейи.

• Построенные операторы преобразования позволяют выписывать явные формулы, выражающие решения уравнений в частных производных с операторами Бесселя через невозмущённые уравнения. Примером служит B -эллиптическое уравнение с операторами Бесселя по каждой переменной вида

$$\sum_{k=1}^n B_{\nu, x_k} u(x_1, \dots, x_n) = f, \quad (42)$$

аналогичные B -гиперболические и B -параболические уравнения [15]. Эта идея ранее осуществлялась с использованием операторов преобразования Сони́на-Пуассона-Дельсарта, см. [41]- [46]. Новые типы операторов преобразования позволяют получить новые классы подобных формул соответствия.

• Рассмотрим уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу в полупространстве

$$B_{\alpha, t} u(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\alpha + 1}{t} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u + F(t, x),$$

где $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Дадим нестрогое описание процедуры, позволяющей получать различные постановки начальных условий при $t = 0$ единым методом. Образует по формулам (17) операторы преобразования $X_{\alpha, t}$ и $Y_{\alpha, t}$. Предположим, что существуют выражения $X_{\alpha, t} u = v(t, x)$, $X_{\alpha, t} F = G(t, x)$. Пусть обычная (несингулярная) задача Коши

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta_x v + G, \quad v|_{t=0} = \varphi(x), \quad v'_t|_{t=0} = \psi(x) \quad (43)$$

корректно разрешима в полупространстве. Тогда в предположении, что $Y_{\alpha, t} = X_{\alpha, t}^{-1}$ получаем следующие начальные условия для уравнения ЭПД:

$$X_{\alpha} u|_{t=0} = a(x), \quad (X_{\alpha} u)'|_{t=0} = b(x). \quad (44)$$



При этом различному выбору операторов преобразования $X_{\alpha,t}$ (операторы Сони́на-Пуассона-Дельсарта, Бушмана-Эрдейи первого, второго, третьего родов, Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости, унитарные операторы преобразования Сони́на-Катрахова и Пуассона-Катрахова, обобщенные операторы Бушмана-Эрдейи) будут соответствовать различные начальные условия. Следуя изложенной методике в каждом конкретном случае их можно привести к более простым аналитическим формулам.

Описанная схема обобщается на дифференциальные уравнения с большим числом переменных, по которым могут действовать операторы Бесселя с различными параметрами, а также уравнения других типов. Применение операторов преобразований позволяет сводить сингулярные (или иначе вырождающиеся) уравнения с операторами Бесселя по одной или нескольким переменным (уравнения ЭПД, сингулярное уравнение теплопроводности, B -эллиптические уравнения по определению И.А. Киприянова, уравнения обобщённой осесимметрической теории потенциала – теории *GASPT* (*Generalized Axially Symmetric Potential Theory*) – А. Вайнштейна и другие) к несингулярным. При этом априорные оценки для сингулярного случая получаются как следствия соответствующих априорных оценок для регулярных уравнений, если только удалось оценить сами операторы преобразования в нужных функциональных пространствах. Значительное число подобных оценок было приведено выше.

- Класс операторов обобщённого сдвига введён и подробно изучен в работах Б.М. Левитана. Он имеет многочисленные применения в теории операторов с частными производными, в том числе с операторами Бесселя, позволяя в частности переносить особенность в уравнениях из начала координат в любую точку. Операторы обобщённого сдвига по явным формулам выражаются через операторы преобразования. Поэтому новые классы операторов преобразования позволяют построить и изучать новые классы операторов обобщённого сдвига.

- В последнее время значительное развитие получила теория операторов Дункла. Это в существенном дифференциально-разностные операторы, содержащие линейные комбинации обычных производных и конечных разностей. В высших размерностях операторы Дункла связаны с алгебрами Ли и группами отражений и симметрий. Для этого класса операторов значительное развитие получила теория операторов преобразования, как классических, так в отдельных работах и Бушмана-Эрдейи.

- Известно, что в силу результатов Людвига [19]- [20] преобразование Радона при описании через сферические гармоники действует на каждой гармонике по радиальной переменной в нашей терминологии как некоторый оператор Бушмана-Эрдейи первого рода. Отметим, что именно эта формула в двумерном случае была использована А. Кормаком для расчёта первого томографа, за что впоследствии он был удостоен Нобелевской премии.

Частными случаями формулы Людвига, полученной в 1966 году, являются явные формулы, описывающие действие преобразования Радона по любой сферической гармонике, в частности, на чисто радиальных функциях. На этом пути следствием полученных выше результатов являются интегральные представления, оценки норм в функциональных пространствах, формулы обращения для преобразования Радона. Результаты формулируются в терминах операторов Сони́на-Пуассона-Дельсарта, Эрдейи-Кобера,



Бушмана-Эрдейи. Например, становится понятным, что по существу многие формулы обращения преобразования Радона совпадают с различными вариантами формул для обращения операторов Бушмана-Эрдейи первого рода.

- Ещё с 1950-х годов специалистам было известно, что никакой новой теории для построения полиномиальных решений В-эллиптических уравнений не требуется. Это следует из простого факта, что уже операторы преобразования Сони́на-Пуассона-Дельсарта переводят степень в степень. Следовательно, они переводят В-гармонические полиномы в гармонические и наоборот по явным формулам. Поэтому и обобщённые сферические гармоники строятся по явным формулам из обычных, так как они являются сужениями соответствующих полиномов на единичную сферу. Данный подход подробно изложен, например, в работах Б. Рубина [29]. Операторы Бушмана-Эрдейи добавляют новую степень свободы ко всем этим построениям.

- Унитарность сдвинутых на единичный классических операторов Харди – это известный результат, он получается как частный случай из приведённых выше теорем. Подстановка других натуральных значений параметра приводит к новому бесконечному семейству интегральных операторов простого вида, унитарных в $L_2(0, \infty)$.

Теорема 8. Следующие операторы образуют пары взаимно обратных унитарных операторов в $L_2(0, \infty)$:

$$\begin{aligned}
 U_3 f &= f + \int_0^x f(y) \frac{dy}{y}, & U_4 f &= f + \frac{1}{x} \int_x^\infty f(y) dy, \\
 U_5 f &= f + 3x \int_0^x f(y) \frac{dy}{y^2}, & U_6 f &= f - \frac{3}{x^2} \int_0^x y f(y) dy, \\
 U_7 f &= f + \frac{3}{x^2} \int_x^\infty y f(y) dy, & U_8 f &= f - 3x \int_x^\infty f(y) \frac{dy}{y^2}, \\
 U_9 f &= f + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{15x^2}{y^3} - \frac{3}{y} \right) f(y) dy, & U_{10} f &= f + \frac{1}{2} \int_x^\infty \left(\frac{15y^2}{x^3} - \frac{3}{x} \right) f(y) dy.
 \end{aligned}$$

Литература

1. Carroll R. Transmutation and Operator Differential Equations / North Holland, 1979. – 245 p.
2. Carroll R. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions / North Holland, 1982. – 457 p.
3. Carroll R. Transmutation Theory and Applications / North Holland, 1986. – 351 p.
4. Gilbert R., Begehr H. Transformations, Transmutations and Kernel Functions. Vol. 1-2 / Longman, Pitman, 1992.
5. Trimeche Kh. Transmutation Operators and Mean-Periodic Functions Associated with Differential Operators // Mathematical Reports, V.4, Part 1) / Harwood Academic Publishers, 1988. – 282 p.
6. Фаге Д.К., Нагнибида Н.И. Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов / Новосибирск: Наука, 1977. – 280 с.
7. Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля / Киев: Наукова Думка, 1972. – 220 с.
8. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения / Киев: Наукова Думка, 1977. – 331 с.



9. Левитан Б.М. Операторы обобщённого сдвига и некоторые их применения / М.: ГИФМЛ, 1962. – 324 с.
10. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля / М.: Наука, 1984. – 240 с.
11. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака / М.: Наука, 1988. – 432 с.
12. Хромов А.П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2004. – 10. – С.3-163.
13. Ситник С.М. Обзор: Операторы преобразования и их приложения // «Исследования по современному анализу и математическому моделированию» (Ред. Коробейник Ю.Ф., Кусраев А.Г.) / Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО-А, 2008. – С.226-293.
14. Sitnik S.M. Transmutations and Applications: a survey / arXiv: 1012.3741, 2012. – 141 p.
15. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / М.: Наука,-Физматлит, 1997. – 204 с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т.1. / М.: Наука, 1973. – 296 с.
17. Copson E.T. On a Singular Boundary Value Problem for an Equation of Hyperbolic Type // Arch. Ration.Mech. and Analysis 1. – 1957. – 1. – P.349-356.
18. Copson E.T., Erdelyi A. On a Partial Differential Equation with Two Singular Lines // Arch. Ration.Mech. and Analysis 2. – 1958. – 1. – P.76-86.
19. Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications // Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: AMADE 2012 (Ed. M.V.Dubatovskaya, S.V.Rogosin) / Cambridge Scientific Publishers, 2013. – P.171-201.
20. Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications // arXiv: 1304.2114v1. – 2013. – 65 p.
21. Килбас А.А., Маричев О.И., Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
22. Buschman R.G. An inversion integral for a general Legendre transformation // SIAM Review. – 1963. – 5;3. – P.232-233.
23. Buschman R.G. An inversion integral for a Legendre transformation // Amer. Math. Mon. – 1962. – 69;4. – P.288-289.
24. Erdelyi A. An integral equation involving Legendre functions // SIAM Review. – 1964. – 1;15. – P.30.
25. Erdelyi A. Some integral equations involving finite parts of divergent integrals // Glasgow Math. J. – 1967. – 8;1. – P.50-54.
26. Килбас А.А., Скоромник О.В. Интегральное уравнение типа Абеля с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области // Тезисы докладов международной конференции АМАДЕ. Минск, 2009. – С.83.
27. Virchenko N., Fedotova I. Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications / World Scientific, 2001. – 220 p.
28. Катрахов В.В. Изометрические операторы преобразования и спектральная функция для одного класса одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // ДАН СССР. – 1980. – 251;5. – С.1048-1051.
29. Rubin V. Weighted spherical harmonics and generalized spherical convolutions // 1999/2000. – The Hebrew University of Jerusalem, Preprint No.2. –38 p.
30. Ситник С.М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости // Препринт ИАПУ ДВО РАН. – Владивосток, 1990. – 45 с.
31. Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи // ДАН СССР. – 1991. – 320;6. – С.1326-1330.
32. Ляховецкий Г.В., Ситник С.М. Формулы композиций для операторов Бушмана-Эрдейи // Препринт ИАПУ ДВО РАН. – Владивосток, 1991. – 11 с.



33. Ситник С.М. Об одной паре операторов преобразования // В сб. «Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики» (Ред. В.Н. Врагов) / Новосибирск, 1987. – С.168-173.
34. Катрахов В.В., Ситник С.М. Краевая задача для стационарного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом // ДАН СССР. – 1984. – 278;4. – С.797-799.
35. Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод факторизации в теории операторов преобразования // «Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа» (Мемориальный сборник памяти Бориса Алексеевича Бубнова, отв. ред. В.Н. Врагов) / Новосибирск, 1990. – С.104-122.
36. Катрахов В.В., Ситник С.М. Композиционный метод построения В-эллиптических, В-гиперболических и В-параболических операторов преобразования // ДАН СССР. – 1994. – 337;3. – С.307-311.
37. Ситник С.М. Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений // Вестник Самарского Государственного Университета (СамГУ). Естественнонаучная серия. – 2008. – 8/1;(67). – С.237-248.
38. Ситник С.М. Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Со-нина-Пуассона // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2010. – 5(76);18. – С.135-153.
39. Sitnik S.M. Some problems in the modern theory of transmutations // Spectral theory and differential equations. International conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday / Kharkiv, 2012. – P.101-102.
40. Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations: classification, analytical properties and applications to differential equations and integral transforms // International Conference «Mathematics Days in Sofia». 7th Minisymposium Transform Methods and Special Functions '14 (TMSF-14) in frames of MDS-2014. Dedicated to the 80th Anniversary of Professor Ivan Dimovski, Corr.-Member of Bulgarian Academy of Sciences / Sofia, 2014. – P.20-21.
41. Delsarte J. Sur certaines transformation fonctionnelles relative aux équations linéaires aux dérivées partielles du seconde ordre // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1938. – 206. – P.1780-1782.
42. Delsarte J. Hypergroupes et operateurs de permutation et de transmutation // Colloques Internat. Nancy. – 1956. – P.29-44.
43. Lions J.L. Opérateurs de Delsarte et problème mixte // Bull. Soc. Math. France. – 1956. – 84. – P.9-95.
44. Lions J.L. Quelques applications d'opérateurs de transmutations // Colloques Internat. Nancy. – 1956. – P.125-142.
45. Delsarte J., Lions J.L. Transmutations d'opérateurs différentiels dans le domaine complexe // Comm. Math. Helv. – 1957. – 32. – P.113-128.
46. Левитан Б.М. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. – 1951. – 6;2. – С.102-143.

BUSCHMAN-ERDELYI's TRANSMUTATIONS: CLASSIFICATION, BASIC PROPERTIES, APPLICATIONS.

S.M. Sitnik

Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Patriotov Av., 53, Voronezh, 394065, Russia, e-mail: mathsms@yandex.ru

Abstract. Buschmann-Erdelyi's transmutation operators with Legendre function kernels are under consideration in the survey. It is given the brief historical review, the classification of operators and their main properties. The following classes of Buschmann-Erdelyi transmutations are defined: operators of 1st, 2nd and 3rd kinds, zero smoothness operators, Sonine-Katrakhov and Poisson-Katrakhov unitary operators. Some applications to different problems of differential equations and function theory are proposed.

Key words: transmutations, Buschman-Erdelyi's transmutations, Bessel operator.



MSC 82B43

АБСТРАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ СВЯЗНОСТИ НА КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Развивается аксиоматический подход для определения отношения связности на произвольных конечных множествах, не использующий предварительного введения на них понятия графа.

Ключевые слова: связность, отношение, граф, множество, смежность.

1. Введение. Понятие связности является одним из базовых понятий математического анализа. Считается, что математический анализ, в целом, основан на представлении о *близости* элементов множеств, которое формализуется аксиоматически в рамках *общей топологии*. На этом пути появляется понятие *топологического пространства*. Оно определяется посредством введения дополнительной математической структуры, задаваемой на абстрактном множестве и называемой *топологией*. Топология представляет собой систему выделенных подмножеств, которая обладает набором свойств, выраженных в виде аксиом (см., например, [1-3]). При этом представление о связности между элементами в математическом анализе связывается с представлением о непрерывности (близости). Отсюда возникает абстрактный подход к этому понятию, при котором связность трактуется в топологических терминах [1-3].

Вместе с тем связность имеет, по сути своей, алгебраическую природу и является объектом исследования в рамках *алгебраической топологии* (см., например, [4, 5]). Это положение наиболее явным образом демонстрируется в случае, когда связность определяется на счетном множестве элементов. В этом случае, топология, как математическая структура, определяющая топологическое пространство, по-видимому, играет второстепенную роль, или совсем не играет никакой роли. Важным частным случаем математических объектов, которые основаны на понятии связности, являются *графы*, и для графов указанное положение проявляется наиболее ярко. В связи с тем, что имеется необходимость введения связности не только в рамках какого-либо топологического пространства и ее определение посредством топологии является только лишь частным случаем, возникает естественная идея считать структуру связности на каком-то множестве элементов самостоятельным объектом для изучения, независимым от того, имеется ли на нем какая-либо топологическая структура. Именно развитию такой точки зрения посвящена настоящая публикация. Причем здесь мы ограничиваемся анализом возможности аксиоматического введения структуры связности только на конечных множествах так, чтобы не привлекать никаких аксиом, связанных с использованием понятия бесконечности. Мы стремились формализовать понятие связности, не используя понятие смежности и пути, как это принято в теории графов, а оперировать при построении



теории, по нашему мнению, более общими понятиями. Оказалось, что при таком подходе возникают математические объекты, наделенные структурой связности на основе предлагаемой в статье системы аксиом, которые не являются графами в чистом виде. Их можно трактовать как графы только при более широком понимании того, что представляет собой *связь* на графе. Мы считаем, что предлагаемый нами набор аксиом является характеристическим для понятия связности.

Отметим, что идея создания общего подхода к определению структуры связности на произвольном множестве элементов безотносительно к существованию на нем топологии, возникла в связи с построением таких вероятностных пространств случайных множеств, на основе которых возможно определение понятия *перколяции* (просачивания), что важно для развития общей теории перколяции [6].

Подход, развивающийся в работе, основан на том, что связность представляется семейством специальных *отношений эквивалентности* между элементами абстрактного множества и, с этой точки зрения, является алгебраическим понятием.

2. Связность на конечных множествах. Понятие связности возникает тогда, когда для рассматриваемой совокупности Σ элементов должно быть указано правило, которое позволяет выявлять однозначным образом в любом подмножестве $A \subset \Sigma$ разложение его на дизъюнктивные компоненты, которые называются связанными компонентами этого множества. При таком дизъюнктивном разложении подмножества A все элементы, составляющие каждую из его связанных компонент, объявляются связанными друг с другом. Например, в общей топологии связность вводится посредством соглашения о том, что множество является связанным, если оно не может быть разложено дизъюнктивно на отделенные, в смысле топологии пространства, составляющие [1].

Если заменить слово «связанные» на «эквивалентные», и вспомнить, что однозначное дизъюнктивное разложение любого множества генерируется *отношением эквивалентности* для пар элементов из A , то естественно думать, что правило, реализующее понятие связности, должно быть таким, которое сопоставляет каждому подмножеству $A \subset \Sigma$ соответствующее ему бинарное отношение φ_A эквивалентности. При этом нужно, конечно же, потребовать, чтобы семейство $\{\varphi_A, A \subset \Sigma\}$ всех таких бинарных отношений было подчинено некоторым общим условиям, которые отвечают представлениям о связности множеств элементов в различных математических объектах, для которых это понятие может быть определено.

Итак, *структура связности на множестве Σ является семейством отношений $\Phi = \{\varphi_A; A \in \Sigma\}$ эквивалентности для элементов из Σ , которая удовлетворяет специальной системе аксиом.*

Мы посвятим этот раздел обсуждению возможного выбора такой системы аксиом, которые отвечают интуитивным представлениям о связности, при котором наличие у отношений $\varphi_A, A \subset \Sigma$ свойств, выражаемых этими аксиомами, представляется совершенно необходимым.

Совершенно естественно, что если структура связности определяется на Σ , то нужно потребовать, чтобы само множество Σ представляло собой одну связную компоненту, то есть должно выполняться:



1. Отношение $\varphi_\Sigma \equiv \varphi$ является тождественным, т.е. при $A = \Sigma$, все элементы из Σ связаны друг с другом.

Далее, нужно потребовать, чтобы при $A = \emptyset$ было вообще лишено смысла говорить о связности каких-либо элементов из Σ , то есть:

2. Отношение φ_\emptyset не связывает ни одну из вершин Σ ни с какой другой.

Наконец, ясно, что в случае, когда $A = \{x\}$ является одноэлементным множеством, имеется только одна связанная компонента, то есть:

3. Для всех $A = \{x\}$, $x \in \Sigma$ имеет место только одно отношение $x\varphi_A x$, то есть $\overline{x\varphi_A y}$ при $y \neq x$.

Эти три аксиомы носят тривиальный характер. Они совершенно необходимы для определения понятия связности, но они еще никак не вскрывают связи между различными отношениями φ_A . Первое, что должно быть учтено при описании связей между этими отношениями с целью их соответствия понятию связности, является наследственное свойство связности.

4. Для любой пары подмножеств A и B множества Σ таких, что $B \subset A$, и для каждой пары элементов x и y из $B \subset \Sigma$, из отношения $x\varphi_B y$ следует отношение $x\varphi_A y$.

Будем говорить, что множество $B \subset A$ является φ_A -связным, если для любой пары элементов x и y из B выполняется $x\varphi_A y$. В частности, таким образом дается определение связанного множества A в рамках вводимой структуры связности. А именно, связанными множествами будем называть такие, которые связаны относительно φ_A , то есть они являются самосвязанными, в дальнейшем, мы их просто называем связанными множествами, если это не вызывает недоразумений. Одноэлементные множества, согласно аксиоме 3, тривиальным образом, связанные.

Из аксиомы 4 следует, что из самосвязанности множества B следует его связанность относительно более широкого множества A .

Так как каждое отношение φ_A , $A \subset \Sigma$ является отношением эквивалентности на любом множестве $B \subset A$, то каждое такое множество представимо в виде дизъюнктивного объединения множеств B_1, B_2, \dots , каждое из которых состоит из эквивалентных между собой элементов. При этом, с точки зрения интуитивных представлений о связности, все эти компоненты должны пониматься как самосвязанные. В связи с этим, введем следующую аксиому, которая, в некотором смысле обратна к аксиоме 4.

5. Если подмножество C является связной компонентой относительно φ_A множества $B \subset A$, то C связно относительно φ .

Заметим, что аксиома 5 описывает свойство отношений φ_A при сужении множества A , но она еще не гарантирует, что самосвязанное неодноэлементное подмножество B обязательно должно содержать внутри себя другие самосвязанные неодноэлементные подмножества. Наоборот, может случиться так, что оно не имеет связанных неодноэлементных подмножеств. При этом, естественно, мы не имеем в виду тривиальный случай, который представляется всевозможными связными двухэлементными подмножествами. Такое положение, не следует исключать из рассмотрения и, заведомо, обеднять понятие связности. В связи с этим, введем следующее



Определение 1. *Связанное неодноэлементное множество $A \subset \Sigma$ назовем множеством жестко связанных элементов, если удаление любого из его элементов $u \in A$ приводит к тому, что все элементы множества $A \setminus \{u\}$ становятся изолированными друг от друга, то есть для любой пары $\{x, y\} \subset A \setminus \{u\}$ имеет место $\overline{x\varphi_{A \setminus \{u\}}y}$.*

Двухэлементные связанные множества, тривиальным образом, жестко связаны. Следующий простой пример представляет множество жестко связанных трех вершин.

Пример. Пусть $\Sigma = \{x_i; i = 1, 2, 3\}$ и, согласно аксиоме 2, $x_i\varphi_{\{x_i\}}x_j = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера и значение 0 соответствует отсутствию связи, а 1 – ее наличию:

$$x_k\varphi_{\{x_i, x_j\}}x_l = \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il} \quad \text{с } i \neq j \quad \text{при } k, l = 1, 2, 3$$

и $\varphi_{\Sigma} = 1$.

Не составляет труда построить примеры жестко связанных элементов, содержащих любое их число.

Множества жестко связанных элементов будем, в дальнейшем для краткости, называть *связями*. Если связь B содержит n элементов, то мы их будем называть n -связями.

Наконец, введем следующие важные в операционном отношении аксиомы.

6. *Если связанное множество A при удалении из него элемента z имеет неодноэлементную связную компоненту C , то $C \cup \{z\}$ – связанное множество.*

7. *Если множество C является связью и $\{z\} \cup C$ – связанное множество, то найдется такое $B \subset C$, что множество $B \cup \{z\}$ является связью.*

По нашему мнению, аксиомы 1-7 полностью характеризуют семейство отношений Φ , которые с интуитивной точки зрения воспринимаются как структура связности.

Для формулировки и доказательства соответствующих утверждений введем в рассмотрение класс Ψ всех связей на Σ и для каждого элемента $x \in \Sigma$ – класс $\Psi(x)$ всех связей $B \in \Psi$, содержащих этот элемент. Каждый такой класс будем называть *классом смежности* элемента x . Для каждого элемента $x \in \Sigma$ класс смежности $\Psi(x)$ может содержать произвольное число элементов. На конечном множестве Σ все множества жестко связанных элементов определяются посредством применения аксиомы 5. В соответствии с этим, определены все классы смежности. Если множество Σ имеет $|\Sigma|$ элементов, то каждый класс $\Psi(x)$, $x \in \Sigma$ содержит не более $2(2^{|\Sigma|} - 1)$ связей. Соответственно, число всех связей в классе Ψ не превосходит $2|\Sigma|(2^{|\Sigma|} - 1)$.

Нашей задачей будет доказательство того, что, для любого конечного множества Σ , любая структура связности Φ на Σ полностью характеризуется семейством Ψ всех жестко связанных относительно φ_{Σ} подмножеств пространства Σ . С этой целью дадим следующее

Определение 2. *Любую последовательность связей $\langle B_0, B_1, B_2, \dots, B_n \rangle$, где $x \in B_0$, $y \in B_n$, $B_j \in \Psi$, $j = 0, 1, \dots, n$ такую, что $B_{j-1} \cap B_j \neq \emptyset$, $j = 1, 2, \dots, n$, назовем путем $\gamma(x, y)$ на Σ , имеющим длину n . При этом x – начальный элемент пути, соответственно, y – конечный его элемент.*

Таким образом, каждый путь порождается заданием семейства всех связей Ψ .



Очевидно, что в том случае, когда в пути $\gamma(x, y)$ имеются последовательно повторяющиеся связи, то есть $B_k = B_{k+1} = \dots = B_{k+l}$ при некоторых $k, l \in \mathbb{N}$, то путь $\gamma(x, y)$ можно «укоротить», то есть построить последовательность

$$\gamma'(x, y) = \langle B_0, B_1, \dots, B_k, B_{k+l+1}, \dots, B_n \rangle,$$

которая также является путем, соединяющим x и y .

Покажем как на основе понятия пути можно переформулировать определение связности подмножества A и, тем самым, полностью охарактеризовать структуру связности на конечном множестве Σ .

Теорема 1. *Если для любой пары элементов $\{u, v\} \subset A$ подмножества $A \subset \Sigma$ существует путь $\gamma(u, v)$, полностью расположенный в A , то эти элементы находятся в отношении φ_A , то есть A – связно.*

□ Пусть для заданной пары $\{u, v\} \subset A$ имеется путь $\gamma(u, v) = \langle B_0, B_1, B_2, \dots, B_n \rangle$, $B_0 \ni u$, $B_n \ni v$, полностью расположенный в A . В силу определения пути, используя условие транзитивности отношения φ_A , имеем требуемое отношение $u \varphi_A v$. ■

Рассмотрим теперь возможность справедливости утверждения, обратного Теореме 1. Докажем, теперь, что для структуры связности на конечном множестве Σ , подчиненной аксиомам 1-7, это, действительно, имеет место. Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма. *Пусть связное множество A представимо в виде объединения $A = C_1 \cup C_2$ двух непересекающихся множеств C_1 и C_2 . Тогда найдется связь B такая, что $B \cap C_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$.*

□ Определим индуктивно последовательность связных множеств A_l , $l = 1, \dots, m$ таких, что $A_l \cap C_i \neq \emptyset$.

Пусть $A_1 = A$. Если в A_1 найдется элемент z_1 , удаление которого дает непустые множества $A_1 \cap C_i \setminus \{z_1\}$, $i = 1, 2$ и оставляет связным множество $A \setminus \{z_1\}$, то положим $A_2 = A_1 \setminus \{z_1\}$. Если же удаление любого элемента делает $A_1 \setminus \{z_1\}$ не связным, то процесс построения останавливается и полагаем $m = 1$. Пусть в A_2 найдется элемент z_2 такой, что множества $A_2 \cap C_i \setminus \{z_2\}$, $i = 1, 2$ не пусты и $A_2 \setminus \{z_2\}$ является связным множеством. В этом случае положим $A_3 = A_2 \setminus \{z_2\}$. Если же такого элемента не существует, то положим $m = 2$ и процесс построения последовательности останавливается.

Пусть построено непустое связное множество $A_l = A_{l-1} \setminus \{z_{l-1}\}$ такое, что $A_l \cap C_i$, $i = 1, 2$ – связные множества. Если в нем найдется элемент z_l такой, что не пусты множества $A_l \setminus \{z_l\} \cap C_i$, $i = 1, 2$ и $A_l \setminus \{z_l\}$ связно, то положим $A_{l+1} = A_l \setminus \{z_l\}$. Если это не так, то положим $m = l$ и остановим процесс построения последовательности.

Конструируемая индукцией по l последовательность обязана прерваться, ввиду конечности множества A . Таким образом A_m не пусто и связно, а также не пусты множества $A_m \cap C_i$, $i = 1, 2$. Кроме того A_m минимально, то есть оно не содержит внутри себя множества, обладающего такими же свойствами. Покажем, что в A_m найдется связь B , о которой идет речь в формулировке леммы. Удалим из этого множества какую-либо из вершин z . Пусть, для определенности, $z \in C_1$. Тогда, согласно построению множе-



ства A_m , могут реализоваться следующие возможности: 1) $C_1 \cap (A_m \setminus \{z\}) = \emptyset$, либо 2) $C_1 \cap (A_m \setminus \{z\}) \neq \emptyset$, но $A_m \setminus \{z\}$ не связно. Проанализируем обе эти возможности.

В случае 1), ввиду связности A_m , найдется связная компонента A' в $A_m \setminus \{z\}$. Согласно аксиоме 6, $\{z\} \cup A'$ – связное множество, $A' \subset C_2$. Из свойства минимальности множества A_m следует, что такая связная компонента единственна, $A' = A_m \setminus \{z\}$. В противном случае, все остальные можно было бы удалить и тем самым уменьшить множество A_m . Более того, ввиду минимальности A_m , множество A' должно быть либо одноэлементным, $A' = \{y\}$, либо связью. В первом случае, $A_m = \{z, y\}$ и, следовательно, является связью. Во втором случае, согласно, аксиоме 7, внутри связи A' должно найтись подмножество A'' такое, что $A'' \cup \{z\}$ связь.

Рассмотрим второй случай. Допустим, что A_m не является связью. Пусть $A^{(j)}$, $j = 1, \dots, l$ – связные компоненты множества $A_m \setminus \{z\}$. Тогда среди этих связных компонент, которые, согласно аксиоме 6, найдутся такие $A^{(j')}$, для которых $A^{(j')} \cup \{z\}$ – связное множество. Ввиду минимальности A_m , должно выполняться $A^{(j')} \not\subset C_1$. Если же считать, что $A^{(j')} \subset C_2$, то это соответствует рассмотренному случаю 1. Если же допустить, что одновременно не пусты множества $A^{(j)} \cap C_1$ и $A^{(j)} \cap C_2$, то, ввиду минимальности выбора A_m , такая связная компонента может быть единственной и при этом она должна состоять из одного элемента. ■

Теорема 2. Пусть Σ конечное множество. Если множество A связно, то для любой пары $\{u, v\} \subset A$ существует путь $\gamma(u, v) = \langle B_0, B_1, B_2, \dots, B_n \rangle$, $u \in B_0, v \in B_n$, полностью расположенный в A .

□ Рассмотрим произвольную пару элементов $\{u, v\} \subset A$. Так как A связно, то для пары $\{u, v\}$ выполняется отношение $u \varphi_A v$. Класс Ψ всех связей конечен. Поэтому семейство Γ всех путей – конечных последовательностей, составленных из связей, конечно.

Сопоставим каждому пути $\gamma = \langle B_0, B_1, \dots, B_n \rangle$ множество $\Delta(\gamma) = \bigcup_{j=0}^n B_j$. Построим

множество $\bigcup_{\gamma \in \Gamma(u)} \Delta(\gamma) \equiv \Delta[u]$, где $\Gamma(u)$ – класс путей с началом на элементе u . Пусть

это множество не совпадает с Σ . Тогда, построив для элемента v , по такому же принципу, множество $\bigcup_{\gamma \in \Gamma(v)} \Delta(\gamma) \equiv \Delta[v]$, $\Gamma(v)$ – класс путей с началом на элементе v , имеем

два непересекающихся связных множества $\Delta[u]$ и $\Delta[v]$, $\Delta[u] \cap \Delta[v] = \emptyset$ и при этом, ввиду $u \varphi_A v$, их объединение связно. В силу доказанной леммы, найдется связь B такая, которая содержит элементы $u' \in \Delta[u]$ и $v' \in \Delta[v]$ и, следовательно, среди путей класса $\Gamma(u)$ найдется путь, который можно продолжить этой связью, что противоречит пустоте пересечения множеств $\Delta[u]$ и $\Delta[v]$. ■

Таким образом, из Теорем 1 и 2 следует, что любая пара элементов $\{u, v\}$ тогда и только тогда находится в отношении φ_A , когда существует путь $\gamma(u, v)$, полностью расположенный в A . Эти теоремы дают полное описание конструкции семейства отношений эквивалентности с указанными в пп.1-7 глобальными свойствами на основе понятия пути. Так как каждый путь строится из связей, то построение семейства отношений φ_A , $A \subset \Sigma$ связности на конечном множестве Σ может быть осуществлено



на основе множества путей. В свою очередь, пути определяются на основе задания для каждого элемента $x \in \Sigma$ семейства связей $\Psi(x)$. Тогда семейство Ψ всех связей на Σ , соответствующее структуре связности Φ , полностью характеризует эту структуру.

Замечание. Если отношение связности полностью определяется только бинарными связями, то есть в семейство Ψ входят только двухэлементные множества $\{x, y\} \subset \Sigma$, то при построении путей $\gamma(u, v) = \langle B_0, B_1, B_2, \dots, B_n \rangle$ на основе соответствующего отношения связности, все множества B_j оказываются двухэлементными $B_j = \{u_{j-1}, u_j\}$. В этом случае, для $\gamma(u, v)$ можно использовать более краткое обозначение $\gamma(u, v) = \langle u, u_1, \dots, u_{n-1}, v \rangle$, указывая только вершины, по которым проходит путь, как это принято в теории графов.

Литература

1. Энгелькинг Р. Общая топология / М.: Мир, 1986
2. Келли Дж.Л. Общая топология / М.: Наука, 1968.
3. Куратовский К. Топология тт.1,2/ М.: Мир, .
4. Васильев В.А. Введение в топологию. — М.: Фазис, 1997.
5. Новиков П.С. Топология. — 2 изд., испр. и доп. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
6. Меньшиков М.В., Молчанов С.А., Сидоренко А.Ф. Теория перколяции и некоторые приложения / Итоги науки и техники. Сер. теор. вер., мат. стат. и теор. кибер. — т.24 / М.: ВИНТИ, 1986. — 24. — С.53-110.

ABSTRACT CONNECTEDNESS STRUCTURES ON FINITE SETS

E.S. Antonova, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. Axiomatic approach for the definition of connectedness relation on arbitrary finite sets is developed such that it does not use the preliminary introduction of graph structure on them.

Key words: connectedness, relation, graph, set, adjacency.



MSC 60G10

САМОПОДОБНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ***Ю.П. Вирченко, **А.Я. Дульфан**

*Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

**Харьковский политехнический университет,
ул. Фрунзе, Харьков, Украина

Аннотация. Изучаются самоподобные случайные процессы. Установлено взаимно-однозначное соответствие между классом самоподобных процессов с фиксированным характеристическим показателем и классом стационарных процессов.

Ключевые слова: самоподобие, характеристический показатель, стационарные случайные процессы.

1. Введение. Фракталами, с физической точки зрения, называются такие структуры, которые ведут себя самоподобным образом при изменении в широком диапазоне пространственных и/или временных масштабов. Объектом теории фрактальных структур являются стохастические физические явления, у которых самоподобие должно пониматься в статистическом смысле (см., например, [1]). Поэтому, с математической точки зрения, фракталы должны описываться случайными полями (процессами), которые обладают инвариантностью при изменении масштабов. Утверждение о самоподобии случайного поля, хотя и является жёстким требованием к возможной вероятностной модели описываемого физического явления, но оно всё же имеет довольно общий характер и недостаточно для построения адекватной вероятностной феноменологической модели изучаемого явления и получения на её основе количественных результатов. Вследствие отсутствия общих физических принципов для построения фрактальных моделей физических фракталов, важно выполнить исследование возможно более широкого семейства подходящих математических моделей, совместимых с принципом самоподобия. В этом сообщении мы покажем, что изучение самоподобных случайных процессов, которые могут быть привлечены для моделирования фрактальной временной эволюции физических величин, может быть сведено к более традиционной для теории случайных процессов задаче – изучению стационарных процессов.

2. Самоподобные случайные процессы. Случайные самоподобные случайные процессы $\{a(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ определяются трансформационными свойствами при преобразовании подобия временной шкалы. Мы будем далее предполагать, что эти случайные процессы являются сепарабельными [2], то есть обладают «слабым вариантом» *стохастической непрерывности*. Без свойства сепарабельности процесса $\{a(t); t \in \mathbb{R}_+\}$, в общем случае, нельзя придать смысла вероятности того, что этот процесс не превосходит некоторого фиксированного значения a , изменяясь на некотором временном отрезке. В связи с этим, нельзя придать смысла понятию фрактальной размерности случайной реализации процесса.



Для сепарабельного случайного процесса $\{a(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ распределение вероятностей можно определить, согласно теореме Колмогорова [3], посредством набора частных многоточечных распределений для произвольной конечной совокупности временных точек. Эти многоточечные распределения должны удовлетворять требованиям согласованности. В случае, когда все многоточечные распределения имеют плотности

$$f_n(a_1, t_1; a_2, t_2; \dots; a_n, t_n) = \langle \delta(a(t_1) - a_1) \delta(a(t_2) - a_2) \dots \delta(a(t_n) - a_n) \rangle ,$$

условия согласованности выражаются в виде интегральных соотношений вида

$$f_n(a_1, t_1; \dots; a_j, t_j; \dots; a_n, t_n; a_{n+1}, t_{n+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{n+1}(a_1, t_1; \dots; a_2, t_2; \dots; a_n, t_n; a_{n+1}, t_{n+1}) da_j , \tag{1}$$

$j = 1, \dots, n + 1; n = 1, 2, \dots$. Здесь знак $\langle \cdot \rangle$ обозначает усреднение по распределению вероятностей случайного процесса. Функции $f_n(a_1, t_1; a_2, t_2; \dots; a_n, t_n)$ имеют смысл плотностей распределения вероятностей того, что процесс $\{a(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ принимает в точках t_1, t_2, \dots, t_n соответственно значения a_1, a_2, \dots, a_n .

Введём теперь точное понятие самоподобного сепарабельного случайного процесса. Требование стохастического самоподобия, т.е. масштабной инвариантности распределения вероятностей для сепарабельных случайных полей сводится к тому, что многоточечные плотности распределения f_n , при масштабном изменении временной шкалы, преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mu(\lambda))^n f_n(\mu(\lambda)a_1, \lambda t_1; \mu(\lambda)a_2, \lambda t_2; \dots; \mu(\lambda)a_n, \lambda t_n) = \\ = f_n(a_1, t_1; a_2, t_2; \dots; a_n, t_n) , \end{aligned} \tag{2}$$

где множитель $(\mu(\lambda))^n$ связан с сохранением нормировки плотности распределения f_n при преобразовании подобия. Так как этим уравнениям плотности f_n должны удовлетворять при произвольном значении $\lambda > 0$, то функция $\mu(\lambda)$ должна обладать групповым свойством

$$\mu(\lambda_1 \lambda_2) = \mu(\lambda_1) \mu(\lambda_2) . \tag{3}$$

Групповое свойство навязывает простую форму масштабного множителя, $\mu(\lambda) = \lambda^c$, где c является *характеристическим показателем* самоподобного процесса $\{a(t); t \in \mathbb{R}_+\}$.

Самоподобные случайные процессы рассматривались ранее в работе [4]. Однако наиболее ранней публикацией на эту тему, по-видимому, следует считать работу [5].

Системы соотношений (1), (2) можно рассматривать, как уравнения, определяющие возможные самоподобные случайные процессы. Возникает математическая задача описания и классификации всех возможных самоподобных случайных процессов.

3. Теорема эквивалентности. Итак, для самоподобного процесса многоточечные плотности распределения обладают свойством

$$\lambda^{cn} f_n(\lambda^c a_1, \lambda t_1; \lambda^c a_2, \lambda t_2; \dots; \lambda^c a_n, \lambda t_n) = f_n(a_1, t_1; a_2, t_2; \dots; a_n, t_n) . \tag{4}$$



при любом $\lambda > 0$ с фиксированным показателем c , который является характеристикой процесса. Введём логарифмическую шкалу, положив $s = \ln t$ при $t > 0$. Тогда процесс $a(e^s)$ имеет многоточечные плотности распределения

$$g_n(a_1, s_1; \dots; a_n, s_n) = f_n(a_1, e^{s_1}; \dots; a_n, e^{s_n}).$$

Положим в (4) $\lambda = \ln \tau$. Тогда получим, что плотности g_n обладают свойством

$$e^{c\tau n} g_n(e^{c\tau} a_1, s_1 + \tau; \dots; e^{c\tau} a_n, s_n + \tau) = g_n(a_1, s_1; \dots; a_n, s_n). \quad (5)$$

Определим, теперь, случайный процесс $\{b(s) = e^{-cs} a(e^s); s \in \mathbb{R}\}$, многоточечные плотности распределения которого обозначим как $h_n(b_1, s_1; \dots; b_n, s_n)$. Так как

$$\begin{aligned} h_n(b_1, s_1; \dots; b_n, s_n) &= \langle \delta(b(s_1) - b_1) \dots \delta(b(s_n) - b_n) \rangle = \\ &= \langle \delta(e^{-cs_1} a(e^{s_1}) - b_1) \dots \delta(e^{-cs_n} a(e^{s_n}) - b_n) \rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

то, на основании правила преобразования δ -функции,

$$\begin{aligned} h_n(b_1, s_1; \dots; b_n, s_n) &= \\ &= \exp(c(s_1 + \dots + s_n)) \langle \delta(a(e^{s_1}) - e^{cs_1} b_1) \dots \delta(a(e^{s_n}) - e^{cs_n} b_n) \rangle = \\ &= \exp(c(s_1 + \dots + s_n)) g_n(b_1 e^{cs_1}, s_1; \dots; b_n e^{cs_n}, \tau_n). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} h_n(b_1, s_1 + \tau; \dots; b_n, s_n + \tau) &= \\ &= e^{c\tau n} \exp(c(s_1 + \dots + s_n)) g_n(b_1 e^{c(s_1 + \tau)}, s_1 + \tau; \dots; b_n e^{c(s_n + \tau)}, s_n + \tau) = \end{aligned}$$

Используя теперь свойство (5) плотностей g_n запишем правую часть в виде

$$\begin{aligned} \exp(c(s_1 + \dots + s_n)) [e^{c\tau n} g_n(b_1 e^{c(s_1 + \tau)}, s_1 + \tau; \dots; b_n e^{c(s_n + \tau)}, s_n + \tau)] &= \\ &= \exp(c(s_1 + \dots + s_n)) g_n(b_1 e^{cs_1}, s_1; \dots; b_n e^{cs_n}, s_n) = h_n(b_1, s_1; \dots; b_n, s_n). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что многоточечные плотности распределения h_n процесса $\{b(s); s \in \mathbb{R}\}$ трансляционно инвариантны по временным аргументам, s_1, \dots, s_n . Процессы, обладающие таким свойством называются *стационарными* (в узком смысле) [2].

Проведенные выше рассуждения очевидным образом справедливы и в обратном направлении. Взяв произвольный стационарный процесс $\{b(s); s \in \mathbb{R}\}$, который определяется трансляционно инвариантными многоточечными плотностями h_n , и построив процесс $\{a(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ по формуле

$$a(e^s) = e^{cs} b(s), \quad (7)$$

мы получим, что он является самоподобным с показателем c . Сформулируем полученный результат.



Теорема. Класс самоподобных случайных процессов $\{a(s); s \in \mathbb{R}_+\}$ с фиксированным показателем самоподобия $c \in \mathbb{R}$ находится во взаимно-однозначном соответствии с классом стационарных процессов $\{b(s); s \in \mathbb{R}\}$, которое устанавливается формулой $a(e^s) = e^{cs}b(s)$ для траекторий обоих процессов так, что соответствующие им наборы многоточечных плотностей распределения f_n и h_n , $n \in \mathbb{N}$ распределения вероятностей связаны формулой

$$\exp(c(s_1 + \dots + s_n)) f_n(a_1 e^{cs_1}, e^{s_1}; \dots; a_n e^{cs_n}, e^{s_n}) = h_n(a_1, s_1; \dots; a_n, s_n).$$

Тем самым задача об описании самоподобных случайных процессов сводится к задаче описания совокупности стационарных процессов.

4. Марковские самоподобные процессы. Рассмотрим марковские процессы. Их плотности f_n строятся согласно формуле

$$f_n(a_1, t_1; \dots; a_n, t_n) = f(a_n, t_n; a_{n-1}, t_{n-1}) \dots f(a_2, t_2; a_1, t_1) f_1(a_1, t_1), \quad (8)$$

где $t_1 < \dots < t_n$ и $f(a, t; a', t')$ – плотность условных вероятностей перехода из точки a' в момент t' в точку a в момент t . Плотность $f(a_2, t_2; a_1, t_1)$ удовлетворяет уравнению Чепмена-Колмогорова

$$f(a, t; a', t') = \int_{-\infty}^{\infty} f(a, t; a'', t'') f(a'', t''; a', t') da'' \quad (9)$$

для любых a, a', t, t' . Тогда плотности f_n , определённые согласно (8), автоматически подчинены соотношениям согласованности (1).

Для самоподобных марковских процессов плотность условной вероятности перехода должна, как следует из (8), (9), обладать свойством

$$\lambda^c f(\lambda^{a, \lambda t}; \lambda^{a'}, \lambda t') = f(a, t; a', t'). \quad (10)$$

С другой стороны, применяя преобразование (7) находим, что стационарный процесс $\{b(s); s \in \mathbb{R}\}$, соответствующий процессу $\{a(t); t \in \mathbb{R}_+\}$, должен быть марковским, так как функция $h(b, s; b', s') = e^{cs} f(b e^{cs}, e^s; b' e^{cs'}, e^{s'})$ удовлетворяет уравнению Чепмена-Колмогорова и плотности h_n для процесса $\{b(s); s \in \mathbb{R}\}$ строятся по формуле аналогичной (8). Наконец, из (10) следует, что функция $h(b, s; b', s')$ инвариантна относительно одновременного сдвига аргументов s и s' , т.е. зависит от разности $(s - s')$.

Таким образом стационарный процесс $b(\tau)$ должен быть марковским и обратно по каждой функции $h(b, s; b', s')$ марковского стационарного процесса выбором показателя c может быть построен соответствующий марковский самоподобный процесс.

Пример. Классическим примером самоподобного процесса является винеровский процесс $\{w(t); t \in \mathbb{R}_+\}$, моделирующий броуновское движение. Условная вероятность перехода винеровского процесса определяется формулой

$$f(a, t; a', t') = (2\pi\sigma(t - t'))^{-1/2} \exp\left(-\frac{(a - a')^2}{2\sigma(t - t')}\right), \quad t > t'. \quad (11)$$



Для винеровского процесса $c = 1/2$ и, следовательно,

$$h(b, s; b', s') = \left(2\pi\sigma \left(1 - e^{(s'-s)}\right)\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(b - b'e^{(s'-s)/2})^2}{2\sigma(1 - e^{(s'-s)})}\right), \quad s > s'. \quad (12)$$

Стационарный марковский процесс с плотностью условных вероятностей перехода такого вида называется процессом Орнштейна-Уленбека [6].

Литература

1. Федер Е. Фракталы / М.: Мир, 1991.
Feder J. Fractals / New York-London: Plenum Press, 1988.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. т.1 / М.: Наука, 1971.
3. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей / М.: Наука, 1974.
4. Lamperti J. Semi-stable stochastic processes. Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – 104, 1. – С.62-78.
5. Колмогоров А.Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве. ДАН СССР. – 1940. – 26; 2. – С.115-118.
6. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках / М.: Мир, 1986.
Gardiner C.W. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, 2d ed. / Berlin: Springer-Verlag, 1985.

SELF-SIMILAR RANDOM PROCESSES

Yu.P. Virchenko, A.Ya. Dulfan

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. Self-similar random processes are studied. It is found the взаимно-однозначное correspondence between the class of self-similar processes with fixed characteristic power and the class of stationary processes.

Key words: self-similarity, characteristic power, stationary random processes.



MSC 37J05

ОБРАТИМЫЕ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Производится анализ понятия обратимости в широком смысле конечномерных автономных динамических систем. Доказывается теорема эквивалентности локальной и глобальной обратимости в широком смысле таких динамических систем. Вводится понятие сигнатуры обратимой в широком смысле динамической системы.

Ключевые слова: диффеоморфизм, обратимые динамические системы, локальная обратимость, касательная динамическая система, сигнатура.

1. Введение. Будем рассматривать конечномерные автономные динамические системы размерности n . Не ограничивая общности, будем считать, что фазовым пространством каждой из таких систем, является \mathbb{R}^n . Обозначим $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in \mathbb{R}^n$ точки этого пространства и $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ – некоторый диффеоморфизм. Динамической системой, соответствующей диффеоморфизму F , называется система дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = F(X). \quad (1)$$

В настоящем сообщении мы докажем утверждения общего характера, касающиеся класса обратимых систем вида (1). Исходя из аналогии со свойствами обратимости гамильтоновых динамических систем, нами в предыдущем сообщении [1] были введены понятия *локальной* и *глобальной обратимостей*.

Определение 1. Систему (1) назовем *локально-обратимой в широком смысле*, если существует диффеоморфизм V такой, который переводит (1) в систему

$$\dot{Y} = -F(Y), \quad Y = V(X) \quad (2)$$

и при этом $V^2 = \mathbf{1}$, то есть $V(V(X)) = X$ для любой точки $X \in \mathbb{R}^n$.

Определение 2. Система (1) называется *глобально-обратимой в широком смысле*, если существует диффеоморфизм U такой, что $U^2 = \mathbf{1}$ и для каждого решения $X = X(t; X_0)$ системы (1) с начальными данными X_0 имеет место

$$U(X_0) = X(t, U(X(t))). \quad (3)$$

В настоящем сообщении мы докажем, что эти понятия совпадают и дадим общую классификацию специального класса аналитических обратимых в широком смысле систем на основе понятия сигнатуры.



2. Теорема эквивалентности. Докажем утверждение об эквивалентности понятий локальной и глобальной обратимости.

Введем матрицу $W(X)$ в \mathbb{R}^n с компонентами

$$W_{ij} = \frac{\partial V_i(X)}{\partial X_j}, \quad V(X) = \langle V_1(X), \dots, V_n(X) \rangle,$$

которая, вообще говоря, зависит от точки \mathbb{R}^n фазового пространства. Так как для каждой точки $X \in \mathbb{R}^n$, согласно определению, выполняется $V(V(X)) = X$, то имеет место матричное равенство $W(V(X))W(X) = \mathbf{1}$,

$$\sum_{k=1}^n W_{ik}(V(X))W_{kj}(X) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1 \div n. \quad (4)$$

Отсюда следует, что матрица $W(X)$ в любой точке $X \in \mathbb{R}^n$ не вырождена, $\det W(X) \neq 0$. Умножая (4) на $W(V(X))$ справа, получим, что имеет место также равенство $W(X)W(V(X)) = \mathbf{1}$.

Пусть для системы (1) существует диффеоморфизм V , указанный в Определении 1. Тогда, используя матрицу $W(X)$ систему (2) представим в виде, не содержащем производной по времени,

$$W(X)F(X) = -F(V(X)), \quad (5)$$

который является необходимым и достаточным условием локальной обратимости системы (1).

Теорема 1. *Для того, чтобы система (1) была глобально обратимой, необходимо и достаточно, чтобы она была обратимой локально.*

□ **Необходимость.** Нужно, на основании выполнимости уравнения (3), доказать, что имеет место (5) для подходящим образом выбранного отображения $V(\cdot)$

Пусть равенство (3) выполняется для любого решения системы (1) с начальным значением X_0 . Возьмем решение $X(t)$ с начальной произвольно выбранной точкой. Тогда при $\Delta \rightarrow 0$ имеем

$$X(\Delta) = X(\Delta; X_0) = X_0 + F(X_0)\Delta + o(\Delta). \quad (6)$$

С другой стороны, из (3) следует, что

$$U(X_0) = X(\Delta; U(X(\Delta))),$$

то есть

$$U(X_0) = U(X(\Delta)) + F(U(X(\Delta)))\Delta + o(\Delta). \quad (7)$$

Учитывая, что U – диффеоморфизм, находим, что имеет место

$$U(X(\Delta)) = U(X_0) + (\nabla U)(X_0)F(X_0)\Delta + o(\Delta).$$

Подставляя это разложение в (7), имеем

$$U(X_0) = U(X_0) + [(\nabla U)_{X_0}F(X_0) + F(U(X(\Delta)))]\Delta + o(\Delta).$$



Ввиду произвольности Δ , выполняется

$$(\nabla U)_{X_0} F(X_0) = -F(U(X_0)).$$

Так как, согласно Определению 2, $U^2 = \mathbf{1}$ и, в силу произвольности точки X_0 , можно положить, что диффеоморфизм V в Определении 1 совпадает с U и $W(X) = \partial U(X)/\partial X$, что означает локальную обратимость системы.

Достаточность. Пусть для системы (1) существует отображение V такое, что $V^2 = \mathbf{1}$, и выполняется соотношение (5). Построим оператор $S(\Delta; \cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ по формуле

$$S(\Delta; X) = X + F(X)\Delta.$$

Пусть $Y = S(\Delta; X)$. Тогда

$$X = Y - F(X)\Delta = Y - F(Y - \Delta F(X))\Delta = Y - F(Y)\Delta + o(\Delta),$$

и поэтому

$$X = Y + W^{-1}(Y)F(V(Y))\Delta + o(\Delta).$$

Отсюда следует

$$V(X) = V\left(Y + W^{-1}(Y)F(V(Y))\Delta + o(\Delta)\right) = V(Y) + (\nabla V)_Y W^{-1}(Y)F(V(Y))\Delta + o(\Delta)$$

и так как $(\nabla V)_Y = W(Y)$, то

$$V(X) = V(Y) + F(V(Y))\Delta + o(\Delta).$$

Это означает, что

$$V(X) = S(\Delta; V(Y)) + o(\Delta).$$

Определим $X((n+1)\Delta) = S(\Delta; X(n\Delta))$, и, вместе с тем,

$$V(X(n\Delta)) = S(\Delta; V(X((n+1)\Delta))) + o(\Delta).$$

Следовательно, проводя последовательно n итераций на основе этих рекуррентных связей,

$$X(n\Delta) = S(n\Delta; X_0) + n \cdot o(\Delta),$$

$$V(X((N-n)\Delta)) = S(n\Delta; V(N\Delta)) + n \cdot o(\Delta).$$

Тогда, положив $N = t/\Delta$, получим

$$X(N\Delta) = S(N\Delta; X_0) + N \cdot o(\Delta),$$

$$V(X_0) = S(N\Delta; V(N\Delta)) + N \cdot o(\Delta).$$

Так как $N \cdot o(\Delta) = o(1)$, в результате, находим

$$X(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} X(N\Delta) = X(t; X_0).$$



$$V(X_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} S(N\Delta; V(N\Delta)) = X(t; V(X(t))).$$

Таким образом, соотношение (7) имеет место при $V = U$. ■

Покажем, что свойство обратимости системы не зависит от выбора координатной системы, на основе которой описывается динамика.

Теорема 2. *Всякая динамическая система, получаемая из обратимой в широком смысле динамической системы посредством замены ее координат, которая осуществляется диффеоморфизмом, является обратимой.*

□ Пусть имеется система (1), для которой существует такой диффеоморфизм V , $V^2 = \mathbf{1}$, что имеет место (5). Пусть, далее, G – произвольный диффеоморфизм. Произведем на его основе замену координат $X = G(X')$. В этом случае система (1) перейдет в следующую

$$\dot{X}' = F'(X'),$$

где $F'(X') = H^{-1}(X')(F(G^{-1}))(X')$, $H(X') = \partial G(X')/\partial X'$ – матрица. Определим диффеоморфизм $V' = G^{-1}VG$. Он обладает свойством

$$V'^2 = (G^{-1}VG)(G^{-1}VG) = G^{-1}V(GG^{-1})VG = G^{-1}(VV)G = G^{-1}G = \mathbf{1}.$$

Рассмотрим выражение

$$(F'V')(X') = H^{-1}(V(X'))(FGV')(X') = H^{-1}(V(X'))(FV)(X) = -H^{-1}(V(X'))W(X)F(X), \quad (8)$$

где мы воспользовались свойством (5) обратимости системы (1) и тем, что $(GV')(X') = (G(G^{-1}VG))(X') = V(X)$.

Согласно определению диффеоморфизма F' , имеем $F(X) = (FG)(X') = H(X')F'(X')$. Подставляя последнее выражение в (8) вместо $F(X)$, находим

$$(F'V')(X') = -H^{-1}(V(X'))W(X)H(X')F'(X') = -H^{-1}(V(X'))W(G(X'))H(X')F'(X'). \quad (9)$$

Так как $(G^{-1}G)(X') = X'$, то

$$\left(\frac{\partial G^{-1}(X')}{\partial X'}\right)_{X' \Rightarrow G(X')} H(X') = \mathbf{1}.$$

Поэтому для обратной матрицы

$$H^{-1}(X') = \left(\frac{\partial G^{-1}(X')}{\partial X'}\right)_{X' \Rightarrow G(X')}$$

имеет место

$$H^{-1}(G^{-1}(X')) = \frac{\partial G^{-1}(X')}{\partial X'},$$

и поэтому

$$\left(\frac{\partial G^{-1}(X')}{\partial X'}\right)_{X' \Rightarrow (VG)(X')} = H^{-1}((G^{-1}VG)(X')) = H^{-1}(V'(X')).$$



Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{V}'(X'))\mathbf{W}(\mathbf{G}(X'))\mathbf{H}(X') &= \left(\frac{\partial \mathbf{G}^{-1}(X')}{\partial X'}\right)_{X' \Rightarrow (\mathbf{V}\mathbf{G})(X')} \mathbf{W}(\mathbf{G}(X'))\mathbf{H}(X') = \\ &= \frac{\partial}{\partial X'}(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{G})(X') = \frac{\partial \mathbf{V}(X')}{\partial X'} \equiv \mathbf{W}'(X'). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в правую часть (9), приходим к соотношению $\mathbf{W}'(X')\mathbf{F}'(X') = -\mathbf{F}'(\mathbf{V}'(X'))$. ■

3. Сигнатура обратимой динамической системы. Теорема 1 позволяет при поиске наличия свойства обратимости динамической системы ограничиваться исследованием выполнимости локального соотношения (5). С этой целью нужно сначала исследовать возможность построения отображений \mathbf{V} , удовлетворяющих условию $\mathbf{V}^2 = \mathbf{1}$, которое накладывает определенные ограничения на тип отображений \mathbf{V} . Далее, мы ограничимся исследованием соотношения (5) в том случае, когда отображение \mathbf{F} аналитически зависит от точки X . Это условие автоматически накладывает дополнительное ограничение на выбор отображений \mathbf{V} в требовании их аналитичности. В этих условиях можно дать общую классификацию обратимых в широком смысле динамических систем, которой мы посвятим этот раздел. Сначала, проиллюстрируем сказанное на примере одномерных систем.

Пример. В одномерном случае отображение $\mathbf{V}(\cdot)$ превращается в функцию $v(\cdot)$, а условие $\mathbf{V}^2 = \mathbf{1}$ превращается функциональное уравнение $v(v(x)) = x$. Этому условию удовлетворяет любая монотонная функция, совпадающая с обратной к ней функцией. Последнее означает, что графики таких функций должны быть симметричными относительно прямой $y = x$ на плоскости $\langle x, y \rangle$. Среди возрастающих функций имеется только одна функция $v(x) = x$, которая не имеет отношения к построению одномерных систем, обратимых в широком смысле. Монотонно убывающие функции, графики которых обладают указанной симметрией могут быть, все-таки, довольно разнообразны, однако, если наложить условие аналитичности, то класс допустимых функций $v(x)$ резко сужается. В самом деле, так как график симметричной относительно прямой $y = x$ аналитической функции $v(x)$ должен пересекать эту прямую, то эта функция обладает неподвижной точкой x_* , $v(x_*) = x_*$. Рассмотрим разложение в степенной ряд около этой точки.

Из $v(v(x)) = x$ вытекает функционально-дифференциальное уравнение.

$$v'(v(x))v'(x) = 1. \tag{8}$$

В точке x_* получаем $(v'(x_*))^2 = 1$, $v'(x_*) = \pm 1$. Далее, по индукции устанавливается, что все производные $v^{(n)}(x_*) = 0$ при $n \geq 2$. В самом деле, если все эти производные вплоть до m -й равны нулю, то так как m -я производная тождества (8) имеет вид

$$v^{(m+1)}(v(x))(v'(x))^{m+1} + v^{(m+1)}(x)v'(v(x)) + R_m(v^{(2)}, v^{(3)}, \dots, v^{(m)}) = 0,$$



где R_n – полином от указанных производных, вычисленных в точках x и v . Он обращается в нуль при равенстве нулю всех аргументов. Тогда, полагая $x = x_*$, $v(x_*) = x_*$, получим, что, согласно предположению индукции $v^{(n)}(x_*) = 0$, $n = 2, 3, \dots, m$, $R_m(v^{(2)}, v^{(3)}, \dots, v^{(m)}) = 0$. Следовательно, $v^{(m+1)}(x_*) = 0$.

В результате, класс аналитических функций $v(x)$, удовлетворяющих (8), состоит из линейных функций $v(x) = a - x$.

В общем случае, когда фазовым пространством динамической системы является \mathbb{R}^n с $n > 1$, отображение V , с качественной точки зрения, может быть устроено очень сложно. Мы в этом сообщении рассмотрим общие свойства обратимых динамических систем, у которых отображение V качественно устроено аналогично тому, что наблюдается при $n = 1$. С этой целью дадим следующее

Определение. Обратимую динамическую систему назовем простой, если соответствующее ей отображение V обладает единственной неподвижной точкой.

Далее, мы будем рассматривать только простые обратимые динамические системы и дадим их предварительную классификацию на основе свойств матрицы $W(X)$. Пусть, не ограничивая общности, неподвижной точкой отображения V простой обратимой динамической системы является 0. Обозначим $W \equiv W(0)$. Положим $X = 0$ в (5). Тогда имеем $W^2 = \mathbf{1}$.

Лемма. Если матрица W обладает свойством $W^2 = \mathbf{1}$, то она имеет скалярный тип (имеет полную систему собственных векторов) и все ее собственные числа равны ± 1 .

□ Пусть λ – собственное число матрицы W с собственным вектором Y , то есть $WY = \lambda Y$. Тогда, применяя W дважды к вектору Y , получим, на основании тождества $W^2 = \mathbf{1}$, что $\lambda^2 = 1$. Таким образом, $\lambda = \pm 1$.

Пусть матрица W , посредством некоторого линейного преобразования SWS^{-1} , $\det S \neq 0$, приведена к каноническому жорданову представлению, которое состоит из клеток Жордана $T(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, s$ так, что $SWS^{-1} = \bigoplus_{i=1}^s T(\lambda_i)$. Тогда матрица W^2 состоит из

клеток $T^2(\lambda_i)$, то есть $SW^2S^{-1} = \bigoplus_{i=1}^s T^2(\lambda_i)$. Но если клетка Жордана $T(\lambda)$ имеет порядок, больший 1, то $T^2(\lambda)$ не совпадает с единичной матрицей той же размерности, что противоречит тождеству $SW^2S^{-1} = \mathbf{1}$. ■

Следствием доказанной леммы является то, что матрица $W = W(0)$ обладает полным набором собственных чисел, равных ± 1 . Причем, по крайней мере одно из них должно быть равно -1. Это следует из Определения 1. В самом деле, из уравнения (5), положив в нем $X = 0$, находим $WF(0) = -F(0)$, то есть W имеет собственный вектор $F(0)$ с собственным значением -1.

Если ограничиться рассмотрением только таких обратимых динамических систем, у которых F – аналитическое отображение, то для каждой из таких систем отображение V , реализующее (5), также должно быть аналитическим. В этом случае, матриц-функция $W(X)$ является аналитической. Для нее сигнатура не может изменяться при изменении точки X , так как для перемены знака у какого-либо из собственных чисел



оно, в процессе изменения X , должно: либо обратиться в нуль, что невозможно, так как в каждой точке X выполняется $\det W(X) \neq 0$, либо одновременно пара совпадающих собственных значения превратится во взаимно сопряженную пару, что будет означать существование точки ветвления у матриц-функции $W(X)$.

Ввиду неизменности чисел n_{\pm} собственных значений ± 1 у матрицы $W(X)$, связанной с аналитическим отображением V , они являются характеристикой обратимой в широком смысле динамической системы. В связи с этим, введем понятие *сигнатуры* и *характеристического класса* простой обратимой динамической системы. Сигнатурой мы будем называть упорядоченную пару $\langle n_-, n_+ \rangle$ натуральных чисел, равных, соответственно, числу собственных значений -1 и $+1$ матрицы W . Соответственно, простые обратимые динамические системы мы будем относить к одному и тому же характеристическому классу, если они обладают одной и той же сигнатурой.

Изучение каждого характеристического класса заключается в разбиении его на семейства динамических систем, которые обладают качественно одинаковым дифференциально-топологическим поведением. Основой для разработки такой классификации обратимых динамических систем, является следующее утверждение.

Теорема 3. *Аналитический диффеоморфизм обратимой динамической системы не изменяет ее сигнатуры.*

□ Пусть аналитический диффеоморфизм G переводит обратимую в широком смысле систему (1), удовлетворяющую (5) с аналитическим отображением V , $V^2 = \mathbf{1}$, $V(0) = 0$, посредством замены координат $X = G(X')$, в обратимую в широком смысле систему $\dot{X}' = F'(X')$, которая удовлетворяет $W'(X)F'(X') = -F'(V'(X'))$, $V'^2 = \mathbf{1}$. Здесь $W'(X') = \partial V'(X')/\partial X'$ и имеет место связь $H^{-1}(V'(X'))W(X')H(X') = W'(X')$.

Положим $G^{-1}(0) = X_0$. Эта точка является неподвижной для отображения V' , $V'(X_0) = X_0$ и для матрицы $W(X_0)$ выполняется

$$\begin{aligned} W^2(X_0) &= (H^{-1}(V'(X_0))W(G(X_0))H(X_0))(H^{-1}(V'(X_0))W(G(X_0))H(X_0)) = \\ &= H^{-1}(V'(X_0))W(0)W(0)H(X_0) = H^{-1}(V'(X_0))H(X_0) = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Положим Y – собственный вектор матрицы $W(0)$ с собственным значением λ . Тогда $H^{-1}(X_0)Y$ – собственный вектор с тем же собственным значением для матрицы $W'(X_0)$, так как

$$W'(X_0)H(X_0)Y = H^{-1}(V'(X_0))W(G(X_0))Y = H^{-1}(0)W(0)Y = \lambda H^{-1}(0)Y.$$

Следовательно, числа n_{\pm} в преобразованной динамической системе совпадают со значениями в исходной. ■

В приведенном доказательстве требование аналитичности в формулировке теоремы нужно только по той причине, что само понятие сигнатуры дано нами только для случая аналитических диффеоморфизмов F .



Литература

1. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2015. – 5(202);38. – С.138-147.
2. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Свойство локальной обратимости гамильтоновых динамических систем // Материалы Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел» Белгород, 17-21 октября 2011 / С.37-38.
3. Субботин А.В., Вирченко Ю.П. Обратимые динамические системы // Тезисы зимней математической школы С.Г.Крейна / Воронеж: ВГУ, 2014. – С.337-341.

REVERSIBLE SYSTEMS IN WIDE SENSE

Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch48@bsu.edu.ru

Abstract. The concept analysis of the reversibility in wide sense of finite dimensional autonomous dynamical systems is developed. It is proved the theorem about the equivalence of local reversibility in wide sense and the global one for such systems. It is introduced the concept of signature of dynamic system being reversible in wide sense.

Key words: diffeomorphism, reversible dynamic systems, local reversibility, tangential dynamic system, signature.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MSC 60K40

ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ В ТЕОРИИ ФРАГМЕНТАЦИИ

*Р.Е. Бродский, **Ю.П. Вирченко

*Институт монокристаллов НАНУ,
пр. Ленина, 60, Харьков, Украина

**Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Сконструирована диффузионная модель фрагментации хрупких материалов. В частном случае эта модель приводит к известному в теории фрагментации логарифмически нормальному закону распределения фрагментов по размерам.

Ключевые слова: фрагментация, размер, распределение вероятностей, марковский процесс.

1. Введение. Фрагментация или измельчение хрупких твердотельных материалов является довольно распространённым природным и технологическим процессом. Процессы фрагментации протекают в широком диапазоне масштабов: получение порошков с микро- и наноразмерными частицами, дробление камней, фрагментация горных пород, образование реголита планет, ударная фрагментация космических тел.

Математическому описанию и моделированию фрагментации посвящён целый ряд исследований [1-4]. Основной целью работ в теории фрагментации является получение распределения вероятностей случайных размеров образующихся в результате измельчения материала фрагментов и его эволюция в продолжение процесса фрагментации. Так, например, работы [1,2] посвящены выводу такого рода «универсальных» распределений, в рамках наиболее общих физических предположений о характере процесса фрагментации, в то время как в работах [3, 4] исследуются распределения в специальном случае дробления одномерных объектов – т.н. «random scission models». Наиболее интересным, с физической точки зрения, являются изучение однократной, ударной фрагментации, однако, этот процесс является очень зависимым от разнообразных условий его проведения. Поэтому, как правило, математическое моделирование фрагментации ограничивается изучением многократно повторяющихся актов измельчения материала в течение длительного промежутка времени, когда система фрагментов «теряет память» о начальном состоянии и, в результате, образуется некоторое финальное распределение вероятностей размеров фрагментов. Настоящая работа посвящена решению задачи, связанной именно с этим направлением исследований в теории фрагментации. Подход, используемый при решении этой задачи, основан на описании процесса дробления, предложенного в [1] и используемого многими авторами. Он связан с выбором единой для всех фрагментов, характеризующей их числовой характеристики, которая



в дальнейшем называется *размером*. Состояние всей системы из N фрагментов в каждый момент времени описывается числовым набором ρ_1, \dots, ρ_N их размеров. Механизм дробления, который определяет процесс фрагментации, предполагается масштабно инвариантным, то есть вероятность распада фрагмента с размером r на набор фрагментов с размерами $\{\rho_1, \dots, \rho_N\}$ является функцией отношений $\rho_1/r, \dots, \rho_N/r$.

В работе решается задача об определении финального распределения вероятностей масштабно инвариантного процесса *медленной фрагментации*, которое понимается в том же математическом смысле, что и в работах [1], [2]. Это асимптотика плотности распределения фрагментов по размерам при $t \rightarrow \infty$. Физическое применение этого распределения возможно в том случае, когда характерное время для поступления извне энергии, существенно изменяющей систему фрагментов, намного превосходит все другие времена, характерные для процесса фрагментации. Подчеркнем, что, несмотря на то, что всюду далее мы используем подход к описанию процесса фрагментации, принятый в классических работах [1], [2], существенным отличием нашего исследования является введение понятия медленного процесса фрагментации, которое разъясняется в следующем разделе.

2. Медленная фрагментация. Изучение систем фрагментации в рамках вероятностно-геометрического подхода, когда фрагменты рассматриваются как геометрические тела случайной формы и размеров, которые в результате эволюции разваливаются на более мелкие тела либо посредством столкновения друг с другом, либо посредством внешних воздействий, приводит к очень сложным математическим задачам. Трудности возникают уже на этапе синтеза подходящих вероятностных моделей. В связи с этим, в пионерской работе [1] был предложен другой подход к исследованию систем фрагментации, который основан на их *однопараметрическом описании*. Идея подхода состоит в том, чтобы охарактеризовать каждую случайную связную компоненту, в любом состоянии системы, только одной случайной величиной $\tilde{r} > 0$ – *размером*, понимаемым в некотором обобщённом смысле. Тогда каждое состояние стохастической динамической системы, описывающей эволюцию системы фрагментации, вместо имеющегося широкого функционального произвола в описании случайной формы каждого фрагмента, определяется только конечным случайным набором $\langle \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_{\tilde{N}} \rangle$ случайной длины, составленным из случайных размеров так, что \tilde{N} равно числу связных компонент системы. Физически, при этом предполагается, что все фрагменты имеют примерно одинаковую, слабо отличающуюся друг от друга случайную форму, и каждый фрагмент может быть приближённо совмещён с любым другим фрагментом посредством подходящего изменения масштаба. Для изучения такой системы фрагментов, существенны только их размеры. Динамика системы фрагментации описывается в этом случае *ветвящимся случайным процессом* со случайными траекториями $\{\tilde{r}_1(t), \dots, \tilde{r}_{\tilde{N}(t)}(t)\}$, $t > 0$. Такое однопараметрическое описание системы фрагментации становится уже обозримым с математической точки зрения в том смысле, что задавать математически корректно ветвящийся случайный процесс значительно проще, чем стохастическую динамическую систему в вероятностно-геометрическом подходе.

Мы в настоящей работе предлагаем другой, более простой способ математического описания систем фрагментации посредством процесса *случайного выбора фрагментов*.



Пусть в каждый момент времени t производится случайный выбор типичного фрагмента системы со случайным размером $\tilde{r}(t)$. После фиксации величины этого размера, фрагмент возвращается в систему. В результате, такого статистического наблюдения возникает траектория некоторого случайного процесса $\langle \tilde{r}(t) > 0; t \geq 0 \rangle$. Поэтому, для описания динамики системы фрагментации, нужно только смоделировать этот случайный процесс. Определяя процесс $\langle \tilde{r}(t); t \geq 0 \rangle$, мы определяем плотность $f(r, t)$ распределения вероятностей по размерам r фрагментов в момент времени t . Однако, при таком математическом моделировании системы фрагментации, даже в рамках однопараметрического описания, теряется значительная часть информации об эволюции системы. В частности, теряется очень важная информация об изменении во времени полного числа фрагментов $\tilde{N}(t)$ в системе в момент времени t . Поэтому, в рамках такого описания процесса фрагментации, невозможно отследить изменение распределения числа $N(r, t)$ фрагментов по размерам в момент времени t , так как

$$N(r, t) = N(t) \int_0^r f(r', t) dr',$$

и следовательно, нельзя учесть те ограничения на протекание процесса фрагментации, которые возникают в связи с учётом законов сохранения объёма и энергии. Поэтому, в рамках подхода на основе случайного выбора фрагмента, необходимо смоделировать случайный процесс $\langle \tilde{N}(t); t \geq 0 \rangle$ изменения полного числа фрагментов в системе, например, положить его пуассоновским. Тогда, положив $N(t) = M\tilde{N}(t)$, устраняется указанный недостаток. Естественно считать, что, при больших значениях t , когда полное число фрагментов велико, случайный процесс $\langle \tilde{N}(t); t \geq 0 \rangle$ становится статистически независимым от случайного процесса $\langle \tilde{r}(t); t \geq 0 \rangle$.

Введем теперь понятие медленной фрагментации. Будем рассуждать в терминах функции $E(t)$, представляющей собой величину энергии, поступившей в систему и потраченную на дробление фрагментов. Она является монотонно возрастающей. Введем обратную монотонно-возрастающую функцию $t = \varphi(E)$. Тогда, произведя замену переменной в распределении $N(r, t)$ числа фрагментов по размерам,

$$N(r, t) = N(r, \varphi(E)) \equiv \bar{N}(r, E), \tag{1}$$

Свяжем величину энергии $E(t)$ с $\bar{N}(r, E)$ соотношением

$$E = \alpha \int_0^\infty r^2 dN(r, \varphi(E)) = \alpha \int_0^\infty r^2 d\bar{N}(r, E) \tag{2}$$

с некоторым коэффициентом пропорциональности α , которое учитывает, что фрагменты имеют примерно одинаковую форму. При этом полное число фрагментов $N(t)$ в момент t становится зависимым только от $E(t)$, $N(t) = N(\varphi(E)) \equiv N(E)$.

Введем функцию распределения

$$F(r, t) = \frac{\bar{N}(r, E)}{\bar{N}(E)}.$$



Тогда

$$\frac{E}{\bar{N}(E)} = \alpha \int_0^{\infty} r^2 dF(r, t).$$

Если принять, что процесс фрагментации такой, что $F(r, t) \rightarrow 1$, $r > 0$ при $t \rightarrow \infty$, то есть размеры всех фрагментов стремятся к нулю, тогда, переходя к пределу $t \rightarrow \infty$ в приведенном выше равенстве, получаем

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{E}{\bar{N}(E)} = \alpha \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} r^2 dF(r, t) = 0.$$

Таким образом, при неограниченном увеличении времени, в условиях пренебрежимо малых тепловых потерь, удельная энергия, потраченная на образование одного фрагмента стремится к нулю. В этом случае, отношение $\dot{E}(t)/\alpha\dot{N}(t)$ также стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, если функции $E(t)$ и $N(t)$ изменяются плавно.

Пусть $F(r, t) \rightarrow 1$, $r > 0$ при $t \rightarrow \infty$ так, что средний размер

$$\rho(t) = \int_0^{\infty} r dF(r, t)$$

стремится к нулю. В том случае, когда имеет место

$$\frac{\dot{E}(t)}{\alpha\rho^2(t)\dot{N}(t)} \rightarrow 0$$

и, одновременно, к нулю стремится относительная дисперсия $D\tilde{r}(t)/[M\tilde{r}(t)]^2$, $D\tilde{r}(t) = M\tilde{r}^2(t) - (M\tilde{r}(t))^2$ случайного размера $\tilde{r}(t)$, будем говорить, что на финальном этапе эволюции реализуется *медленная фрагментация*.

Физически медленная фрагментация состоит в том, что эволюционные изменения в системе фрагментов, которые происходят за характерное для каждой из систем время, к очень малому изменению среднего размера фрагментов по сравнению с текущим средним размером.

3. Диффузионное описание медленной фрагментации. В схеме случайного выбора фрагмента, когда фрагментация описывается случайным процессом $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, удобно считать, что этот процесс индуцируется случайным процессом $\langle \tilde{E}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, описывающим величину энергии, поглощённой системой фрагментации. Процесс $\langle \tilde{E}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ естественно моделировать как марковский скачкообразный процесс, у которого каждый из случайных скачков $\tilde{\varepsilon}_l = \tilde{E}(\tilde{\tau}_l) - \tilde{E}(\tilde{\tau}_l - 0)$, $l \in \mathbb{N}$, происходящих в соответствующий ему случайный момент времени $\tilde{\tau}_l$, описывает величину энергии, потраченной на дробление какого-то из фрагментов системы в этот момент времени. Однако, даже при явном задании распределения вероятностей случайного процесса $\langle \tilde{E}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, весьма затруднительно, на основе каких-то естественных теоретических



предположений, построить отображение, однозначно определяющее индуцированный процесс $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$. Из общих физических соображений, на основе законов сохранения, можно только связать одноточечные математические ожидания $M\tilde{r}^2(t)$, $M\tilde{r}^3(t)$ этого процесса со средней энергией $M\tilde{E}(t)$ и объёмом системы фрагментации. Более того, даже для математической формулировки этих связей требуется знание величины математического ожидания $N(t) = M\tilde{N}(t)$ случайного процесса $\langle \tilde{N}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, описывающего изменение полного числа фрагментов в системе. Этот случайный процесс индуцируется процессом $\langle \tilde{E}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, описывающим энергию, потраченную ко моменту времени t на дробление фрагментов так, что $E(t) = M\tilde{E}(t)$, также как и процесс $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$. Однако, также как и для этого последнего процесса, из общих теоретических соображений, процесс $\langle \tilde{N}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ довольно сложно построить на основе процесса $\langle \tilde{E}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$.

В такой ситуации, описание фрагментации в схеме случайного выбора фрагмента, приходится строить, принимая процесс $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ за основной, и, при задании его распределения вероятностей, связь с процессами $\langle \tilde{E}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, $\langle \tilde{N}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ учитывать только посредством указания зависимости распределения вероятностей процесса $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ от математических ожиданий $M\tilde{E}(t)$, $M\tilde{N}(t) = N(t)$.

Обозначим посредством $f(r, t)$ плотность частного распределения первого порядка случайного процесса $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$,

$$f(r, t) = \frac{d}{dr} \text{Pr}\{\tilde{r}(t) < r\}.$$

Тогда, считая заданным значение математического ожидания $M\tilde{N}(t) = N(t)$, плотность распределения $g(r, t)$ по размерам r случайного числа фрагментов выражается формулой

$$g(r, t) = N(t)f(r, t). \tag{3}$$

Используя эту плотность распределения, выразим полный объём системы фрагментов и затраченную к моменту времени t среднюю энергию $E(t) = M\tilde{E}(t)$ формулами

$$V = N(t) \int_0^\infty r^3 f(r, t) dr, \tag{4}$$

$$E(t) = \alpha N(t) \int_0^\infty r^2 f(r, t) dr. \tag{5}$$

Тогда, описание фрагментации в схеме случайного выбора фрагмента состоит в задании случайного процесса $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, у которого плотность частного распределения $f(r, t)$ удовлетворяет интегральным соотношениям (4) и (5).

Поставленным условиям удовлетворяет очень широкий класс случайных процессов, так как на свойства конструируемого случайного процесса, которые связаны с двух-, с трёх- и, вообще, с любым многоточечным частным распределением, не накладываются никаких ограничений. Класс возможных процессов существенно сужается, если



потребовать, и это естественно с физической точки зрения, чтобы случайный процесс был *марковским*. В этом случае, он характеризуется одной плотностью распределения условных вероятностей перехода $f(r, t; r', t')$ из состояния $\tilde{r}(t') = r'$ в момент времени t' в состояние $\tilde{r}(t) = r$ в момент времени t , $t \geq t'$, которая удовлетворяет уравнению

$$\dot{f}(r, t; r', t') = (\mathbf{L}_t[f])(r, t; r', t') \quad (6)$$

с линейным, вообще говоря зависящим от времени t , как от параметра, оператором \mathbf{L}_t и начальному условию $f(r, t; r', t') = \delta(r - r')$ при $t = t'$. Этому же уравнению удовлетворяет плотность $f(r, t)$,

$$\dot{f}(r, t) = (\mathbf{L}_t[f])(r, t), \quad (7)$$

которая при $t = 0$ совпадает с некоторой начальной, наперёд заданной плотностью $f(r, 0) = f_0(r)$.

Таким образом, в предположении марковости процесса $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, задание его распределения вероятностей сводится к указанию оператора \mathbf{L}_t , определяющего уравнение (7). С учётом условий (4) и (5) для плотности $f(r, t)$, этот оператор должен, дополнительно, удовлетворять условиям

$$\int_0^{\infty} r^3 [\gamma(t)f(r, t) + (\mathbf{L}_t[f])(r, t)] dr = 0, \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} r^2 [\gamma(t)f(r, t) + (\mathbf{L}_t[f])(r, t)] dr = \frac{\dot{E}(t)}{\alpha N(t)}, \quad (9)$$

$$\gamma(t) = \frac{\dot{N}(t)}{N(t)}, \quad (10)$$

которые получаются дифференцированием по t равенств (4) и (5).

Равенства (8) и (9) можно представить в следующей форме

$$\int_0^{\infty} f(r, t) [r^3 \gamma(t) + \mathbf{L}_t^*[r^3]] dr = 0, \quad \int_0^{\infty} f(r, t) [r^2 \gamma(t) + \mathbf{L}_t^*[r^2]] dr = \frac{\dot{E}(t)}{\alpha N(t)}, \quad (11)$$

где введён оператор \mathbf{L}_t^* , сопряжённый к оператору \mathbf{L}_t . Эти равенства должны выполняться при любой наперёд заданной начальной плотности распределения $f(r, 0)$. Так как в качестве такой начальной плотности распределения можно выбрать плотность $f(r, t)$ в любой момент времени t , то выполнимость первого из равенств (11) возможна только в том случае, когда тождественно обращается в нуль выражение в квадратной скобке под знаком интеграла

$$r^3 \gamma(t) + \mathbf{L}_t^*[r^3] = 0. \quad (12)$$

Что касается второго равенства (11), то учитывая условие нормировки плотности $f(r, t)$,

$$\int_0^{\infty} f(r, t) dr = 1, \quad (13)$$



оно представляется в следующем виде

$$\int_0^{\infty} f(r, t)[r^2\gamma(t) + L_t^*[r^2] - \dot{E}(t)/\alpha N(t)]dr = 0 \quad (14),$$

и поэтому, на основании таких же рассуждений, мы приходим к выводу, что оно эквивалентно равенству

$$r^2\gamma(t) + L_t^*[r^2] - \dot{E}(t)/\alpha N(t) = 0. \quad (15)$$

По сравнению с выводом уравнения (12), требование чтобы равенство (15) имело место для любой плотности $f(r, t)$ является более сильным, так как в нём присутствуют наперёд заданные функции $E(t)$ и $N(t)$.

Итак, резюмируя, можно сказать, что задача построения марковского случайного процесса, описывающего фрагментацию твердотельного материала в схеме случайного выбора фрагмента, сводится к построению линейного оператора L_t , сохраняющего положительность плотности $f(r, t)$ и её нормировку (13),

$$\int_0^{\infty} (L_t[f])(r, t)dr = 0, \quad (16)$$

и такого, что сопряжённый к нему оператор L_t^* удовлетворяет тождествам (12) и (15).

4. Марковский непрерывный процесс фрагментации. Покажем, что не существует марковского случайного процесса *диффузионного* типа, в точности удовлетворяющего этим условиям. Однако, существует такой диффузионный случайный процесс, который удовлетворяет условиям (12), (15) асимптотически точно в том случае, когда при $t \rightarrow \infty$ имеет место

$$\frac{\dot{E}(t)}{\alpha \dot{N}(t)\rho^2(t)} \rightarrow 0. \quad (16)$$

Будем считать, что марковский процесс $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, описывающий медленную фрагментацию в схеме случайного выбора фрагмента является *непрерывным марковским случайным процессом*, то есть он обладает непрерывными с вероятностью единица траекториями. Ясно, что, в точном смысле этого слова, процесс фрагментации не может быть таковым, так как состояние системы фрагментации всегда изменяется скачками в случайные моменты времени, в которые происходит дробление какого-то из фрагментов. Однако, если пренебречь средней величиной времени между такими дроблениями, по сравнению с каким-то временем, за которое происходит значительное изменение состояние системы фрагментации в целом, а также считать, что средняя величина скачков размеров фрагментов очень мала, по сравнению с характерным средним размером в исходном состоянии системы, что может иметь место на финальном этапе эволюции системы, то скачкообразный случайный процесс $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ допустимо аппроксимировать некоторым случайным процессом с непрерывными траекториями. Таким образом, помимо медленности фрагментации, для конструируемого процесса мы требуем его непрерывности.



Предположение о непрерывности марковского процесса $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ резко сужает возможный выбор операторов L_t , на основе которых формулируется эволюционное уравнение (7). Согласно теореме А.Н.Колмогорова, вся совокупность этих операторов полностью описывается формулой

$$L_t[\cdot] = \frac{\partial}{\partial r}[a(r, t)(\cdot)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}[b^2(r, t)(\cdot)], \quad (17)$$

где $a(r, t)$, $b^2(r, t) > 0$ – произвольные коэффициенты, допускающие существование решений уравнения (7), хотя бы в окрестности точки $t = 0$. Они содержат всю информацию об условиях дробления. Наличие только двух неизвестных коэффициентов позволяет восстановить оператор на основании двух уравнений (12) и (15). В самом деле, так как плотность $f(r, t)$ интегрируема в окрестности нуля, то интегрированием по частям выражения $r^j(L_t[f])(r, t)$, $j = 2, 3, \dots$ в пределах от 0 до ∞ , получим

$$L_t^*[r^j] = -a(r, t) \frac{d}{dr} r^j + \frac{1}{2} b^2(r, t) \frac{d^2}{dr^2} r^j = -a(r, t) j r^{j-1} + \frac{1}{2} b^2(r, t) j(j-1) r^{j-2}.$$

Воспользовавшись этим выражением для действия сопряжённого оператора на степенную функцию при $j = 2, 3$, уравнения (12) и (15) представим в следующем виде

$$r^2 \gamma(t) - 3a(r, t)r + 3b^2(r, t) = 0. \quad (18)$$

$$r^2 \gamma(t) - 2a(r, t)r + b^2(r, t) = \dot{E}(t)/\alpha N(t). \quad (19)$$

Решением этой системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a(r, t)$, $b^2(r, t)$ оператора L_t являются

$$a(r, t) = \gamma(t) \left(\frac{2}{3}r - \frac{\dot{E}(t)}{\alpha r \dot{N}(t)} \right), \quad (20)$$

$$b^2(r, t) = \gamma(t) \left(\frac{1}{3}r^2 - \frac{\dot{E}(t)}{\alpha \dot{N}(t)} \right), \quad (21)$$

где мы воспользовались соотношением (10).

Уравнение (7) с оператором L_t вида (17), коэффициенты которого определяются формулами (20) и (21), не имеет решений. Это связано с тем, что коэффициент $b^2(r, t)$ становится отрицательным при $r^2 < 3[\alpha \dot{N}(t)]^{-1} \dot{E}(t)$, однако, при этом коэффициент $a(r, t)$ в точке $r^2 = 3[\alpha \dot{N}(t)]^{-1} \dot{E}(t)$ положителен.

□ В самом деле, если бы уравнение (7) и, соответственно, (6) имели решения, то существовал бы непрерывный марковский случайный процесс $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ с плотностью условных вероятностей перехода $f(r, t; r', t')$, удовлетворяющей этому уравнению. Этот процесс существует на временном интервале, на котором определена эта плотность. Но тогда, этот процесс определяется решениями $\tilde{r}(t)$ стохастического дифференциального уравнения Ито

$$d\tilde{r}(t) = -a(\tilde{r}(t), t)dt + b^2(\tilde{r}(t), t)d\tilde{w}(t), \quad (22)$$



где $\tilde{w}(t)$ – траектории стандартного винеровского процесса. Для каждой точки r такой, что $r^2 > 3[\alpha\dot{N}(0)]^{-1}\dot{E}(0)$ имеется ненулевая вероятность того, что траектория $\tilde{r}(t)$, начинающаяся в этой точке, достигает впервые точки $3[\alpha\dot{N}(t)]^{-1}\dot{E}(t)$ в некоторый наперёд заданный времени t и, в этой точке, имеют место $b^2(\tilde{r}(t), t) = 0$, $a(\tilde{r}(t), t) > 0$. Следовательно, траектория $\tilde{r}(t)$ достигает этой граничной точки разрешённой области расположения траекторий случайного марковского процесса, обладая отрицательной скоростью. Это влечёт непродолжаемость рассматриваемой траектории. Таким образом, построенный марковский случайный процесс обладает, с ненулевой вероятностью, непродолжаемыми траекториями, которые могут обрываться в любой момент времени. Поэтому, полная одноточечная вероятность процесса, распределённая с плотностью $f(r, t)$, не должна сохраняться. В то же время, она, явным образом, сохраняется вследствие её подчинённости уравнению (7). Полученное противоречие доказывает сделанное выше утверждение об отсутствии решений уравнения (7), в котором оператор L_t определяется формулой (17) с коэффициентами (20), (21). ■

Таким образом, уравнение (7) с коэффициентами (20), (21) является плохой математической моделью для описания процесса медленной фрагментации. Однако, если эту модель считать как приближение относительно некоторой более общей модели, в условиях, когда параметр $\dot{E}/\alpha\dot{N}$ пренебрежимо мал, то, в формулах (20), (21), можно отбросить вторые слагаемые, считая их малыми по сравнению с первыми. Исследуемый режим медленной фрагментации, в этом случае, получается как нулевое приближение по этому малому параметру. Это тем более будет верно в том случае, когда $\dot{E}(t)/\dot{N}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и получаемое при этом уравнение должно описывать эволюцию фрагментации для размеров r , удовлетворяющих условию $r^2 > 3[\alpha\dot{N}(t)]^{-1}\dot{E}(t)$. Чтобы такое описание было пригодным для вычисления различного рода статистических характеристик медленной фрагментации, нужно чтобы в области $(3[\alpha\dot{N}(t)]^{-1}\dot{E}(t))^{1/2}, \infty)$ изменения переменной r содержалась подавляющая часть вероятности, определяемой плотностью $f(r, t)$. Критерием выполнимости такого положения является условие, состоящее в том, что средняя величина $\rho(t)$ размера фрагмента, которая определяется математическим ожиданием $M\tilde{r}(t) = \rho(t)$, много больше, чем левая граничная точка разрешённой области значений, то есть должно иметь место неравенство

$$3[\alpha\dot{N}(t)]^{-1}\dot{E}(t) \ll \rho^2(t), \tag{23}$$

которое, таким образом, представляет собой условие применимости развиваемых в этом разделе представлений об описании медленной фрагментации. Неравенство (23) накладывает ограничение на темп роста числа фрагментов в системе $N(t)$ для того, чтобы имела место медленная фрагментация. Так как

$$\rho^2(t) \leq \int_0^\infty r^2 f(r, t) dr$$

и последний интеграл равен $E(t)/\alpha N(t)$, согласно закону сохранения энергии, то из (23) следует, что должно выполняться неравенство

$$E(t)/\alpha N(t) \gg 3\dot{E}(t)/\alpha\dot{N}(t).$$



Поэтому, должно иметь место следующее условие на темп роста функции $N(t)$,

$$\dot{N}(t)/N(t) \gg 3\dot{E}(t)/E(t),$$

что, вообще говоря, приводит к следующему достаточному условию

$$N(t) \gg (E(t)/E(0))^3. \quad (24)$$

Считая условие (23) выполненным, положим, что коэффициенты (20), (21) определяются приближёнными формулами

$$a(r, t) = \frac{2}{3}r\gamma(t), \quad (25)$$

$$b^2(r, t) = \frac{1}{3}r^2\gamma(t). \quad (26)$$

В этом случае, уравнение (7) принимает вид

$$\gamma^{-1}(t)\dot{f}(r, t) = \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial r}[rf(r, t)] + \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[r^2f(r, t)]$$

или, после перехода к новой временной шкале $t \Rightarrow s$, $ds = \gamma(t)dt$, –

$$\frac{\partial}{\partial s}f(r, s) = \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial r}[rf(r, s)] + \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[r^2f(r, s)], \quad (27)$$

где $f(r, s)$ теперь обозначает функцию $f(r, t(s))$ с зависимостью $t(s)$ определяемой дифференциальным уравнением $ds/dt = \gamma(t)$.

Уравнение (27) связано с непрерывным марковским процессом, траектории $\tilde{r}(s)$ которого удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению Ито

$$d\tilde{r}(s) = -\frac{2}{3}\tilde{r}(s)ds + \frac{1}{3}\tilde{r}(s)d\tilde{w}(s).$$

Этот процесс вполне определён и уравнение (27) имеет решения на всей положительной полуоси времени s .

5. Финальное поведение процесса медленной фрагментации. В этом пункте мы приведём явные решения уравнения (27) и, на их основе, выясним какое финальное поведение проявляет медленная фрагментация при $s \rightarrow \infty$. Полученное уравнение (27) решается точно посредством сведения его к уравнению с постоянными коэффициентами. Введя функцию $u(r, s) = rf(x, s)$, запишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial s}u(r, s) = \frac{5r}{6}\frac{\partial}{\partial r}u(r, s) + \frac{r}{6}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}u(r, s)\right]. \quad (28)$$

Произведем в этом уравнении замену независимой переменной, положив $x = \ln r$. При этом мы переобозначим $u(r, s) = u(e^x, s) \equiv \bar{u}(x, s)$. В результате, получим

$$\frac{\partial}{\partial s}\bar{u}(x, s) = \frac{5}{6}\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x, s) + \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u}(x, s). \quad (29)$$



Это уравнение сводится к каноническому виду параболического уравнения посредством подстановки $\bar{u}(x, s) = v(y, s)$, где $y = x + 5/6s$. В результате такой подстановки

$$\frac{\partial}{\partial s} \bar{u}(x, s) = \frac{\partial}{\partial s} v(y, s) + \frac{5}{6} \frac{\partial}{\partial y} v(y, s), \quad \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(x, s) = \frac{\partial}{\partial y} v(y, s),$$

уравнение (29) приводится к следующему

$$\frac{\partial}{\partial s} v(y, s) = \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v(y, s). \tag{30}$$

Общее решение этого уравнения записывается в каноническом виде

$$v(y, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{3(y-y')^2}{2s}\right) v(y', 0) dy',$$

где функция $v(y, 0) = \bar{u}(x, 0) = u(e^x, 0) = u(r, 0) = rf(r, 0)$ определяется начальной плотностью распределения $f(r, 0)$. Поэтому,

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{3(x+5/6s-x')^2}{2s}\right) \bar{u}(x', 0) dx' = u(e^x, s), \\ u(r, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s/3}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{3[\ln(re^{5s/6}/r')]^2}{2s}\right) u(r', 0) \frac{dr'}{r'}, \\ f(r, s) &= \frac{r^{-1}}{\sqrt{2\pi s/3}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{3[\ln(re^{5s/6}/r')]^2}{2s}\right) f(r', 0) dr'. \end{aligned} \tag{31}$$

Если считать, что когда-то в далёком прошлом изучаемая система фрагментации состояла из одного цельного образца с размером r_0 , то, в качестве начальной плотности распределения, необходимо взять $f(r, 0) = \delta(r - r_0)$. В этом случае, формула (31) преобразуется к колмогоровскому виду

$$f(r, s) = \frac{r^{-1}}{\sqrt{2\pi s/3}} \exp\left(-\frac{3[\ln(re^{5s/6}/r_0)]^2}{2s}\right). \tag{32}$$

Полученная формула совпадает с асимптотической формулой, найденной в работе [1].

Таким образом, как только в процессе медленной фрагментации имеется неограниченный рост числа фрагментов $N(t)$, и $\dot{E}(t)$ темп роста накачиваемой систему той части энергии, которая тратится на дробления фрагментов намного медленнее темпа роста $\dot{N}(t)$ полного их числа, то, при реализации схемы случайного выбора фрагмента, в ансамбле однотипных систем, проявляется логарифмически нормальное распределение по размерам фрагментов, независимо от того какое эмпирическое распределение имеется в



каждой из систем этого ансамбля. Заметим также, что полученный результат никак не связан с конечностью второго логарифмического статистического момента плотности $f(r, 0)$ начального распределения по размерам, в отличие от работы [1].

Верифицируем теперь возможность применения развитой теории. Так как в терминах эффективной шкалы времени $s = \int_0^t \gamma(t') dt'$, число фрагментов $N(s)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{dN(s)}{ds} = \frac{dN(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \left(\frac{dN(t)}{dt} / N(s) \right) \gamma^{-1}(t) N(s) = [\gamma(t) \gamma^{-1}(t)] N(s) = N(s),$$

то $N(s) = N_0 e^s$. По этой причине, выполнимость неравенства (23) удобно проверять в терминах эффективного времени s , когда оно принимает форму

$$\rho^2(s) \gg \frac{3}{\alpha N_0 e^s} \frac{dE(s)}{ds}.$$

В неравенстве имеется произвол только в выборе функции $E(s)$. Таким образом, по сравнению с неравенством (23), у нас имеется только одна произвольная функция, так как произвольность выбора функции $N(t)$ в (23) отражается на выборе шкалы времени. Выразим теперь функцию $M\tilde{r}^2(s)$ через $E(s)$ для случая $f(r, 0) = \delta(r - r_0)$. С этой целью, вычислим, используя явный вид плотности $f(r, s)$, математическое ожидание

$$M\tilde{r}^2(s) = \int_0^\infty r^2 f(r, s) dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi s/3}} \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{3 [\ln(xe^{5s/6})]^2}{2s}\right) dx M\tilde{r}^2(0) = e^{-s} M\tilde{r}^2(0).$$

Тогда

$$E(s) = \alpha N(s) \int_0^\infty r^2 f(r, s) dr = \alpha N_0 M\tilde{r}^2(0),$$

откуда следует, что требуемое неравенство, заведомо выполняется, так как, в принятом нами приближении, производная $dE(s)/ds$ очень мала.

Литература

1. Колмогоров А.Н. О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР.– 1941.– 31., 2.– С.99-101.
2. Сагдеев Р.З., Тур А.В., Яновский В.В. Формирование и универсальные свойства распределений по размерам в теории дробления // ДАН СССР.– 1987.– 294., 5.– С.1105-1110.
3. Вирченко Ю.П., Шеремет О.И. Геометрические модели статистической теории фрагментации // Теор. и мат. физика.– 2001.– 128., 2.– С.161-177.
4. Ziff R.M. An explicit solutions to a discrete fragmentation model // J.Phys.A.– 1992.– 25.– P.2569-2576.
5. Virchenko Yu.P., Brodskii R.E. The Kolmogorov equation in the stochastic fragmentation theory and branching processes with infinite collection of particle types // Abstract and Applied Analysis.– 2006.– Art.ID 36215.– P.1-10.



DIFFUSION MODEL IN FRAGMENTATION THEORY

R.E. Brodskii, Yu.P. Virchenko

Institute for Single Crystals of NANU,
Lenin Av., 60, Kharkiv, 61001, Ukraine
Belgorod State University,

Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. The diffusion model of brittle materials fragmentation is constructed. In particular case, this model leads to the logarithmically normal distribution of fragment sizes being famous in fragmentation theory.

Key words: fragmentation, size, probability distribution, Markov's process.



MSC 60D05

ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ РАДИУСОВ СЛУЧАЙНЫХ ОКРУЖНОСТЕЙ ПО ЗАДАННОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИХ ХОРД

*Ю.П. Вирченко, **О.Л. Шпилинская

*Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

**Институт монокристаллов НАНУ,
пр. Ленина, 60, Харьков, 61001, Украина

Аннотация. В работе решается задача о восстановлении распределения радиусов случайных кругов, случайно расположенных на плоскости, основанному на заданном распределении вероятностей их хорд, которые отсекаются параллельными друг другу и эквидистантно расположенными на плоскости прямыми.

Ключевые слова: геометрические вероятности, случайные окружности, распределение вероятностей.

1. Введение. Будем рассматривать следующую задачу, постановку которой можно понимать как некоторое усиление классической задачи Бюффона в стохастической геометрии (см., например, [1]) и которая состоит в вычислении вероятности пересечения одной из параллельных друг другу, эквидистантно расположенных с расстоянием $2d$, $d \in \mathbb{R}$ на этой плоскости прямых спрямляемым фиксированным (с точностью до его перемещения) плоским контуром при его случайном размещении на плоскости. В нашем случае, контур представляет собой окружность. Усиление же задачи состоит в том, что окружность уже не будет фиксированной по размеру, а, наоборот, каждая ее реализация определяется случайным радиусом $\xi > 0$ с абсолютно непрерывным законом распределения, определяемым плотностью $f_\xi(x)$, $x > 0$. Ввиду симметричности относительно вращений, случайное расположение окружности на плоскости, в отличие от классической задачи Бюффона, полностью характеризуется одним случайным параметром — ее центром. Это обстоятельство сразу же, несмотря на случайность геометрии контура, упрощает задачу Бюффона в классической постановке. Так, если считать, что центры окружностей представляют собой, как и в задаче Бюффона, однородное случайное пуассоновское точечное поле, то вероятность пересечения P , очевидным образом, определяется этой плотностью посредством следующей формулы

$$P = \frac{1}{d} \int_0^d x f_\xi(x) dx .$$

При этом здесь и далее считается, что почти наверное имеет место неравенство $\xi < d$, то есть $f_\xi(x) = 0$ при $x \geq d$.



В самом деле, если η — случайная координата центра окружности по направлению, перпендикулярному семейству прямых на плоскости, отсчитываемая от ближайшей к ней прямой, то, по указанному выше предположению о распределении центров случайных окружностей, плотность распределения $h_\eta(y)$, $|y| < d$ этой величины имеет вид

$$h_\eta(y) = \frac{1}{2d} \Theta(d - |y|), \quad \Theta(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Условная же вероятность того, что окружность пересечет эту ближайшую прямую при условии $\eta = y$ равна

$$\Pr\{\xi > |y|\} = \int_{|y|}^d f_\xi(x) dx.$$

Тогда

$$P = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \Pr\{\xi > |y|\} dy = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d dy \int_{|y|}^d f_\xi(x) dx = \frac{1}{d} \int_0^d x f_\xi(x) dx.$$

Таким образом, в рассматриваемой постановке, задача о пересечении случайной окружности имеет очень простое решение. Более интересная, как с математической точки зрения, так и с точки зрения приложений, задача состоит в нахождении распределения вероятностей, плотность которого мы обозначим $g_\zeta(x)$, $0 < x < 2d$, случайной величины ζ , которая является длиной отрезка — хорды случайной окружности, отсекаемого на прямой окружностью при ее пересечении окружностью. Очевидно, что значение случайной величины ζ следующим образом определяется значениями случайных величин ξ и η ,

$$\zeta = 2\sqrt{\xi^2 - \eta^2}. \quad (2)$$

Тогда вычисление плотности $g_\zeta(x)$ на основе заданной плотности $f_\xi(x)$ уже представляет собой более сложную задачу, решение которой дается в следующем разделе.

С прикладной же точки зрения представляет интерес как раз обратная задача (которую можно рассматривать как задачу стереологии) — восстановление плотности $f_\xi(x)$ по заданной плотности $g_\zeta(x)$, решению которой посвящено настоящее сообщение. Это решение позволяет по определяемой экспериментально под микроскопом статистике длин хорд восстанавливать распределение вероятностей радиусов сферических пор, образующихся в оптически полупрозрачных средах.

2. Вычисление плотности g_ζ .

Теорема 1. *Плотности распределения $f_\xi(u)$ и $g_\zeta(z)$ связаны соотношением*

$$g_\zeta(z) = \frac{z}{4d} \int_{z/2}^d \frac{f_\xi(u) du}{\sqrt{u^2 - (z/2)^2}}. \quad (3)$$



□ Выразим плотность распределения $g_\zeta(z)$ случайной величины ζ , в предположении, что закон распределения хорд также является абсолютно-непрерывным по мере Лебега. Заметим, что плотность распределения $f_\xi(x)$ случайной величины ξ может быть представлена формулой

$$f_\xi(x) = \langle \delta(x - \xi) \rangle_\xi,$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по распределению вероятностей случайной величины ξ . Тогда условная плотность распределения вероятности случайного события $\{\zeta < z\} = \{2\sqrt{\xi^2 - y^2} < z\}$ при условии, что $\eta = y$ представима в виде $\langle \delta(z - 2\sqrt{\xi^2 - y^2}) \rangle_\xi$, и поэтому, интегрируя по y с плотностью $h_\eta(y)$, безусловную плотность $g_\zeta(z)$ запишем в следующей форме

$$g_\zeta(z) = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \langle \delta(z - 2\sqrt{\xi^2 - y^2}) \Theta(\xi - |y|) \rangle_\xi dy. \quad (4)$$

Полученное представление удобно тем, что можно воспользоваться известным правилом преобразования δ -функции, зависящей от сложного аргумента $a(\xi) = z - 2\sqrt{\xi^2 - y^2}$. А именно,

$$\delta(a(\xi)) = \frac{\delta(\xi - \xi_*(z, y))}{|a'(\xi_*(z, y))|},$$

где $\xi_*(z, y) = \sqrt{(z/2)^2 + y^2}$ – единственный положительный корень уравнения $a(\xi) = 0$.

Так как

$$|a'(\xi_*(z, y))| = \frac{4}{z} \sqrt{(z/2)^2 + y^2},$$

то из (4) имеем

$$\begin{aligned} g_\zeta(z) &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d dy \int_0^d \delta\left(z - 2\sqrt{(x/2)^2 - y^2}\right) f_\xi(x) \Theta(x - |y|) dx = \\ &= \frac{z}{4d} \int_0^d dy \int_0^d \Theta(x - y) f_\xi(x) \frac{\delta\left(x - \sqrt{(z/2)^2 + y^2}\right)}{\sqrt{(z/2)^2 + y^2}} dx = \\ &= \frac{z}{4d} \int_0^d f_\xi\left(\sqrt{(z/2)^2 + y^2}\right) \frac{dy}{\sqrt{(z/2)^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Вводя замену переменной интегрирования $u = \sqrt{(z/2)^2 + y^2}$ получаем следующее выражение

$$g_\zeta(z) = \frac{z}{4d} \int_{z/2}^d \frac{f_\xi(u) du}{\sqrt{u^2 - (z/2)^2}},$$



где мы воспользовались тем, что $du = (y/u)dy$, $y = \sqrt{u^2 - (z/2)^2}$ и $f_\xi(u) = 0$ при $u > d$. \square

Обратная задача. В практических приложениях возникают задачи, когда по измененной, посредством обработки статистики длин хорд, плотности g_ζ их распределения вероятностей, в описанной во введении постановке статистического эксперимента, требуется восстановить плотность распределения вероятности диаметров случайных кругов, однородно разбрасываемых на плоскости, то есть восстановить плотность f_ξ [2, 3]. Очевидно, исходя из утверждения доказанной теоремы, что для решения такой задачи необходимо решить интегральное уравнение, которое получается из (3), если считать, в этом соотношении функцию g_ζ заданной, а f_ξ искомой. При этом мы получаем интегральное уравнение Вольтерра первого рода, которое легко сводится к классическому интегральному уравнению Абеля (см., например, [4]) и поэтому решается явно в терминах квадратур. Приведем процедуру построения этого решения. С этой целью, введем функцию $g(z)$ так, что $g(z/2) = g_\zeta(z)$. Тогда

$$g(z) = \frac{z}{2d} \int_z^d \frac{f_\xi(u)du}{\sqrt{u^2 - z^2}}.$$

Положим $z^2 = w$, $u^2 = v$ и введем функции $F(v) = f_\xi(v)/\sqrt{v}$, $G(w) = g(w)/\sqrt{w}$. Тогда эти функции связаны интегральным соотношением

$$G(w) = \frac{1}{4d} \int_w^{d^2} \frac{F(v)dv}{\sqrt{v-w}}, \tag{5}$$

которое, как раз, является интегральным уравнением типа уравнения Абеля относительно функции F и, по этой причине, решается явно с помощью стандартного аналитического приема.

Проинтегрируем обе части полученное уравнения по z с интегрирующим множителем $(w-t)^{-1/2}$

$$\int_t^{d^2} \frac{G(w)dw}{\sqrt{w-t}} = \frac{1}{4d} \int_t^{d^2} \frac{dw}{\sqrt{w-t}} \int_w^{d^2} \frac{F(v)dv}{\sqrt{v-w}}, \tag{6}$$

Изменим порядок интегрирования в правой части. В результате, получим выражение

$$\int_t^{d^2} \frac{dw}{\sqrt{w-t}} \int_w^{d^2} \frac{F(v)dv}{\sqrt{v-w}} = \int_t^{d^2} F(v)dv \int_t^v \frac{dw}{\sqrt{(w-t)(v-w)}} = \int_t^{d^2} F(v)dv.$$

Таким образом, после интегрирования уравнение принимает вид

$$\int_t^{d^2} \frac{G(w)dw}{\sqrt{w-t}} = \frac{\pi}{4d} \int_t^{d^2} F(v)dv. \tag{7}$$

Дифференцируя по t , получим искомое решение исходного уравнения

$$F(t) = -\frac{4d}{\pi} \cdot \frac{d}{dt} \int_t^{d^2} \frac{G(w)dw}{\sqrt{w-t}}. \tag{8}$$



Переходя в этом выражении к исходным переменным $t \Rightarrow v$ и функциям $f_\xi(\sqrt{v}) = F(\sqrt{v})\sqrt{v}$ и $g(\sqrt{w}) = G(\sqrt{w})\sqrt{w}$, а затем $w = z^2$, $v = u^2$, находим

$$\frac{f_\xi(\sqrt{v})}{\sqrt{v}} = -\frac{4d}{\pi} \cdot \frac{d}{dv} \int_v^{d^2} \frac{g(\sqrt{w})dw}{\sqrt{w(w-v)}}, \quad \frac{f_\xi(u)}{u} = -\frac{4d}{\pi u} \cdot \frac{d}{du} \int_u^d \frac{g(z) dz}{\sqrt{z^2 - u^2}}.$$

Окончательное выражение, позволяющее по известному распределению хорд восстановить распределение вероятностей радиусов случайных кругов на плоскости дается следующей формулой в виде интегрального преобразования плотности g_ζ ,

$$f_\xi(u) = -\frac{4d}{\pi} \cdot \frac{d}{du} \int_{2u}^{2d} \frac{g_\zeta(z)dz}{\sqrt{z^2 - 4u^2}}. \quad (9)$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. Если $g_\zeta(z)$ – плотность распределения вероятностей хорд кругов случайного радиуса, с вероятностью 1 не превосходящего $d \in \mathbb{R}$, то распределение вероятностей радиусов этих кругов является абсолютно-непрерывным по мере Лебега и его плотность распределения $f_\xi(v)$ определяется формулой (9).

Литература

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей - М: УРСС, 2005.-448 с.
2. Поджидаев В.Ф., Танько Я.А., Связь между функцией распределения хорд по размерам и диаметров сечений сферолитов // Вісник східноукраїнського національного університету ім. В.Даля.-2012.-8(179).-С.198-204.
3. Архангельский С.И., Бородихин В.М. Связь между распределениями диаметров сферических частиц и хорд их случайных сечений // Сибирский журнал индустриальной математики.-2002.-V, 3(11).-С.27-34.
4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения.- М.: Наука, 1975.-304 с.

RECONSTRUCTION OF PROBABILITY DISTRIBUTION OF RANDOM CIRCLES RADII BASED ON PROBABILITY DISTRIBUTION OF THEIR CHORDS

Yu.P. Virchenko, O.L. Shpilinskaya

Belgorod State University,
 Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru
 Institute for Single Crystals of NANU,
 Lenin Av., 60, Kharkiv, 61001, Ukraine

Abstract. It is solved the problem of reconstruction of random circles radii probability distribution which are randomly placed on plane. It is based on the given probability distribution of chords which are cut off by straight lines being parallel to each other and placed equidistant on the plane.

Key words: geometric probabilities, random circles, probability distribution.



MSC 74E20

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАРЯДА ПУЗЫРЬКОВ В КАПЛЯХ ОБЛАКОВ С УЧЕТОМ ФРАКТАЛЬНОСТИ СРЕДЫ

Т.С. Кумыков

Институт прикладной математики и автоматизации,
ул. Шортанова, 89-А, Нальчик, 360004, Россия, e-mail: macist20@mail.ru

Аннотация. В работе предложена новая модель изменения заряда пузырьков в переохлажденных облачных каплях. Модель учитывает, фрактальные свойства облаков, а ее решение было получено с применением аппарата дробного исчисления.

Ключевые слова: фрактальная размерность, математическая модель, облачная капля, пузырьки.

Введение. Известно, что облака с мощными конвективными токами имеют фрактальную структуру [1], то есть облако является фрактальной средой. Поэтому можно думать, что процессы, протекающие в такой среде, хорошо описываются с помощью аппарата дробного исчисления.

Несмотря на несомненные успехи в изучении процессов в облаках (Качурин Л.Г., Мейсон Б.Дж., Мучник В.М., Чалмерс Дж.А., Юман М., Ribeira J.C., Workman E.J., Reynold S.E., Имянитов И.М., Френкель Я.И., и т.д.), многие из них до настоящего времени изучены на недостаточном уровне. Это относится и к процессам электризации облачных частиц (капель), к влиянию электрического поля на микрофизические процессы, к влиянию микроструктуры облака на заряд и поле, и ко многим другим процессам.

Таким образом, для физики облаков представляет большой интерес разработка математических моделей конвективных облаков с детальным учетом влияния фрактальности среды на различные геопрцессы в облаках, способствующих развитию общей картины физики облаков. Математическое моделирование позволяет детально изучать как отдельные физические процессы, так и их взаимодействие между собой, а применение аппарата дробного исчисления, позволяет неявно включать дополнительные факторы взаимодействия физической системы. Несомненным преимуществом моделирования является тот фактор, что оно позволяет изучать недоступные или малодоступные для экспериментального исследования процессы с учетом фрактальности среды.

В настоящей работе проведено моделирование изменения заряда пузырьков в облачных каплях с учетом фрактальности среды, которые играют важную роль в процессе электризации облачных частиц.

Постановка и решение задачи. В процессе увеличения пузырька за счет диффузионных механизмов, важным моментом в облачных каплях является случай утечки газа в общем балансе газа в капле. Утечка газа бурно протекает в тот момент, когда переохлажденная облачная капля радиуса r сталкивается с градиной [2, 3] в результате



которого, выходя на поверхность и разрушаясь, уносят с собой определенное количество заряда, определяемая формулой $q_a = 4\pi\varepsilon_0\xi a$.

Известно [3], что средний заряд q_r , который создается одной облачной каплей, радиуса r за счет пузырьков содержащихся в ней определяется в виде

$$q_r = 4\pi\varepsilon_0\xi na, \quad (1)$$

где ε_0 – электрическая постоянная, a – радиус пузырька, ξ – электрокинетический потенциал, n – количество пузырьков радиуса a , образующихся в облачной капле радиуса r .

В формуле (1) вводя переменную t , перепишем заряд одного пузырька в капле в следующей форме

$$q_r(t) = 4\pi\varepsilon_0\xi a(t), \quad (2)$$

а изменение заряда пузырька образующегося в облачной капле примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} q_r(t) = 4\pi\varepsilon_0\xi \frac{\partial}{\partial t} a(t), \quad (3)$$

Учитывая фрактальность среды, (3) можно записать в виде

$$\lambda \partial_{0t}^\alpha q_r(t) = 4\pi\varepsilon_0\xi \frac{\partial}{\partial t} a(t), \quad (4)$$

где $\lambda = const > 0$, $\partial_{0t}^\alpha a(t) = D_{0t}^{\alpha-1} \frac{\partial a(t)}{\partial t}$ – регуляризованная дробная производная порядка α от функции $a(t)$ с началом и концом в точках 0 и t (производная по Капуто) [4], D_{ax}^α – оператор интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля дробного порядка α началом в точке $a \in [A, B]$, которая определяется следующим образом [5]:

$$D_{ax}^\alpha u(t) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \frac{u(t) dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, \alpha < 0, \\ u(t), \alpha = 0, \\ \text{sign}(x-a) \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} u(t), \alpha > 0. \end{cases}$$

где символ $\text{sign } z$ определяется равенствами $\text{sign } 0 = 0$, $\text{sign } z = z/|z|$, $z \neq 0$.

Замена $\partial/\partial t$ на ∂_{0t}^α или на D_{0t}^α в дифференциальных уравнениях, неявно включает дополнительные факторы взаимодействия физической системы. Поэтому можно утверждать, что уравнение (4) описывает фрактальный процесс.

С учетом, что $\frac{\partial}{\partial t} a(t) = 2, 4\phi \frac{p^2}{p_0\sigma} a(t)$, где a – размер пузырька, ϕ – пересыщение, p – давление окружающей среды, p_0 – атмосферное давление, σ – поверхностное натяжение воды, перепишем (4)

$$\lambda \partial_{0t}^\alpha q_r(t) = 4\pi\varepsilon_0\xi \cdot 2, 4\phi \frac{p^2}{p_0\sigma} a(t), \quad (5)$$



Обозначим $4\pi\varepsilon_0\xi \cdot 2,4\phi p^2/\lambda p_0\sigma = B$ (в случае расчета полного заряда всех пузырьков образующихся в капле, B умножается на n - количество пузырьков радиуса a), тогда (5) примет вид

$$\partial_{0t}^\alpha q_r(t) = Ba(t), \quad (6)$$

К уравнению (6) добавим начальное условие

$$q_r(0) = q_0, \quad (7)$$

Решим задачу (6), (7). Для этого используя формулу $\partial_{0t}^\alpha a(t) = D_{0t}^{\alpha-1} \frac{\partial a(t)}{\partial t}$ перепишем (6) в виде

$$D_{0t}^{\alpha-1} D_{0t}^1 q_r(t) = Ba(t), \quad (8)$$

Применив обобщенную формулу Ньютона-Лейбница к уравнению (8) получим

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha-1+1} q_r(t) - \frac{|t-0|^{-\alpha+1-1}}{\Gamma(1-\alpha+1-1)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{1-1} q_r(t) &= D_{0t}^\alpha q_r(t) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} D_{00}^0 q_r(t) = \\ &= D_{0t}^\alpha a(t) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} q_0 = Ba(t), \end{aligned} \quad (9)$$

Подеиствуем на обе части уравнения (9) оператором $D_{0t}^{-\alpha}$ тогда получим следующее выражение

$$D_{0t}^{-\alpha} D_{0t}^\alpha q_r(t) = D_{0t}^{-\alpha} \left[\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} q_0 + Ba(t) \right], \quad (10)$$

в которой после применения обобщенной формулы Ньютона-Лейбница имеем

$$D_{0t}^{\alpha-\alpha} q_r(t) - \frac{|t-0|^{\alpha-1}}{\Gamma(1+\alpha-1)} D_{00}^{\alpha-1} q_r(t) = D_{0t}^{-\alpha} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} q_0 + D_{0t}^{-\alpha} [Ba(t)], \quad (11)$$

Так как $D_{00}^{\alpha-1} q_r(t) = 0$, (11) принимает вид

$$q_r(t) = D_{0t}^{-\alpha} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} q_0 + D_{0t}^{-\alpha} [Ba(t)], \quad (12)$$

Решение правой части уравнения (12) выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} D_{0t}^{-\alpha} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} q_0 + D_{0t}^{-\alpha} [Ba(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\tau^{-\alpha} q_0 d\tau}{\Gamma(1-\alpha) |t-\tau|^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t B \frac{a(t) d\tau}{|t-\tau|^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{q_0}{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \tau^{-\alpha} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau + \frac{B}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t a(t) (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \\ &= q_0 + \frac{B}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t a(t) (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \end{aligned} \quad (13)$$



где

$$\int_0^t \tau^{-\alpha} (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau = \left| \begin{array}{l} s = \frac{\tau}{t}, \\ \tau = ts \\ d\tau = tds \end{array} \right| = \int_0^1 t^{-\alpha} s^{-\alpha} (t - st)^{\alpha-1} ds = \beta(1 - \alpha, \alpha) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha + \alpha)} = \Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha).$$

Решение задачи (6), (7) в итоге принимает вид

$$q_r(t) = q_0 + BD_{0t}^{-\alpha} a(t), \quad (14)$$

Уравнение (14) представляет собой обобщенное уравнение закона изменения заряда пузырьков создаваемое облачной каплей с учетом фрактальности среды.

Решение интегрального уравнения (14) имеет вид [6]

$$q_r(t) = q_0 + Ba_0 \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(B(t - \tau)^\alpha) d\tau,$$

где с учетом $E_{\alpha, \alpha}(B(t - \tau)^\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i (t - \tau)^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i + \alpha)}$ – функции типа Миттаг-Леффлера, окончательно (14) примет вид

$$q_r(t) = q_0 + Bq_0 \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i (t - \tau)^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i + \alpha)} d\tau.$$

Анализ результатов математического моделирования. Математическое моделирование проводилось с помощью математического пакета символьной математики Wolfram Mathematica 9. На рис. 1 приведены расчетные кривые изменения относительного заряда пузырька $q_r(t)$ в облачной капле согласно различным значениям параметров t и α .

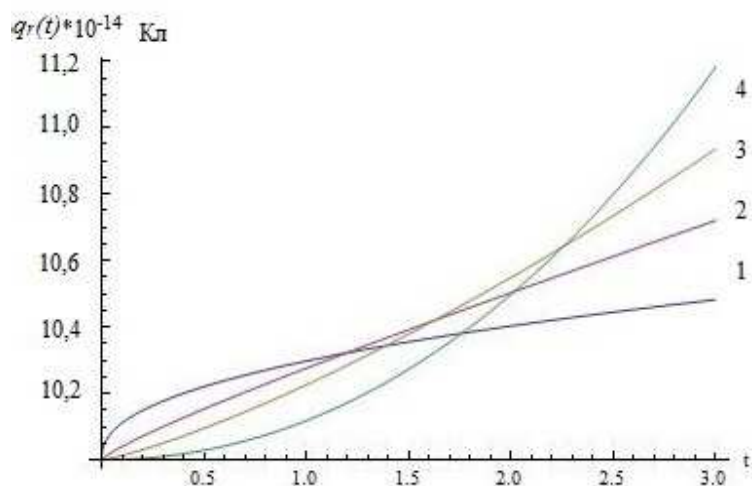


Рис. 1. Расчетные кривые определяющая область изменения $q_r(t)$ в зависимости от параметров t и α , полученные согласно формуле (14): $\alpha=0,2$ (кривая 1); $\alpha=0,4$ (кривая 2); $\alpha=0,6$ (кривая 3); $\alpha=0,8$ (кривая 4).

Видно, что при достаточно малых значениях α расчётные кривые перегруппировываются с бесконечно длинными «степенными хвостами». Можно также заметить, что «степенные хвосты» указывают на нелинейность фрактальных процессов в облачной среде. Полученные данные хорошо согласовываются с данными Ирибарне и Мейсена [7] в котором на один пузырек радиусом более 0,1 мм образуются заряды порядка $10^{-14} - 10^{-15}$ Кл.

Заключение. Одним из примеров фрактальных объектов в природе являются облака. Облака на самом деле являются самоафинными фракталами, т.к. атмосфера стратифицирована. Это означает, что вертикальное направление неравномерно с горизонтальным, следовательно, облака не могут быть самоподобны по форме. Поэтому важным моментом является изучение процессов внутри облака с учетом влияния фрактальности среды, другими словами фрактальные геопрцессы.

Облака имеют разную структуру, и имеют свою классификацию по происхождению и морфологическим признакам, к которым, добавляя данные об их фрактальной структуре и фрактальных процессах, в дальнейшем будет возможным формирование более общей картины состояния физики облаков.

В работе предложена математическая модель изменения заряда пузырьков образующиеся в облачных каплях с учетом фрактальности среды. Получено решение этой модели с использованием аппарата дробного исчисления.

Дальнейшие исследования с помощью разработанной модели будут направлены на более глубокое изучение процессов электризации и пространственного разделения зарядов в грозных облаках с учетом взаимодействия процессов внутри облака и фрактальности среды.



Литература

1. Proceedings of the Sixth Trieste International Symposium on Fractals in Physics / Edited by L.Pietronero, E. Tosatti / ICTP, Trieste, Italy, 198. – P.644-649.
2. Кумыков Т.С. Жекамухов М.К., Каров Б.Г. Электризация и пространственное разделение зарядов при выделении пузырьков воздуха в процессе коагуляционного роста градин в облаке. I. Кинетика процесса выделения пузырьков при повышении температуры переохлажденных облачных капель // Метеорология и Гидрология. – 2008. – №11. – С.44-52.
3. Кумыков Т.С. Жекамухов М.К., Каров Б.Г. Электризация и пространственное разделение зарядов при выделении пузырьков воздуха в процессе коагуляционного роста градин в облаке II. Генерирование грозового электричества за счет выделения заряженных пузырьков при намерзании переохлажденных облачных капель на поверхности градин // Метеорология и Гидрология. – 2008. – №12. – С.15-24.
4. Caputo M., Elasticita de dissipazione, Zanichelli / Bologna, Italy, (Links), 1969.
5. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии / М: Высшая школа, 1995. – 301 с.
6. Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка / Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2005. – 185 с., С.22.
7. Iribarne J.V., Mason B.J. Electrication accompanying the bursting of bubbles in water and dilute aqueous solutions // Trans. Faraday Soc. – 1967. – 63. – №537. – P.143-151.

MATHEMATICAL MODELLING OF BUBBLE CHARGE CHANGE IN DROPLET CLOUDS WITH ACCOUNT OF ENVIRONMENT FRACTALITY

T.S. Kumykov

Institution of Applied Mathematics and Automation,
Shortanova St., 89-A, Nalchik, 360004, Russia, e-mail: macist20@mail.ru

Abstract. The paper proposes a new model of the change charge bubbles in supercooled cloud droplets. The model takes into account, the fractal properties of clouds, and the solution was obtained with the application of the fractional calculus.

Key words: fractal dimension, mathematical model, cloud droplet, bubble.



MSC 82B20

ОЦЕНКА ЭНЕРГИИ ВЕКТОРНОЙ РЕШЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.С. Ключев, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучается векторная модель с суммируемым парным обменным взаимодействием в статистической механике решеточных систем. В случае дальнегодействующего обмена, получена априорная оценка близости энергии этой модели к энергии соответствующей модели с периодическими граничными условиями для каждого состояния конечного кристалла.

Ключевые слова: векторная модель, гамильтониан, парное взаимодействие, периодические условия.

Введение. В статистической механике решеточных систем часто применяется аппроксимация изучаемой системы, при которой ее гамильтониан H заменяется на гамильтониан \tilde{H} соответствующей ей системы с периодическими граничными условиями (см. [1]). Такая аппроксимация упрощает всевозможные конструкции в рамках статистической механики и доказательства утверждений о свойствах различных решеточных систем. Часто, она позволяет проводить вычисления некоторых характеристик до конечных аналитических формул в том случае, когда это вообще возможно. При этом существенно, что понятие аппроксимирующей системы с периодическими граничными условиями вводится в том случае, когда взаимодействие обладает конечным радиусом. Этого оказывается достаточно при вычислении статистических характеристик на основе соответствующего распределения Гиббса при конечных температурах, если гамильтониан системы принадлежит банахову пространству \mathcal{B} суммируемых гамильтонианов [1]. Однако, в том случае, когда приходится давать оценки энергии конкретного состояния, в частности, в задаче о вычислении основного состояния конечной системы, совсем не очевидно, что аппроксимация исходного гамильтониана $H \in \mathcal{B}$ системы, который физически не обладает конечным радиусом действия, некоторым гамильтонианом конечного радиуса действия, должна приводить к близости соответствующих состояний. В настоящем сообщении мы вводим понятие аппроксимирующей системы с периодическими граничными условиями в том случае, когда она не обладает конечным радиусом действия, и для этой системы даем оценку близости ее энергии к энергии аппроксимируемой системы в том же фазовом состоянии. Для простоты изложения мы ограничиваемся только классическими (не квантовыми) решеточными системами статистической механики и, более того, ограничиваемся только системами с парным взаимодействием, типичным представителем которых является так называемая векторная модель в физике магнетизма. Распространение предлагаемых в сообщении построений на самый широкий круг решеточных систем с гамильтонианами из \mathcal{B} не представляет затруднений.



2. Векторная модель. Будем, далее, рассматривать системы статистической механики с пространством состояний $\mathfrak{S} = \bigotimes_{\mathbf{x} \in \Lambda} \{\mathbf{s}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n; s^2(\mathbf{x}) = s^2\}$; $d, n \in \mathbb{N}$, где

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ – множество являющееся геометрической моделью конечного кристалла, $|\Lambda| = N < \infty$. Это множество мы, опять же для простоты рассуждений, положим в виде $\Lambda = \{0, 1, \dots, L\}^d$, $L \in \mathbb{N}$ – размер кристалла. Распространение дающихся ниже построений на случай множеств Λ , на основе которых возможно осуществлять переход к термодинамическому пределу по Ван Хову (см. [1]), не должен вызвать затруднений.

Положим, что гамильтониан системы для каждого векторного поля $\mathbf{s}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Lambda$ имеет вид

$$H_{\Lambda}[\mathbf{s}] = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda} I(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{y})), \quad (1)$$

что соответствует при $n = 1, 2, 3$ моделям статистической механики, которые описывают системы взаимодействующих ионов, обладающих магнитным моментом \mathbf{s} , со сферически симметричным обменным взаимодействием между ними, которое определяется обменным интегралом $I(\cdot)$. В формуле (1) функция $I(\cdot) : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{R}$ обладает свойством $I(-\mathbf{x}) = I(\mathbf{x})$ и является суммируемой $\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d} |I(\mathbf{x})| < \infty$. Последнее является необходи-

мым и достаточным условием принадлежности гамильтониана $H_{\Lambda}[\mathbf{s}]$ к пространству \mathcal{B} .

Сделаем небольшое отступление в область физики магнетизма. Обычно, в микроскопической теории магнетизма имеют дело с обменным взаимодействием, у которого $I(\cdot)$ очень быстро убывающая функция с ростом величины $|\mathbf{x}|$ (см., например, [2]). Для магнитного взаимодействия с таким обменом аппроксимация его финитной функцией, которая равна нулю при $|\mathbf{x}| > R$, $R < \infty$ оказывается очень точной по сути, и при конкретных вычислениях удается часто давать гарантированные оценки их точности в результате такой аппроксимации. В то же время, в теории магнетизма имеются и исключительные случаи, когда обменное взаимодействие является дальнедействующим (т.н. косвенный обмен). В частности, примером такого положения является т.н. РККИ-обменное взаимодействие, которое описывает косвенное обменное взаимодействие между магнитными ионами, осуществляемое через коллективизированные электроны проводимости (см., например, [3, 4]). Оно проявляется в металлах и полупроводниках, где коллективизированные электроны выступают посредниками обменного взаимодействия ионов, обладающих локализованными противоположно направленными спинами, частично заполненных d - и f -оболочек. В этом случае

$$I(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{r^4} (r \cos r - \sin r)$$

при $r = 2k_F |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

В случае дальнедействующего обмена аппроксимация гамильтониана H вида (1) посредством замены функции I на финитную функцию может стать неадекватной. В частности, такое положение приводит к значительным затруднениям при исследовании основного состояния системы (см., например, [5]). Это, в частности, проявляется в невозможности использования аппроксимации гамильтониана системы соответствующим га-



мильтонианом с периодическими условиями, которая обычно используется только для систем с конечным радиусом действия (см. [2]). Дадим теперь определение аппроксимации с периодическими граничными условиями для системы с гамильтонианом вида (1) в общем случае.

Зафиксируем множество Λ и на его основе определим для каждой точки $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ действие оператора P_Λ проектирования. Точка $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ однозначно представима в виде $\mathbf{x} = (L+1)(n_1\mathbf{e}_1 + \dots + n_d\mathbf{e}_d) + \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \Lambda$, \mathbf{e}_j – орты в \mathbb{R}^d , $(\mathbf{e}_j)_i = \delta_{ij}$. Тогда положим $P_\Lambda \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Определение. Гамильтониан $\tilde{H}_\Lambda[\mathbf{s}]$, определяемый формулой

$$\tilde{H}_\Lambda[\mathbf{s}] = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d} I(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(P_\Lambda \mathbf{y}) \right)$$

назовем гамильтонианом с периодическими граничными условиями, аппроксимирующим гамильтониан $H_\Lambda[\mathbf{s}]$.

Норма $\|\cdot\|$ в пространстве \mathcal{B} гамильтонианов в применении ее к гамильтонианам на пространстве состояний \mathcal{S} определяется как (см. [2])

$$\|H_\Lambda[\mathbf{s}]\| = \max\{|\Lambda|^{-1}|H_\Lambda[\mathbf{s}]| : \mathbf{s}(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}, \Lambda \subset \mathbb{Z}^d\}. \quad (2)$$

В случае гамильтониана с конечным радиусом действия, очевидно, что разность между энергиями $H_\Lambda[\mathbf{s}]$ и $\tilde{H}_\Lambda[\mathbf{s}]$ должна быть пропорциональна площади поверхности кристалла, то есть L^{d-1} при $L \rightarrow \infty$. Если же взаимодействие является дальнедействующим, то такая оценка должна быть слабее.

Для получения оценок близости по норме $\|\cdot\|$ гамильтонианов $H_\Lambda[\mathbf{s}]$ и $\tilde{H}_\Lambda[\mathbf{s}]$ установим предварительно следующую простую геометрическую оценку

Лемма. Для любой точки $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ имеет место следующее неравенство

$$|\Lambda \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda + \mathbf{z})| \leq dL^{d-1} \max\{|z_j|; j = 1, \dots, d\} \equiv dL^{d-1}\|\mathbf{z}\|_0 \quad (2)$$

и при $|z| > L$ выполняется $|\Lambda \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda + \mathbf{z})| = 0$.

□ Последнее равенство в формулировке леммы очевидно. Доказательство неравенства (2) проведем индукцией по d . При $d = 1$ и $|z| \leq L$ имеем точное равенство, так как $\Lambda = \{0, 1, \dots, L\}$ и $\Lambda + \mathbf{z} = \{z, z+1, \dots, z+L\}$. Тогда $|\Lambda \cap (\mathbb{Z} \setminus \Lambda + \mathbf{z})| = L - (L - |z|) = |z|$.

Пусть неравенство (2) имеет место для значения d . Тогда, так как, в общем случае,

$$|\Lambda \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda + \mathbf{z})| = L^d - \prod_{j=1}^d (L - |z_j|),$$

то для значения $(d+1)$, для любой точки $\mathbf{z} = \langle z_1, \dots, z_d, z_{d+1} \rangle$, имеем, согласно предположению индукции,

$$|\Lambda \cap (\mathbb{Z}^{d+1} \setminus \Lambda + \mathbf{z})| = L^{d+1} - \prod_{j=1}^{d+1} (L - |z_j|) =$$



$$\begin{aligned}
 &= L \left(L^d - \prod_{j=1}^d (L - |z_j|) \right) + \left(L \left(\prod_{j=1}^d (L - |z_j|) - \prod_{j=1}^{d+1} (L - |z_j|) \right) \right) \leq \\
 &\leq dL^{d+1} \max\{|z_j|; j = 1, \dots, d\} + \left(\prod_{j=1}^d (L - |z_j|) \right) (L - (L - |z_{d+1}|)) \leq \\
 &\leq dL^{d+1} \max\{|z_j|; j = 1, \dots, d\} + L^d |z_{d+1}| \leq (d+1)L^{d+1} \max\{|z_j|; j = 1, \dots, d+1\}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Сформулируем основной результат настоящего сообщения.

Теорема. *Имеет место следующая оценка*

$$\|H_\Lambda[\mathbf{s}] - \tilde{H}_\Lambda[\mathbf{s}]\| \leq \frac{s^2 d}{2} L^{d-1} \sum_{\mathbf{x} \in 2\Lambda} |I(\mathbf{x})| \|\mathbf{x}\|_0. \quad (3)$$

□ Очевидны следующие неравенства

$$\begin{aligned}
 \|H_\Lambda[\mathbf{s}] - \tilde{H}_\Lambda[\mathbf{s}]\| &\leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \Lambda, \\ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}} |I(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \left| \left(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{P}_\Lambda \mathbf{y}) \right) \right| \leq \frac{s^2}{2} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \Lambda, \\ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}} |I(\mathbf{x} - \mathbf{y})| = \\
 &= \frac{s^2}{2} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} |I(\mathbf{z})| |\Gamma(\mathbf{z}; \Lambda)|, \quad (4)
 \end{aligned}$$

где $\Gamma(\mathbf{z}; \Lambda) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{z}, \mathbf{x} \in \Lambda, \mathbf{y} \notin \Lambda\}$. Множество $\Gamma(\mathbf{z}; \Lambda)$ пусто в том случае, когда $\mathbf{z} \notin 2\Lambda$. Если оно не пусто, то каждая пара, принадлежащая ему взаимно однозначно определяется точкой $\mathbf{x} \in \Lambda$ так, что $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{z} \in \Lambda$, то есть $\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda) + \mathbf{z}$. Следовательно, $\Gamma(\mathbf{z}; \Lambda) = |\Lambda \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda + \mathbf{z})|$. Теперь остается применить оценку (2). ■

Из полученной оценки (3) разности энергий следует, что для далекодействующих взаимодействий таких, что $H_\Lambda[\mathbf{s}] \in \mathcal{B}$, но для которых

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d} |I(\mathbf{x})| \|\mathbf{x}\|_0 = \infty,$$

эта разность возрастает быстрее, чем площадь поверхности кристалла, что и затрудняет использование в этом случае аппроксимации исходной системы соответствующей ей системой с периодическими граничными условиями. Тем не менее, справедливо

Следствие. *Если $H_\Lambda[\mathbf{s}] \in \mathcal{B}$, то при термодинамическом предельном переходе имеет место*

$$\lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda|} \|H_\Lambda[\mathbf{s}] - \tilde{H}_\Lambda[\mathbf{s}]\| = 0.$$



□ Так как $H_\Lambda[s] \in \mathcal{B}$, то $\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d} |I(\mathbf{x})| < \infty$. Для функций $I(\cdot)$ такого типа имеет место

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} I(\mathbf{x}) \|\mathbf{x}\|_0 = 0.$$

В самом деле, выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем такой размер L_ε , для которого

$$\sum_{\mathbf{x}: |\mathbf{x}| > L_\varepsilon} |I(\mathbf{x})| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} I(\mathbf{x}) \|\mathbf{x}\|_0 = \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda: |\mathbf{x}| > L_\varepsilon} |I(\mathbf{x})| \|\mathbf{x}\|_0 + \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda: |\mathbf{x}| \leq L_\varepsilon} |I(\mathbf{x})| \|\mathbf{x}\|_0.$$

Для оценки первой суммы используем неравенство $\|\mathbf{x}\|_0 < L$ и зафиксировав L_ε и поделив на L , перейдем к пределу $L \rightarrow \infty$. В результате, получим, что

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} I(\mathbf{x}) \|\mathbf{x}\|_0 \leq \varepsilon.$$

Ввиду произвольности числа ε , получим требуемое. ■

Литература

1. Ruelle D. Statistical Mechanics, Rigorous Results / Ney York-Amsterdam: W.A.Benjamin, Inc., 1969. (Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты / М.: Мир, 1971.)
2. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны / М.: Наука, 1967. – 368 с.
3. Stohr J., Siegmann H.C. Magnetism: From Fundamentals to Nanoscale Dynamics / Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. – P.290–293. — 821 p. — ISBN 978-3540302827.
4. de Lacheisserie E., Gignoux D., Schlenker M. Magnetism: Fundamentals, Vol. 1 / Springer, 2005. – P.315-317. – 507 p. — ISBN 9780387229676.
5. Вирченко Ю.П. К теории основного состояния обменной модели Гейзенберга // Проблемы теоретической физики / Киев: Наукова думка, 1991. – С.80-96.

ENERGY ESTIMATE OF VECTOR LATTICE MODEL WITH PERIODICAL BOUNDARY CONDITIONS

A.S. Klyuyev, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. Vector model with integrable pair exchange interaction in statistical mechanics of lattice systems is studied. For each phase state of finite crystal it is obtained an priori estimate of the model energy closeness to the energy of correspondent model with periodical boundary conditions in the case of long-range action.

Key words: vector model, hamiltonian, pair interaction, periodical boundary conditions.



MSC 81P20

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ. 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Конструируется гауссовское случайное поле, описывающее стохастическое электромагнитное поле в диэлектрической среде, связанное с ее тепловыми флуктуациями. Случайное поле порождается стохастической динамической системой, эволюционными уравнениями которой являются уравнения Максвелла с аддитивным шумом.

Ключевые слова: стохастическое электромагнитное поле, гауссовское поле, уравнения Максвелла, стохастическая модель, корреляционная функция.

1. Постановка задачи. В предыдущей публикации авторов была поставлена задача о построении подходящей модели стохастического электромагнитного поля для математического описания тепловых электромагнитных флуктуаций при решении теоретических задач, связанных с переносом излучения в твердотельной среде. Теоретический подход, основанный на построении вероятностных моделей для описания тепловых флуктуаций электромагнитного поля был ранее предложен в [2, 3]. В рамках такого полупереносологического подхода не учитываются конкретные микроскопические механизмы, посредством которых осуществляется перенос излучения, однако, он позволяет описывать теплоперенос внутри среды посредством излучения уже с учетом его волновых свойств, в отличие от традиционной теории переноса излучения, основанной на представлениях геометрической оптики (см., например, [4]). В работе [1] нами была построена, по нашему мнению, одна из простейших моделей стохастического электромагнитного поля, в рамках которой допустимо статистическое изучение радиационно-кондуктивного теплообмена в твердых диэлектриках. Стохастическое электромагнитное поле в этой модели определяется как решение системы стохастических дифференциальных уравнений Максвелла, в котором имеются распределенные стохастические источники, по своему физическому смыслу, описывающие на микроуровне флуктуационные электрические токи. В этом случае статистические свойства стохастического электромагнитного поля полностью определяются статистическими свойствами плотности флуктуационного электрического тока. Ввиду линейности уравнений Максвелла, стохастические дифференциальные уравнения, определяющие поле, являются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. Тогда, так как стохастические источники описываются гауссовским случайным полем, то случайное поле, определяемое решениями уравнений Максвелла, также является гауссовским. Более того, оно обладает нулевым средним значением. Распределение вероятностей такого поля полностью



определяется набором всех возможных парных корреляционных функций. В настоящей, второй части работы мы вычислим эти корреляционные функции. При этом мы будем существенно использовать результаты первой части и ссылаться в тексте на выписанные в ней формулы, необходимые в процессе изложения. Эти ссылки мы будем давать в скобках номерами формул из первой части и сопровождать его меткой I.

2. Вычисление корреляционной функции $\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{F}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$. Имея явные выражения из первой части работы для траекторий процесса, мы в состоянии подсчитать корреляционные функции электромагнитного поля. Ввиду определения флуктуационного тока (см. (12), (15), I), имеем $\langle \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(\mathbf{k}, s) \rangle = 0$. Парные же корреляционные функции поперечного тока $\tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ определяются корреляционными функциями поля $\psi(\mathbf{k})$,

$$\langle \psi_{l_1}(\mathbf{k}_1) \psi_{l_2}(\mathbf{k}_2) \rangle = L_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad \langle \psi_{l_1}(\mathbf{k}_1) \psi_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) \rangle = K_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2).$$

Ввиду свойства $\psi^*(\mathbf{k}) = \psi(-\mathbf{k})$, имеющего место с вероятностью единица, эти корреляционные функции не являются независимыми, а, наоборот, выполняется соотношение

$$L_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = K_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2).$$

Поэтому, в дальнейшем, мы будем использовать только корреляционную функцию $K_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ и, соответственно, корреляционную функцию $\langle \tilde{j}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \tilde{j}_{l_2}(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$, которая, ввиду (12), равна

$$\langle \tilde{j}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \tilde{j}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2) K_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2). \quad (1)$$

Вычислим корреляционную функцию поперечного тока

$$\langle (\tilde{j}_{\perp})_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1) (\tilde{j}_{\perp})_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, s_2) \rangle = \delta(s_1 - s_2) K_{l_1 l_2}^{\perp}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2),$$

где, согласно определению (см. (15), I), имеем

$$K_{l_1 l_2}^{\perp}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = [\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2]^{-1} \langle [\mathbf{k}_1, [\mathbf{k}_1, \psi(\mathbf{k}_1)]]_{l_1} [\mathbf{k}_2, [\mathbf{k}_2, \psi^*(\mathbf{k}_2)]]_{l_2} \rangle.$$

Выполняя вычисления согласно правилам тензорной алгебры, получим выражение

$$K_{l_1 l_2}^{\perp}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \left(\delta_{l_1 m_1} - \frac{(\mathbf{k}_1)_{l_1} (\mathbf{k}_1)_{m_1}}{\mathbf{k}_1^2} \right) \left(\delta_{l_2 m_2} - \frac{(\mathbf{k}_2)_{l_2} (\mathbf{k}_2)_{m_2}}{\mathbf{k}_2^2} \right) K_{m_1 m_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2). \quad (2)$$

Приступим к вычислению корреляционных функций $\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1) \bar{F}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, s_2) \rangle$, $\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, s_2) \rangle$, $\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, s_2) \rangle$. Начнем с первой корреляционной функции из этого списка. Согласно формулам, определяющим решение стохастических уравнений движения (см. (24), I),

$$\begin{aligned} & \langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{F}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \\ & = \left\langle \left[(\mathbf{S}^{(E)}(t_1) \bar{\mathbf{F}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + (\mathbf{S}^{(EH)}(t_1) \bar{\mathbf{H}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) - \frac{4\pi}{\varepsilon} \int_0^{t_1} (\mathbf{S}^{(E)}(\mathbf{k}_1, t_1 - s_1) \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(\mathbf{k}_1, s_1))_{l_1} ds_1 \right] \times \right. \end{aligned}$$



$$\times \left[(\mathbf{S}^{(E)}(t_2) \bar{\mathbf{F}}_0)_{l_2}^* (\mathbf{k}_2) + (\mathbf{S}^{(EH)}(t_2) \bar{\mathbf{H}}_0)_{l_2}^* (\mathbf{k}_2) - \frac{4\pi}{\varepsilon} \int_0^{t_2} (\mathbf{S}^{(E)}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2) \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(\mathbf{k}_2, s_2))_{l_2}^* ds_2 \right] \rangle .$$

Принимая во внимание равенство нулю среднего значения тока,

$$\begin{aligned} & \langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{F}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \\ & = \left\langle \left[(\mathbf{S}^{(E)}(t_1))_{l_1 m_1} (\bar{\mathbf{F}}_0)_{m_1}(\mathbf{k}_1) + (\mathbf{S}^{(EH)}(t_1))_{l_1 m_1} (\bar{\mathbf{H}}_0)_{m_1}(\mathbf{k}_1) \right] \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[(\mathbf{S}^{(E)}(t_2))_{l_2 m_2}^* (\bar{\mathbf{F}}_0)_{m_2}^*(\mathbf{k}_2) + (\mathbf{S}^{(EH)}(t_2))_{l_2 m_2}^* (\bar{\mathbf{H}}_0)_{m_2}^*(\mathbf{k}_2) \right] \right\rangle + \\ & + \left(\frac{4\pi}{\varepsilon} \right)^2 \int_0^{t_1} \mathbf{S}_{l_1 m_1}^{(E)}(\mathbf{k}_1, t_1 - s_1) \int_0^{t_2} \mathbf{S}_{l_2 m_2}^{(E)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2) \langle (\tilde{j}_{\perp})_{m_1}(\mathbf{k}_1, s_1) (\tilde{j}_{\perp})_{m_2}^*(\mathbf{k}_2, s_2) \rangle ds_1 ds_2 . \end{aligned}$$

Далее, не ограничивая общности, ввиду симметрии выражений относительно перестановки значений индексов 1 и 2, будем полагать, что $t_2 > t_1$. Используя (1), преобразуем это выражение,

$$\begin{aligned} & \langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{F}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \\ & = \left\langle \left[(\mathbf{S}^{(E)}(t_1))_{l_1 m_1} (\bar{\mathbf{F}}_0)_{m_1}(\mathbf{k}_1) + (\mathbf{S}^{(EH)}(t_1))_{l_1 m_1} (\bar{\mathbf{H}}_0)_{m_1}(\mathbf{k}_1) \right] \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[(\mathbf{S}^{(E)}(t_2))_{l_2 m_2} (\bar{\mathbf{F}}_0)_{m_2}(\mathbf{k}_2) + (\mathbf{S}^{(EH)}(t_2))_{l_2 m_2} (\bar{\mathbf{H}}_0)_{m_2}(\mathbf{k}_2) \right]^* \right\rangle + \\ & + \left(\frac{4\pi}{\varepsilon} \right)^2 K_{m_1 m_2}^{\perp}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \int_0^{t_1} \mathbf{S}_{l_1 m_1}^{(E)}(\mathbf{k}_1, t_1 - s) \mathbf{S}_{l_2 m_2}^{(E)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s) ds \quad (3) \end{aligned}$$

Подставляя явные выражения (см. (26), (28), I) для операторов $\mathbf{S}^{(E)}(t)$, $\mathbf{S}^{(EH)}(t)$, вычислим последний интеграл в последней формуле.

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} \mathbf{S}_{l_1 m_1}^{(E)}(\mathbf{k}_1, t_1 - s) \mathbf{S}_{l_2 m_2}^{(E)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s) ds = \frac{\delta_{l_1 m_1}}{2r(\mathbf{k}_1)} \cdot \frac{\delta_{l_2 m_2}}{2r^*(\mathbf{k}_2)} \times \\ & \times \left[r_+(\mathbf{k}_1) r_+(\mathbf{k}_2) \int_0^{t_1} \exp(r_+(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r_+(\mathbf{k}_2)(t_2 - s)) ds + \right. \\ & \quad \left. + r_-(\mathbf{k}_1) r_-(\mathbf{k}_2) \int_0^{t_1} \exp(r_-(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r_-(\mathbf{k}_2)(t_2 - s)) ds - \right. \\ & \quad \left. - r_+(\mathbf{k}_1) r_-(\mathbf{k}_2) \int_0^{t_1} \exp(r_+(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r_-(\mathbf{k}_2)(t_2 - s)) ds - \right. \\ & \quad \left. - r_-(\mathbf{k}_1) r_+(\mathbf{k}_2) \int_0^{t_1} \exp(r_-(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r_+(\mathbf{k}_2)(t_2 - s)) ds \right] . \quad (4) \end{aligned}$$

Интегралы, входящие в это выражение вычисляются явно,

$$\int_0^{t_1} \exp(r_{\alpha}(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r_{\beta}^*(\mathbf{k}_2)(t_2 - s)) ds =$$



$$= \exp(r_{\beta}^*(\mathbf{k}_2)(t_2 - t_1)) \int_0^{t_1} \exp[(r_{\alpha}(\mathbf{k}_1) + r_{\beta}^*(\mathbf{k}_2))(t_1 - s)] ds =$$

$$= -\frac{e^{r_{\beta}^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_{\alpha}(\mathbf{k}_1) + r_{\beta}^*(\mathbf{k}_2)} \left(1 - e^{(r_{\alpha}(\mathbf{k}_1) + r_{\beta}^*(\mathbf{k}_2))t_1}\right), \quad (5)$$

где введены обозначения $\alpha, \beta \in \{\pm\}$.

Заметим, что $\text{Re } r_{\pm}(\mathbf{k}_i) < 0, i = 1, 2$. Это становится очевидным после подстановки явных выражений для $r_{\pm}(\mathbf{k}_i), i = 1, 2$,

$$r_{\pm}(\mathbf{k}_i) = -\frac{\gamma}{2} \pm \left[\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - a^2 \mathbf{k}_i^2\right]^{1/2}.$$

В связи с этим, существуют предельные значения для вычисленных интегралов при $t_1 \rightarrow \infty, t_2 - t_1 = \text{const}$, равные

$$\lim_{\substack{t_1 \rightarrow \infty, \\ t_2 - t_1 = \text{const}}} \int_0^{t_1} \exp(r_{\alpha}(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r_{\beta}^*(\mathbf{k}_2)(t_2 - s)) ds = -\frac{e^{r_{\beta}^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_{\alpha}(\mathbf{k}_1) + r_{\beta}^*(\mathbf{k}_2)}. \quad (6)$$

Подставим результаты вычислений в формулу для корреляционной функции (3)

$$\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{F}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle =$$

$$= \left\langle \left[(S^{(E)}(t_1))_{l_1 m_1} (\bar{\mathbf{F}}_0)_{m_1}(\mathbf{k}_1) + (S^{(EH)}(t_1))_{l_1 m_1} (\bar{\mathbf{H}}_0)_{m_1}(\mathbf{k}_1) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[(S^{(E)}(t_2))_{l_2 m_2} (\bar{\mathbf{F}}_0)_{m_2}(\mathbf{k}_2) + (S^{(EH)}(t_2))_{l_2 m_2} (\bar{\mathbf{H}}_0)_{m_2}(\mathbf{k}_2) \right]^* \right\rangle -$$

$$- \left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2 \frac{K_{l_1 l_2}^{\perp}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{4r(\mathbf{k}_1)r^*(\mathbf{k}_2)} \left[\frac{r_+(\mathbf{k}_1)r_+^*(\mathbf{k}_2)}{r_+(\mathbf{k}_1) + r_+^*(\mathbf{k}_2)} e^{r_+^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)} \left(1 - e^{(r_+(\mathbf{k}_1) + r_+^*(\mathbf{k}_2))t_1}\right) + \right.$$

$$+ \frac{r_-(\mathbf{k}_2)r_-(\mathbf{k}_1)}{r_-(\mathbf{k}_2) + r_-(\mathbf{k}_1)} e^{r_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)} \left(1 - e^{(r_-(\mathbf{k}_1) + r_-(\mathbf{k}_2))t_1}\right) -$$

$$- \frac{r_-(\mathbf{k}_1)r_+^*(\mathbf{k}_2)}{r_-(\mathbf{k}_1) + r_+^*(\mathbf{k}_2)} e^{r_+^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)} \left(1 - e^{(r_-(\mathbf{k}_1) + r_+^*(\mathbf{k}_2))t_1}\right) -$$

$$\left. \left. - \frac{r_+(\mathbf{k}_1)r_-(\mathbf{k}_2)}{r_+(\mathbf{k}_1) + r_-(\mathbf{k}_2)} e^{r_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)} \left(1 - e^{(r_+(\mathbf{k}_1) + r_-(\mathbf{k}_2))t_1}\right) \right] \right. \quad (7)$$

Полученная формула дает выражение для корреляционной функции $\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{F}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$ при произвольных значениях временных аргументов t_1 и t_2 . Однако, для физических приложений, особый интерес представляет ее выражение в пределе при $t_1 \rightarrow \infty, t_2 - t_1 = \text{const}, t_2 > t_1$. Это важно во всех задачах, в которых электромагнитное поле (в данном случае стохастическое) обладает очень большой типичной частотой.



При таком предельном переходе, с математической точки зрения, изучаемый гауссовский случайный процесс флуктуационных электромагнитных колебаний приближается к стационарному гауссовскому случайному процессу.

Перейдем в полученном выражении (7) к указанному пределу, то есть получим корреляционную функцию $\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{F}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$ для стационарного случайного процесса стохастического электромагнитного поля. Так как $r_{\pm}(\mathbf{k}_i) < 0$, $i = 1, 2$, то из формул ((26), (28), I) следует, что $(S^{(E)}(\mathbf{k}_1, t_1))_{lm} \rightarrow 0$, $(S^{(EH)}(\mathbf{k}_1, t_1))_{lm} \rightarrow 0$ при $t_1 \rightarrow \infty$. Тогда из (7) получаем предельную корреляционную функцию, которую мы пометим нижним индексом ∞ ,

$$\begin{aligned} & \langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{F}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle_{\infty} = \\ & = \left(\frac{4\pi}{\varepsilon} \right)^2 \frac{K_{l_1 l_2}^{\perp}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{4r(\mathbf{k}_1)r^*(\mathbf{k}_2)} \left[\left(\frac{r_-(\mathbf{k}_1)r_+(\mathbf{k}_2)}{r_-(\mathbf{k}_1) + r_+(\mathbf{k}_2)} - \frac{r_+(\mathbf{k}_1)r_-(\mathbf{k}_2)}{r_+(\mathbf{k}_1) + r_-(\mathbf{k}_2)} \right) e^{r_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)} + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{r_+(\mathbf{k}_1)r_-(\mathbf{k}_2)}{r_+(\mathbf{k}_1) + r_-(\mathbf{k}_2)} - \frac{r_-(\mathbf{k}_2)r_+(\mathbf{k}_1)}{r_-(\mathbf{k}_2) + r_+(\mathbf{k}_1)} \right) e^{r_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)} \right], \end{aligned}$$

либо, после сложения коэффициентов с применением тождеств

$$\left(r_-(\mathbf{k}_1) + r_+(\mathbf{k}_2) \right) \left(r_+(\mathbf{k}_1) + r_-(\mathbf{k}_2) \right) = \gamma^2 - 2\gamma r^*(\mathbf{k}_2) + a^2(\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2),$$

$$\left(r_+(\mathbf{k}_1) + r_-(\mathbf{k}_2) \right) \left(r_-(\mathbf{k}_1) + r_+(\mathbf{k}_2) \right) = \gamma^2 + 2\gamma r(\mathbf{k}_1) + a^2(\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2),$$

$$\begin{aligned} & \langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{F}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle_{\infty} = \\ & = 2 \left(\frac{2\pi}{\varepsilon} \right)^2 \frac{K_{l_1 l_2}^{\perp}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{r^*(\mathbf{k}_2)} \left[\frac{r_-(\mathbf{k}_2) e^{r_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma^2 + 2\gamma r^*(\mathbf{k}_2) + a^2(\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2)} - \frac{r_+(\mathbf{k}_2) e^{r_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma^2 - 2\gamma r^*(\mathbf{k}_2) + a^2(\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2)} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

В частном случае, когда флуктуационное электромагнитное поле физически пространственно-однородно, нужно считать, что в конструируемой модели случайное электромагнитное поле стохастически трансляционно-инвариантно. Это связано со стохастической трансляционной инвариантностью флуктуационного тока. Поэтому должна быть трансляционно инвариантной его корреляционная функция, $K_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) K(\mathbf{k}_1)$. Полагая для такой корреляционной функции в формуле (8) $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'$, $l = l_1$, $l_2 = l'$, $t_1 = t$, $t_2 = t'$, и приводя к общему знаменателю выражения в скобках с учетом $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, имеем

$$\begin{aligned} & \langle \bar{F}_l(\mathbf{k}, t) \bar{F}_{l'}^*(\mathbf{k}', t') \rangle_{\infty} = \\ & = 2 \left(\frac{2\pi}{\varepsilon} \right)^2 \gamma^{-1} K_{ll'}^{\perp}(\mathbf{k}) \left[\text{ch}(r(\mathbf{k})(t' - t)) - \frac{\gamma}{2r(\mathbf{k})} \text{sh}(r(\mathbf{k})(t' - t)) \right] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (9)$$



3. Вычисление корреляционной функции $\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}, t_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}', t_2) \rangle$. Ввиду определения флуктуационного тока (см. (12), (15), I), имеем $\langle \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(\mathbf{k}, s) \rangle = 0$. Парные же корреляционные функции поперечного тока $\tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ определяются формулой

$$\langle (\tilde{j}_{\perp})_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1) (\tilde{j}_{\perp})_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, s_2) \rangle = \delta(s_1 - s_2) K_{l_1 l_2}^{\perp}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2),$$

где $K_{l_1 l_2}^{\perp}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ выражается посредством (2) через парную корреляционную функцию поля $\psi(\mathbf{k})$.

Так как случайные траектории поля $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, t)$ определяются как

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{S}^{(HE)}(\mathbf{k}, t) \bar{\mathbf{F}}_0(\mathbf{k}) + \mathbf{S}^{(H)}(\mathbf{k}, t) \bar{\mathbf{H}}_0(\mathbf{k}) - \frac{4\pi}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{S}^{(HE)}(\mathbf{k}, t-s) \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(\mathbf{k}, s) ds, \quad (10)$$

то корреляционная функция $\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, s_2) \rangle$ дается следующей формулой

$$\begin{aligned} & \langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \\ & = \left\langle \left[(\mathbf{S}^{(HE)}(t_1) \bar{\mathbf{F}}_0 + \mathbf{S}^{(H)}(t_1) \bar{\mathbf{H}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) - \frac{4\pi}{\varepsilon} \int_0^{t_1} (\mathbf{S}^{(HE)}(t_1 - s_1) \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(s_1))_{l_1}(\mathbf{k}_1) ds_1 \right] \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[(\mathbf{S}^{(HE)}(t_2) \bar{\mathbf{F}}_0 + \mathbf{S}^{(H)}(t_2) \bar{\mathbf{H}}_0)_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) - \frac{4\pi}{\varepsilon} \int_0^{t_2} (\mathbf{S}^{(HE)}(t_2 - s_2) \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(s_2))_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) ds_2 \right] \right\rangle. \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство нулю среднего значения тока,

$$\begin{aligned} & \langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \\ & = \left\langle \left[(\mathbf{S}^{(HE)}(t_1) \bar{\mathbf{F}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + (\mathbf{S}^{(H)}(t_1) \bar{\mathbf{H}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) \right] \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[(\mathbf{S}^{(HE)}(t_2) \bar{\mathbf{F}}_0)_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) + (\mathbf{S}^{(H)}(t_2) \bar{\mathbf{H}}_0)_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) \right] \right\rangle + \\ & + \left(\frac{4\pi}{\varepsilon} \right)^2 \int_0^{t_1} \mathbf{S}_{l_1 m_1}^{(HE)}(\mathbf{k}_1, t_1 - s_1) \int_0^{t_2} \mathbf{S}_{l_2 m_2}^{(HE)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2) \langle (\tilde{j}_{\perp})_{m_1}(\mathbf{k}_1, s_1) (\tilde{j}_{\perp})_{m_2}^*(\mathbf{k}_2, s_2) \rangle ds_1 ds_2. \end{aligned}$$

Далее, не ограничивая общности, ввиду симметрии выражений относительно перестановки значений индексов 1 и 2, будем полагать, что $t_2 > t_1$. Используя (10), преобразуем это выражение к виду

$$\begin{aligned} & \langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \\ & = \left\langle \left[(\mathbf{S}^{(HE)}(t_1) \bar{\mathbf{F}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + (\mathbf{S}^{(H)}(t_1) \bar{\mathbf{H}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) \right] \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[(\mathbf{S}^{(HE)}(t_2) \bar{\mathbf{F}}_0)_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) + (\mathbf{S}^{(H)}(t_2) \bar{\mathbf{H}}_0)_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) \right] \right\rangle + \end{aligned}$$



$$+ \left(\frac{4\pi}{\varepsilon} \right)^2 K_{m_1 m_2}^\perp(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \int_0^{t_1} S_{l_1 m_1}^{(HE)}(\mathbf{k}_1, t_1 - s) S_{l_2 m_2}^{(HE)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s) ds. \quad (11)$$

Запишем явное выражение для эволюционной матрицы $S_{lm}^{(HE)}(\mathbf{k}, t)$ (см. (28), I):

$$S_{lm}^{(HE)}(\mathbf{k}, t) = -i \frac{a^2 \varepsilon}{2r(\mathbf{k})c} \left(\exp(r_+(\mathbf{k})t) - \exp(r_-(\mathbf{k})t) \right) \epsilon_{lmn} k_n.$$

Подставляя явные выражения для операторов $S^{(HE)}(t)$, $S^{(H)}(t)$, вычислим интеграл в последней формуле:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} S_{l_1 m_1}^{(HE)}(\mathbf{k}_1, t_1 - s) S_{l_2 m_2}^{(HE)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s) ds &= \frac{a^4 \varepsilon^2}{4c^2} \cdot \frac{\epsilon_{l_1 m_1 n_1}(\mathbf{k}_1)_{n_1} \epsilon_{l_2 m_2 n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2}}{r(\mathbf{k}_1) r^*(\mathbf{k}_2)} \times \\ &\times \left[\int_0^{t_1} \exp(r_+(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r_+(\mathbf{k}_2)(t_2 - s)) ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t_1} \exp(r_-(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r_-(\mathbf{k}_2)(t_2 - s)) ds - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t_1} \exp(r_-(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r_+(\mathbf{k}_2)(t_2 - s)) ds - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t_1} \exp(r_+(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r_-(\mathbf{k}_2)(t_2 - s)) ds \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Используя явные выражения для интегралов, запишем формулу (11) для корреляционной функции в виде

$$\begin{aligned} &\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \\ &= \left\langle \left[(S^{(HE)}(t_1) \bar{\mathbf{F}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + (S^{(H)}(t_1) \bar{\mathbf{H}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[(S^{(HE)}(t_2) \bar{\mathbf{F}}_0)_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) + (S^{(H)}(t_2) \bar{\mathbf{H}}_0)_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) \right] \right\rangle - \\ &- \left(\frac{2\pi a^2}{c} \right)^2 \frac{K_{m_1 m_2}^\perp(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{r(\mathbf{k}_1) r^*(\mathbf{k}_2)} \epsilon_{l_1 m_1 n_1}(\mathbf{k}_1)_{n_1} \epsilon_{l_2 m_2 n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2} \times \\ &\quad \times \left[\frac{e^{r_+(\mathbf{k}_2)(t_2 - t_1)}}{r_+(\mathbf{k}_1) + r_+(\mathbf{k}_2)} \left(1 - e^{(r_+(\mathbf{k}_1) + r_+(\mathbf{k}_2)) t_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{r_-(\mathbf{k}_2)(t_2 - t_1)}}{r_-(\mathbf{k}_2) + r_-(\mathbf{k}_1)} \left(1 - e^{(r_-(\mathbf{k}_1) + r_-(\mathbf{k}_2)) t_1} \right) - \right. \end{aligned}$$



$$-\frac{e^{r_+^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_-(\mathbf{k}_1) + r_+^*(\mathbf{k}_2)} \left(1 - e^{(r_-(\mathbf{k}_1)+r_+^*(\mathbf{k}_2))t_1}\right) - \frac{e^{r_-^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_+(\mathbf{k}_1) + r_-^*(\mathbf{k}_2)} \left(1 - e^{(r_+(\mathbf{k}_1)+r_-^*(\mathbf{k}_2))t_1}\right) \Big]. \quad (13)$$

Эта формула дает выражение для корреляционной функции $\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$ при произвольных значениях временных аргументов t_1 и t_2 . Однако, как и ранее, для нас является выражение для корреляционной функции в пределе при $t_1 \rightarrow \infty, t_2 - t_1 = \text{const}, t_2 > t_1$, когда происходит переход стационарному гауссовскому случайному процессу, описывающему флуктуационное электромагнитное поле.

Перейдем в формуле (13) к указанному пределу, то есть получим корреляционную функцию $\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$ для стационарного стохастического электромагнитного поля. Так как $r_{\pm}(\mathbf{k}_i) < 0, i = 1, 2$, то $(S^{(HE)}(\mathbf{k}_1, t_1))_{lm} \rightarrow 0, (S^{(H)}(\mathbf{k}_1, t_1))_{lm} \rightarrow 0$ при $t_1 \rightarrow \infty$. Тогда из (13) получаем предельную корреляционную функцию, которую мы пометим нижним индексом ∞ ,

$$\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle_{\infty} = 2 \left(\frac{2\pi a^2}{c} \right)^2 \frac{K_{m_1 m_2}^{\perp}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{r^*(\mathbf{k}_2)} \epsilon_{l_1 m_1 n_1}(\mathbf{k}_1)_{n_1} \epsilon_{l_2 m_2 n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2} \times \left[\frac{e^{r_+^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma^2 - 2\gamma r^*(\mathbf{k}_2) + a^2(\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2)} - \frac{e^{r_-^*(\mathbf{k}_1)(t_2-t_1)}}{\gamma^2 + 2\gamma r^*(\mathbf{k}_2) + a^2(\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2)} \right]. \quad (14)$$

Для стохастически трансляционно-инвариантного электромагнитного поля, в терминах обозначений предыдущего раздела, когда $K_{ll'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \equiv \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') K_{ll'}(\mathbf{k})$, эта формула превращается в следующую:

$$\langle \bar{H}_l(\mathbf{k}, t) \bar{H}_{l'}^*(\mathbf{k}', t') \rangle_{\infty} = 2 \left(\frac{2\pi a}{c} \right)^2 \frac{e^{-\gamma(t'-t)/2}}{\gamma \mathbf{k}^2} K_{mm'}^{\perp}(\mathbf{k}) \epsilon_{lmn} k_n \epsilon_{l'm'n'} k_{n'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \times \left[\text{ch}(r(\mathbf{k})(t' - t)) + \frac{\gamma}{2r(\mathbf{k})} \text{sh}(r(\mathbf{k})(t' - t)) \right]. \quad (15)$$

4. Вычисление корреляционной функции $\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}, t_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}', t_2) \rangle$. Как и в предыдущих разделах, используя формулы для траекторий поля $\bar{F}_l(\mathbf{k}, t)$:

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k}, t) = S^{(E)}(\mathbf{k}, t) \bar{\mathbf{F}}_0(\mathbf{k}) + S^{(EH)}(\mathbf{k}, t) \bar{\mathbf{H}}_0(\mathbf{k}) - \frac{4\pi}{\epsilon} \int_0^t S(\mathbf{k}, t-s) \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(\mathbf{k}, s) ds$$

и (10) – для поля $\bar{H}_l(\mathbf{k}, t)$, запишем выражение для корреляционной функции $\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, s_2) \rangle$:

$$\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle =$$



$$= \left\langle \left[(\mathcal{S}^{(E)}(t_1)\bar{\mathbf{F}}_0 + \mathcal{S}^{(EH)}(t_1)\bar{\mathbf{H}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) - \frac{4\pi}{\varepsilon} \int_0^{t_1} (\mathcal{S}^{(E)}(t_1 - s_1)\tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(s_1))_{l_1}(\mathbf{k}_1) ds_1 \right] \times \right. \\ \left. \times \left[(\mathcal{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0 + \mathcal{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0)_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) - \frac{4\pi}{\varepsilon} \int_0^{t_2} (\mathcal{S}^{(HE)}(t_2 - s_2)\tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(s_2))_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) ds_2 \right] \right\rangle.$$

Выполняя точно такие же преобразования, имеем

$$\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \\ = \left\langle \left[(\mathcal{S}^{(E)}(t_1)\bar{\mathbf{F}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + (\mathcal{S}^{(EH)}(t_1)\bar{\mathbf{H}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[(\mathcal{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0)_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) + (\mathcal{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0)_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) \right] \right\rangle + \\ + \left(\frac{4\pi}{\varepsilon} \right)^2 \int_0^{t_1} \mathcal{S}_{l_1 m_1}^{(E)}(\mathbf{k}_1, t_1 - s_1) \int_0^{t_2} \mathcal{S}_{l_2 m_2}^{(HE)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2) \langle (\tilde{j}_{\perp})_{m_1}(\mathbf{k}_1, s_1) (\tilde{j}_{\perp})_{m_2}^*(\mathbf{k}_2, s_2) \rangle ds_1 ds_2.$$

При $t_2 > t_1$, после подстановки явного выражения для корреляционной функции поперечной плотности тока, имеем

$$\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \\ = \left\langle \left[(\mathcal{S}^{(E)}(t_1)\bar{\mathbf{F}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + (\mathcal{S}^{(EH)}(t_1)\bar{\mathbf{H}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[(\mathcal{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0)_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) + (\mathcal{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0)_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) \right] \right\rangle + \\ + \left(\frac{4\pi}{\varepsilon} \right)^2 K_{m_1 m_2}^{\perp}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \int_0^{t_1} \mathcal{S}_{l_1 m_1}^{(E)}(\mathbf{k}_1, t_1 - s) \mathcal{S}_{l_2 m_2}^{(HE)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s) ds, \quad (16)$$

Подставляя явные выражения для матричных элементов эволюционных операторов, вычислим интеграл в этой формуле:

$$\int_0^{t_1} \mathcal{S}_{l_1 m_1}^{(E)}(\mathbf{k}_1, t_1 - s) \mathcal{S}_{l_2 m_2}^{(HE)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s) ds = \frac{ia^2 \varepsilon}{4cr(\mathbf{k}_1)r^*(\mathbf{k}_2)} \cdot \delta_{l_1 m_1} \epsilon_{l_2 n_2 m_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2} \times \\ \times \left[r_+(\mathbf{k}_1) \int_0^{t_1} \exp(r_+(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r_+(\mathbf{k}_2)(t_2 - s)) ds + \right. \\ \left. + r_-(\mathbf{k}_1) \int_0^{t_1} \exp(r_-(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r_-(\mathbf{k}_2)(t_2 - s)) ds - \right. \\ \left. - r_-(\mathbf{k}_1) \int_0^{t_1} \exp(r_-(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r_+(\mathbf{k}_2)(t_2 - s)) ds - \right. \\ \left. - r_+(\mathbf{k}_1) \int_0^{t_1} \exp(r_+(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r_-(\mathbf{k}_2)(t_2 - s)) ds \right].$$



На основе явных выражений для интегралов, находим формулу для искомой корреляционной функции в виде

$$\begin{aligned}
 & \langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \\
 & = \left\langle \left[(\mathbf{S}^{(E)}(t_1) \bar{\mathbf{F}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + (\mathbf{S}^{(EH)}(t_1) \bar{\mathbf{H}}_0)_{l_1}(\mathbf{k}_1) \right] \times \right. \\
 & \quad \times \left. \left[(\mathbf{S}^{(HE)}(t_2) \bar{\mathbf{F}}_0)_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) + (\mathbf{S}^{(H)}(t_2) \bar{\mathbf{H}}_0)_{l_2}^*(\mathbf{k}_2) \right] \right\rangle + \\
 & + \frac{i(2\pi a)^2}{c\epsilon r(\mathbf{k}_1)r^*(\mathbf{k}_2)} \cdot \epsilon_{l_2 m_2 n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2} K_{l_1 m_2}^\perp(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \times \\
 & \quad \times \left[\frac{r_+(\mathbf{k}_1) e^{r_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_+(\mathbf{k}_1) + r_+(\mathbf{k}_2)} \left(1 - e^{(r_+(\mathbf{k}_1)+r_+(\mathbf{k}_2))t_1} \right) + \right. \\
 & + \frac{r_-(\mathbf{k}_1) e^{r_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_-(\mathbf{k}_2) + r_-(\mathbf{k}_1)} \left(1 - e^{(r_-(\mathbf{k}_1)+r_-(\mathbf{k}_2))t_1} \right) - \\
 & \quad - \frac{r_-(\mathbf{k}_1) e^{r_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_-(\mathbf{k}_1) + r_+(\mathbf{k}_2)} \left(1 - e^{(r_-(\mathbf{k}_1)+r_+(\mathbf{k}_2))t_1} \right) - \\
 & \quad \left. - \frac{r_+(\mathbf{k}_1) e^{r_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_+(\mathbf{k}_1) + r_-(\mathbf{k}_2)} \left(1 - e^{(r_+(\mathbf{k}_1)+r_-(\mathbf{k}_2))t_1} \right) \right]. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Эта формула дает выражение для корреляционной функции $\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$ при произвольных значениях временных аргументов t_1 и t_2 .

Выражение для корреляционной функции в пределе при $t_1 \rightarrow \infty, t_2 - t_1 = \text{const}, t_2 > t_1$, соответствующее стационарному гауссовскому случайному процессу, описывающему флуктуационное электромагнитное поле, которое отметим индексом ∞ , имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{H}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle_\infty = -\frac{8i\pi^2 a^2}{c\epsilon r^*(\mathbf{k}_2)} \cdot \epsilon_{l_2 m_2 n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2} K_{l_1 m_2}^\perp(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \times \\
 & \quad \times \left[\frac{r_+(\mathbf{k}_2) e^{r_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma^2 - 2\gamma r^*(\mathbf{k}_2) + a^2(\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2)} - \frac{r_-(\mathbf{k}_2) e^{r_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma^2 + 2\gamma r^*(\mathbf{k}_2) + a^2(\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2)} \right]. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Для стохастически трансляционно-инвариантного электромагнитного поля при $K_W(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \equiv \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') K_W(\mathbf{k})$, в терминах тех же обозначений, что и ранее, имеем

$$\langle \bar{F}_l(\mathbf{k}, t) \bar{H}_l^*(\mathbf{k}', t') \rangle_\infty = -\frac{8i\pi^2 a^2}{c\gamma\epsilon} \cdot e^{-\gamma(t'-t)/2} \cdot \frac{\text{sh}(r(\mathbf{k})(t' - t))}{r(\mathbf{k})} K_{lm}^\perp(\mathbf{k}) \epsilon'_{lmn}(\mathbf{k})_n \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (19)$$



5. Вычисление корреляционной функции $\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t_1) \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}', t_2) \rangle$. Для завершения вычисления основных статистических характеристик модели стохастического электромагнитного поля в твердотельных диэлектриках, учитывающей тепловые колебания твердого основания (в частности, узлов кристаллической решетки), нам нужно вычислить корреляционные функции связанные с наличием продольной составляющей электрического поля (см. (8) и (13), I).

$$(\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t), \mathbf{k}) = -\frac{4\pi i}{\varepsilon} \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t), \quad \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k}, t) - \frac{4\pi i}{\varepsilon} \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t) \frac{\mathbf{k}}{k^2}. \quad (20)$$

Здесь случайный процесс $\tilde{\rho}(\mathbf{k}, t)$ описывает тепловые флуктуации заряда. Он подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению (см. (11), I)

$$\dot{\tilde{\rho}}(\mathbf{k}, t) + \gamma \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t) = -i(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}), \quad \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, t) = \varphi(t) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}), \quad (21)$$

с нормированным белым шумом $\varphi(t)$, $\langle \varphi(t) \rangle = 0$, $\langle \varphi(t) \varphi(t') \rangle = \delta(t - t')$. Таким образом, процесс $\tilde{\rho}(\mathbf{k}, t)$ является, при каждом фиксированном \mathbf{k} приближается асимптотически при $t \rightarrow \infty$ комплекснозначным процессом Орнштейна-Уленбека с траекториями

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}_0 e^{-\gamma t} - i(\mathbf{k}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})) \int_0^t \varphi(s) e^{-\gamma(t-s)} ds. \quad (22)$$

Отсюда следует, что для вычисления парных корреляционных функций $\langle \bar{\mathbf{E}}_{j_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{\mathbf{E}}_{j_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$, $\langle \bar{\mathbf{E}}_{j_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{\mathbf{H}}_{j_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$, необходимы выражения для корреляционных функций $\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}_1, t_1) \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$, $\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{\mathbf{F}}_j^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$, $\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{\mathbf{H}}_j^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$. Вычислим их в порядке следования.

На основании выражения (22) для траекторий, имеем

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}_1, t_1) \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \\ & = \left\langle \left[\tilde{\rho}_0(\mathbf{k}_1) e^{-\gamma t_1} - i(\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}_1)) \int_0^{t_1} \varphi(s_1) e^{-\gamma(t_1-s_1)} ds_1 \right] \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[\tilde{\rho}_0(\mathbf{k}_2) e^{-\gamma t_2} - i(\mathbf{k}_2, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}_2)) \int_0^{t_2} \varphi(s_2) e^{-\gamma(t_2-s_2)} ds_2 \right]^* \right\rangle = \\ & = e^{-\gamma(t_1+t_2)} \langle \tilde{\rho}_0(\mathbf{k}_1) \tilde{\rho}_0^*(\mathbf{k}_2) \rangle + \\ & + (\mathbf{k}_1)_{j_1} (\mathbf{k}_2)_{j_2} K_{j_1 j_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s_1)} \int_0^{t_2} e^{-\gamma(t_2-s_2)} \langle \varphi(s_1) \varphi(s_2) \rangle ds_1 ds_2, \end{aligned}$$

где мы учли, что случайные величины $\tilde{\rho}_0(\mathbf{k})$ и $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}')$ статистически независимы и имеют нулевые средние значения, $\langle \tilde{\rho}_0 \rangle = 0$ и $\langle \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}) \rangle = 0$.

Вычисляя интеграл по s_2 , положив не ограничивая общности, что $t_2 > t_1$, получаем искомое выражение для корреляционной функции

$$\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}_1, t_1) \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle =$$



$$\begin{aligned}
 &= \langle \tilde{\rho}_0(\mathbf{k}_1) \tilde{\rho}_0^*(\mathbf{k}_2) \rangle e^{-\gamma(t_1+t_2)} + (\mathbf{k}_1)_{j_1} (\mathbf{k}_2)_{j_2} K_{j_1 j_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1+t_2-2s)} ds = \\
 &= \langle \tilde{\rho}_0(\mathbf{k}_1) \tilde{\rho}_0^*(\mathbf{k}_2) \rangle e^{-\gamma(t_1+t_2)} + (\mathbf{k}_1)_{j_1} (\mathbf{k}_2)_{j_2} K_{j_1 j_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) e^{-\gamma(t_2-t_1)} \frac{1 - e^{-2\gamma t_1}}{2\gamma}.
 \end{aligned}$$

Асимптотически, при $t_1 \rightarrow \infty$, когда $t_2 - t_1 = \text{const}$, эта формула упрощается

$$\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}_1, t_1) \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = e^{-\gamma(t_2-t_1)} \frac{(\mathbf{k}_1)_{j_1} (\mathbf{k}_2)_{j_2}}{2\gamma} K_{j_1 j_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2). \quad (23)$$

Наконец, в пространственно-однородном случае, она принимает вид

$$\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t) \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}', t') \rangle = \frac{e^{-\gamma(t'-t)}}{2\gamma} k_j k_{j'} K_{jj'}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (24)$$

6. Вычисление корреляционной функции $\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{\mathbf{F}}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$. Вычисление второй корреляционной функции из приведенного выше списка, согласно формулам для траекторий случайных процессов $\tilde{\rho}(\mathbf{k}, t)$, $\bar{\mathbf{F}}^*(\mathbf{k}, t)$, сводится к усреднению следующего выражения

$$\begin{aligned}
 &\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{\mathbf{F}}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \\
 &= \left\langle \left[\tilde{\rho}_0(\mathbf{k}_1) e^{-\gamma t_1} - i(\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}_1)) \int_0^{t_1} \varphi(s_1) e^{-\gamma(t_1-s_1)} ds_1 \right] \times \right. \\
 &\times \left[(\mathbf{S}^{(E)}(t_2) \bar{\mathbf{F}}_0)^*(\mathbf{k}_2) + (\mathbf{S}^{(EH)}(t_2) \bar{\mathbf{H}}_0)^*(\mathbf{k}_2) - \frac{4\pi}{\varepsilon} \int_0^{t_2} \mathbf{S}^{(E)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2) \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^*(\mathbf{k}_2, s_2) ds_2 \right] \Big\rangle = \\
 &= \left\langle \tilde{\rho}_0(\mathbf{k}_1) \left[(\mathbf{S}^{(E)}(t_2) \bar{\mathbf{F}}_0)^*(\mathbf{k}_2) + (\mathbf{S}^{(EH)}(t_2) \bar{\mathbf{H}}_0)^*(\mathbf{k}_2) \right] \right\rangle e^{-\gamma t_1} + \\
 &+ \frac{4\pi i}{\varepsilon} \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s_1)} ds_1 \int_0^{t_2} \mathbf{S}^{(E)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2) \langle \varphi(s_1) (\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}_1)) \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^*(\mathbf{k}_2, s_2) \rangle ds_2,
 \end{aligned}$$

где мы воспользовались статистической независимостью случайных величин $\tilde{\rho}_0(\mathbf{k})$ и $\bar{\mathbf{F}}_l(\mathbf{k}')$ и равенством нулю их средних значений. Положив $t_2 > t_1$ и выражение для поперечной части плотности тока $\tilde{\mathbf{j}}_{\perp} = \tilde{\mathbf{j}} - \mathbf{k}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}})/\mathbf{k}^2$ (см. (15), I), имеем

$$\begin{aligned}
 &\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{\mathbf{F}}_l^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \\
 &= e^{-\gamma t_1} \left\langle \tilde{\rho}_0(\mathbf{k}_1) \left[(\mathbf{S}^{(E)}(t_2) \bar{\mathbf{F}}_0)_l^*(\mathbf{k}_2) + (\mathbf{S}^{(EH)}(t_2) \bar{\mathbf{H}}_0)_l^*(\mathbf{k}_2) \right] \right\rangle + \\
 &+ \frac{4\pi i}{\varepsilon} (\mathbf{k}_1)_j \left\langle \psi_j(\mathbf{k}_1) \left[\psi_m^*(\mathbf{k}_2) - \frac{(\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2} (\mathbf{k}_2, \boldsymbol{\psi}^*(\mathbf{k}_2)) \right] \right\rangle \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s)} \mathbf{S}_{lm}^{(E)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s) ds = \\
 &= e^{-\gamma t_1} \left\langle \tilde{\rho}_0(\mathbf{k}_1) \left[(\mathbf{S}^{(E)}(t_2) \bar{\mathbf{F}}_0)_l^*(\mathbf{k}_2) + (\mathbf{S}^{(EH)}(t_2) \bar{\mathbf{H}}_0)_l^*(\mathbf{k}_2) \right] \right\rangle + \\
 &+ \frac{4\pi i}{\varepsilon} (\mathbf{k}_1)_j \left(\delta_{lm} - \frac{(\mathbf{k}_2)_l (\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2} \right) \frac{K_{jl}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{2r^*(\mathbf{k}_2)} \times
 \end{aligned}$$



$$\times \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s)} \left(r_+^*(\mathbf{k}_2) e^{r_+^*(\mathbf{k}_2)(t_2-s)} - r_-^*(\mathbf{k}_2) e^{r_-^*(\mathbf{k}_2)(t_2-s)} \right) ds.$$

Используя явные выражения для внутренних интегралов

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s) + r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)(t_2-s)} ds &= e^{r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)} \int_0^{t_1} e^{-\gamma s + r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)s} ds = \\ &= \frac{e^{-\gamma t_1 + r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)t_1} - 1}{r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2) - \gamma} e^{r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}, \end{aligned}$$

получаем выражение для искомой корреляционной функции. Более важное, с физической точки зрения, ее асимптотическое выражение при $t_1 \rightarrow \infty$, $t_2 - t_1 = \text{const}$ получается при учете неравенства $\text{Re}(\gamma - r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)) > 0$,

$$\int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s) + r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)(t_2-s)} ds \rightarrow \frac{e^{r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma - r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)}.$$

Тогда асимптотическое выражение для корреляционной функции имеет вид

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{F}_l^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle_{\infty} = \\ &\frac{2\pi i (\mathbf{k}_1)_j}{\varepsilon r^*(\mathbf{k}_2)} \left(\delta_{lm} - \frac{(\mathbf{k}_2)_l (\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2} \right) K_{jl}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \left[r_+^*(\mathbf{k}_2) \frac{e^{r_+^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma - r_+^*(\mathbf{k}_2)} - r_-^*(\mathbf{k}_2) \frac{e^{r_-^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma - r_-^*(\mathbf{k}_2)} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

В пространственно-однородном случае эта формула переходит в следующую:

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t) \bar{F}_l^*(\mathbf{k}', t') \rangle = \\ &= \frac{2\pi i}{\varepsilon r^*(\mathbf{k})} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') k_j \left(\delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{\mathbf{k}^2} \right) K_{jl}(\mathbf{k}) \left[r_+^*(\mathbf{k}) \frac{e^{r_+^*(\mathbf{k})(t'-t)}}{\gamma - r_+^*(\mathbf{k})} - r_-^*(\mathbf{k}) \frac{e^{r_-^*(\mathbf{k})(t'-t)}}{\gamma - r_-^*(\mathbf{k})} \right] = \\ &= \frac{4\pi i}{\varepsilon} \frac{\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{2\gamma^2 + a^2 \mathbf{k}^2} k_j \left(\delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{\mathbf{k}^2} \right) K_{jl}(\mathbf{k}) e^{-\gamma(t'-t)/2} \times \\ &\quad \times \left[\gamma \text{chr}(\mathbf{k})(t' - t) - \frac{\gamma^2/2 + a^2 \mathbf{k}^2}{r(\mathbf{k})} \text{shr}(\mathbf{k})(t' - t) \right], \end{aligned} \quad (26)$$

где мы воспользовались тождествами $r_+^*(\mathbf{k}) + r_-^*(\mathbf{k}) = -\gamma$, $r_+^*(\mathbf{k}) r_-^*(\mathbf{k}) = a^2 \mathbf{k}^2$.

7. Вычисление корреляционной функции $\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{\mathbf{H}}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$. Точно также как и выше, вычисляется последняя корреляционная функция,

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{\mathbf{H}}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \\ &= \left\langle \left[\tilde{\rho}_0(\mathbf{k}_1) e^{-\gamma t_1} - i(\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}_1)) \int_0^{t_1} \varphi(s_1) e^{-\gamma(t_1-s_1)} ds_1 \right] \times \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \times \left[(S^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0)^*(\mathbf{k}_2) + (S^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0)^*(\mathbf{k}_2) - \frac{4\pi}{\varepsilon} \int_0^{t_2} S^{(HE)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2) \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^*(\mathbf{k}_2, s_2) ds_2 \right] \rangle. \\ & = \langle \tilde{\rho}_0(\mathbf{k}_1) \left[(S^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0)^*(\mathbf{k}_2) + (S^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0)^*(\mathbf{k}_2) \right] \rangle e^{-\gamma t_1} + \\ & + \frac{4\pi i}{\varepsilon} \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s_1)} ds_1 \int_0^{t_2} S^{(HE)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2) \langle \varphi(s_1)(\mathbf{k}_1, \psi(\mathbf{k}_1)) \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^*(\mathbf{k}_2, s_2) \rangle ds_2. \end{aligned}$$

Подставляя выражение для поперечной части плотности тока и производя усреднения, находим

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{H}_l^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle = \\ & = \langle \tilde{\rho}_0(\mathbf{k}_1) \left[(S^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0)_l^*(\mathbf{k}_2) + (S^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0)_l^*(\mathbf{k}_2) \right] \rangle e^{-\gamma t_1} + \\ & + \frac{4\pi i}{\varepsilon} \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s)} (S^{(HE)*})_{lm}(\mathbf{k}_2, t_2 - s) \langle (\mathbf{k}_1, \psi(\mathbf{k}_1)) \left(\delta_{mn} - \frac{(\mathbf{k}_2)_n(\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2} \right) \psi_n^*(\mathbf{k}_2) \rangle ds = \\ & = \langle \tilde{\rho}_0(\mathbf{k}_1) \left[(S^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0)_l^*(\mathbf{k}_2) + (S^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0)_l^*(\mathbf{k}_2) \right] \rangle e^{-\gamma t_1} + \\ & + \frac{4\pi i}{\varepsilon} (\mathbf{k}_1)_j \left(\delta_{mn} - \frac{(\mathbf{k}_2)_n(\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2} \right) K_{jn}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s)} S_{lm}^{(HE)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s) ds = \\ & = \langle \tilde{\rho}_0(\mathbf{k}_1) \left[(S^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0)_l^*(\mathbf{k}_2) + (S^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0)_l^*(\mathbf{k}_2) \right] \rangle e^{-\gamma t_1} - \\ & - \frac{2\pi a^2}{cr^*(\mathbf{k}_2)} (\mathbf{k}_1)_j \left(\delta_{mn} - \frac{(\mathbf{k}_2)_n(\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2} \right) K_{jn}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \epsilon_{lqm}(\mathbf{k}_2)_q \times \\ & \times \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s)} \left(e^{r_+^*(\mathbf{k}_2)(t_2-s)} - e^{r_-^*(\mathbf{k}_2)(t_2-s)} \right) ds. \end{aligned}$$

Учитывая значения интегралов

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s) + r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)(t_2-s)} ds = e^{r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)} \int_0^{t_1} e^{-\gamma s + r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)s} ds = \\ & = \frac{e^{-\gamma t_1 + r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)t_1} - 1}{r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2) - \gamma} e^{r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}, \end{aligned}$$

находим выражение для корреляционной функции при конечных значениях t_1 . Асимптотическое же выражение при $t_1 \rightarrow \infty$ находится с учетом того, что $\text{Re}(\gamma - r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)) > 0$,

$$\int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s) + r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)(t_2-s)} ds \rightarrow \frac{e^{r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma - r_{\pm}^*(\mathbf{k}_2)}.$$

Тогда

$$\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{H}_l^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle_{\infty} =$$



$$\begin{aligned}
&= -\frac{2\pi a^2}{cr^*(\mathbf{k}_2)} (\mathbf{k}_1)_j \left(\delta_{mn} - \frac{(\mathbf{k}_2)_n (\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2} \right) K_{jn}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \epsilon_{lqm} (\mathbf{k}_2)_q \left[\frac{e^{r_+^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma - r_+^*(\mathbf{k}_2)} - \frac{e^{r_-^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma - r_-^*(\mathbf{k}_2)} \right] = \\
&= -\frac{2\pi a^2}{cr^*(\mathbf{k}_2)} (\mathbf{k}_1)_j \left(\delta_{mn} - \frac{(\mathbf{k}_2)_n (\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2} \right) K_{jn}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \epsilon_{lqm} (\mathbf{k}_2)_q \times \\
&\quad \times \frac{e^{-\gamma(t_2-t_1)/2}}{2\gamma^2 + a^2 \mathbf{k}_2^2} [3\gamma \operatorname{sh} r^*(\mathbf{k}_2)(t_2 - t_1) + 2r^*(\mathbf{k}_2) \operatorname{ch} r^*(\mathbf{k}_2)(t_2 - t_1)]. \quad (27)
\end{aligned}$$

В пространственно-однородном случае, –

$$\begin{aligned}
&\langle \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t) \bar{H}_l^*(\mathbf{k}', t') \rangle_\infty = \\
&= -\frac{2\pi a^2}{c} k_j \left(\delta_{mn} - \frac{k_n k_m}{k^2} \right) K_{jn}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \epsilon_{lqm} k_q \times \\
&\quad \times \frac{e^{-\gamma(t'-t)/2}}{2\gamma^2 + a^2 k^2} \left[3 \frac{\gamma}{r(\mathbf{k})} \operatorname{sh} r(\mathbf{k})(t' - t) + 2 \operatorname{ch} r(\mathbf{k})(t' - t) \right]. \quad (28)
\end{aligned}$$

Вычисленные парные корреляционные функции $\langle \bar{\mathbf{E}}_{j_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{\mathbf{E}}_{j_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$, $\langle \bar{\mathbf{E}}_{j_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{\mathbf{H}}_{j_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$, $\langle \bar{\mathbf{H}}_{j_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{\mathbf{H}}_{j_2}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle$ позволяют выразить важнейшие физические характеристики теплового электромагнитного излучения – его плотности энергии и импульса, а также плотности потоков этих величин, которые представляются квадратичными формами от компонент электромагнитного поля.

Литература

1. Фат Л.Т., Вирченко Ю.П. Стохастические электромагнитные поля в диэлектрической среде. 1. Построение модели // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика, Математика. – 2015. – 8(202);38. – С.119-129.
2. Рытов С.М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения.- М.: Изд. АН СССР, 1953.
3. Рытов С.М., Татарский В.И., Кравцов Ю.А. Введение в статистическую радиофизику, ч.2 Случайные поля/ С.М. Рытов.- М.: Наука, 1978.- 464с.
4. Спэрроу Э.М. Теплообмен излучением / Э.М. Спэрроу, Р.Д. Сесс. – Л.: Энергия, Ленинградское отделение, 1972. – 295с.

STOCHASTIC ELECTROMAGNETIC FIELDS IN DIELECTRIC MEDIUM. 2. CALCULATION OF PAIR CORRELATION FUNCTIONS

Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. Gaussian random field is constructed that describes the stochastic electromagnetic field in dielectric medium caused by heat fluctuations in them. The field is generated by stochastic dynamic system of Maxwell's equations with additive noise.

Key words: stochastic electromagnetic field, gaussian random field, Maxwell's equations, stochastic model, correlation function.



MSC 76N15, 76M45

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ГАЗОДИНАМИКЕ

Н.Н. Самойлова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. В рамках общей конструкции построения асимптотических разложений стационарных решений системы уравнений газодинамики, предложенной ранее, доказываем возможность построения таких разложений для потенциальных течений с учетом граничных условий. Доказываем, что граничные условия непротекания могут быть удовлетворены в задаче о течении в бесконечно широком слое с параллельными ограничивающими полуплоскостями.

Ключевые слова: уравнение Навье-Стокса, стационарные задачи, уравнение непрерывности, потенциальное течение, асимптотические разложения.

1. Введение. Как известно (см., например, [1]), система дифференциальных уравнений газодинамики без учета теплопереноса состоит из уравнения Навье-Стокса

$$\dot{u}_j + (\mathbf{u}, \nabla)u_j = -\frac{\nabla_j P}{\rho} + \nabla_k \mu \left(\nabla_k u_j + \nabla_j u_k - \frac{2}{3} \delta_{jk} \right) + (\nabla, \eta \nabla)u_j, \quad j = 1, 2, 3; \quad (1)$$

и уравнения непрерывности

$$\dot{\rho} + (\nabla, \rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2)$$

в которых коэффициенты вязкости μ, η и давление P , в общем случае, являются функциями плотности ρ . Мы будем в настоящем сообщении полагать μ и η постоянными, а для функции $P(\rho)$ использовать линейную аппроксимацию, справедливую в некотором диапазоне плотностей, довольно малых с физической точки зрения, $P = \rho_0 + v^2(\rho - \rho_0)$, где v – скорость звука.

Известно, что даже для такой упрощенной формы системы уравнения (1), (2), в настоящее время, не имеется математических утверждений о разрешимости задачи Коши. В этой ситуации особую ценность приобретают асимптотические методы, в рамках которых удается контролировать точность приближенных решений [2]. Это положение имеет место и в частном случае, которому посвящено настоящее сообщение, когда изучаются стационарные, не зависящие от времени t решения системы (1), (2). Следует признать, что для этого случая известна теорема существования решений, удовлетворяющих определенному типу граничных условий (см. [3]). Однако, при решении конкретных газодинамических задач методы построения асимптотических разложений играют важную роль, так как позволяют находить аналитическую форму решений.

В предыдущей публикации [4] был предложен общий подход для построения асимптотических разложений решений стационарных задач газодинамики в том случае, когда малыми являются некоторая усредненная скорость течения и плотность газа. Этот



подход, по мнению авторов, может быть использован не только в случае стационарных задач для системы уравнений (1) и (2), но применен также к стационарным задачам для расширенной системы, описывающей течения с учетом теплопереноса. При применении предложенной схемы разложений оказалось, что возникают определенного вида препятствия, связанные с необходимостью удовлетворения граничным условиям на стенках, ограничивающих течение. Сложившееся положение поставило вопрос о том, в каких же конкретно случаях предложенная схема разложений оказывается эффективной. Довольно затруднительно дать ответ на этот вопрос в общем случае. В настоящем сообщении, мы доказываем возможность построения предложенных асимптотических разложений на примере решения конкретной задачи математической физики.

2. Асимптотические разложения стационарных потенциальных течений.

Мы будем изучать решения $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$ системы уравнений

$$\nu^2 \nabla_j g + (\mathbf{u}, \nabla) u_j = (\mu + \eta) \Delta u_j + \frac{\mu}{3} \nabla_j (\nabla, \mathbf{u}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

$$(\nabla g, \mathbf{u}) + (\nabla, \mathbf{u}) = 0, \quad (4)$$

где $g = \ln \rho / \rho_0$. Более того, как и в работе [4], мы ограничимся изучением т.н. потенциальных течений, для которых $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla \Psi(\mathbf{x})$, и поэтому, ввиду тождества $(\nabla \Psi, \nabla) \nabla_j \Psi_j = \nabla_j (\nabla \Psi)^2 / 2$, система (3), (4) принимает вид

$$\nu^2 g + \frac{1}{2} (\nabla \Psi)^2 = (4\mu/3 + \eta) \Delta \Psi, \quad (5)$$

$$(\nabla_k g) (\nabla_k \Psi) + \Delta \Psi = 0. \quad (6)$$

При построении конкретных решений этой системы уравнений газодинамики необходимо учесть граничные условия, которые, с одной стороны, должны содержать в себе условие непротекания газа через ограничивающие течение стенки, а с другой – позволяли бы выделить решение однозначно. Условие непротекания состоит в отсутствии компоненты скорости течения \mathbf{u} , нормальной к ограничивающей поверхности S . Оно формулируется в терминах потенциала Ψ следующим образом: $(\partial \Psi / \partial n)|_S = 0$,

Решения системы (5), (6) мы будем строить в виде асимптотических разложений

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Psi^{(k)}(\mathbf{x}), \quad g(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g^{(k)}(\mathbf{x}), \quad (7)$$

где ε – некоторый малый параметр. При этом мы полагаем, что в нулевом приближении $g^{(0)} = 0$, то есть $\rho^{(0)} = \rho_0 = \text{const}$.

Справедливо следующее утверждение, которое является некоторым уточнением аналогичного утверждения из [4].

Теорема 1. Для того, чтобы асимптотические степенные ряды (7) для потенциала Ψ и функции g удовлетворяли системе (5), (6), необходимо и достаточно, чтобы при



каждом $n \in \mathbb{N}$ функции $\Psi^{(n+1)}, g^{(n+1)}$ удовлетворяли системе линейных относительно $\Psi^{(n+1)}, g^{(n+1)}$ неоднородных уравнений

$$\Delta \Psi^{(n+1)} = - \sum_{l=1}^n \left(\nabla g^{(l)}, \nabla \Psi^{(n+1-l)} \right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (8)$$

$$v^2 g^{(n+1)} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left(\nabla \Psi^{(l)}, \nabla \Psi^{(n+1-l)} \right) = (\eta + 4\mu/3) \Delta \Psi^{(n+1)}, \quad (9)$$

таких, что для нахождения функций $\Psi^{(n+1)}, g^{(n+1)}$, как решений этой системы, достаточно задать функции $\Psi^{(k)}, g^{(k)}, k = 1, \dots, n$.

□ Подстановка рядов (7) в уравнения (5), (6) дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Delta \Psi^{(k)} = - \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=1}^{k-1} \left(\nabla g^{(l)}, \nabla \Psi^{(k-l)} \right),$$

$$v^2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=1}^{k-1} \left(\nabla \Psi^{(l)}, \nabla \Psi^{(k-l)} \right) = (\eta + 4\mu/3) \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Delta \Psi^{(k)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одной и той же степени ε^k в обеих частях каждого из уравнений, получим две бесконечные системы уравнений, которые при каждом фиксированном значении $n \in \mathbb{N}$ совпадают с (8), (9), соответственно.

Отдельно выпишем уравнения для коэффициентов при первой степени ε ,

$$\Delta \Psi^{(1)} = 0, \quad g^{(1)} = 0. \quad (10)$$

Рассуждая индукцией по $n \in \mathbb{N}_+$, заметив, что при $n = 1$ функция $\Psi^{(1)}$ подчинена линейному однородному уравнению, допустим, что определены все функции $\Psi^{(k)}$ и $g^{(k)}, k = 1, \dots, m$, как удовлетворяющие линейным уравнениям (8), (9) при $n = 1, \dots, m - 1$. Тогда уравнение (8) при значении $n = m$ представляет собой линейное относительно функции $\Psi^{(m+1)}$ неоднородное уравнение, правая часть которого зависит только от функций $\Psi^{(k)}, g^{(k)}$ с $k = 1, \dots, m$. После нахождения функции $\Psi^{(m+1)}$, функция $g^{(m+1)}$ определяется (9) при $n = m$. ■

Замечание. При $n = 1$ уравнения (8), (9) имеют следующий вид:

$$\Delta \Psi^{(2)} = 0, \quad v^2 g^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\nabla \Psi^{(1)} \right)^2 = 0,$$

откуда $g^{(2)} \neq \text{const}$. Это дает, в следующем приближении, неоднородное, что очень важно, уравнение для $\Psi^{(3)}$, даже в случае, если граничные условия таковы, что $\Psi^{(2)} = \text{const}$,

$$\Delta \Psi^{(3)} = \left(\nabla g^{(2)}, \nabla \Psi^{(1)} \right) \neq 0, \\ v^2 g^{(3)} + \left(\nabla \psi^{(2)}, \nabla \Psi^{(1)} \right) = (\eta + 4\mu/3) \Delta \Psi^{(3)}.$$



Здесь сначала решается первое уравнение для $\Psi^{(3)}$, а затем на основе известной функции $\Psi^{(3)}$ вычисляется $g^{(3)}$ из второго уравнения. Таким образом, конструируемые асимптотические ряды не являются тривиальными, равными тождественно нулю.

Доказанная теорема является основой для построения асимптотических рядов для решений системы уравнений (5), (6). Реальное же построение таких асимптотических рядов регламентируется возможностью удовлетворить заданным граничным условиям, в число которых обязательно входит условие непротекания $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)_S = 0$ на совокупности стенок S , ограничивающих течение. Подставляя в это условие ряд (7) для потенциала Ψ и приравнявая нулю отдельно коэффициенты ряда при каждой степени ε^k , $k \in \mathbb{N}$, получим совокупность граничных условий $\left(\frac{\partial\Psi^{(k)}}{\partial n}\right)_S = 0$, $k \in \mathbb{N}$, которым должны удовлетворять приближения $\Psi^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. На вопрос о том, в рамках каких постановок граничных задач, действительно, есть возможность, чтобы все приближения $\Psi^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ могли быть подчинены этим граничным условиям, к сожалению, в настоящее время не удается дать положительный ответ для какого-то сколько-нибудь обширного класса некомпактных областей Ω , в которых происходит течение. Что касается компактных областей Ω , когда стенки, ограничивающие течение, составляют границу $\partial\Omega$, то граничные задачи в этом случае, порождаемые совокупностью уравнений (8), (9) с граничными условиями непротекания приводят только к тривиальному решению $\Psi = \text{const}$, $g = 0$. В следующем разделе мы покажем, что в частном случае задачи течения газа между параллельными полуплоскостями граничные задачи для функций $\Psi^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ разрешимы для всех k .

3. Течение газа между параллельными полуплоскостями. Рассмотрим течение газа в области $\Omega = [0, \infty) \times [0, 2d] \times \mathbb{R}$, $\infty > d > 0$ (либо, в «ограниченном» случае $\Omega = [0, L] \times [0, 2d] \times \mathbb{R}$). Течение будем считать таковым, что поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ не зависит от третьей координаты. По этой причине, функция g также не зависит от третьей координаты. Первые две координаты пространственной точки \mathbf{x} будем обозначать x, y . Значения векторного поля также будем считать двухкомпонентными $\langle u_x, u_y \rangle$, а само поле – потенциалным, то есть $u_x = \partial\Psi/\partial x$, $u_y = \partial\Psi/\partial y$ с потенциалом $\Psi(x, y)$. Такое стационарное течение будем изучать на основе асимптотических разложений предыдущего раздела. Стенками, ограничивающими течение будем считать полуплоскости $[0, \infty) \times \{0\} \times \mathbb{R}$, $[0, \infty) \times \{2d\} \times \mathbb{R}$ (плоские полосы $[0, L] \times \{0\} \times \mathbb{R}$, $[0, L] \times \{2d\} \times \mathbb{R}$ в ограниченном случае). Граничное условие при $x = 0$ будем считать таковым, что $u_x > 0$, то есть течение осуществляется слева направо. Граничное условие непротекания на стенках записывается в виде $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_{y=2d} = 0$. Это приводит к необходимости выполнения следующих граничных условий для каждого l -го приближения $\Psi^{(l)}$ потенциала $\left(\frac{\partial\Psi^{(l)}}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial\Psi^{(l)}}{\partial y}\right)_{y=2d} = 0$. Так как потенциал Ψ , и функцию g , в виду их гладкости, всегда можно представить в виде сходящихся к ним рядов Фурье, и, соответственно,



представить такими же рядами Фурье их приближения,

$$\Psi(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_m(x) \exp\left(i \frac{\pi m}{d} y\right), \quad \Psi^{(l)}(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_m^{(l)}(x) \exp\left(i \frac{\pi m}{d} y\right),$$

в которых, учитывая условие вещественности $\Psi(x, y)$, $\Psi^{(l)}(x, y)$, должно выполняться $\varphi_m^*(x) = \varphi_{-m}(x)$, $\varphi_m^{(l)*}(x) = \varphi_{-m}^{(l)}(x)$. Принимая во внимание граничные условия на стенках, коэффициенты $\varphi_m(x)$, $\varphi_m^{(l)}(x)$ должны быть подчинены условию $\sum_{m=1}^{\infty} m \operatorname{Im} \varphi_m(x) = 0$. Однако, с целью упрощения рассмотрений, мы будем считать, что граничные условия при $x = 0$ (и $x = L$ в ограниченном случае) обладают симметрией относительно преобразования $y \Rightarrow 2d - y$. Тогда, такой симметрией должны обладать решения задачи, и поэтому ряды Фурье для Ψ и $\Psi^{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$, учитывая граничные условия при $y = 0, 2d$, положим в виде

$$\Psi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x) \cos\left(\frac{\pi m}{d} y\right), \quad \Psi^{(l)}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m^{(l)}(x) \cos\left(\frac{\pi m}{d} y\right). \quad (11)$$

Сформулируем утверждение о существовании асимптотических рядов, сконструированных в предыдущем разделе, для решения граничной задачи, определяющей течение $\mathbf{u}(x, y)$.

Теорема 2. *Асимптотические степенные ряды (7) для потенциала $\Psi(x, y)$ и функции $g(x, y)$, удовлетворяющие системе (5), (6) и граничным условиям $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)_S = 0$ для области Ω со стенками S , которые представляются полуплоскостями $[0, \infty) \times \{0\} \times \mathbb{R}$, $[0, \infty) \times \{2d\} \times \mathbb{R}$ (соответственно, $[0, L] \times \{0\} \times \mathbb{R}$, $[0, L] \times \{2d\} \times \mathbb{R}$) существуют, то есть в этих условиях, для любого $n \in \mathbb{N}$, существуют функции $\Psi^{(n+1)}(x, y)$, $g^{(n+1)}(x, y)$, определяемые системой (8), (9).*

□ Подставим разложения (11) в (10). Тогда, коэффициенты ряда Фурье, получившегося в результате подстановки, должны обращаться в нуль. Поэтому имеем следующую систему уравнений для функций $\varphi_m^{(1)}(x)$,

$$\varphi_m^{(1)''}(x) = (\pi m/d)^2 \varphi_m^{(1)}(x). \quad (12)$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi^{(l)}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m^{(l)'}(x) \cos \frac{\pi m}{d} y, \quad \frac{\partial}{\partial y} \Psi^{(l)}(x, y) = -\frac{\pi}{d} \sum_{m=1}^{\infty} m \varphi_m^{(l)}(x) \sin \frac{\pi m}{d} y,$$

то

$$\begin{aligned} & \left(\nabla \Psi^{(l)}, \nabla \Psi^{(n+1-l)} \right)(x, y) = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi}{d} y \sum_{m=k-1}^{\infty} \left[\varphi_m^{(l)'}(x) \varphi_{k+m}^{(n+1-l)'}(x) + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 m(k+m) \varphi_m^{(l)}(x) \varphi_{k+m}^{(n+1-l)}(x) \right] + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \cos \frac{k\pi}{d} y \sum_{m=0}^k \left[\varphi_m^{(l)'}(x) \varphi_{k-m}^{(n+1-l)'}(x) - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 m(k-m) \varphi_m^{(l)}(x) \varphi_{k-m}^{(n+1-l)}(x) \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\varphi_m^{(l)'}(x) \varphi_m^{(n+1-l)'}(x) + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 m^2 \varphi_m^{(l)}(x) \varphi_m^{(n+1-l)}(x) \right]. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Здесь было использовано правило перестройки суммирований

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0, m'=0} \Lambda_+(m, m' + m) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \Lambda_+(m, k), \\
 \sum_{m=0, m'=0} \Lambda_-(m, |m - m'|) &= \sum_{m=0}^{\infty} \Lambda_-(m, 0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k-1}^{\infty} \Lambda_-(m, k).
 \end{aligned}$$

Подставляя разложение (11), (13), а также разложение

$$g^{(l)}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m^{(l)}(x) \cos \frac{m\pi}{d} y,$$

в (9) и приравнявая одноименные коэффициенты Фурье в обеих частях полученного таким образом равенства, находим систему уравнений

$$\begin{aligned}
 & (\eta + 4\mu/3) \frac{d^2}{dx^2} \varphi_m^{(n+1)}(x) = v^2 h_m^{(n+1)}(x) + \\
 & + \frac{1}{2} (1 - \delta_{m0}) \sum_{l=1}^n \sum_{j=m-1}^{\infty} \left[\varphi_j^{(l)'}(x) \varphi_{j+m}^{(n+1-l)'}(x) + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 j(j+m) \varphi_j^{(l)}(x) \varphi_{j+m}^{(n+1-l)}(x) \right] + \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^m \left[\varphi_j^{(l)'}(x) \varphi_{m-j}^{(n+1-l)'}(x) - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 j(m-j) \varphi_j^{(l)}(x) \varphi_{m-j}^{(n+1-l)}(x) \right] + \\
 & + \frac{1}{4} \delta_{m0} \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \left[\varphi_k^{(l)'}(x) \varphi_k^{(n+1-l)'}(x) + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 k^2 \varphi_k^{(l)}(x) \varphi_k^{(n+1-l)}(x) \right], \quad m \in \mathbb{N}_+. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Точно также подставляя в уравнение (8) разложение

$$\begin{aligned}
 & \left(\nabla g^{(l)}, \nabla \Psi^{(n+1-l)} \right) (x, y) = \\
 & = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi}{d} y \sum_{m=k-1}^{\infty} \left[h_m^{(l)'}(x) \varphi_{k+m}^{(n+1-l)'}(x) + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 m(k+m) h_m^{(l)}(x) \varphi_{k+m}^{(n+1-l)}(x) \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \cos \frac{k\pi}{d} y \sum_{m=0}^k \left[h_m^{(l)'}(x) \varphi_{k-m}^{(n+1-l)'}(x) - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 m(k-m) h_m^{(l)}(x) \varphi_{k-m}^{(n+1-l)}(x) \right] +
 \end{aligned}$$



$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[h_m^{(l)'}(x) \varphi_m^{(n+1-l)'}(x) + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 m^2 h_m^{(l)}(x) \varphi_m^{(n+1-l)}(x) \right], \quad (15)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \varphi_m^{(n+1)}(x) = \\ & = -\frac{1}{2}(1 - \delta_{m0}) \sum_{l=1}^n \sum_{j=m-1}^{\infty} \left[h_j^{(l)'}(x) \varphi_{j+m}^{(n+1-l)'}(x) + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 j(j+m) h_j^{(l)}(x) \varphi_{j+m}^{(n+1-l)}(x) \right] - \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^m \left[h_j^{(l)'}(x) \varphi_{m-j}^{(n+1-l)'}(x) - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 j(m-j) h_j^{(l)}(x) \varphi_{m-j}^{(n+1-l)}(x) \right] - \\ & \quad - \frac{1}{2} \delta_{m0} \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \left[h_k^{(l)'}(x) \varphi_k^{(n+1-l)'}(x) + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 k^2 h_k^{(l)}(x) \varphi_k^{(n+1-l)}(x) \right], \quad m \in \mathbb{N}_+. \quad (16) \end{aligned}$$

Рассуждая индукцией по $n \in \mathbb{N}$, сначала находим решение уравнения (12) для $\varphi_m^{(1)}(x)$ с краевыми условиями на границах области Ω с $x = 0$ и $x \rightarrow \infty$ (соответственно, $x = L$). При этом $h_m^{(1)} = 0$. Положив затем, что функции $\varphi_m^{(l)}(x)$, $h_m^{(l)}(x)$ определены при $l = 1, \dots, n$ с использованием граничных условий для них на указанных границах области Ω , находим на основе линейных уравнений (14) и (16) их решения – функции $\varphi_m^{(n+1)}(x)$ и $h_m^{(n+1)}(x)$ с использованием граничных условий для них при $x = 0$ и $x \rightarrow \infty$ (соответственно, $x = L$). Сначала решается уравнение (16) вычислением двукратного интеграла от правой части, а затем, подстановкой выражения для $d^2 \varphi_m^{(n+1)}(x)/dx^2$ в (14), находятся функции $h_m^{(n+1)}(x)$. ■

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / М.: Наука, 1986.
2. Хашпель Дж., Бреннер Х. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / М.: Мир, 1976.
3. Ладыженская О.А. Исследование уравнения Навье—Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости / Успехи математических наук. – 1959. – XIV. – 3(87). – С.75-97.
4. Вирченко Ю.П., Самойлова Н.Н. Асимптотические разложения решений уравнений газодинамики стационарных потенциальных течений / Научные ведомости. Математика. Физика. – 2015. – №5(202);38. – С.112-118.

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF STATIONARY POTENTIAL FLOWS IN GAS-DYNAMICS

N.N. SamoiloVA, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.com

Abstract. In frameworks of earlier proposed general construction of stationary solutions asymptotic expansions in gas-dynamics, it is proved the possibility of building such expansions of potential flows. At the application the expansion scheme, the nontransparency boundary condition plays the central role. It consists of the gas does not pass through "walls" limiting the flux. It is proved that such a boundary condition may be satisfied for the flow in infinitely wide layer with parallel limiting semi-planes.

Key words: Navier-Stokes' equation, stationary problems, continuity equation, potential flow, asymptotic expansion.



MSC 78A35

КЛАССИФИКАЦИЯ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ ЭЛЕКТРОНА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В РЕЖИМЕ АКСИАЛЬНОГО КАНАЛИРОВАНИЯ В КРИСТАЛЛЕ

В.В. Сыщенко¹, А.И. Тарновский¹, А.Ю. Исупов²

¹Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия

²ЛФВЭ ОИЯИ, Дубна, 141980, Россия

Аннотация. В работе исследуются возможности так называемого спектрального метода для нахождения решений уравнения Шредингера в условиях задачи об аксиальном каналировании заряженных частиц. С помощью этого метода определяются характеристики квантовых состояний на примере электрона, движущегося вблизи атомной цепочки [110] кристалла кремния.

Ключевые слова: каналирование, спектральный метод, собственные функции, квантовый хаос.

1. Введение. При прохождении заряженных частиц через кристаллы может наблюдаться явление каналирования, заключающееся в увеличении длины пробега частиц вследствие их движения в каналах, образованных кристаллическими осями или плоскостями [1, 2]. Движение частицы в аксиальном канале с хорошей точностью может быть описано как движение в непрерывном потенциале атомной цепочки, то есть в потенциале составляющих цепочку атомов, усредненном вдоль оси цепочки. При движении в таком потенциале будет сохраняться продольная компонента импульса частицы p_{\parallel} , вследствие чего задача о движении частицы сводится к двумерной задаче о движении в поперечной плоскости. При этом могут оказаться существенными квантовые эффекты, в частности, квантование значений энергии поперечного движения частицы [1]. Сложный характер рельефа потенциальной энергии в рассматриваемых случаях не допускает аналитического интегрирования уравнения Шредингера. Это делает необходимым развитие высокоэффективных численных методов нахождения уровней энергии поперечного движения и других квантовых характеристик движения частиц в кристалле.

Целью настоящей работы является исследование возможностей так называемого спектрального метода [3] для нахождения решений уравнения Шредингера применительно к каналированию быстрых электронов, движущихся в поле атомной цепочки (на примере цепочки [110] кристалла кремния). Ранее этот метод был успешно использован для нахождения уровней энергии поперечного движения электрона в этой ситуации [4–6].

2. Связанные состояния частицы в двумерном центрально-симметричном потенциале. Поперечное движение электрона в непрерывном потенциале цепочки бу-



дет описываться двумерным уравнением Шредингера

$$\hat{H}\Psi(x, y, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(x, y, t) \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2E_{\parallel}/c^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] + U(x, y), \quad (2)$$

в котором величина E_{\parallel}/c^2 играет роль массы частицы, а $E_{\parallel} = \sqrt{m^2c^4 + p_{\parallel}^2c^2}$ — энергия ее продольного движения [1].

Поле, создаваемое отдельной цепочкой (без учета влияния соседних цепочек в кристалле), обладает центральной симметрией: $U(x, y) = U(r)$. Наличие такой симметрии позволяет провести качественный анализ квантовых состояний электрона. Переходя к полярным координатам, получаем

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2E_{\parallel}/c^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + U(r). \quad (3)$$

Уравнение для собственных функций и собственных значений оператора (3)

$$-\frac{\hbar^2}{2E_{\parallel}/c^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \psi(r, \varphi) + U(r)\psi(r, \varphi) = E_{\perp}\psi(r, \varphi) \quad (4)$$

допускает разделение переменных, его решения будут иметь вид

$$\psi_{n_r, m}(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \rho_{n_r, |m|}(r), \quad (5)$$

где функция $\psi_{n_r}(r)$ является решением уравнения

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} \right] \rho_{n_r, |m|}(r) + \frac{2E_{\parallel}/c^2}{\hbar^2} (E_{\perp} - U(r)) \rho_{n_r, |m|}(r) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, квантовые состояния частицы в аксиально-симметричном потенциале $U(r)$ будут характеризоваться радиальным квантовым числом n_r , совпадающим с числом нулей радиальной части волновой функции (3) при конечных значениях r (за исключением нуля в точке $r = 0$), и проекцией m орбитального момента на ось симметрии поля. При этом состояния с $m = 0$ оказываются не вырождены, а для состояний с ненулевыми значениями проекции орбитального момента имеет место двукратное вырождение по знаку m (см. также задачу 4.7 в [7]). Собственные значения гамильтониана (3), то есть собственные значения энергии поперечного движения каналированного электрона, будут, в общем случае, зависеть от обоих квантовых чисел: $E_{\perp} = E_{n_r, |m|}$.

3. Спектральный метод. Идея спектрального метода [3] основана на численном моделировании эволюции начальной волновой функции $\Psi(x, y, 0)$ в соответствии с уравнением Шредингера (1). Оказывается, что корреляционная функция

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, y, 0)\Psi(x, y, t) dx dy \quad (7)$$



между начальным и текущим значениями волновой функции содержит информацию о собственных значениях оператора (2). Действительно, представим решение уравнения (1) в виде суперпозиции собственных функций $\psi_{n,j}(x, y)$ гамильтониана

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{n,j} A_{n,j} \psi_{n,j}(x, y) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right), \quad (8)$$

где индекс n нумерует собственные значения энергии E_n , а индекс j — вырожденные состояния, соответствующие этой энергии. Подставляя волновую функцию (8) в (7), получим корреляционную функцию

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{n,n',j,j'} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) A_{n,j}^* A_{n',j'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n,j}^*(x, y) \psi_{n',j'}(x, y) dx dy = \\ &= \sum_{n,n',j,j'} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) A_{n,j}^* A_{n',j'} \delta_{nn'} \delta_{jj'} = \sum_{n,j} |A_{n,j}|^2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right), \end{aligned} \quad (9)$$

фурье-образ которой

$$P(E) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} Et\right) dt = 2\pi\hbar \sum_{n,j} |A_{n,j}|^2 \delta(E - E_n). \quad (10)$$

будет иметь вид набора δ -образных пиков, соответствующих собственным значениям E_n энергии системы.

Таким образом, для нахождения спектра энергий квантовой системы необходимо знание волновой функции $\Psi(x, y, t)$, значения которой можно получить численным интегрированием нестационарного уравнения Шредингера (1). Детали использованной нами процедуры описаны в [3, 4]. Подчеркнем, что начальное значение волновой функции $\Psi(x, y, 0)$ следует выбирать в виде волнового пакета достаточно общего вида, с тем, чтобы в суперпозиции (8) присутствовали все собственные функции гамильтониана $\psi_{n,j}(x, y)$, соответствующие собственным значениям энергии в интересующей нас области спектра.

Численное интегрирование в (10) может быть проведено только для конечного интервала времени T . С учетом этого выражение для фурье-образа корреляционной функции примет вид

$$P(E) = \int_0^T P(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} Et\right) dt = \sum_{n,j} |A_{n,j}|^2 \frac{\sin[(E_n - E)T/2\hbar]}{(E_n - E)/2\hbar} \exp\left[\frac{i}{2\hbar}(E - E_n)T\right]. \quad (11)$$

Фигурирующая в правой части (11) функция вида $\sin(xT)/x$, обладает главным максимумом при $x = 0$, тем более высоким и узким, чем больше промежуток времени T , а также максимумами и минимумами убывающей амплитуды по обе стороны от



главного максимума. В результате, вместо набора бесконечно узких пиков мы получаем суперпозицию максимумов, ширина которых обратно пропорциональна временному промежутку T . Выбор продолжительности последнего определяется желаемой разрешающей способностью вычислительной процедуры, которая, в свою очередь, определяется ожидаемым минимальным расстоянием ΔE между соседними уровнями энергии и составляет

$$T > \frac{2\pi\hbar}{\Delta E}. \quad (12)$$

Во избежание перекрытия боковых полос функции $\sin(xT)/x$ от соседних значений E_n данное требование может быть усилено. В наших вычислениях мы опирались на соотношение

$$T = \frac{16\pi\hbar}{\Delta E}. \quad (13)$$

Кроме того, разрешимость максимумов можно улучшить, домножив подынтегральную выражение в (11) на оконную функцию, например, на так называемую нормированную функцию Ханнинга [3]

$$w(t) = \frac{1}{T} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right). \quad (14)$$

Волновые функции стационарных состояний также могут быть найдены с помощью спектрального метода [3]. Чтобы определить собственные функции $\psi_n(x, y)$, соответствующие собственным значениям E_n , необходимо разложение (8) умножить на величину $\exp(iE_n t/\hbar)$ и проинтегрировать по временному промежутку T :

$$\begin{aligned} \int_0^T \Psi(x, y, t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_n t\right) dt &= \sum_{n', j} A_{n', j} \psi_{n', j}(x, y) \int_0^T \exp\left[\frac{i}{\hbar} (E_n - E_{n'}) t\right] dt = \\ &= \sum_{n', j} A_{n', j} \psi_{n', j}(x, y) \frac{\sin[(E_n - E_{n'})T/2\hbar]}{(E_n - E_{n'})/2\hbar} \exp\left[\frac{i}{2\hbar} (E_n - E_{n'}) T\right]. \end{aligned} \quad (15)$$

При достаточно больших промежутках времени T интеграл в левой части (15) будет с хорошей точностью пропорционален либо собственной функции $\psi_n(x, y)$ в отсутствие вырождения, либо суперпозиции собственных функций $\psi_{n, j}(x, y)$, если n -ый энергетический уровень является вырожденным. Для улучшения разрешающей способности можно и в этом случае домножить подынтегральное выражение на оконную функцию (14).

4. Движение в поле атомной цепочки. В качестве примера рассмотрим движение электрона с $E_{\parallel} = 20$ МэВ вблизи атомной цепочки [110] кристалла кремния, непрерывный потенциал которой выберем в виде модифицированного потенциала Линдхарда [1]

$$U(x, y) = -U_0 \ln \left(1 + \frac{\beta R^2}{x^2 + y^2 + \alpha R^2} \right), \quad (16)$$

где $U_0 = 60$ эВ, $\alpha = 0.37$, $\beta = 3.5$, $R = 0.194 \text{ \AA}$ (радиус Томаса-Ферми).



Вычисления на основе спектрального метода были выполнены нами с использованием следующих параметров:

- все функции координат задавались на дискретной сетке размером 256×256 узлов с шагом $\Delta x = \Delta y = a/256$, где $a = 5.431 \text{ \AA}$ – период решетки кристалла кремния;
- шаг по времени $\Delta t/\hbar = (1/75)U_{max}^{-1}$, где $U_{max} = U_0 \ln(1 + \beta/\alpha)$ – глубина потенциальной ямы (16), выбран из соображений устойчивости алгоритма;
- полное число шагов по времени составляет целую часть от величины $N_T = 50 \cdot 16\pi \cdot (\Delta t/\hbar)^{-1}$, что, согласно критерию (13), обеспечивает разрешающую способность не хуже $\Delta E = 0.02 \text{ эВ}$;
- начальная волновая функция выбрана в виде гауссианы, смещенной относительно центра потенциальной ямы в направлении оси y :

$$\Psi(x, y, 0) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2 + (y - y_0)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (17)$$

где $\sigma = 0.025 \text{ \AA}$, $y_0 = a/35$.

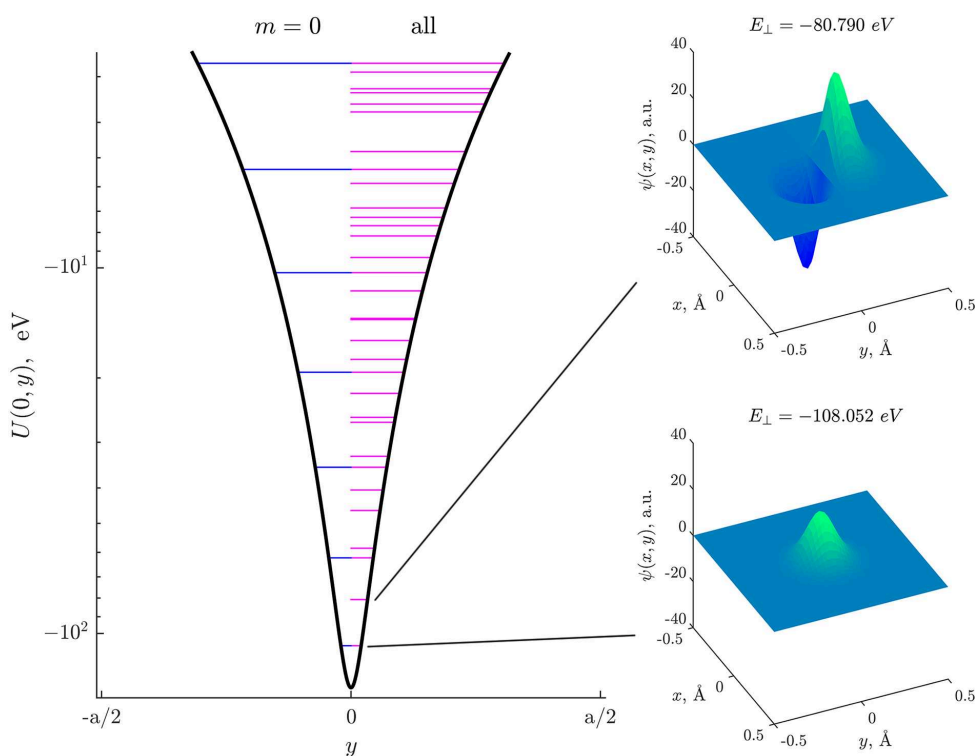


Рис. 1. Схема уровней энергии поперечного движения в непрерывном потенциале (15) цепочки [110] кристалла кремния для электрона с энергией продольного движения $E_{\parallel} = 20 \text{ МэВ}$ (для удобства восприятия, по оси ординат использована логарифмическая шкала) и волновые функции основного и первого возбужденного состояний. Для нахождения уровней энергии, соответствующих $m = 0$, использовалась описанная в тексте процедура, но с центрально-симметричным начальным волновым пакетом, то есть пакетом вида (17) с $y_0 = 0$.



Графики найденных нами волновых функций представлены на рис. 2-9 в виде областей черного и белого цвета на плоскости (x, y) , соответствующих значениям $\psi(x, y) < 0$ и $\psi(x, y) > 0$. Такое представление позволяет легко произвести классификацию собственных функций по квантовым числам n_r и m , просто подсчитывая нули волновой функции.

Действительно, при $m = 0$ волновые функции $\psi_{n_r,0}(r, \varphi)$ будут зависеть только от радиальной координаты, но не от угловой. Поэтому линии $\psi(x, y) = 0$ будут иметь вид концентрических окружностей. Все такие волновые функции представлены на рис. 2.

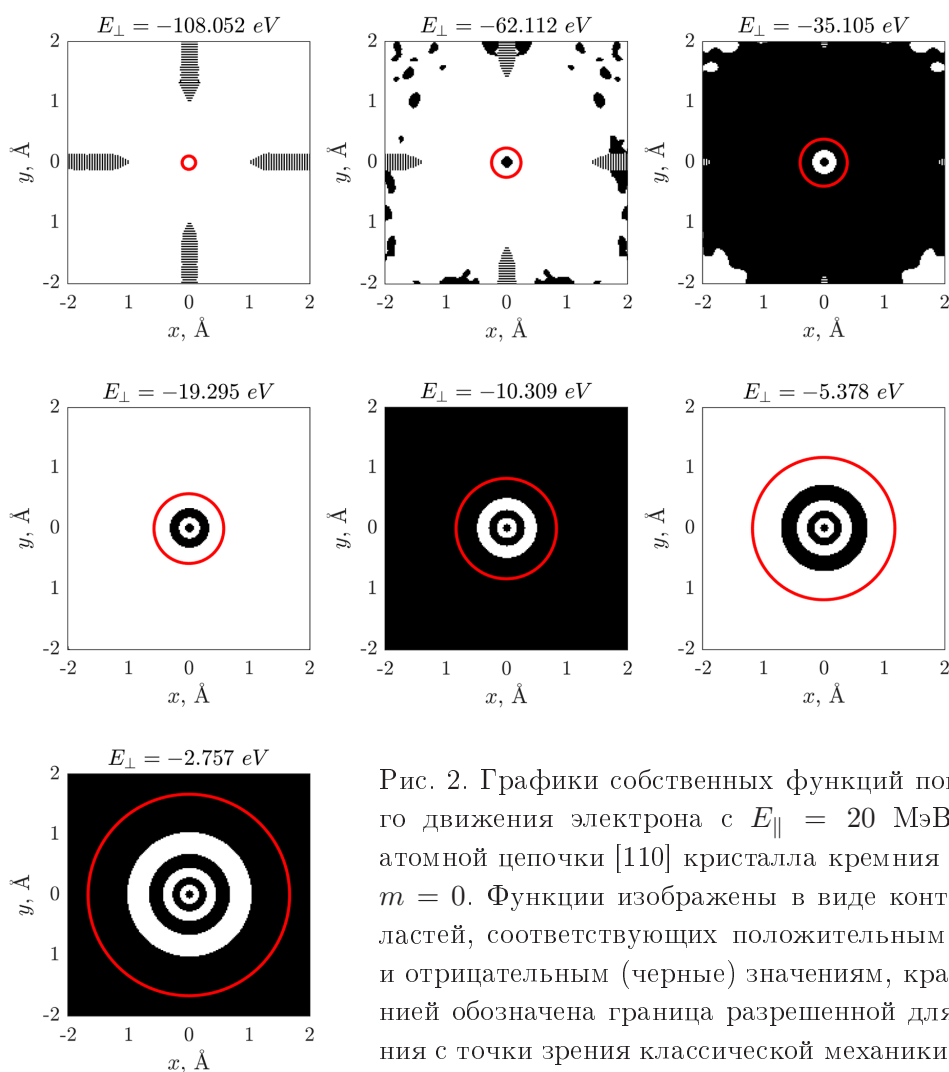


Рис. 2. Графики собственных функций поперечного движения электрона с $E_{\parallel} = 20$ МэВ в поле атомной цепочки $[110]$ кристалла кремния в случае $m = 0$. Функции изображены в виде контуров областей, соответствующих положительным (белые) и отрицательным (черные) значениям, красной линией обозначена граница разрешенной для движения с точки зрения классической механики области $U(x, y) < E_{\perp}$.

На рис. 1 и первом графике рис. 2 представлена волновая функция самого глубокого, основного состояния. Она вовсе лишена нулей (за исключением асимптотического стремления к нулю на бесконечности) и обладает единственным максимумом в центре. Соответственно этому, на первом графике рис. 2 она представлена единственной областью белого цвета (присутствующая на этом и некоторых других графиках



собственных функций нерегулярность в периферической области обусловлена погрешностью численных расчетов).

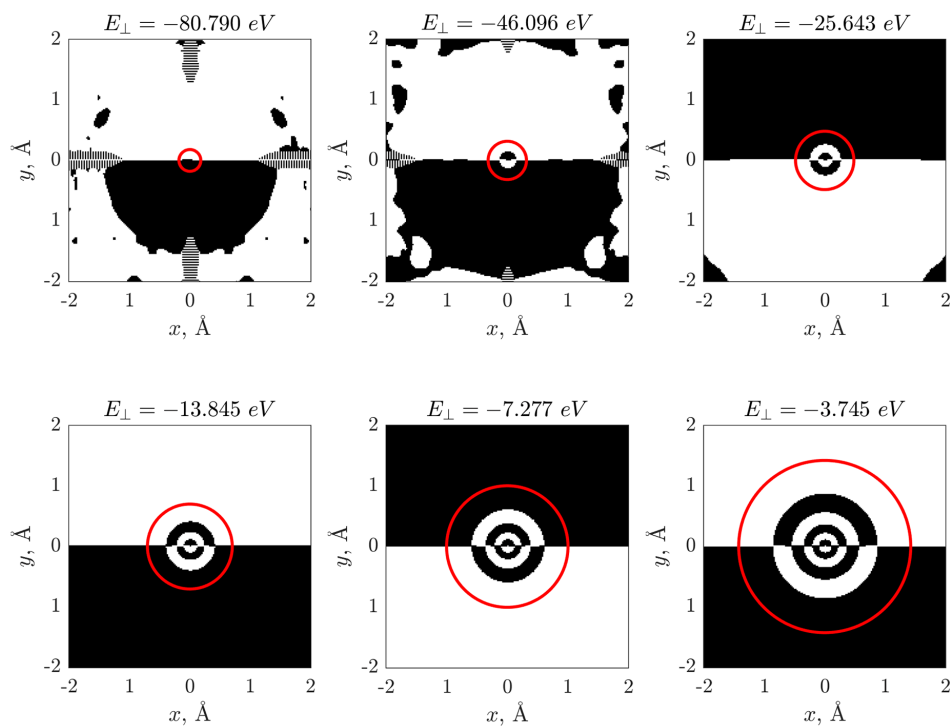


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, при $m = 1$.

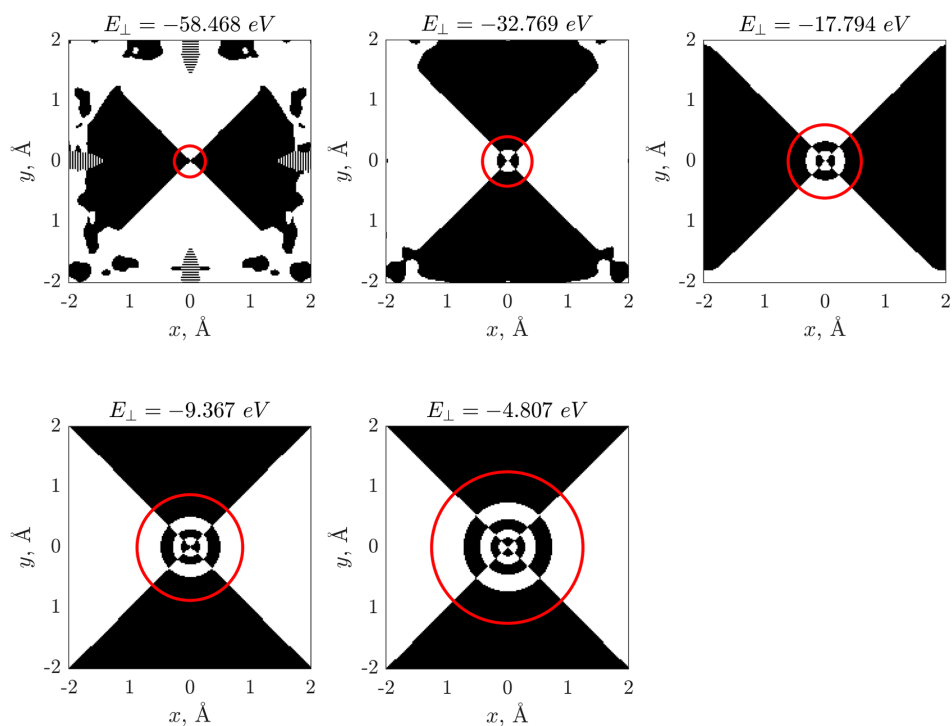


Рис. 4. То же, что и на рис. 2, при $m = 2$.



Каждое следующее (соответствующее более высокому собственному значению энергии) решение уравнения (6) при $m = 0$ будет сопровождаться увеличением на единицу количества нулей функции $\rho_{n_r,0}(r)$. Таким образом, мы можем пронумеровать эти состояния квантовым числом n_r , равным числу нулей радиальной части волновой функции.

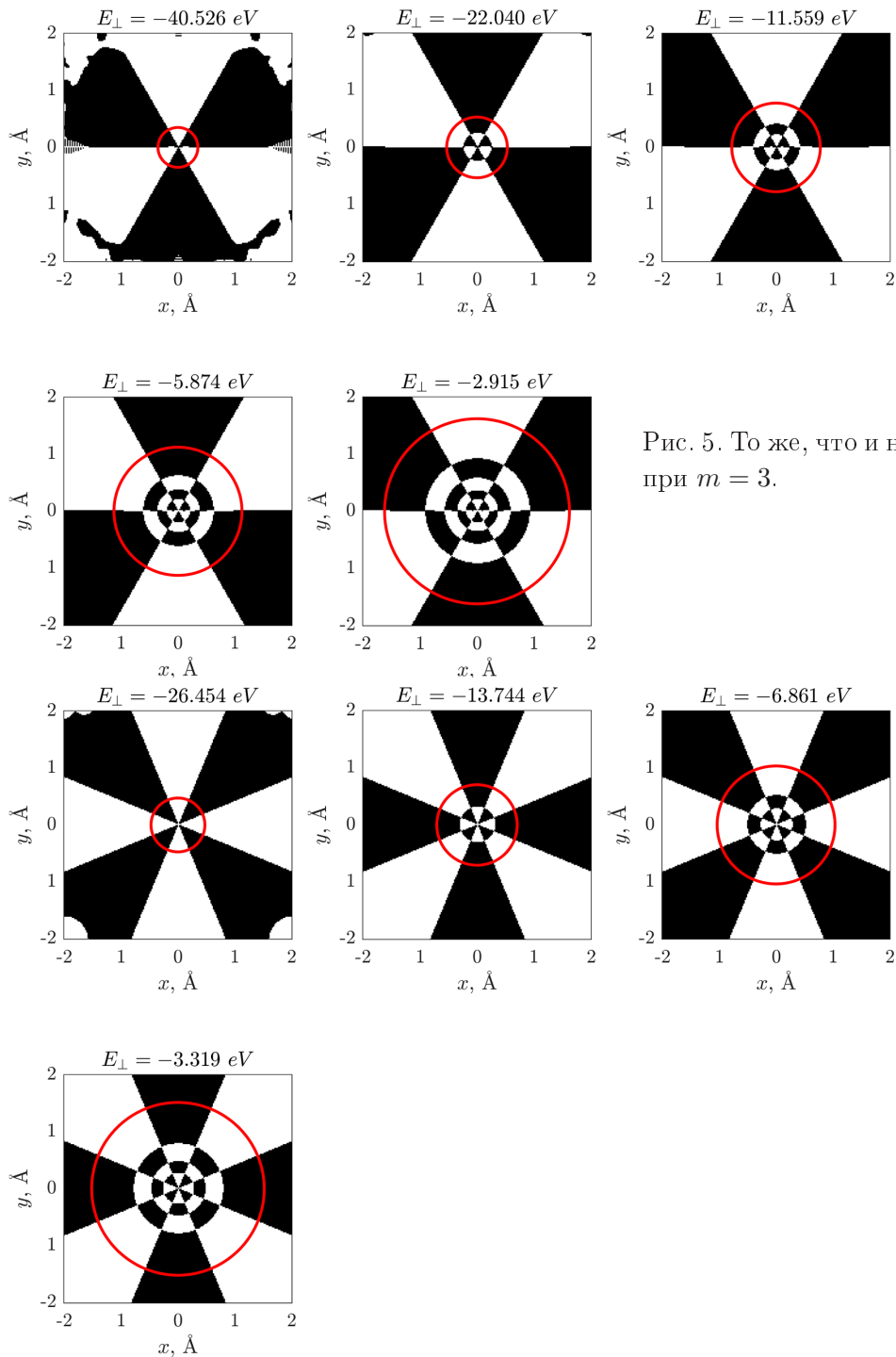
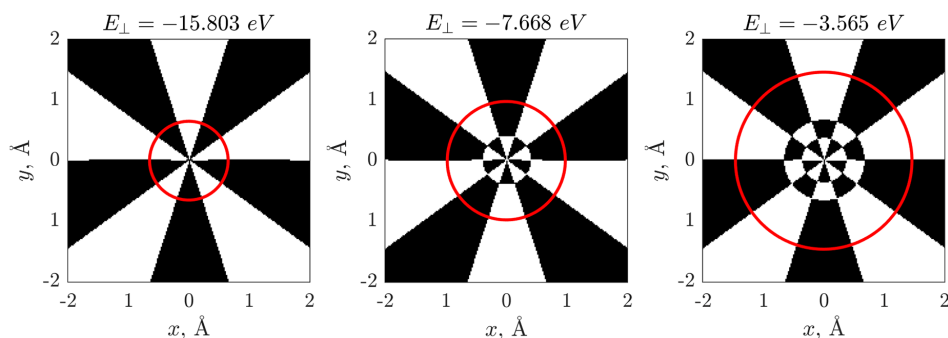
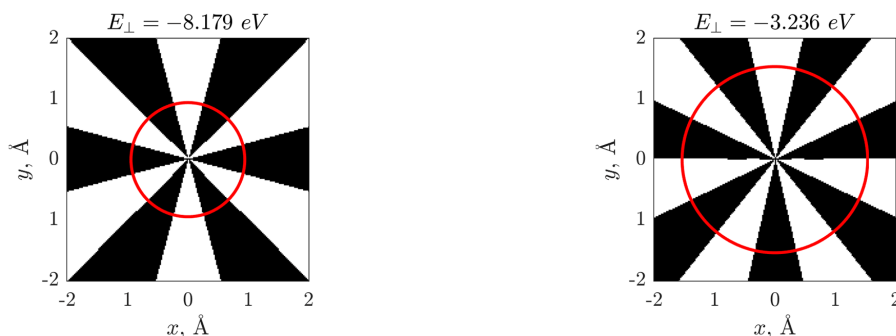


Рис. 5. То же, что и на рис. 2, при $m = 3$.

Рис. 6. То же, что и на рис. 2, при $m = 4$.

Рис. 7. То же, что и на рис. 2, при $m = 5$.Рис. 8. То же, что и на рис. 2, при $m = 6$. Рис. 9. То же, что и на рис. 2, при $m = 7$.

Соответствующие $n_r > 0$ графики волновых функций на рис. 2 имеют вид концентрических черных и белых колец; значения n_r легко определяются подсчетом числа границ между черными и белыми областями.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае отличной от нуля проекции орбитального момента. Наличие вырождения по знаку m приводит к тому, что наш метод вместо собственных функций вида (5) дает суперпозицию функций $\psi_{n_r, m}(r, \varphi)$ и $\psi_{n_r, -m}(r, \varphi)$ с равными по абсолютной величине весами, сводящуюся к функции вида

$$\rho_{n_r, |m|}(r) \cos \left[|m| \varphi + \alpha_m \right]. \quad (18)$$

Конкретно, в нашем случае, когда начальная гауссиана (17) смещена в положительном направлении оси y , собственные функции, вычисляемые спектральным методом, будут иметь вид

$$\rho_{n_r, |m|}(r) \cos \left[|m| \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (19)$$

(если отсчитывать полярный угол φ , как обычно, от положительного направления оси x против часовой стрелки). Таким образом, значение m у найденной нами волновой функции будет равно числу белых (либо черных) секторов на графике функции (см. рис. 3-9).

Схема уровней энергии нашей системы с учетом классификации состояний по квантовым числам n_r и m представлена на рис. 10.



Характерной чертой найденных нами волновых функций стационарных состояний является наличие пересечений линий узлов функции $\psi(x, y) = 0$, что приводит к формированию характерной картины типа шахматной доски, а подсчет линий узлов позволяет легко найти квантовые числа и проклассифицировать собственные состояния системы. Это обстоятельство обусловлено интегрируемостью системы: число интегралов движения системы (энергия поперечного движения E_{\perp} и проекция орбитального момента на ось симметрии поля) равно числу степеней свободы системы (две), что приводит к возможности разделения переменных в уравнении движения и интегрированию последнего в квадратурах.

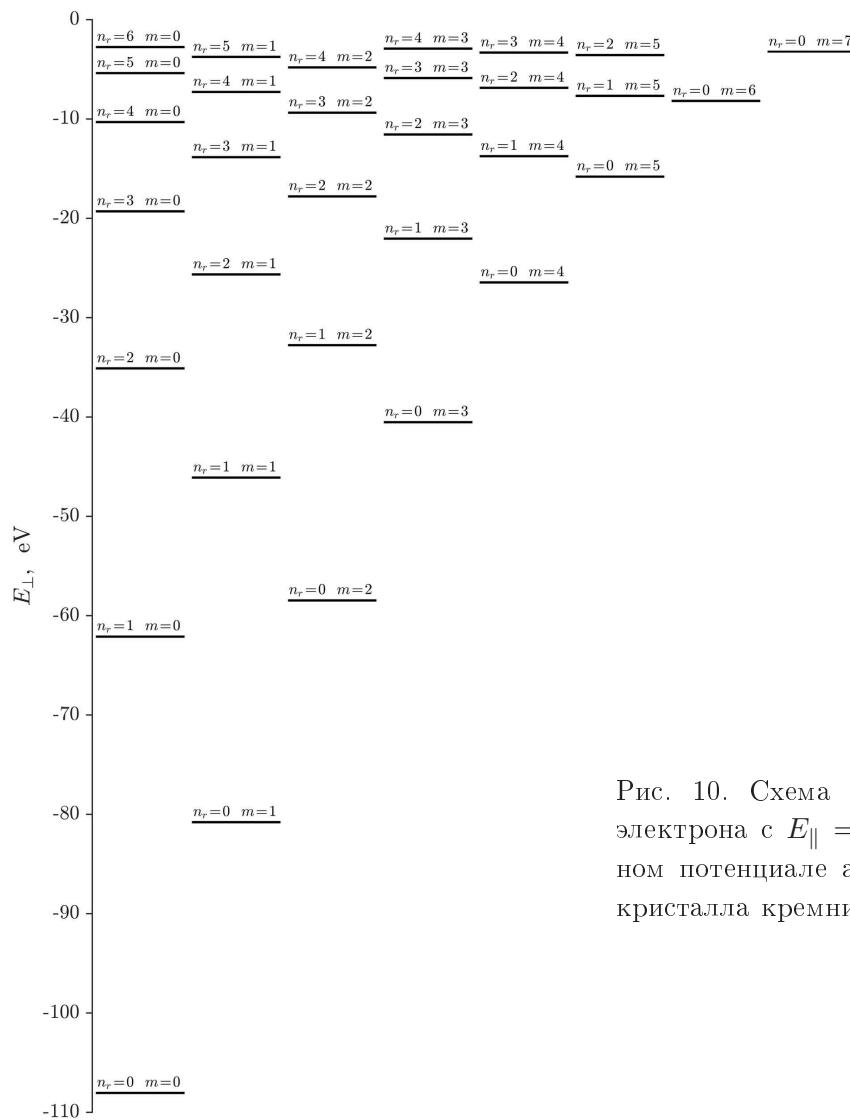


Рис. 10. Схема квантовых состояний электрона с $E_{\parallel} = 20$ МэВ в непрерывном потенциале атомной цепочки [110] кристалла кремния.

Оказывается, что наличие пересечений (либо близких квазипересечений, рис. 11) линий узлов (поверхностей, в случае большего числа измерений) собственных функций есть общее свойство интегрируемых квантовых систем [8–11].

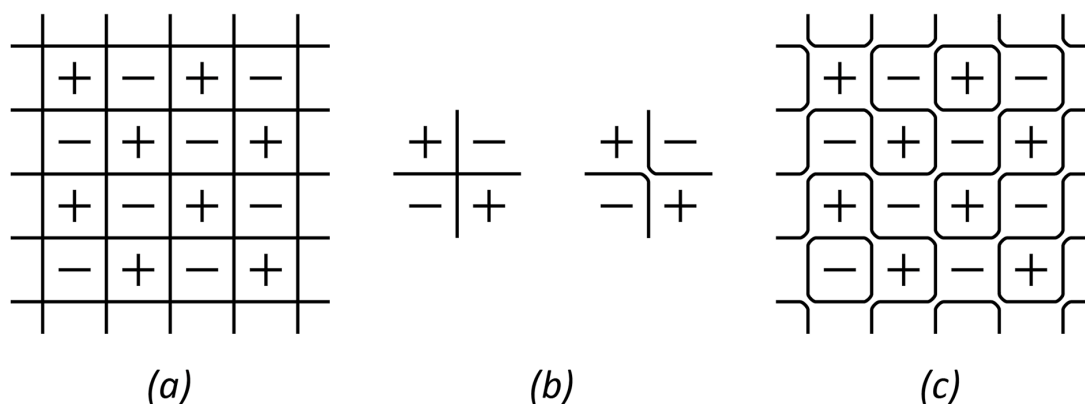


Рис. 11. Схематическое изображение пересечений линий узлов волновой функции $\psi(x, y) = 0$ для интегрируемой (a) и неинтегрируемой (c) квантовой системы [8].

Совершенно иная картина наблюдается для неинтегрируемых систем. Примером такой системы может служить электрон в поле двух соседних атомных цепочек [110] кристалла кремния (влиянием других пар таких цепочек можно пренебречь). На рис. 12 представлены примеры собственных функций канализованного электрона в таком поле. В отсутствие аксиальной симметрии поля у двумерной системы остается, вообще говоря, единственный интеграл движения — энергия E_{\perp} , что приводит к драматическому изменению морфологии волновой функции: линии узлов не пересекаются, и вместо узора типа шахматной доски мы видим причудливую картину островков черного и белого цвета. Такое поведение является общим для неинтегрируемых систем [8–11].

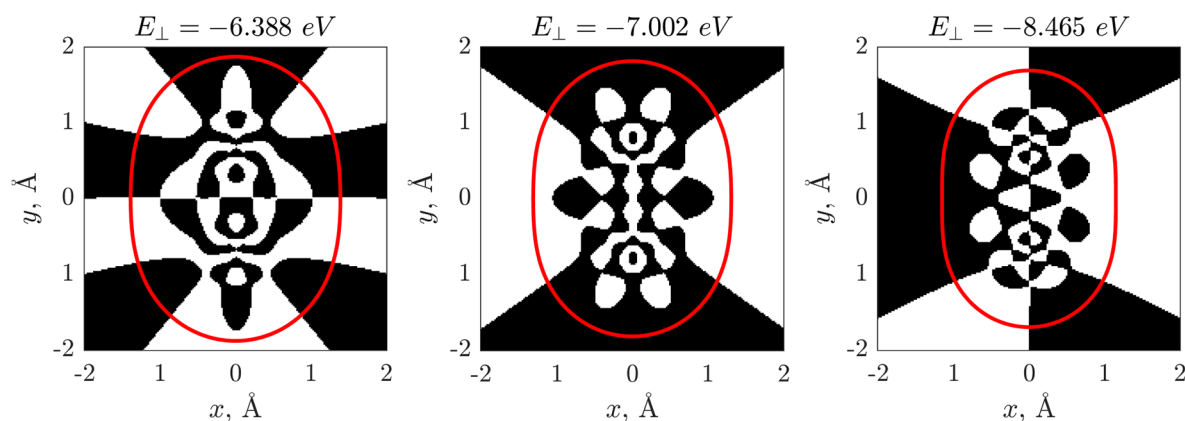


Рис. 12. Примеры собственных функций электрона с $E_{\parallel} = 20$ МэВ в поле двух соседних атомных цепочек [110] кристалла кремния.

В классической механике интегрируемость либо неинтегрируемость системы оказывается тесно связана с регулярностью либо хаотичностью движения [9, 10, 12]. Под динамическим хаосом в классической механике понимается чувствительность системы к начальным условиям, приводящая к экспоненциальному разбеганию первоначально близких траекторий. В этом случае траектории, оставаясь детерминированными (предполагается отсутствие в системе шумов, случайных сил), становятся неотличимыми от случайных.



В квантовой механике экспоненциальная зависимость от начальных условий отсутствует. Тем не менее, в поведении квантовых систем, в классическом пределе демонстрирующих регулярное либо хаотическое поведение, присутствует ряд качественных различий. Поиск и исследование таких отличий составляет содержание проблематики квантового хаоса [13]. Различие в структуре волновых функций, а именно, в картине, образуемой линиями узлов, как раз является одним из проявлений квантового хаоса.

Заключение. В работе рассмотрена квантовомеханическая задача о движении быстрого электрона в аксиально-симметричном поле отдельной атомной цепочки (а также двух соседних атомных цепочек кристалла), на примере которой была продемонстрирована работоспособность спектрального метода для нахождения решений уравнения Шредингера (собственных функций и собственных значений энергии), описывающего движение быстрого электрона в кристалле в режиме аксиального каналирования. Этот подход может быть использован в задаче об исследовании проявлений квантового хаоса в задаче об аксиальном каналировании электронов в кристалле.

Литература

1. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе / М.: Наука, 1993. – 344 с.
2. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф., Трутень В.И., Гриненко А.А., Сыщенко В.В. Динамика заряженных частиц высоких энергий в прямых и изогнутых кристаллах // Успехи физических наук. – 1995. – 165; 10. – С.1165-1192.
3. M.D. Feit, J.A. Fleck, Jr., A. Steiger, Solution of the Schrödinger Equation by a Spectral Method // Journal of Computational Physics. – 1982. – 47. – P.412-433.
4. Шульга Н.Ф., Сыщенко В.В., Нерябова В.С. Спектральный метод в теории аксиального каналирования // Поверхность. – 2013. – №3. – С.91-96.
5. N.F. Shul'ga, V.V. Syshchenko, V.S. Neryabova, A.Yu. Isupov On spectral method in the axial channeling theory // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B. – 2013. – 309. – P.153-156.
6. N.F. Shul'ga, V.V. Syshchenko, A.Yu. Isupov Statistical properties of the energy levels in the axial channeling quantum theory // Problems of Atomic Science and Technology. – 2014. – 5 (93). – P.120-123.
7. Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике / М.: Наука, 1981. – 648 с.
8. Stratt R.M., Handy N.C., Miller W.H. On the quantum mechanical implications of classical ergodicity // Journal of Chemical Physics. – 1979. – 71;8. – P.3311-3322.
9. Gutzwiller M.C. Chaos in Classical and Quantum Mechanics / New-York: Springer, 1990. – 432 p.
10. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение / М.: Мир, 1988. – 240 с.
11. Berezovoj V.P., Bolotin Yu.L., Cherkaskiy V.A. Signatures of quantum chaos in wave functions structure for multi-well 2D potentials // Physics Letters A. – 2004. – 323. – P.218-223.
12. Болотин Ю.Л., Тур А.В., Яновский В.В. Конструктивный хаос / Харьков: Институт монокристаллов, 2005. – 420 с.
13. Berry M.V. Quantum Chaology // Proceedings of the Royal Society A. – 1987. – 413. – P.183-198.



**CLASSIFICATION OF THE QUANTUM STATES OF AN ELECTRON MOVING
IN THE AXIAL CHANNELING REGIME IN THE CRYSTAL**

V.V. Syshchenko¹, A.I. Tarnovsky¹, A.Yu. Isupov²

¹Belgorod State National Research University,
Studencheskya St., 14, Belgorod, 308007, Russia

²LHEP JINR, Dubna, 141980, Russia

Abstract. Possibilities of the so-called spectral method for solving of Schrodinger's equation in the problem of axial channeling are investigated. Characteristics of quantum states of an electron moving near [110] atomic string of the silicon crystal have been found as an example of application of this method.

Key words: channeling, spectral method, eigenfunctions, quantum chaos.



MSC 80A30

КОРРЕКТНОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГЕНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Фам Минь Туан, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Доказывается, что стохастическое дифференциальное уравнение т.н. генетической модели, которое описывает, в частности, кинетику бинарных автокаталитических химических реакций, всегда имеет единственное решение $\tilde{x}(t)$ с начальными данными из $(0, 1)$, которое является глобальным (оно существует при всех $t \in \mathbb{R}_+$). Причем, это решение таково, что его значения $\tilde{x}(t) \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Ключевые слова: стохастическая модель, стохастический дифференциал Стратоновича, стохастический дифференциал Ито, теорема Вонга-Закаи, уравнение Колмогорова.

1. Введение. При теоретическом изучении различных явлений в естественных науках часто возникают математические модели, которые связаны со стохастическими динамическими системами. Их формулировка и исследование требует основано на понятии стохастического дифференциального уравнения и привлечения общей теории таких уравнений. Одной из таких стохастических моделей является т.н. *генетическая модель*, введенная в [1] как иллюстрирующая эволюцию со временем в некоторых биологических процессах. В монографии [2] было предложено применение этой модели для описания кинетики бинарных циклических химических реакций при наличии катализаторов (см. также [3], где уравнения модели обоснованы в рамках химической кинетики). Использование модели в этом случае связано с учетом влияния тепловых флуктуаций среды на протекание реакции. Основное стохастическое дифференциальное уравнение для случайной функции $\tilde{x}(t)$ в рамках генетической модели выглядит следующим образом:

$$d\tilde{x}(t) = [\alpha - \tilde{x}(t) + \lambda\tilde{x}(t)(1 - \tilde{x}(t))]dt + \sigma\tilde{x}(t)(1 - \tilde{x}(t))d\tilde{w}(t), \quad (1)$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}$ – параметры модели и $d\tilde{w}(t)$ – стохастический дифференциал стандартного винеровского процесса $\tilde{w}(t)$. В связи с физической интерпретацией уравнения (1), этот стохастический дифференциал должен пониматься по Стратоновичу [2]. Согласно физическому смыслу случайной функции $\tilde{x}(t)$, как относительной концентрации двух участвующих в реакции химических реагентов, она должна принимать значения внутри $(0, 1)$. Исследование случайных процессов, которые являются решениями стохастического уравнения (1), основано на переходе в (1) от дифференциала Стратоновича к дифференциалу Ито. Уравнение (1) при таком переходе принимает вид

$$d\tilde{x}(t) = [\alpha - \tilde{x}(t) + \lambda\tilde{x}(t)(1 - \tilde{x}(t)) + \sigma^2\tilde{x}(t)(1 - \tilde{x}(t))(1 - 2\tilde{x}(t))/2]dt + \sigma\tilde{x}(t)(1 - \tilde{x}(t))d\tilde{w}(t), \quad (2)$$



Тот факт, что в математических моделях такого типа, как генетическая модель, в применении к физическим проблемам, должен использоваться именно стохастический дифференциал Стратоновича широко обсуждался в литературе. В частности, обоснование этому дается в самой монографии [2] (см. также работы [4], [5]).

Решения полученного, таким образом, стохастического дифференциального уравнения, при фиксированных значениях параметров, составляют марковский диффузионный процесс. Таким образом, генетическая модель представляет трехпараметрическое семейство марковских диффузионных процессов. Соответствующее уравнение Колмогорова (см. [2]) для плотности распределения $p(x, t)$ частного одноточечного распределения вероятностей каждого из процессов этого семейства имеет вид

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = (\hat{H}p)(x, t), \quad (3)$$

$$(\hat{H}p)(x, t) \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\alpha - x + \lambda x(1-x) + \frac{\sigma^2}{2} x(1-x)(1-2x) \right] p(x, t) \right) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2(1-x)^2 p(x, t)].$$

В физической терминологии такое уравнение, обычно, называют уравнением Фоккера-Планка.

Предсказания модели указывали на наличие бифуркации эволюционного стационарного режима при изменении параметров, которой был присвоен термин «фазовый переход под воздействием шума». В монографии [2] дано обоснование применимости генетической модели для описания этого фазового перехода (см. также [6], где было дано уточнение задачи вычисления фазовой диаграммы для этого фазового перехода). Генетическая модель была детально исследована в стационарном режиме, который описывается стационарным марковским процессом, у которого одноточечная плотность распределения уже не зависит от t и является стационарным решением уравнения (1). Именно это стационарное решение содержит информацию о «фазовой диаграмме» указанного перехода.

Вместе с тем, в литературе отсутствует сколько-нибудь детальное исследование стохастической динамики, связанной с диффузионными процессами, которые порождаются уравнением (1). С физической точки зрения, это означает, что не исследована кинетика неравновесных состояний стохастической динамической системы, описываемой (3). В частности, не имеется информации о физически характерных временах (релаксации), присущих этой системе. Оказывается, что для математически последовательного решения этого вопроса нужно иметь априорную информацию о корректности модели, определяемой (1) в том смысле, что это уравнение, действительно, определяет диффузионные процессы, удовлетворяющие основным тем физическим требованиям, которые должны быть предъявлены к ней. К их числу мы отнесем следующие:

1. Уравнение (1) должно иметь решение при любых начальных данных $x(0) \in (0, 1)$.
2. Это решение должно быть единственно с вероятностью 1.
3. Каждое из решений, порождаемое начальным значением $x(0) \in (0, 1)$, должно существовать, с вероятностью 1, при всех $t \in \mathbb{R}_+$.
4. Оно, в течение всей эволюции, должно оставаться в $[0, 1]$.

Ответам на эти вопросы посвящено настоящее сообщение.



2. Существование и единственность решений. Несколько затруднительно установить существование и единственность стохастического дифференциального уравнения со стохастическим дифференциалом Ито. Это связано с тем, классическая теорема относительно разрешимости задачи Коши для стохастических дифференциальных уравнений [7] вида

$$d\tilde{x}(t) = f(\tilde{x}(t))dt + \sigma g(\tilde{x}(t))d\tilde{w}(t), \quad (4)$$

где, в нашем случае,

$$f(x) = \alpha - x + \lambda x(1 - x) + \sigma^2 x(1 - x)(1 - 2x)/2, \quad g(x) = x(1 - x),$$

ввиду сильного возрастания роста коэффициентов $f(x)$ и $g(x)$ при $x \rightarrow \infty$, неприменима в том общем виде, в котором она сформулирована. Причиной этого является то, что, в процессе доказательства, необходимо явно учитывать, что траектории $\tilde{x}(t)$ с начальными значениями $\tilde{x}(0) \in (0, 1)$ не выходят за пределы этого отрезка.[†] Поэтому мы установим теорему существования и единственности, основываясь на теореме Вонга-Закаи [8] (см. также [2]).

Теорема (Вонг-Закаи). Пусть $\tilde{w}^{(n)}(t)$ – последовательность случайных процессов, непрерывных, с ограниченной вариацией, имеющих непрерывную производную и сходящихся почти наверное равномерно к винеровскому процессу. Тогда, если f и g непрерывны и удовлетворяют условию Липшица, то решения $\tilde{x}^{(n)}(t)$ стохастического уравнения

$$d\tilde{x}^{(n)}(t) = f(\tilde{x}^{(n)}(t))dt + \sigma g(\tilde{x}^{(n)}(t))d\tilde{w}^{(n)}(t) \quad (5)$$

(в котором стохастические интегралы допустимо понимать как обычные интегралы Римана), сходятся почти наверное равномерно к решению стохастического дифференциального уравнения Ито

$$d\tilde{x}(t) = \left[f(\tilde{x}(t)) + \frac{\sigma^2}{2} g'(\tilde{x}(t))g(\tilde{x}(t)) \right] dt + g(\tilde{x}(t))d\tilde{w}(t), \quad (6)$$

или, что то же самое к решению стохастического дифференциального уравнения Стратоновича (4).

При этом допустимо, что процессы $\tilde{x}(t)$ могут быть обрывающимися со случайным временем обрыва.

Заметим, что к этому же результату можно прийти посредством техники приближений, которая разрабатывалась в рамках решения задач статистической физики (см. [9-12])

Применим теорему Вонга-Закаи для доказательства корректности генетической модели.

[†]Эта трудность возникает из-за того, что нарушается условие $|f(x)|^2 + |g(x)|^2 < K^2(1 + |x|^2)$, $K = \text{const}$, которое гарантирует существование случайного процесса $\tilde{x}(t)$ на \mathbb{R}_+ при выходе за пределы отрезка, случайный процесс $\tilde{x}(t)$ становится, вообще говоря, обрывающимся со случайным временем обрыва (см. [2], стр. 129).



Теорема. Для любого случайного значения $\tilde{x}(0) \in (0, 1)$, стохастическое дифференциальное уравнение (1), которое статистически не зависит от значений случайного процесса $\{\tilde{w}(t); t \in \mathbb{R}_+\}$, имеет единственное, с точностью до стохастической эквивалентности, решение, которое является марковским случайным процессом $\{\tilde{x}(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ с вероятностью 1 непрерывными траекториями, значения которого с той же вероятностью, содержатся в $[0, 1]$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и плотность $p(x, t; x', t')$ условных вероятностей перехода которого удовлетворяет уравнению (2) с носителем $\text{supp } p(x, t; x', t') \subset [0, 1]$.

□ Построим импульсный случайный процесс $\{\tilde{\varphi}(t); t \in \mathbb{R}\}^\ddagger$ с траекториями

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}_n u(t - \tilde{t}_n), \quad (7)$$

где $u(\cdot)$ – произвольная локализованная около нуля гладкая функция, $\{\alpha_n; n \in \mathbb{Z}\}$ – последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных дихотомических случайных величин $\alpha_n \in \{\pm 1\}$ с нулевым средним значением, $\{t_n; n \in \mathbb{Z}\}$ – простейшее пуассоновское точечное случайное поле на \mathbb{R} с плотностью ρ . Тогда ряд (7) сходится с вероятностью 1 и поэтому формула (7) определяет случайный процесс $\{\tilde{\varphi}(t); t \in \mathbb{R}\}$, как функционал от двух случайных последовательностей $\{\alpha_n; n \in \mathbb{Z}\}$, $\{t_n; n \in \mathbb{Z}\}$, распределение вероятностей которого индуцируется распределениями вероятностей этих последовательностей.

Рассмотрим стохастические уравнения

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}(t)) + \sigma g(\tilde{x}(t)) \tilde{\varphi}(t) \quad (8)$$

для каждой фиксированной реализации $\tilde{\varphi}(t)$ с f и g , заданными выше. Для любого начального значения $\tilde{x}(0) \in (0, 1)$ существует единственное решение $\tilde{x}(t; \tilde{\varphi})$ этого уравнения при достаточно малых $t \in [0, \tilde{s}]$, где \tilde{s} – случайное время. Рассмотрим это решение на указанном полуоткрытом интервале.

Положим, что существует случайное время $\tilde{\tau}$ такое, что $\tilde{x}(\tilde{\tau}) = 0, 1$ и $\tilde{x}(\tilde{\tau} + \delta) < 0, > 1$, соответственно, при достаточно малом $\delta > 0$, причем время $\tilde{\tau}$ выбрано наименьшим из всех тех, которые удовлетворяют этому условию. Тогда, согласно (8), $\dot{\tilde{x}}(\tilde{\tau}) = \alpha > 0, \alpha - 1 < 0$, соответственно. Но полученные неравенства противоречат определению времени $\tilde{\tau}$. Тогда время $\tilde{\tau}$ пересечения границ отрезка $[0, 1]$ решением $\tilde{x}(t)$ не существует. Более того, если бы в момент времени $\tilde{\tau}$ происходило бы только достижение границ отрезка без пересечения, то, в этом случае, решение $\tilde{x}(t)$ достигало, соответственно, минимума в точке 0, либо максимума в точке 1, то есть должно было выполняться $\dot{\tilde{x}}(\tilde{\tau}) = 0$. Так как это равенство тоже невозможно, то решение $\tilde{x}(t; \tilde{\varphi})$ никогда при $t \in [0, \tilde{s}]$ не достигает границ отрезка $[0, 1]$. Это означает, что с вероятностью 1 значения решения $\tilde{x}(t; \tilde{\varphi}) \in (0, 1)$ на полуинтервале времени, на котором оно существует.

Обрыв решения $\tilde{x}(t; \tilde{\varphi})$ при каком-то случайном значении $t = \tilde{s}$ (невозможность продолжения решения с начальным значением $\tilde{x}(\tilde{s})$) может произойти только, если $|\tilde{x}(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \tilde{s} - 0$. Но в таком случае, это решение должно было покинуть

[‡]Техника доказательства на основе импульсных процессов была предложена в [12].



отрезок $[0, 1]$ при каком-то меньшем значении времени $\tilde{\tau} < \tilde{s}$, что, как доказано выше, невозможно. Тогда $\tilde{s} = \infty$, то есть решение $\tilde{x}(t; \tilde{\varphi})$ существует при всех $t \in \mathbb{R}_+$. При этом все значения траектории $\tilde{x}(t; \tilde{\varphi})$ находятся на $(0, 1)$.

Выберем последовательность случайных процессов $\{\tilde{\varphi}^{(n)}(t); t \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$ так, что соответствующая ей последовательность плотностей $\{\rho_n; n \in \mathbb{N}\}$ и последовательность функций $\{u^{(n)}(t); n \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяли условию $\rho_n \int (u^{(n)})^2(t) dt \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда последовательность индуцированных последовательностью $\{\tilde{\varphi}^{(n)}(t); t \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$ процессов $\{\tilde{w}^{(n)}(t); t \in \mathbb{R}_+\}$, $n \in \mathbb{N}$ с траекториями $\tilde{w}^{(n)}(t) = \int_0^t \tilde{\varphi}^{(n)}(s) ds$ удовлетворяет всем условиям теоремы Вонга-Закаи. При этом стохастическое дифференциальное уравнение (5) эквивалентно уравнению (8). Тогда случайные процессы $\tilde{x}(t; \tilde{\varphi}^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$ являются единственными решениями уравнения (5) и, согласно, теореме Вонга-Закаи стремятся при $n \rightarrow \infty$ к решению стохастического дифференциального уравнения (1) и имеет непрерывные с вероятностью 1 траектории. Этот процесс определен при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Он является марковским диффузионным процессом и, так как имеется однозначная связь между стохастическими уравнениями (1) и (2), то, согласно теореме Колмогорова о диффузионных процессах, его плотность $p(x, t; x', t')$ условных вероятностей перехода удовлетворяет уравнению (3). ■

Литература

1. Kimura M., Ohta T. Theoretical aspects of Population genetics / Boston: Princeton University Press, 1971.
2. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии / Пер. с англ. / М.: Мир, 1987. – 400 с.
3. Smythe J., Moss F., McClintock P.V.E. Observation of noise-induced phase transition with an analog simulator / Phys. Rev. Lett. – 1983. – 51; 12. – P.1062-1065.
4. Smythe J., Moss F., McClintock P.V.E., Clarkson D. Ito versus Stratonovich revisited / Phys. Lett A. – 1983. – 97. – P.95-98.
5. Moon W., Wettlaufer J.S. On the interpretation of Stratonovich calculus // New Journal of Physics. – 2014. – 16. – P.055017.
6. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Анализ стохастической модели химической кинетики бинарной автокаталитической реакции // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 11(154);31. – С.130-146.
7. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения / Киев: Наукова Думка, 1968. – 356 с.
8. Wong E., Zakai M. On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals / Ann. Math. Stat. – 1965. – 36. – P.1560-1564.
9. Van Kampen N.G. A cumulant expansion for stochastic linear differential equations. I / Physica. – 1974. – 74. – P.215-238.
A cumulant expansion for stochastic linear differential equations. II / Physica. – 1974. – 74. – P.239-247.
10. Van Kampen N.G. Stochastic differential equations / Phys. Rep. – 1976. – 24C. – P.171-228.
11. Ласкин Н.В., Пелетминский С.В., Приходько В.И. К кинетической теории систем в случайных полях / Теор. мат. физ. – 1978. – 34. – P.244-255.
12. Вирченко Ю.П., Ласкин Н.В. Огрубленное описание распределения решений уравнения Ланжевена / Теор. мат. физ. – 1979. – 41;3. – P.406-417.

**CORRECTNESS OF STOCHASTIC EQUATION OF THE GENETIC MODEL****Pham Minh Tuan, Yu.P. Virchenko**Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru,

Abstract. It is proved that the stochastic differential equation of the so-called genetic model which, in particular, describes the kinetics of binary cyclic chemical reactions proposed by Horsthemke W. and Lefever R. always has a unique solution $\tilde{x}(t)$ when its initial value is placed in $(0, 1)$. This solution is the global one, i.e. it exists at all $t \in \mathbb{R}_+$. Besides, it is such that its values $\tilde{x}(t) \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Key words: stochastic model, stochastic Stratonovich differential, stochastic Ito differential, Wong-Zakai's theorem, Kolmogorov's equation.



MSC 41A15

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ВОССТАНОВЛЕНИЯ 3D РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ МЕЖДУ НАКЛОННЫМИ СКВАЖИНАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛИНЕЙНОЙ СПЛАЙН-ИНТЕРЛИНАЦИИ

Е.С. Черная

Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, Харьков, 61003, Украина, e-mail: 1402@ukr.net

Аннотация. Приведен обзор новых 3D методов построения математических моделей распределения полезных ископаемых методами сплайн-интерлинации функций 3-х переменных на системе наклонных скважин. Предложен метод моделирования распределения полезных ископаемых при помощи сплайн-интерлиантов на системе наклонных скважин, размещенных как в одной плоскости, так и произвольным образом.

Ключевые слова: сплайн-интерлинация, математическая модель, наклонная скважина, триангуляция.

Введение. Бурение применяют с целью поиска полезных ископаемых, добычи нефти, газа, воды и рассолов, сооружения шахт и т.д. Наклонно-направленное бурение – способ сооружения скважин с отклонением вертикали по заранее заданному направлению. Наклонно-направленное бурение применяется как для бурения скважин на нефть и газ, так и при разведке твердых полезных ископаемых.

Наиболее эффективная область использования наклонно-направленного бурения – разработка месторождений в акваториях морей и океанов, в болотистых местностях и в случаях, когда строительство буровых может нарушить условия охраны окружающей среды. Такой вид бурения применяют также при бурении вспомогательных скважин для глушения открытых фонтанов, при многоствольном бурении или отклонении части ствола вдоль продуктивного горизонта с целью увеличения дренажа.

Наклонно-направленное бурение нефтяных и газовых скважин осуществляется по специальным профилям. Бурение таких скважин имеет особенность, что сначала они имеют прямолинейное направление, а затем отклоняются от прямолинейного ствола.

Необходимость бурения наклонно-направленных скважин определяется следующими причинами: особенностью рельефа поверхности, стремлением к снижению затрат времени и средств на буровые сооружения и подъезды к ним; необходимостью раскрытия круто залегающих пластов и многое другое. Итак, наклонно направленные бурение в настоящее время стало наиболее распространенным методом проведения скважин, и тенденция к увеличению его доли в общем объеме бурения сохранится и в последующие годы [1].

Следует отметить, что методика исследования пространственного распределения полезных ископаемых с использованием информации о распределении в вертикальных

скважинах на основе данных из кернов скважинного бурения достаточно подробно исследована в монографии [2] (см. библиографию к ней). Случай использования данных для построения математических моделей распределения из кернов наклонных скважин в указанной монографии и других источниках в ней не исследовались. Поэтому актуальной является задача построения и исследования пространственных математических моделей с использованием данных из кернов скважин как вертикальных так и наклонных.

Общая постановка задачи. Проектирование наклонно-направленной скважины начинается с выбора конфигурации профиля (см. Рис. 1). В общем случае профиль скважины может содержать следующие участки: вертикальный, участок набора зенитного угла, прямолинейный участок, где зенитный угол стабилизирован (участок стабилизации), участок уменьшения зенитного угла. Обычный профиль представляет собой кривую линию, расположенную в одной вертикальной плоскости. Однако, в ряде случаев задается профиль пространственного типа, что представляет собой пространственную кривую линию.

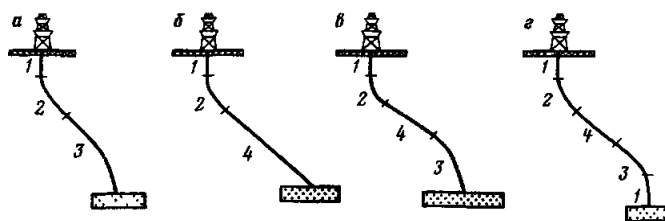


Рис. 1. Профили наклонно-направленных скважин: 1 – вертикальный, 2 – увеличения зенитного угла, 3 – уменьшения зенитного угла, 4 – стабилизация.

Рассмотрим более подробно второй профиль из приведенных на рис. 1 наклонно-направленных скважин. В качестве основной системы координат, в которой задается проектное положение скважины, примем декартову систему координат, где ось OZ направлена в сторону, противоположную действию вектора силы тяжести.

Определение. Будем считать наклонной скважиной множество точек следующего вида

$$\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), -H \leq z \leq 0\}, \quad k = \overline{1, M},$$

где $X_k(z), Y_k(z)$ – одновременно не являются константами.

Считаем, что все точки конкретной скважины Γ_k лежат в одной вертикальной плоскости. Обозначим через $f(x, y, z)$ функцию распределения полезных ископаемых в точке с координатами (x, y, z) , которую будем считать известной лишь в точках указанной системы скважин. То есть, считаем известными функции

$$f_k(z) = f(X_k(z), Y_k(z), z), \quad -H_1 \leq z \leq 0, \quad k = \overline{1, M}.$$

где функции $f_k(z)$ считаются полученными в результате анализа содержания кернов скважин в каждой точке на глубине z [3]. Считаем также, что диаметр каждой наклонной скважины равен нулю.

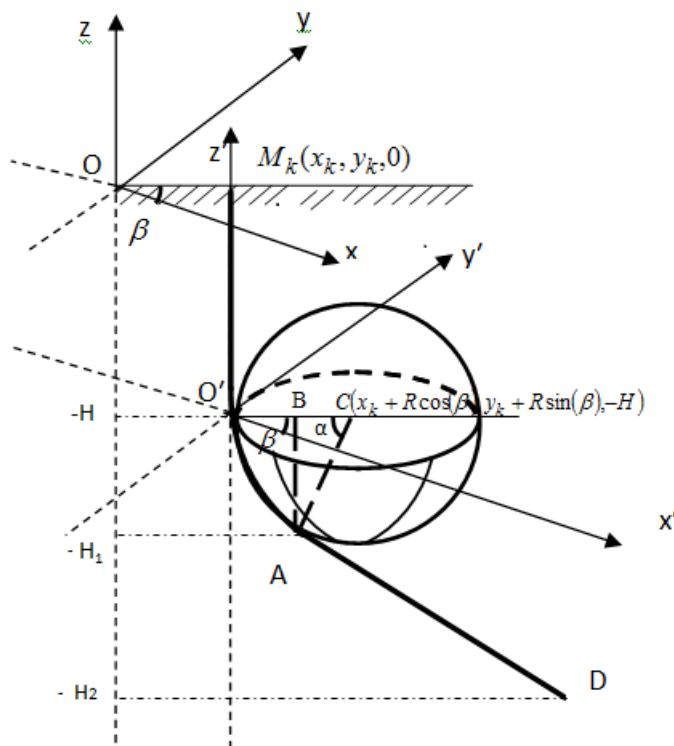


Рис. 2. Наклонно-направленная скважина.

Пусть нам известна глубина H , на которой вертикальная часть скважины имеет искривление. Напишем параметрическое уравнение скважины, которая начинается с точки $M_k(x_k, y_k, 0)$ на поверхности.

В качестве основной системы координат, в которой задается проектное положение скважины, принята декартова система координат, где ось Z направлена в сторону, противоположную действию вектора силы тяжести.

Введем вспомогательную систему координат $O'X'Y'Z'$, оси которой параллельны осям $OXYZ$, а центр находится в точке $O'(x_k, y_k, -H) = O'(X_k(-H), Y_k(-H), -H)$.

Уравнение плоскости, проходящей через точку с координатами $(x_k, y_k, 0)$ и ось $O'Z' \parallel OZ$ под углом β к плоскости $O'X'Y'$ имеет вид (см. Рис. 2)

$$(x - x_k) \sin \beta - (y - y_k) \cos \beta = 0.$$

Точки M_k, O', A, B, C, D лежат в одной плоскости. Пусть $\angle(ACO') = \alpha$, а $\angle(X'O'C) = \beta$. Определим координаты точки C , которая является центром окружности, на которую опирается искривление наклонной скважины (см. рис. 2). Точка C будет иметь координаты $(x_k + R \cos \beta, y_k + R \sin \beta, -H)$.

Уравнение сферы с центром в точке C и радиусом R будет иметь следующий вид:

$$(x - x_k - R \cos \beta)^2 + (y - y_k - R \sin \beta)^2 + (z + H)^2 = R^2.$$

Параметрическое уравнение скважины определяется как уравнение кривой, которая



лежит на указанной сфере

$$\begin{cases} x - x_k - R \cos \beta = R \cos \beta \cos \alpha, \\ y - y_k - R \sin \beta = R \cos \beta \cos \alpha, \\ z + R = R \sin \alpha. \end{cases}$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle ABC$. Определим координаты точек B, C, A . Точка A является точкой перехода участка набора зенитного угла скважины к ее прямолинейному участку. B – точка пересечения перпендикуляра, опущенного от точки A к диаметру окружности, на которую опирается искривление наклонной скважины (см. рис. 2).

Если $\angle ACB = \alpha$, а $\angle ABC = \pi/2$, то $AB = AC \sin \alpha = R \sin \alpha$, $z - (-H) = R \sin \alpha$;
 $z + H = R \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = (z + H)/R \Rightarrow \alpha = \arcsin[(z + H)/R]$;

$$x_A = x_B = x_k + (R - R \cos \alpha) \cos \beta = x_k + \left(R - R \cos(\arcsin[(z + H)/R]) \cos \beta \right),$$

$$y_A = y_k + (R - R \cos \alpha) \sin \beta = y_k + \left(R - R \cos(\arcsin[(z + H)/R]) \sin \beta \right),$$

$$z_A = z, \quad -H_1 \leq z \leq -H, \quad H_1 - H \leq R.$$

Тогда $A = (x_A, y_A, z_A)$ и $\hat{A} = (x_A, y_A, -H)$.

Уравнение прямой, проходящей через точки C и A , в параметрической форме имеет вид

$$x = x_A + m(z + H_1), \quad y = y_A + n(z + H_1), \quad z = z.$$

Найдем коэффициенты m и n в этом уравнении. Так как

$$\frac{dx_A}{dz} = \frac{z + H}{\sqrt{1 - [(z + H)/R]^2}} \cdot \frac{\cos \beta}{R}, \quad \frac{dy_A}{dz} = \frac{z + H}{\sqrt{1 - [(z + H)/R]^2}} \cdot \frac{\sin \beta}{R},$$

то коэффициенты m и n даются выражениями

$$m = \left(\frac{dx}{dz} \right)_{z=-H_1} = \frac{H - H_1}{\sqrt{1 - [(H - H_1)/R]^2}} \cdot \frac{\cos \beta}{R},$$

$$n = \left(\frac{dy}{dz} \right)_{z=-H_1} = \frac{H - H_1}{\sqrt{1 - [(H - H_1)/R]^2}} \cdot \frac{\sin \beta}{R}.$$

2. Анализ результатов построения интерлинационных операторов для нерегулярно расположенных скважин. В теории приближения функций двух и более переменных $f(x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 2$, в последние десятилетия интенсивно развивается раздел, посвященный построению, исследованию и применениям операторов, которые восстанавливают (возможно, приближенно) эти функции по известным их следам и следам их частных производных фиксированного порядка N на $M \geq 1$, m -мерных ($0 \leq m < n$) поверхностях в \mathbb{R}^n . С целью унификации утверждений будем считать точки нуль-мерными поверхностями, а линии – одномерными поверхностями. В случае



$m = 0, n \geq 1$ информация о функции $f(x)$ задается в M точках (полюсах), и такие операторы приближения называются операторами интерполяции (inter - между, pol - полюс, точка) для $M \geq 2$. В случае $m = 1, n \geq 2$ информация о функции f задается следами и следами ее частных производных $\partial^{|s|} f(x) / \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}$, $|s| = s_1 + \dots + s_n$, $1 \leq |s| \leq N$, на M линиях, и такие операторы будем называть операторами интерлинации (inter - между, line - линия).

Здесь мы построим оператор сплайн-интерлинации $O_\mu(x, y, z)$ функций трех переменных $f(x, y, z)$, которая является сплайном первой степени по переменным x, y ($x, y \in D$ на основе девяти узлов (x_k, y_k) , $k = \overline{1, 9}$ с координатами, заданными как в примере 3 [5, с. 24]).

Изложим алгоритм по шагам [4].

Шаг 1. Задаем систему наклонных скважин $\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), -H \leq z \leq 0\}$, $k = \overline{1, M}$ и следы $\gamma_k(z) = f(x_k, y_k, z)$, $k = \overline{1, M}$ неизвестной функции $f(x, y, z)$ на указанных Γ_k , $k = \overline{1, 9}$. Эти следы получено в результате анализа содержания кернов скважин.

Шаг 2. Выполняем триангуляцию поверхности: введем обозначения $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $T_\mu(z)$ – треугольник на глубине z с вершинами $P_k(X_k(z), Y_k(z), z)$, $k = \mu_1, \mu_2, \mu_3$, $\mu_j \in \{1, \dots, M\}$, $j = 1, 2, 3$, то есть $T_\mu(z) = \{(x, y, z) \in T_\mu(z)\}$ – криволинейная призма.

Шаг 3. Строим для каждого треугольника $T_\mu(z)$ оператор интерлинации $O_\mu(x, y, z)$ в виде

$$O_\mu(x, y, z) = [\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}]^{-1} (f_{\mu_1}(z) \varphi_{\mu_2, \mu_3}(x, y, z) + f_{\mu_2}(z) \varphi_{\mu_1, \mu_3}(x, y, z) + f_{\mu_3}(z) \varphi_{\mu_1, \mu_2}(x, y, z)), \quad (1)$$

где

$$\varphi_{p,q}(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ X_p(z) & Y_p(z) & 1 \\ X_q(z) & Y_q(z) & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z) = \det \begin{pmatrix} X_{\mu_1}(z) & Y_{\mu_1}(z) & 1 \\ X_{\mu_2}(z) & Y_{\mu_2}(z) & 1 \\ X_{\mu_3}(z) & Y_{\mu_3}(z) & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z) = \varphi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z), z)$. Тут учтены тождества

$$\varphi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z), z) = 1, \quad \varphi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z), z) = 0, \quad \varphi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z), z) = 0 \quad (2)$$

и получаемые из них циклическими перестановками номеров 1, 2, 3.

Введем оператор

$$O_M f(x, y, z) = O_\mu f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in T_\mu(z) \times [-H, 0], \quad T_\mu(z) \subset D \bigcup_{\mu} T_\mu(z).$$

Теорема 1. Оператор $O_M f(x, y, z)$ имеет следующие свойства:

- 1) $O_M f(x, y, z) \in C(D)$;
- 2) является оператором интерлинации функций $f(x, y, z)$ трех переменных на системе наклонных скважин Γ_k , $k = \overline{1, M}$, т.е.

$$O_M f(X_p(z), Y_p(z), z) = f(X_p(z), Y_p(z), z) = f_p(z), \quad -H \leq z \leq 0, \quad p = \overline{1, M}.$$



□ Интерлинационные свойства вытекают из того, что детерминант с двумя одинаковыми строками равен нулю. Поэтому, если $p \in \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, то

$$O_M f(X_p(z), Y_p(z), z) = O_\mu(X_p(z), Y_p(z), z),$$

где последнее значение вычисляется на основе (1) и учтены тождества (2). Другими словами, оператор $O_M f(x, y, z)$ является оператором кусочно-линейной интерполяции по переменным $x, y \forall z \in [-H, 0]$.

Для доказательства того, что $O_M f(x, y, z) \in C(D)$ достаточно отметить, что функции $O_{p,q,r} f(x, y, z)$ и $O_{p,q,r'} f(x, y, z)$ на общей криволинейной грани призм со скважинами Γ_p и Γ_q имеют одинаковые следы, то есть функция $F(x, e, z) = O_M f(x, y, z)$ при переходе от трехгранной призмы с ребрами $\Gamma_p(z), \Gamma_q(z), \Gamma_r(z)$ к трехгранной призме с ребрами $\Gamma_p(z), \Gamma_q(z), \Gamma_{r'}(z)$ сохраняет непрерывность. То, что в случае непрерывных следов $f_p(z) \in C[-H, 0]$, $p = \overline{1, M}$ функции $O_\mu f(x, y, z)$ тоже будут непрерывными, следует из формулы для значений операторов $O_\mu f(x, y, z)$ и того, что сумма непрерывных функций является непрерывной функцией [6]. ■

Заключение. Рассмотренный метод построения математических моделей распределения полезных ископаемых с помощью распределения в ядрах наклонных скважин показал свою эффективность с точки зрения точности получаемых приближений.

Литература

1. Исаченко В.Х. Инклинометрия скважин / М.: Недра, 1987. – 216 с.
2. Литвин О.М., Штепа Н.І., Литвин О.О. Математичне моделювання розподілу корисних копалин методами інтерлінації та інтерфлетації функцій / К.: Наук. думка, 2011. – 228 с.
3. Литвин О.М., Штепаб Н.І. Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних / Праці міжнародного симпозіуму Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV): Крим, смт. Кацівелі, 24-29 вересня 2009. Т.2; Київ. – 2009. – С.20-24.
4. Литвин О.О., Штепа, Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами сплайн-інтерлінації функцій // Проблеми машинобудування (Харків). – 2013. – 16; 1. – С.61-63.
5. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика // М.: Мир, 1969. – 252 с.
6. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи / Київ: Наукова думка, 2005. – 331 с.
7. Чорна О.С. Обчислювальна реалізація методу відновлення 3D розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням лінійної сплайн-інтерлінації // Матеріали V Всеукраїнської науково-практичної конференції «Інформатика та системні науки» ІСН-2014 13-15 березня 2014 Полтава: РВВ ПУЕТ, 2014.

COMPUTATIONAL REALIZATION METHOD OF 3D MINERAL DISTRIBUTION RESTORING BETWEEN THE INCLINED BOREHOLES USING LINEAR SPLINE-INTERLINEATION

O. Chorna

Ukrainian Engineering Pedagogics Academy,
Universitetskaya St., 16, Kharkov, 61003, Ukraine, e-mail: lena1402@ukr.net

Abstract. Provides an overview of the new minerals distribution mathematical models construction 3D methods by 3 variables functions spline-interlineation methods on a system of inclined boreholes. The method of minerals distribution modeling with the help of spline-interlineation on inclined boreholes system placed both in the same plane and in an arbitrary manner is proposed.

Key words: spline-interlineation, mathematical model, inclined boreholes, triangulation.



MSC 81Q50

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ КВАНТОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ДВУМЕРНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ ПО ПРАВИЛАМ ВЕЙЛЯ-МАККОЯ И БОРНА-ЙОРДАНА

Н.Н. Чеканова^{1,2)}, И.К. Кириченко²⁾, Н.А. Чеканов^{3,4)}

¹⁾Харьковский институт банковского дела,
пр-т Победы, 55, 61174, Харьков, Украина, e-mail: Chekanova76@list.ru

²⁾Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, 61003, Харьков, Украина, e-mail: ikir238@rambler.ru,

³⁾Белгородский юридический институт МВД России,
ул. Горького, 71, 308024, Белгород, Россия, e-mail: Chekanov@bsu.edu.ru,

⁴⁾Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, 308015, Белгород, Россия

Аннотация. В работе исследована консервативная классическая гамильтонова система с двумя степенями свободы. На основе численных расчетов сечений Пуанкаре показано, что, в общем, система является неинтегрируемой и в ней реализуется динамический хаос, а также наблюдается переход регулярность–хаос–регулярность. Однако приведены условия, при которых рассматриваемая система является интегрируемой. Обнаружено, что в одном интегрируемом случае на поверхности потенциальной энергии имеются области с отрицательной гауссовой кривизной. Получена классическая нормальная форма и по правилам Борна-Йордана и Вейля-Маккоя построены ее квантовые аналоги, для которых решена задача на собственные значения и найдены приближенные формулы для энергетического спектра. Для частных значений параметров квантовых нормальных форм по этим формулам проведены численные расчеты нижних уровней энергии.

Ключевые слова: гамильтонова система, нормальная форма, правила квантования, энергетический спектр, компьютерное моделирование.

Введение. Нормализация гамильтоновых систем с произвольным конечным числом степеней свободы является одним из универсальных методов приближенного интегрирования уравнений классической механики. Существо метода нормальных форм состоит в выполнении канонических преобразований исходной классической функции Гамильтона и ее приведении к более простому нормальному виду. Тогда уравнения движения с новой функцией Гамильтона в нормальной форме, или непосредственно просто интегрируются в нерезонансном случае, или же существенно упрощаются по сравнению с исходной функцией Гамильтона в случае наличия в системе резонансов. К примеру, для резонансных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, после выполнения нормализации, исходная система приводится к интегрированию уже одномерной гамильтоновой системы. Исследование нерезонансных гамильтоновых систем в представлении их в нормальной форме широко использовал Дж. Биркгоф [1], а на случай наличия в системе резонансов такой подход был расширен Ф. Густавсоном [2] с конкретными расчетами на ЭВМ для теперь хорошо известной системы Хенона-Хейлеса. Необходимые канонические преобразования выполнялись при помощи производящей



функции, зависящей от исходных координат и новых импульсов, поэтому получение явных зависимостей исходных канонически сопряженных координат и импульсов от новых представляет крайне трудную практически невыполнимую вручную задачу.

На основе теории преобразований и рядов С. Ли независимо Дж. Хори [3] и А. Депри [4] были предложены рекуррентные формулы для канонических преобразований, которые необходимы для приведения исходной функции Гамильтона к нормальной форме. В таком подходе исходные канонически сопряженные координаты и импульсы по этим формулам выражались посредством новых переменных и обратно по подобным рекуррентным формулам.

Простота выполнения рекуррентных преобразований имеет преимущество по сравнению со сложным «распутыванием» смешанных переменных в производящей функции в методе нормальных форм Биркгофа-Густавсона. В системе алгебраических преобразований REDUCE нами программно реализованы алгоритмы метода Биркгофа-Густавсона и метода Депри-Хори в виде символьно-численных вычислений нормальной формы для классических гамильтоновых с произвольным конечным числом степеней свободы (программы GITA [5] и LINA [6], соответственно).

После основополагающих работ [1-4] были предложены различные улучшающие модификации первоначальных алгоритмов построения нормальной формы для заданной исходной функции Гамильтона (см. например, [8-10]).

В последнее время предложены новые подходы [11-13] к задаче нормализации гамильтоновых систем но, к сожалению, не реализованные в виде программных продуктов, что, собственно, позволяло бы провести сравнение с методами нормализации Биркгофа-Густавсона и Депри-Хори.

После приведения исходной классической функции Гамильтона к нормальной форме, последняя представляется в виде суммы однородных полиномов по новым канонически сопряженным координатам и импульсам и может быть использована для получения приближенных решений исходной задачи классической механики. С другой стороны, представление исходной классической функции Гамильтона в нормальной форме в виде суммы однородных полиномов по канонически сопряженным координатам и импульсам позволяет провести ее квантовомеханическое описание.

Основные положения новой квантовой механики были открыты В. Гейзенбергом и опубликованы в 1925 году [14]. А спустя всего два месяца вышла статья М. Борна и П. Йордана [15], в которой, в частности, впервые получено коммутационное соотношение для квантовомеханических операторов координаты \hat{q} и импульса \hat{p} в виде

$$\hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p} = h/2\pi i, \quad (1)$$

а также правило сопоставления классическому моному вида $q^m p^n$, ($m, n = 1, 2, 3, \dots$) его квантового аналога, которое запишем как

$$BJ\{q^m p^n = p^n q^m\} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \hat{p}^{n-k} \hat{q}^m \hat{p}^k. \quad (2)$$

К этому следует добавить результаты, полученные П.А.М. Дираком [16], который предложил правило квантования, при котором «разность гейзенберговских произведений



двух квантовых величин равна скобке Пуассона этих величин, умноженных на $i\hbar/2\pi$:

$$\{q, p\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{q}, \hat{p}] = \frac{1}{i\hbar} (\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q}) = 1. \quad (3)$$

Здесь $\{q, p\}$ – скобки Пуассона, $[\hat{q}, \hat{p}]$ – коммутатор для операторов \hat{q}, \hat{p} и \hbar – постоянная Планка.

В 1927 году опубликована статья Г. Вейля [17], (см. также [18], гл. IV, пар. 14), в которой автор на основе теоретико-групповых представлений предложил в интегральной форме следующее правило соответствия между классическими и их квантовыми аналогами. Пусть классическая функция $f(q, p)$ определяется следующим интегралом Фурье

$$f(q, p) = \iint \exp(i\sigma p + i\tau q) \zeta(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \quad (4)$$

тогда соответствующая функция $F(\hat{q}, \hat{p})$ в квантовой механике дается выражением

$$F(\hat{q}, \hat{p}) = \iint \exp(i\sigma \hat{p} + i\tau \hat{q}) \zeta(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \quad (5)$$

а операторы \hat{q}, \hat{p} удовлетворяют коммутационному соотношению (1). На основе этих допущений для функций полиномиального вида $f(q, p) = q^m p^n$ Н. Маккой [19] получил ряд различных соотношений, одно из которых записывается как

$$WMc\{q^m p^n = p^n q^m\} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \hat{p}^{n-k} \hat{q}^m \hat{p}^k \quad (6)$$

которое будем называть правилом квантования Вейля-Маккоя.

В монографии [20, с. 345] ее авторы получили правило соответствия в следующем виде

$$f(q)p^n \rightarrow \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \hat{p}^k f(\hat{q}) \hat{p}^{n-k}, \quad (7)$$

которое представили посредством повторяющихся антикоммутаторов $[\hat{a}, \hat{b}]_+ = \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}$ следующим образом:

$$f(q)p^n \rightarrow [\dots [f(\hat{q}), \hat{p}]_+, \hat{p}]_+, \dots]_+. \quad (8)$$

Кроме упомянутых выше основных работ имеются публикации, в которых с разных позиций обсуждается проблема соответствия классических величин и их квантовых аналогов (см., например, [21]-[26]). Критический обзор различных правил квантования классических функций Гамильтона проведен в монографии [27, разд. 3.4–3.9]. В настоящей работе для гамильтоновой, в общем, неинтегрируемой системы с двумя степенями свободы получена классическая нормальная форма Биркгофа-Густавсона, для которой по правилам квантования Борна-Йордана и Вейля-Маккоя получены соответствующие квантовые аналоги. Для этих квантовых аналогов, то есть операторов Шредингера найдены приближенные формулы для энергетических спектров. По этим формулам



для некоторых конкретных числовых значений параметров были проведены расчеты энергетических спектров и проведено их сравнение с имеющимися в литературе результатами, которые получены прямыми численными вычислениями.

Классическая динамика. В настоящей работе рассмотрена следующая консервативная классическая система с двумя степенями свободы, функция Гамильтона которой равна

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + b(q_1^2 q_2 + \frac{1}{3}q_1^3) + cq_1^2 q_2^2 + d(q_1^2 + q_2^2)^2, \quad (9)$$

где координаты (q_1, q_2) и импульсы (p_1, p_2) – канонически сопряженные переменные, b, c, d – безразмерные параметры, причем $d > 0$ и $c + 4d > 0$.

При произвольных значениях параметров эта система является неинтегрируемой и в ней реализуется динамический хаос [28]. Исследуемая нами гамильтонова система (9) отличается от изученных в литературе систем тем, что: 1) несмотря на наличие отрицательной гауссовой кривизны на поверхности потенциальной энергии ППЭ (9), она, например, при условии $c = 4d$ является интегрируемой; 2) в широком диапазоне параметров стационарные точки квадратичной части ППЭ являются вырожденными, то есть ее одно или оба собственных значения равны нулю [28].

На рис. 1 приведены изолинии ППЭ и линии нулевой гауссовой кривизны, а на рис. 2 – сечения Пуанкаре, соответственно, для этих ППЭ при различных значениях полной энергии E системы.

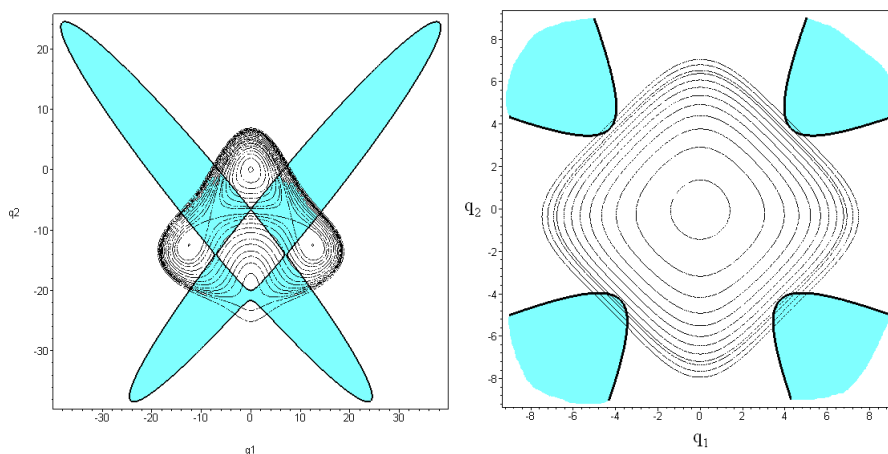


Рис. 1. (Слева). Изолинии ППЭ и линия нулевой гауссовой кривизны (области на ППЭ с отрицательной гауссовой кривизны затемнены) при следующих наборах параметров: $b = 0.1$, $c = 0.0023$, $d = 0.000625$, ($W = 16d/b^2 = 1$, $W_c = (2c + 8d)/b^2 = 0.96$, $c + 4d = 0.0048$). (Значение потенциальной энергии в начале координат является наименьшим по сравнению с ее величинами в остальных локальных минимумах). (Справа). Изолинии ППЭ и линия нулевой гауссовой кривизны при значениях параметров: $b = 1/20$, $c = 1/20$, $d = 1/200$, ($W = 16d/b^2 = 32$, $W_c = (2c + 8d)/b^2 = 56$, $c + 4d = 0.07$), (имеется единственный минимум в начале координат).

Как видно из сечений Пуанкаре (рис. 2), при указанных двух наборах значений параметров b, c, d , в исследуемой системе (9) существует хаотический режим движения.



Область отрицательной гауссовой кривизны, изображенная на рис. 1 (слева), является ограниченной, что приводит к существованию в системе перехода регулярность – хаос – регулярность (рис. 2), то есть с увеличением полной энергии регулярный режим движения восстанавливается, что было впервые обнаружен в других двумерных гамильтоновых системах [29]. Из рис. 1 (справа) видно, что область отрицательной гауссовой кривизны не ограничена и регулярный характер движения не восстанавливается с увеличением полной энергии.

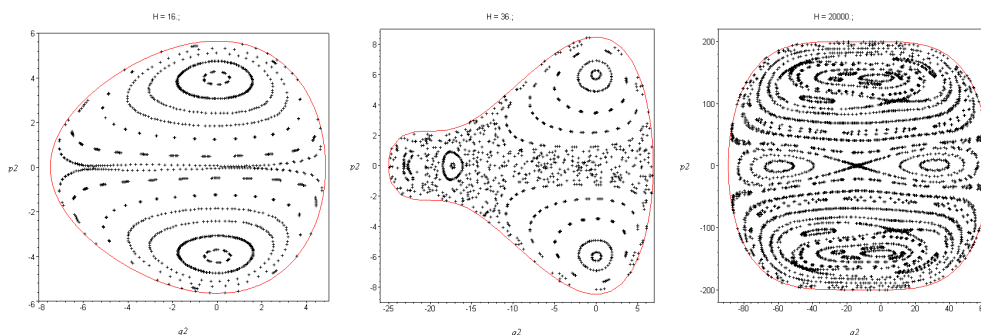


Рис. 2а. Сечения Пуанкаре: слева энергия $E = 16$, в центре – $E = 36$, справа – $E = 20000$.

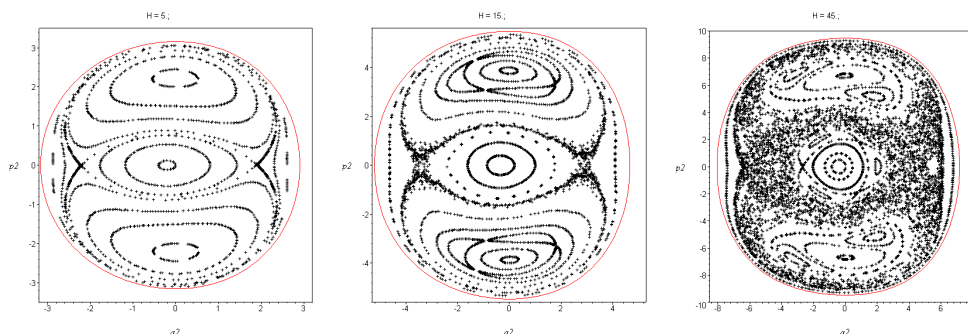


Рис. 2б. Сечения Пуанкаре: слева энергия $E = 5$, в центре – $E = 15$, справа – $E = 45$.

Рассматриваемая здесь система имеет еще следующую особенность. На ППЭ (рис. 1) имеются четыре непересекающиеся неограниченные области с отрицательной гауссовой кривизной. Если вычислить критическую энергию E_{cr} перехода от регулярного движения к хаотическому согласно критерию по наличию отрицательной гауссовой кривизны (критерий ОГК), то ее значение равно $E_{cr} = 25(13 + 2\sqrt{2/3})/9 \approx 40.6$. Эта энергия равна минимальному значению потенциальной функции $V(q_1, q_2)$ на линии с нулевой гауссовой кривизной в четырех точках: $(q_1, q_2) = (\pm 5\sqrt{2/3}; \mp 5\sqrt{2/3}), (q_1, q_2) = (\pm 5\sqrt{2/3}; \pm 5\sqrt{2/3}), 5\sqrt{2/3} \approx 4.082$. Однако, как показывают численные расчеты сечений Пуанкаре (см. рис. 2), хаотическое движение достаточно явно проявляется (см. рис. 2) уже при энергии примерно равной $E = 15$.

Таким образом, для рассматриваемой, в общем, неинтегрируемой гамильтоновой системы (9) критерий ОГК недостаточно точно предсказывает величину критической



энергии E_{cr} в отличие, например, от правильных предсказаний для других исследованных ранее систем [30].

Кроме того, в интегрируемых случаях, которые рассмотрим ниже, на ППЭ (9) имеются области отрицательной гауссовой кривизны, но, тем не менее, при всех энергиях классическое движение, конечно, является регулярным, то есть критерий ОГК вовсе не применим. Гамильтонова система (9) для трех наборов параметров b , c , d является интегрируемой.

1). Если $b \neq 0$ или $b = 0$, $c \neq 0$, $c = 4d$, то исследуемая система имеет, кроме энергии, второй интеграл движения [28]:

$$I_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2 + b(q_1 q_2^2 + q_2^3)/3 + 4d q_1 q_2 (q_1^2 + q_2^2). \quad (10)$$

На рис. 3, 4 приведены результаты численных расчетов изолиний ППЭ и линий нулевой гауссовой кривизны, а также сечений Пуанкаре при трех значениях полной энергии E для параметров $b = 1/4$, $c = 1/50$, $d = 1/200$.

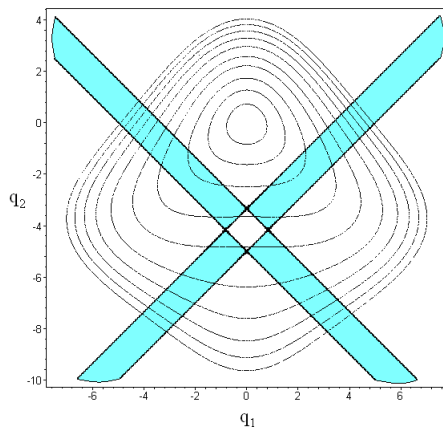


Рис. 3. Изолинии ППЭ и линии нулевой гауссовой кривизны (области отрицательной гауссовой кривизны затемнены).

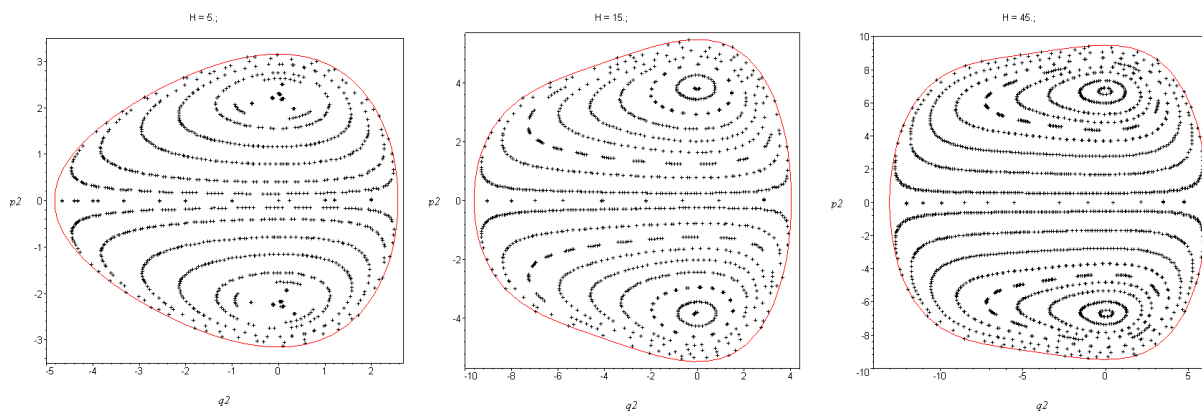


Рис. 4. Сечения Пуанкаре: слева энергия $E = 5$, в центре – $E = 15$, справа – $E = 45$.



Так как выполняются неравенства $d > 0$ и $c + 4d > 0$, то классическое движение финитно. Для приведенных выше значений параметров величины $W = 16d/b^2$ и $W_c = (2c + 8d)/b^2$, определяющие топологию ППЭ, одинаковы и равны $W = W_c = 32/25 = 1.28$. А так как выполняется неравенство $W > W_c > 1$, то на ППЭ (рис. 3) имеется единственный минимум в начале координат. Отметим, что равенство $W = W_c$ означает выполнение условия интегрируемости $c = 4d$.

Как уже было отмечено, одной из особенностей исследуемой двумерной гамильтоновой системы (9) является то, что, несмотря на наличие на ППЭ областей с отрицательной гауссовой кривизной, она является интегрируемой.

2). Если $b = c = 0$, $d \neq 0$, то функция Гамильтона (9) упрощается

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + d(q_1^2 + q_2^2)^2, \quad (11)$$

и, уже из ее вида, можно заключить, что в этом случае имеется закон сохранения момента импульса, то есть следующий интеграл движения

$$I_2 = q_1 p_1 - q_2 p_2. \quad (12)$$

Это непосредственно можно легко проверить, вычисляя скобку Пуассона, $\{H, I_2\} = 0$, что подтверждается проведенными численными расчетами сечений Пуанкаре при различных начальных данных. В этом интегрируемом случае областей отрицательной гауссовой кривизной не имеется.

3). Если $b = 0$, $c = -2d$, $d \neq 0$, то функция Гамильтона будет равна сумме двух одномерных ангармонических осцилляторов

$$H = H_1 + H_2, \quad H_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + dq_1^4, \quad H_2 = \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) + dq_2^4 \quad (13)$$

и, следовательно, такая классическая система является интегрируемой. Энергии каждого из этих одномерных осцилляторов, к примеру, являются интегралами движения. Как и в интегрируемом случае 2) здесь также на соответствующей поверхности потенциальной поверхности областей с отрицательной гауссовой кривизной нет.

Нормализация классической функции гамильтона (9). Так как система (9) является резонансной с соотношением частот равным 1:1, то процедуру приведения к нормальной форме Биркгофа-Густавсона можно выполнить следующим образом. Предварительно для исходной функции Гамильтона применяем каноническое преобразование с валентностью равной мнимой единице [31]:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2i}(-Q_1 + Q_2 + P_1 - P_2), & q_2 &= \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2 + P_1 + P_2), \\ p_1 &= \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2 + P_1 - P_2), & p_2 &= \frac{1}{2i}(Q_1 + Q_2 - P_1 - P_2), \end{aligned} \quad (14)$$

а ему обратное преобразование запишется в виде

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2}(q_2 - ip_2) + \frac{i}{2}(q_1 - ip_1), & Q_2 &= \frac{1}{2}(q_2 - ip_2) - \frac{i}{2}(q_1 - ip_1), \\ P_1 &= \frac{1}{2}(q_2 + ip_2) - \frac{i}{2}(q_1 + ip_1), & P_2 &= \frac{1}{2}(q_2 + ip_2) + \frac{i}{2}(q_1 + ip_1). \end{aligned} \quad (15)$$



Из выражений (15) непосредственно следует, что переменные Q_1, Q_2 комплексно сопряжены, соответственно, переменным P_1, P_2 .

Для исходной функции Гамильтона (9), выраженной в новых канонически сопряженных переменных Q_1, Q_2 и P_1, P_2 , выполняем последовательные канонические преобразования $(Q_1, Q_2, P_1, P_2) \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ при помощи производящей функции

$$F(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2) = Q_1\eta_1 + Q_2\eta_2 + \sum_{S=3}^{S_{max}} W^{(S)}(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2), \quad (16)$$

где $W^{(S)}(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2) = Q_1^{l_1}, Q_2^{l_2}, \eta_1^{m_1}, \eta_2^{m_2}$ – производящий однородный полином степени $S = l_1 + l_2 + m_1 + m_2$. В результате начальная функция Гамильтона $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ приводится к нормальной форме $G(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$, для которой выполняется условие

$$\hat{D}G(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = 0, \quad (17)$$

где так называемый дифференциальный оператор нормальной формы имеет вид

$$\hat{D} = \sum_{\nu=1}^2 \left(\xi_{\nu} \frac{\partial}{\partial \xi_{\nu}} - \eta_{\nu} \frac{\partial}{\partial \eta_{\nu}} \right). \quad (18)$$

Из-за предварительного канонического преобразования (14) оператор (18) принимает диагональный вид, поэтому его действие на однородные мономы $W^{(S)}(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2) = Q_1^{l_1}, Q_2^{l_2}, \eta_1^{m_1}, \eta_2^{m_2}$ является тривиальным:

$$\hat{D}W^{(S)}(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2) = (l_1 + l_2 - m_1 - m_2)W^{(S)}(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2).$$

что упрощает трудоемкую процедуру нормализации. Затем, при помощи программы [5], находим модифицированную нормальную форму Биркгофа-Густавсона до степени $S_{max} = 6$ по каноническим переменным, которую представим в следующем виде

$$\begin{aligned} G_6(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = & i[Q_1P_1 + Q_2P_2 + C_{41}(Q_1P_1 + Q_2P_2)^2 - C_{42}(Q_1P_2 - Q_2P_1)^2 + \\ & C_{43}(Q_1P_1 - Q_2P_2)^2 + C_{61}(Q_1P_1 + Q_2P_2)^2 - C_{62}(Q_1P_2 - Q_2P_1)^3 - \\ & C_{63}(Q_1P_2 + Q_2P_1)(Q_1P_1 + Q_2P_2)^2 - C_{64}(Q_1P_1 + Q_2P_2)(Q_1P_2 - Q_2P_1)^2 + \\ & C_{65}(Q_1P_2 + Q_2P_1)(Q_1P_2 - Q_2P_1)^2 + C_{66}(Q_1P_1 + Q_2P_2)(Q_1P_1 - Q_2P_2)^2], \quad (19) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_{41} = \frac{3}{2}d - \frac{5}{12}b^2, \quad C_{42} = -\frac{5}{12}b^2 + \frac{3}{8}c, \quad C_{43} = -\frac{d}{2} + \frac{c}{8}, \\ C_{61} = -\frac{235}{432}b^4 + \frac{173}{36}b^2d + \frac{13}{36}b^2c - \frac{17}{4}d^2, \quad C_{62} = -\frac{2}{9}b^2d + \frac{1}{18}b^2c, \\ C_{63} = -\frac{11}{9}b^2d + \frac{11}{36}b^2c, \quad C_{64} = -\frac{17}{64}c^2 + \frac{277}{36}b^2d + \frac{199}{72}b^2c - \frac{235}{144}b^4 - \frac{17}{8}cd, \\ C_{65} = \frac{11}{9}b^2d - \frac{11}{36}b^2c, \quad C_{66} = \frac{9}{4}d^2 - \frac{1}{2}cd - \frac{1}{64}c^2 - \frac{1}{36}b^2d + \frac{1}{144}b^2c. \quad (20) \end{aligned}$$



Заметим, что в выражении (19) для конечных канонических переменных $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ из-за удобства при компьютерных вычислениях использованы те же обозначения, как и для начальных канонически сопряженных координат и импульсов, то есть переменные (Q_1, Q_2, P_1, P_2) .

Если для нормальной формы (19), (20) выполнить канонический переход к переменным действие-угол, то непосредственно из явного вида полученной функции Гамильтона можно увидеть, что исходная, в общем, неинтегрируемая двумерная система (9) приближенно будет представлена уже одномерной интегрируемой системой [28].

Введем следующие функции:

$$\Psi_0 = Q_1 P_1 + Q_2 P_2, \quad \Psi_1 = \frac{i}{2}(Q_1 P_2 - Q_2 P_1), \quad \Psi_2 = \frac{1}{2}(Q_1 P_1 - Q_2 P_2), \quad \Psi_3 = \frac{1}{2}(Q_1 P_2 + Q_2 P_1), \quad (21)$$

для которых скобки Пуассона равны

$$\{\Psi_0, \Psi_\lambda\} = 0, \quad \lambda = 1, 2, 3, \quad (22)$$

то модифицированная нормальная форма (19) переписется в виде

$$G_6 = i[\Psi_0 + C_{41}\Psi_0^2 + 4C_{42}\Psi_1^2 + 4C_{43}\Psi_2^2 + C_{61}\Psi_0^3 - 8C_{62}\Psi_3^3 - 2C_{63}\Psi_0^2\Psi_3 + 4C_{64}\Psi_1^2\Psi_0 - 8C_{65}\Psi_1^2\Psi_3 + 4C_{66}\Psi_2^2\Psi_0], \quad (23)$$

в которой числовые коэффициенты определены по формулам (20).

Из (22) непосредственно следует, что нормальная форма (19) и (23) является интегрируемым приближением для неинтегрируемой, в общем случае, исходной системы (9), причем выполняется тождество

$$\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2 = \Psi_0^2/4, \quad (24)$$

а также имеют место соотношения

$$\{\Psi_\lambda, \Psi_\mu\} = i\varepsilon_{\lambda\mu\nu}, \quad \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3, \quad (25)$$

где $\varepsilon_{\lambda\mu\nu}$ — полностью антисимметричный тензор третьего ранга (символ Леви-Чивита). Таким образом, функции (21) образуют замкнутую группу преобразований относительно скобок Пуассона.

Квантовые аналоги классической нормальной формы. Канонические преобразования (15), используя стандартную подстановку

$$p_\nu \rightarrow \hat{p}_\nu = -i\frac{\partial}{\partial q_\nu}, \quad q_\nu \rightarrow \hat{q}_\nu = q_\nu, \quad \nu = 1, 2 \quad (26)$$

с известным правилом коммутации (1) (постоянная Планка $\hbar = 1$)

$$[\hat{p}_\nu, \hat{q}_\nu] = i\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2 \quad (27)$$



($\delta_{\mu\nu}$ – символ Кронекера), запишем в операторном виде

$$\hat{Q}_1 = \hat{a}_2^+ + i\hat{a}_1^+, \quad \hat{Q}_2 = \hat{a}_2^+ - i\hat{a}_1^+, \quad \hat{P}_1 = \hat{a}_2 - i\hat{a}_1, \quad \hat{P}_2 = \hat{a}_2 + i\hat{a}_1, \quad (28)$$

где

$$\hat{a}_1^+ = \frac{1}{2}(\hat{q}_1 - i\hat{p}_1), \quad \hat{a}_2^+ = \frac{1}{2}(\hat{q}_2 - i\hat{p}_2), \quad \hat{a}_1 = \frac{1}{2}(\hat{q}_1 + i\hat{p}_1), \quad \hat{a}_2 = \frac{1}{2}(\hat{q}_2 + i\hat{p}_2), \quad (29)$$

верхний символ «+» обозначает эрмитово сопряжение. С учетом выражений (27) легко проверить, что операторы (29) коммутируют по правилу

$$[\hat{a}_\mu, \hat{a}_\nu^+] = \frac{i}{2}\delta_{\mu\nu}, \quad (30)$$

а операторы (28) подчиняются правилу

$$[\hat{P}_\mu, \hat{Q}_\nu^+] = \delta_{\mu\nu}. \quad (31)$$

Впрочем, правило коммутации (31) непосредственно можно получить из условия квантования Дирака (3), если учесть, что классические канонические преобразования (14) и (15) имеют валентность равную мнимой единице i .

Из выражений (28), (29) следует, что операторы \hat{P}_ν и \hat{Q}_ν , ($\nu = 1, 2$), являются операторами уничтожения и рождения, соответственно.

Используя правила квантования (2) и (6), для классической нормальной формы (19), (20) получим, соответственно, два выражения ее квантовых аналогов \hat{G}_6^{BJ} и \hat{G}_6^{WMc} , и каждое выражение представим в виде суммы диагональной и недиагональной части $\hat{G}_6^{BJ} = \hat{G}_{diag}^{BJ} + \hat{G}_{nondiag}^{BJ}$ и $\hat{G}_6^{WMc} = \hat{G}_{diag}^{WMc} + \hat{G}_{nondiag}^{WMc}$. Ниже приведем только диагональные части:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{diag}^{BJ} = & \hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 1 + C_{41} \left[(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 1)^2 + \frac{5}{2} \right] + \\ & + C_{42} \left(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 2\hat{Q}_1\hat{P}_1\hat{Q}_2\hat{P}_2 + \frac{1}{2} \right) + C_{43} \left[(\hat{Q}_1\hat{P}_1 - \hat{Q}_2\hat{P}_2)^2 + \frac{5}{2} \right] + \\ & + C_{61} \left[(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 1)^3 + \frac{1}{4}(\hat{Q}_1\hat{P}_1)^2 + \frac{1}{4}(\hat{Q}_2\hat{P}_2)^2 + \frac{27}{4}(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2) + \frac{13}{2} \right] - \\ & - C_{64} \left[(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 1)(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 2\hat{Q}_1\hat{P}_1\hat{Q}_2\hat{P}_2 + 3) \right] + \\ & C_{66} \left[(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 1) \left((\hat{Q}_1\hat{P}_1 - \hat{Q}_2\hat{P}_2)^2 + \frac{1}{4}(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2) \right) - \frac{1}{2}\hat{Q}_1\hat{P}_1\hat{Q}_2\hat{P}_2 \right]. \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_{diag}^{WMc} = & \hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 1 + C_{41} \left[(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 1)^2 + \frac{1}{2} \right] + \\ & + C_{42} \left(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 2\hat{Q}_1\hat{P}_1\hat{Q}_2\hat{P}_2 + \frac{1}{2} \right) + C_{43} \left[(\hat{Q}_1\hat{P}_1 - \hat{Q}_2\hat{P}_2)^2 + \frac{1}{2} \right] + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &+ C_{61} \left[(\hat{Q}_1 \hat{P}_1 + \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1)^3 + 2(\hat{Q}_1 \hat{P}_1 + \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1) \right] - \\
 &- C_{64} \left[(\hat{Q}_1 \hat{P}_1 + \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1)(\hat{Q}_1 \hat{P}_1 + \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 2\hat{Q}_1 \hat{P}_1 \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1) \right] + \\
 &- C_{66} \left[(\hat{Q}_1 \hat{P}_1 + \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1) \left((\hat{Q}_1 \hat{P}_1)^2 + (\hat{Q}_2 \hat{P}_2)^2 - 2\hat{Q}_1 \hat{P}_1 \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1 \right) \right]. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Заметим, что следующие векторы квантового состояния [32]

$$|N, L\rangle = \left[\left(\frac{N+L}{2} \right)! \left(\frac{N-L}{2} \right)! \right]^{-1/2} \hat{Q}_2^{(N-L)/2} \hat{Q}_1^{(N+L)/2} |0, 0\rangle, \quad \hat{P}_1 |0, 0\rangle = \hat{P}_2 |0, 0\rangle = 0, \quad (34)$$

где N – главное квантовое число, $N = 0, 1, 2, 3, \dots$, а L – орбитальное квантовое число, которое при заданном значении N принимает следующие значения: $L = \pm N, \pm(N - 2), \pm(N - 4), \dots, \pm 1(0)$, являются собственными векторами для диагональных частей квантовых аналогов (32) и (33). Наличие недиагональных членов в квантовых аналогах (32) и (33) связано с тем, что в исходной классической гамильтоновой системе (9) между частотами имеется резонансное соотношение 1 : 1.

Вычисление энергетических спектров квантовых нормальных форм. Так как векторы (34) представляют ортонормированный базис, то энергетические спектры квантовых нормальных форм (32) и (33) определяются следующими выражениями:

$$E_{BJ}^{NL} = \langle N, L | \hat{G}_{diag}^{BJ} | N, L \rangle + \sum_{N', L'} \langle N', L' | \hat{G}_{nondiag}^{BJ} | N, L \rangle, \quad (35)$$

$$E_{WMc}^{NL} = \langle N, L | \hat{G}_{diag}^{WMc} | N, L \rangle + \sum_{N', L'} \langle N', L' | \hat{G}_{nondiag}^{WMc} | N, L \rangle. \quad (36)$$

Используя соотношения

$$\hat{Q}_1 \hat{P}_1 |N, L\rangle = \left(\frac{N+L}{2} \right) |N, L\rangle, \quad \hat{Q}_2 \hat{P}_2 |N, L\rangle = \left(\frac{N-L}{2} \right) |N, L\rangle, \quad (37)$$

из выражений (35) и (36) без учета недиагональных слагаемых получаем формулы для энергетических спектров:

$$\begin{aligned}
 E_{NL}^{BJ} = & N + 1 + \frac{1}{2} C_{41} (2N^2 + 4N + 7) + \frac{1}{2} C_{42} (N^2 + 2N - L^2 + 1) + \\
 & \frac{1}{2} C_{43} (2L^2 + 5) + \frac{1}{8} C_{61} (8N^3 + 25N^2 + 78N + L^2 + 60) - \\
 & \frac{1}{2} C_{64} (N^3 + 3N^2 + 8N - NL^2 - L^2 + 3) + \frac{1}{8} C_{66} (N^2 + 14N + 8NL^2 + 9L^2 + 12), \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{NL}^{WMc} = & N + 1 + \frac{1}{2} C_{41} (2N^2 + 4N + 3) + \frac{1}{2} C_{42} (N^2 + 2N - L^2 + 1) + \\
 & + \frac{1}{2} C_{43} (2L^2 + 1) + C_{61} (N^3 + 3N^2 + 5N + 3) - \frac{1}{2} C_{64} (N^3 + 3N^2 + 2N - NL^2 - L^2 + 1) +
 \end{aligned}$$



$$C_{66}(N + NL^2 + L^2 + 1). \quad (39)$$

Как видно, энергетический спектр в обоих случаях квантования вырожден по знаку орбитального квантового момента L . Кроме того, учет вкладов недиагональных слагаемых может привести к сдвигу уровней энергии, которые отличаются значением орбитального квантового числа на четыре и шесть единиц. Поэтому ожидается, что приближенные формулы (38), (39) с удовлетворительной точностью описывают энергетический спектр низжайших состояний в окрестности стационарной точки, расположенной в начале координат.

Из сравнения формул (38), (39) для энергетических спектров можно сделать общий вывод, что правила квантования Борна-Йордана и Вейля-Маккоя предсказывают разные величины для энергии основного состояния, которые определяются числовыми значениями параметров b , c и d .

Более конкретные заключения можно получить из сравнения результатов численных расчетов по формулам (38), (39) с точными уровнями энергии, рассчитанными для каких-либо конкретных значений параметров гамильтониана, что будет выполнено в последующем разделе этой работы.

В случаях, когда классическая система (9) является интегрируемой приближенные формулы (38), (39), выраженные непосредственно через параметры b , c и d имеют следующие виды.

1). Если имеется соотношение $c = 4d$, а параметр b не равен или равен нулю, то энергетические спектры вычисляются по формулам:

$$E_{NL}^{BJ} = N + 1 + d\left(\frac{9}{4}N^2 + \frac{9}{2}N - \frac{3}{4}L^2 + 6\right) - d^2\left(\frac{85}{8}N^3 + \frac{1037}{32}N^2 + \frac{1479}{16}N - \frac{187}{32}L^2 - \frac{51}{8}NL^2 + \frac{561}{8}\right) - b^2\left(\frac{5}{8}N^2 + \frac{5}{4}N - \frac{5}{24}L^2 + \frac{5}{3}\right) + db^2\left(\frac{125}{8}N^3 + \frac{1525}{32}N^2 + \frac{2175}{16}N - \frac{275}{32}L^2 - \frac{75}{8}NL^2 + \frac{825}{8}\right) - b^4\left(\frac{1175}{864}N^3 + \frac{14335}{3456}N^2 + \frac{6815}{576}N - \frac{2585}{3456}L^2 - \frac{235}{288}NL^2 + \frac{2585}{288}\right), \quad (40)$$

$$E_{NL}^{WMc} = N + 1 + d\left(\frac{9}{4}N^2 + \frac{9}{2}N - \frac{3}{4}L^2 + 3\right) - d^2\left(\frac{17}{8}N^3 + \frac{51}{8}N^2 + \frac{17}{4}N - \frac{51}{8}L^2 - \frac{51}{8}NL^2\right) - b^2\left(\frac{5}{8}N^2 + \frac{5}{4}N - \frac{5}{24}L^2 + \frac{5}{6}\right) - db^2\left(\frac{25}{8}N^3 + \frac{75}{8}N^2 + \frac{25}{4}N - \frac{75}{8}L^2 - \frac{75}{8}NL^2\right) + b^4\left(\frac{235}{864}N^3 + \frac{235}{288}N^2 + \frac{235}{432}N - \frac{235}{288}L^2 - \frac{235}{288}NL^2\right). \quad (41)$$

2). Если параметры $b = c = 0$, но параметр $d > 0$, то формулы имеют вид:

$$E_{NL}^{BJ} = N + 1 + d\left(\frac{3}{2}N^2 + 3N - \frac{1}{2}L^2 + 4\right) - d^2\left(\frac{17}{4}N^3 + 13N^2 + \frac{75}{2}N - 2L^2 - \frac{9}{4}NL^2 + \frac{57}{2}\right), \quad (42)$$

$$E_{NL}^{WMc} = N + 1 + d\left(\frac{3}{2}N^2 + 3N - \frac{1}{2}L^2 + 2\right) - d^2\left(\frac{17}{4}N^3 + \frac{51}{4}N^2 + 19N - \frac{9}{4}L^2 - \frac{9}{4}NL^2 + \frac{21}{2}\right). \quad (43)$$



3). Если параметры $b = 0$, $c = -2d$, $d > 0$, то получаем формулы:

$$E_{NL}^{BJ} = N + 1 + d \left(\frac{9}{8}N^2 + \frac{9}{4}N - \frac{3}{8}L^2 + 3 \right) - d^2 \left(\frac{85}{32}N^3 + \frac{1037}{128}N^2 + \frac{1479}{64}N - \frac{187}{128}L^2 - \frac{51}{32}NL^2 + \frac{561}{22} \right), \quad (44)$$

$$E_{NL}^{WMc} = N + 1 + d \left(\frac{9}{8}N^2 + \frac{9}{4}N - \frac{3}{8}L^2 + \frac{3}{2} \right) - d^2 \left(\frac{187}{32}N^3 + \frac{561}{32}N^2 + \frac{391}{16}N - \frac{153}{32}L^2 - \frac{153}{32}NL^2 + \frac{51}{4} \right), \quad (45)$$

Результаты численных расчетов и сравнения энергетических спектров. К сожалению, точного спектра, полученного, например, прямыми численными расчетами уравнения Шредингера с его квантовым аналогом исходной функции Гамильтона (9), в которой нужно произвести известную замену $p_1 \rightarrow \hat{p}_1 = -i \frac{\partial}{\partial q_1}$, $p_2 \rightarrow \hat{p}_2 = -i \frac{\partial}{\partial q_2}$, $q_1 \rightarrow \hat{q}_1 = q_1$, $q_2 \rightarrow \hat{q}_2 = q_2$ при произвольных значениях его параметров, в настоящее время не имеется.

Прямые численные расчеты, даже на основе лучших программных пакетов, сталкиваются с трудностью решения задач на собственные значения какой является и задача интегрирования уравнения Шредингера для двух и более независимых переменных.

Ниже приведем результаты численных расчетов энергетических спектров для конкретных числовых значений параметров b , c , d в тех случаях, когда классическая система (9) является интегрируемой.

В табл. 1 приведены значения нижайших уровней энергии, вычисленных по приближенным формулам (40) и (41) в первом случае интегрируемости, то есть при условии $c = 4d$ и $b = 0$.

Таблица 1

Сравнение энергетических уровней, полученных при квантовании по правилам Вейля-Маккоя и Борна-Йордана при значениях параметров $b = 0$, $c = 0.02$, $d = 0.005$, ($c = 4d$).

№№	$E_{N,L}$	E_{NL}^{BJ}	E_{NL}^{WMc}	$E_{NL}^{BJ} - E_{NL}^{WMc}$
1.	$E_{0,0}$	1.028	1.015	0.013
2.	$E_{1,\pm 1}$	2.055	2.045	0.010
3.	$E_{2,\pm 2}$	3.095	3.089	0.006
4.	$E_{2,0}$	3.108	3.106	0.002
5.	$E_{3,\pm 3}$	4.147	4.147	0.000
6.	$E_{3,\pm 1}$	4.172	4.183	-0.010
7.	$E_{4,\pm 4}$	5.212	5.219	-0.007
8.	$E_{4,\pm 2}$	5.247	5.273	-0.026
9.	$E_{4,0}$	5.259	5.291	-0.032



Из табл. 1 следует, что правило квантования Вейля-Маккоя приводит к более низкому уровню энергии для основного состояния и большему расщеплению уровней по орбитальному моменту при данном значении главного квантового числа N . В рассматриваемом классически интегрируемом случае точных (аналитических или численных) значений энергетического спектра в текущей литературе не обнаружено.

Однако, в результате численных расчетов известен спектр [33] во втором классическом случае интегрируемости, когда параметры квантового аналога функции Гамильтона (9) равны $b = 0$, $c = 0$, $d > 0$.

Кроме того, известны с большой точностью значения энергетического спектра одномерного ангармонического осциллятора, в частности, с четвертой степенью в потенциальной энергии (например, [34, 35]). Зная этот спектр, можно построить приближенный спектр квантового аналога исходной функции Гамильтона (9), но уже двумерного гамильтониана при значениях параметров $b = 0$, $c = -2d$, $d > 0$, при которых в классическом случае система (9) является интегрируемой.

Ниже проведем сравнение этих известных надежных численных результатов для энергетических спектров с нашими результатами, которые вычислены по формулам (42)-(45) согласно правилам квантования Борна-Йордана и Вейля-Маккоя.

Таблица 2

Сравнение уровней энергии E_{NL}^{BJ} и E_{NL}^{WMc} с их значениями из работы [33] при $d = 0.000005$

№№	$2E_{N,L}$	E_{NL}^{BJ}	E_{NL}^{WMc}	Результаты [33]
1.	$2E_{0,0}$	2.00004	2.0000199995	2.000019999550022
2.	$2E_{1,\pm 1}$	4.00008	4.0000599979	4.000059998050135
3.	$2E_{2,\pm 2}$	6.00014	6.0001199946	6.000119994900454
4.	$2E_{2,0}$	6.00016	6.0001399933	6.000139993550605
5.	$2E_{3,\pm 3}$	8.00022	8.0001999892	—
6.	$2E_{3,\pm 1}$	8.00026	8.0002399856	8.000239985901665
7.	$2E_{4,\pm 4}$	10.00032	10.000299981	—
8.	$2E_{4,\pm 2}$	10.00038	10.000359974	10.00035997450361
9.	$2E_{4,0}$	10.00040	10.000379971	10.00037997225402
10.	$2E_{5,\pm 5}$	12.00044	12.000419969	—
11.	$2E_{5,\pm 3}$	12.00052	12.000499958	—
12.	$2E_{5,\pm 1}$	12.00056	12.000539953	12.00053995335796
13.	$2E_{6,\pm 6}$	14.00058	14.000559953	—
14.	$2E_{6,\pm 4}$	14.00068	14.000659937	—
15.	$2E_{6,\pm 2}$	14.00074	14.000719928	14.00071992861397
16.	$2E_{6,0}$	14.00076	14.000739925	—

При значениях параметров $b = 0$, $c = 0$ и $d \neq 0$ уравнение Шредингера, соответствующее классической функции Гамильтона (9), допускает разделение переменных в полярных координатах, а энергетический спектр характеризуется радиальным квантовым числом n и орбитальным моментом l . В работе [33] разработан метод численного решения радиального уравнения Шредингера, на основе которого автором проведены расчеты энергетических уровней для значений квантовых чисел равных $n, l = 0, 1$ и 2



при значении параметра $d = 0.000005$. Квантовые числа n, l связаны с нашими числами N, L следующими соотношениями: $N = 2n + l, |L| = l$.

В табл. 2 приведены величины уровней энергии, полученные в работе [33], а также их значения, рассчитанные при том же значении параметра d по формулам (42) и (43) на основе квантования классической нормальной формы, соответственно, по правилам Борна-Йордана и Вейля-Маккоя. Из нее видно, что очень хорошее приближение к точному спектру дает применение правила квантования Вейля-Маккоя. В частности, энергия основного состояния, полученная на основе квантования Вейля-Маккоя отличается от результата из работы [33] на $0.5 \cdot 10^{-7}\%$, а при квантовании по правилу Борна-Йордана – на 0.001% . В тоже время, для энергии 14 уровня эти погрешности равны, соответственно, $0.4 \cdot 10^{-8}\%$ и 0.0001% , то есть предсказание по правилу Борна-Йордана улучшается.

В третьем случае ($b = 0, c = -2d, d \neq 0$) интегрируемости классической системы (9) при ее квантовомеханическом описании необходимо решить следующее двумерное уравнение Шредингера

$$(\hat{H}_1 + \hat{H}_2)\psi = 2E\psi, \quad \hat{H}_k = -\frac{d^2}{dq_k^2} + q_k^2 + 2dq_k^4, \quad k = 1, 2, \quad (46)$$

где переменные разделены. Поэтому его решение сводится к решению двух одинаковых одномерных уравнений для ангармонического осциллятора, а энергетический спектр находится в виде следующей суммы $2E = 2E_1 + 2E_2$.

Квантовые числа изотропного двумерного осциллятора (N, L) связаны с квантовыми числами (n_1, n_2) одномерных осцилляторов следующими соотношениями: $N = n_1 + n_2$ и $L = n_1 - n_2$. Заметим, что упорядочение значений уровней энергетического спектра по величине квантовых чисел (N, L) по сравнению с другой нумерацией состояний имеет то преимущество, что значения уровней энергетического спектра, пронумерованные квантовыми числами (N, L) , растут с увеличением главного квантового числа.

Используя численные результаты работ [34] и [35] для квантового одномерного ангармонического осциллятора, нами была вычислена нижняя часть энергетического спектра двумерного уравнения Шредингера (46), представленная в последнем столбце табл. 3. В этой же таблице приведены значения уровней энергий E_{NL}^{BJ} и E_{NL}^{WMc} , полученных по формулам (44) и (45). Заметим, что численные значения энергетического спектра, полученные в работе [34], для первых десяти уровней совпадают с результатами более поздней работы [35] до 13 знаков после десятичной точки.

В табл. 3. приведены значения первых уровней энергии, вычисленных с использованием данных работ [34], [35] для одномерного ангармонического осциллятора, а также по формулам (44) и (45), полученных в результате квантования нормальной формы, соответственно, по правилам Борна-Йордана и Вейля-Маккоя. И в этом случае лучшее приближение к точному спектру дает применение правила квантования Вейля-Маккоя, однако с увеличением величины квантовых чисел погрешность для значений E_{NL}^{BJ} уменьшается, то есть для больших квантовых чисел расхождение между значениями E_{NL}^{WMc} и E_{NL}^{BJ} уменьшается.



Выводы. В работе исследована предложенная авторами классическая система (9), которая имеет ряд отличительных свойств, выраженных в характере стационарных точек и наличии отрицательной гауссовой кривизны ее поверхности потенциальной энергии. Показано, что, в общем случае, система является неинтегрируемой, и в ней реализуется динамический хаос. При определенных значениях параметров система является интегрируемой и для них получены интегралы движения.

Таблица 3

Сравнение полученных нами величин энергий для двумерного изотропного осциллятора при значениях параметров $b = 0$, $c = -2d$, $d = 0.0005$.

№№	$2E_{N,L}$	E_{NL}^{BJ}	E_{NL}^{WMc}	Из работ [34],[35]
1.	$2E_{0,0}$	2.002	2.001493	2.001497
2.	$2E_{1,\pm 1}$	4.006	4.00447	4.004488
3.	$2E_{2,\pm 2}$	6.010	6.009	6.010460
4.	$2E_{2,0}$	6.012	6.010	6.007479
5.	$2E_{3,\pm 3}$	8.016	8.015	8.019401
6.	$2E_{3,\pm 1}$	8.019	8.018	8.013451
7.	$2E_{4,\pm 4}$	10.024	10.022	10.031298
8.	$2E_{4,\pm 2}$	10.028	10.027	10.022392
9.	$2E_{4,0}$	10.030	10.028	10.019423
10.	$2E_{5,\pm 5}$	12.033	12.031	12.046139
11.	$2E_{5,\pm 3}$	12.039	12.037	12.034289
12.	$2E_{5,\pm 1}$	12.042	12.040	12.028364

Для изучаемой системы получена классическая нормальная форма в подходе Биркгофа-Густавсона, для которой построены ее квантовые аналоги согласно правилам квантования Борна-Йордана и Вейля-Маккоя. Для этих квантовых аналогов, которые являются приближенными выражениями для точного оператора Шредингера, была решена задача на собственные значения и найдены формулы энергетических спектров. По этим формулам, в двух частных случаях, были выполнены расчеты нижних энергетических уровней и проведено сравнение полученных результатов с имеющимися в литературе данными других авторов. Обнаружено, что наилучшее и хорошее согласие с известными результатами расчета энергетического спектра имеется при использовании правила квантования Вейля-Маккоя, по сравнению с правилом Борна-Йордана.

Литература

1. Биркгоф Дж. Динамические системы / Дж. Биркгоф. – Москва-Ижевск: РХД, 2002. – 406 с.
2. Gustavson F.G. On construction formal integral of a Hamiltonian system near an equilibrium point // *Astronom. J.* – 1966. – 71. – №8. – P.670-686.
3. Hori G. Theory of general perturbation with unspecified canonical variable // *J. Japan Astron. Soc.* – 1966. – 18. – P.287-296.
4. Deprit A. Canonical transformations depending on a small parameter // *Celest. Mech.* – 1969. – 1. – №1. – P.12-30.
5. Basios V., Chekanov N.A., Markovski B.L., Rostovtsev V.A., Vinitsky S.I. GITA: a REDUCE program for the normalization of polynomial Hamiltonians // *Comp. Phys. Commun.* – 1995. – 90. – P.355-368.



6. Ukolov Yu.A., Chekanov N.A., Gusev A.A., Rostovtsev V.A., Vinitsky S.I., Uwano Y. LINA01: a REDUCE program for the normalization of polynomial Hamiltonians // *Comp.Phys.Commun.* – 2005. – 166. – №1. – P.66-80.
7. А.А. Гусев, Н.А. Чеканов, В.А. Ростовцев, С.И. Веницкий, И. Увано Сравнение алгоритмов для нормализации и квантования полиномиальных гамильтонианов // *Программирование.* – 2004. – №30. – С.27-36.
8. Найфе А. Методы возмущений / М.: Мир, 1976. – 456 с.
9. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем / М.: Наука, 1979. – 320 с.
10. Маркеев А.П. Точки либраций в небесной механике и космодинамике / М.: Наука, 1978. – 312 с.
11. Журавлев В.Ф. Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем // *ПММ.* – 2002. – 66. – Вып.3. – С.356-365.
12. Петров А.Г. Асимптотические методы решения уравнений Гамильтона с помощью параметризации канонических преобразований // *Дифференциальные уравнения.* – 2004. – 40. – №5. – С.626-638.
13. А.Д. Брюно, А.Г. Петров О вычислении нормальной формы // *Докл. РАН.* - 2006. - 410. - № 3. – С.1-5.
14. Heisenberg W. Uber quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen // *Zeits. fur Phys.* – 1925. – 33. – P.879-93. (Имеется пер. с нем. Гейзенберг В. О квантотеоретическом истолковании кинематических и механических соотношений // *УФН.* – 1977. – №122. – Вып.8. – С.574-586.
15. M. Born, P. Jordan Zur Quantenmechanik // *Zeits. fur Phys.* – 1925. – 34. – P.858-888. (Имеется пер. с нем. М. Борн, П. Йордан О квантовой механике // *УФН.* – 1977. – №122. – Вып.8. – С.586-611.
16. Dirac P.A.M. Fundamental Equations of Quantum Mechanics // *Proc. Roy Soc. (Lnd.).* – 1925. – A109. – №A752. – P.642-653. (Имеется пер. с англ. Дирак П.А.М. Основные уравнения квантовой механики // *УФН.* – 1977. – №122. – Вып.8. – С.611-621).
17. Weyl H. Quantenmechanik und Gruppentheorie // *Zeits. fur Phys.* – 1927. – 46. – S.1-46.
18. Вейль Г. Теория групп и квантовая механика / М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1986. – 496 с. (см. Гл. IV, параграф 14).
19. McCoy N.H. On the function in quantum mechanics which corresponds to a given function in classical mechanics // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* – 1932. – 18. – P.674-676.
20. De Groot S.R., L.G. Suttorp. Foundations of Electrodynamics / Amsterdam: North-Holland publishing company, 1972. – 535 p.
21. Argyers A.N. The Bohr-Sommerfeld quantization rule and the Weyl correspondence // *Physics.* – 1965. – 2. – P.131.
22. Castellani L. Quantization rules and Dirac's correspondence // *Il Nuovo Cimento.* – 1978. – A48. – P.359-68.
23. Crehan P. The parametrisation of quantisation rules equivalent to operator orderings, and the effect of different rules on the physical spectrum // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1989. – 22. – P.811-822.
24. Crehan P. The proper quantum analogue of the Birkhoff-Gustavson method of normal forms // *J.Phys. A: Math. Gen.* – 1990. – 23. – №24. – P.5815-5828.
25. Fedak W.A., J.J. Prentis The 1925 Born and Jordan paper 'On quantum mechanics' // *Am. J. Phys.* – 2009. – 77. – P.128-139.
26. Gosson M.A. Born–Jordan quantization and the uncertainty principle // *J. Phys. A: Math. Theor.* – 2013. – 46. – P.445301, (17 pp).
27. Razavy M. Heisenberg's quantum mechanics / Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011. – 678 p.



28. Чеканов Н.А., И.К. Кириченко, В.Е. Богачев, Н.Н. Чеканова Компьютерные расчеты динамических свойств для одной модели классической системы с двумя степенями свободы // Научные ведомости БелГУ, сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2014. – №1(172); 29/1. – С.94-99.
29. Bolotin Yu.L., N.A. Chekanov, V.Yu. Gonchar, V.N. Tarasov The transition regularity–chaos–regularity and statistical properties of energy spectra // Physics Letters. – 1989. – A135. – P.29-32.
30. Болотин Ю.Л. и др. Стохастическая ядерная динамика // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1989. – 20. – Вып.4. – С.878-929.
31. Чеканов Н.А. Квантование нормальной формы Биркгофа-Густавсона // Ядерная физика. – 1989. – 50. – Вып.8. – С.344-346.
32. Чеканова Н.Н., И.К. Кириченко, В.Е. Богачев, Н.А. Чеканов Классический и квантовый подход в исследовании нелинейной гамильтоновой системы // Вестник ТамбГУ. Сер. Естественные и технические науки. – 2015. – 20. – Вып.1. – С.120-137.
33. Taseli H. On the Exact Solution of the Schrodinger Equation with a Quartic Anharmonicity // International Journal of Quantum Chemistry. - 1996. - 57. – P.63-71.
34. Banerjee K. General anharmonic oscillator // Proc. R. Soc. - 1978. - A364. - P.265-275.
35. Taseli H., M. Demiralp Studies on algebraic methods to solve linear eigenvalue problems: generalised anharmonic oscillators // J. Phys. A: Math. Gen., 1988. – 21. – P.3903-3919.
36. Kauffmann S.K. Unambiguous quantization from the maximum classical correspondence that is self-consistent: the slightly stronger canonical commutation rule Dirac missed // Found. Phys. - 2011. – 41. – P.805-918.

**COMPARATIVE ANALYSIS OF QUANTIZATIONS
OF THE CLASSICAL TWO-DIMENSIONAL HAMILTONIAN SYSTEM
ACCORDING TO WEYL-MCCOY'S AND BORN-JORDAN'S RULES**

N.N. Chekanova^{1,2)}, I.K. Kirichenko²⁾, N.A. Chekanov^{3,4)}

¹⁾Kharkov Institute of Banking,

Pobedy av., 55, 61174, Kharkov, Ukraine, e-mail: Chekanova76@list.ru

²⁾Ukrainian Engineering Pedagogics Academy,

Universitetskaj str., 16, 61003, Kharkov, Ukraine, e-mail: ikir238@rambler.ru,

³⁾Belgorod Law Institute of the Ministry of the Interior of the Russian Federation,

Gorky str., 71, 308024, Belgorod, Russia, e-mail: Chekanov@bsu.edu.ru,

⁴⁾Belgorod State National Research University,

Pobedy str., 85, 308015, Belgorod, Russia

Abstract. The conservative classical Hamiltonian system with two degrees of freedom is investigated. On the basis of the numerical calculations of Poincare sections it is shown that, in general, the system is nonintegrable, and there is the dynamic chaos, as well as, transition regularity – chaos – regularity. However, there are some conditions under which the system is integrable. It is found that in the integrable case the potential energy surface contains regions with negative Gaussian curvature. The classical normal form is constructed and according to the Born-Jordan and the Weyl-McCoy quantization rules its quantum analogues are built. The eigenvalue problem is solved for them and the approximate formulas for the energy spectrum are found. Numerical calculations of lower energy levels for concrete values of the parameters in these formulas are performed.

Key words: hamiltonian system, normal form, quantization rules, energy spectrum, computer modeling.



MSC 82D40

ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА МАГНИТНОГО МОМЕНТА СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО МАГНЕТИКА

Ю.П. Вирченко, Д.А. Чурсин

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Найден полный набор алгебраически независимых псевдотензоров, на основе которых может быть составлено общее выражение для плотности потока магнитного момента $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, сферически симметричного и который содержит пространственные производные не более чем первого порядка.

Ключевые слова: поток, плотность магнитного момента, псевдотензор, псевдоскаляр, псевдовектор.

1. Введение. Центральной проблемой в неравновесной термодинамике является формулировка эволюционных уравнений для плотностей интенсивных термодинамических параметров, вполне характеризующих локально состояние пространственно распределенной термодинамической системы. Можно думать, что общая форма таких уравнений представляет собой равенство производной по времени плотности какого-либо интенсивного параметра дивергенции плотности потока этого параметра. Применительно к построению эволюционных уравнений ферродинамики эта проблема состоит в формулировке такого уравнения для плотности магнитного момента $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ в каждой пространственной точке с радиус вектором \mathbf{x} для каждого момента времени t , которое бы учитывало диссипативные эффекты. Наиболее известным уравнением эволюционным ферродинамики является уравнение Ландау-Лифшица, которое мы запишем в векторно-тензорных обозначениях для случая сферически симметричного магнетика (см., например, [1])

$$\dot{M}_j(\mathbf{x}, t) = \gamma \epsilon_{jkl} M_k(\mathbf{x}, t) \left[\Delta M_l(\mathbf{x}, t) + H_l(\mathbf{x}, t) \right], \quad j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \langle M_1(\mathbf{x}, t), M_2(\mathbf{x}, t), M_3(\mathbf{x}, t) \rangle$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \langle H_1(\mathbf{x}, t), H_2(\mathbf{x}, t), H_3(\mathbf{x}, t) \rangle$ – напряженность внешнего магнитного поля, $\gamma = \text{const}$, ϵ_{jkl} – универсальный антисимметричный псевдотензор третьего ранга и использовано правило тензорной алгебры о повторяющихся индексах [2]. Учитывая тождество $\epsilon_{jkl} M_l M_k = 0$, в отсутствие внешнего магнитного поля (внешнего источника) уравнение (1) представимо в виде

$$\dot{M}_j(\mathbf{x}, t) = \nabla_k T_{jk}(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

– дивергенции плотности потока магнитного момента

$$T_{jk}(\mathbf{x}, t) = \gamma \epsilon_{jml} M_m(\mathbf{x}, t) \nabla_k M_l(\mathbf{x}, t). \quad (3)$$



Заметим, что $T_{jk}(\mathbf{x}, t)$ является вседотензором второго ранга. Это означает, что, при преобразовании отражения пространства \mathbb{R}^3 , он, в отличие от тензора должен изменить знак. Последнее связано с тем, что $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ в левой части (3) является псевдовектором, то есть таким вектором, который не меняет знака при отражениях (см., например, [2]), а дифференциальный оператор ∇_k – обычным вектором (изменяющим знак при отражениях).

Уравнение (1) не описывает явлений диссипации при эволюции распределения магнитного момента среды. Возникает вопрос, каким образом нужно его изменить так, чтобы устранить этот дефект и при этом, в течение эволюции, сохранялась величина $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}) = M^2 = \text{const}$. Одним из подходов для решения этой задачи является следующий. Нужно построить общее выражение для тензора $T_{jk}(\mathbf{x}, t)$, отличное от (3), которое является «локальным» функционалом от $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$, то есть зависящим только от значений магнитного момента $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ и значений его пространственных производных в той же точке \mathbf{x} , и которое удовлетворяет самому общему требованию ковариантности $T_{jk}(\mathbf{x})$ при действии группы вращений O_3 , а затем, исходя из этой общей формы, выбрать ту возможную, которая может удовлетворять поставленным требованиям.

2. Постановка задачи. Согласно сформулированному выше подходу к решению физической задачи, нужно построить в рамках тензорной алгебры наиболее общее алгебраическое выражение для T_{jk} (в дальнейшем, ввиду несущественности для постановки и решения задачи, аргументы \mathbf{x} и t мы всюду опускаем), которое является псевдотензором и которое состоит только из псевдовектора M_j и вектора ∇_k , то есть это выражение является элементом тензорной алгебры с образующими M_j и ∇_k . При этом, так как ∇_k является дифференциальным оператором, то тензорная алгебра является некоммутативной. Естественно при этом, что при конструировании элементов этой алгебры могут быть использованы универсальные (неизменные при непрерывных преобразованиях из O_3) тензор δ_{jk} и псевдотензор ϵ_{jkl} (символ Леви-Чивитта). Любой элемент этой алгебры может быть представлен в виде линейной комбинации линейно независимых мономов, обозначаемых нами далее как S_{jk} , каждый из которых является псевдотензором. При этом под мономами мы понимаем алгебраические выражения которые не содержат операции сложения тензоров (и умножения на число), а составлены только посредством операции тензорного умножения и операции свертки. Множество таких мономов, без дополнительных уточнений бесконечно. Поэтому указанная алгебраическая постановка задачи нуждается в следующем уточнении. Так как в любом эволюционном феноменологическом уравнении для физической величины присутствуют некоторые неизвестные множители, которые являются скалярными функциями от ее значений в той же самой пространственной точке, то, в дальнейшем, любые два монома будем рассматривать как эквивалентные, если они отличаются множителем в виде скалярной функции от M_j . Это соглашение сильно ограничивает множество линейно независимых мономов, но все же оставляет его бесконечным. Другим соглашением, которое мы принимаем по физическим соображениям, является требование использования вектора ∇ , при построении каждого монома, не более одного раза. Это означает, что мы ограничиваемся эволюционными уравнениями вида (2) не более второго порядка. Последнее связано с физическим предположением о малости «градиентов» у



изучаемой физической величины. Соображения такого рода обычно используются при построении феноменологических уравнений (см., например, [3]) Оказывается, что, после принятия такого соглашения, множество линейно независимых мономов является конечным. Целью настоящего сообщения является полное описание этого множества. Таким образом, множество линейно независимых мономов разбивается на два класса: \mathcal{D}_0 состоит из мономов, не содержащих элемента ∇_k и \mathcal{D}_1 – из мономов, содержащих этот элемент.

3. Построение множества линейно независимых мономов. Сделаем некоторые предварительные замечания, упрощающие описание списка линейно независимых мономов.

I. Так как конструируемая тензорная алгебра некоммутативна, то важен порядок, в котором расставляются между собой элементы M_j и ∇_k . Однако, ввиду справедливости формулы дифференцирования произведения для оператора ∇_k ,

$$\nabla_k M_{j_1} \dots M_{j_s} = \sum_{l=1}^s \prod_{m \neq l} M_{j_m} \nabla_k M_{j_l}$$

при построении линейно независимых мономов можно ограничиться только такими, у которых после элемента алгебры ∇_k , если он имеется в мономе, находится только один элемент M_j .

II. Так как символ δ_{jk} , после тензорной операции свертки по одному из индексов, исчезает из выражения монома, то все конструируемые мономы – псевдотензоры второго ранга распадаются на два класса: \mathcal{K}_0 состоит из мономов S_{jk} , имеющих вид $S_{jk} = \delta_{jk} \cdot S$, где S – моном нулевого ранга, который является псевдоскаляром, и \mathcal{K}_1 – из мономов S_{jk} , в построении которых символ δ_{jk} отсутствует.

III. Для тензорного произведения символов ϵ справедлива формула (см., например, [4])

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix},$$

которая сводит их к линейным комбинациям из символов δ . По этой причине, символ ϵ при конструировании линейно независимых мономов может быть использован не более одного раза. Следовательно, множество всех искомым мономов разбивается на два класса: \mathcal{L}_0 состоит из мономов, при построении которых отсутствует символ ϵ и \mathcal{L}_1 – из мономов, которые содержат символ ϵ .

Для упрощения процедуры перечисления всего списка линейно независимых мономов S_{jk} имеет смысл попутно перечислить все возможные линейно независимые скаляры, псевдоскаляры, векторы, псевдовекторы и тензоры второго ранга в рамках тензорной алгебры с образующими M_j и ∇_k с учетом принятых соглашений. Заметим, что при этом, за исключением тензоров, символ δ не играет роли в построениях при учете принятых соглашений.

Множество скалярных мономов. Если не используется элемент ∇_k , то, ввиду принятого соглашения об эквивалентности мономов, отличающихся на скалярную функцию



от M_j , и тождества $\varepsilon_{ijk}M_iM_jM_k = 0$ такие мономы отсутствуют. Пусть элемент ∇_k используется. Тогда он должен быть свернут либо с M_j , либо по одному из индексов символа ε . В первом случае, каждое из выражений $\nabla_l M_l$ является псевдоскаляром и для того, чтобы его превратить в скаляр его нужно умножить либо на псевдоскаляр (в первом случае), не содержащий элемента ∇_k , а таких псевдоскаляров не существует, ввиду $\varepsilon_{ijk}M_iM_jM_k = 0$, либо на псевдовектор (во втором случае), не содержащий ∇_k , которого также не существует, ввиду $\varepsilon_{ijk}M_jM_k = 0$. Таким образом, множество скалярных мономов требуемого типа пусто.

Множество псевдоскалярных мономов. Если не используется символ ε_{ijk} , то имеются только псевдоскаляры $(\nabla_j M_j)$, $(M_i M_j \nabla_j M_i)$. Если же символ ε_{ijk} используется, то такой моном единствен $(\varepsilon_{ijk} M_i \nabla_j M_k)$, так как все индексы у символа ε должны быть свернуты, один из них обязательно – с символом ∇ , два других – с элементами M_j , но, в силу тождества $\varepsilon_{ijk} M_j M_k = 0$, стоящими по разные стороны от ∇ .

Заметим, что перестановки индексов у ε не приводит к появлению новых независимых мономов, ввиду абсолютной антисимметрии псевдотензора ε_{jkl} . Это свойство используются всюду ниже без дополнительных оговорок.

Множество векторов. Если символ ε не используется, то так как элемент M_j , являющийся псевдовектором, должен использоваться при построении четное число раз, то имеется, с точностью до эквивалентности, три монома, в которых имеется два множителя M_j : $(M_j \nabla_j M_i)$, $(M_i \nabla_j M_j)$, $(M_j \nabla_i M_j)$ и один моном с 4 четырьмя сомножителями, $(M_i M_j M_k \nabla_j M_k)$.

При наличии элемента ε в конструкции монома, элемент M_j может появиться нечетное число раз и, так как все индексы у элемента ε должны быть свернуты, то получаем следующие мономы $(\varepsilon_{ijk} \nabla_j M_k)$, $(\varepsilon_{ijk} M_j M_l \nabla_k M_l)$, $(\varepsilon_{ijk} M_j M_l \nabla_l M_k)$.

Множество псевдовекторов. Имеется один моном M_i . Это связано с тем, что нет никаких скалярных мономов, содержащих элемент ∇ , на которые можно было умножить M_i , чтобы построить новый линейно независимый моном. Кроме того, если свободный индекс i в мономе несет на себе элемент ∇ , то это невозможно, так как число элементов M_j в тензорном произведении будет четным без наличия элемента ε (см. выше), либо оно будет нечетным при наличии ε .

Множество тензоров. Имеется три тензора δ_{ij} , $(M_i M_j)$, $(\varepsilon_{ijk} M_k)$ так как эти мономы нельзя изменить умножением на скалярный моном, содержащий элемент ∇ . Кроме того, могли бы существовать мономы, которые представляются произведением псевдотензора на псевдоскаляр, но при этом, так как во псевдоскалярах в произведении используется элемент ∇_k , то псевдотензор не должен содержать этот элемент, но таких псевдотензоров не имеется (см. ниже). По этой же причине, нет тензоров S_{ij} , у которых свободные индексы присвоены элементам M_i и ∇_j (либо наоборот). Наконец, если свободные индексы присвоены M_i и элементу ε_{jkl} , то для построения нужно свернуть оставшиеся индексы у этого элемента с тензором, но для этого имеются только уже указанные мономы δ_{ij} , $(M_i M_j)$, которые при свертке с ε_{jkl} дают нуль.

Приступим к решению основной задачи.

Множество псевдотензоров. Имеется два типа их построения: 1) псевдотензоры, которые представимы в виде произведения «тензор»·«псевдоскаляр», 2) псевдотензоры,



не представимые в виде такого произведения.

В первом случае, на основании предыдущих пунктов имеем следующие мономы:

$$\begin{aligned} & \delta_{ij}(\nabla_k M_k), \quad \delta_{ij}(M_k M_l \nabla_k M_l), \quad \delta_{ij}(\varepsilon_{klm} M_k \nabla_l M_m), \\ & M_i M_j (\nabla_k M_k), \quad M_i M_j (M_k M_l \nabla_k M_l), \quad M_i M_j (\varepsilon_{klm} M_k \nabla_l M_m). \\ & \epsilon_{ijn} M_n (\nabla_k M_k), \quad \epsilon_{ijn} M_n (M_k M_l \nabla_k M_l). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь в последней строке только два монома вследствие принятого соглашения п. III.

Во втором случае, в силу пункта II, элемент δ уже не используется при построении мономов. Так как мономы, не содержащие элемента ∇_k должны представлять собой произведения тензоров $\varepsilon_{ijk} M_k$, $M_i M_j$ на псевдоскаляры, то все они перечислены в списке (4). Поэтому, далее, мы строим все линейно независимые мономы класса \mathcal{D}_1 , то есть содержащие ∇_k .

Мономы класса $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{D}_1$. Если один из свободных индексов присвоен элементу ∇_k , то, с точностью до эквивалентности, такие мономы имеют вид:

$$\nabla_j M_i, \quad \nabla_i M_j, \quad M_i M_l \nabla_j M_l, \quad M_j M_l \nabla_i M_l, \quad M_i M_j M_k M_l \nabla_k M_l, \quad M_i M_l \nabla_l M_j, \quad M_j M_l \nabla_l M_i. \quad (5)$$

Мономы класса $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{D}_1$. Эти мономы проклассифицируем по числу тех свободных индексов, которые несет на себе элемент ϵ . При этом, если этот элемент не несет свободных индексов, то он входит в состав какого-то псевдоскаляра, в состав которого обязательно входит элемент ∇ . Следовательно, этот псевдоскаляр должен умножаться на один из тензоров δ_{ij} , либо $M_i M_j$, и поэтому такого типа мономы содержатся в списке (4).

Рассмотрим случай, когда элемент ϵ имеет один свободный индекс. Тогда ϵ может сворачиваться с элементом ∇ и с одним элементом M_l . Последний может находиться либо справа от ∇_k , либо слева от него. В первом случае получаем векторный моном $\epsilon_{ikl} \nabla_k M_l$, во втором – $M_l M_m \epsilon_{ikl} \nabla_k M_m$. Для того чтобы получить на их основе мономы-псевдотензоры, нужно умножить их тензорно на псевдовектор M_j , который, как указано выше, единствен и который мы будем записывать слева от него. Другие мономы такого типа получают перестановкой индексов i и j . В результате, получаем следующий список мономов:

$$M_j \epsilon_{ikl} \nabla_k M_l, \quad M_i \epsilon_{jkl} \nabla_k M_l, \quad M_j M_l M_m \epsilon_{ikl} \nabla_k M_m, \quad M_i M_l M_m \epsilon_{jkl} \nabla_k M_m. \quad (6)$$

Другой тип мономов такого же типа получается, когда элемент ϵ_{ikl} сворачивается с двумя элементами M_k и M_l , но которые разделены элементом ∇_j . В этом случае, такой моном не обращается тождественно в нуль. Эти мономы, ввиду четности числа элементов M в тензорном произведении, являются псевдотензорами. В результате, имеем дополнительно к списку (5) два монома $(\varepsilon_{ikl} M_k \nabla_j M_l)$, $(\varepsilon_{jkl} M_k \nabla_i M_l)$. Есть еще одна возможность сделать так, чтобы свертки элемента ϵ с парой элементов M_k и M_l не обращались в нуль. Для этого нужно разделить их псевдоскалярным дифференциальным оператором $M_m \nabla_m$. Свободный же индекс j при этом присваивается множителю –



элементу M_j , который записываем слева. При этом другие типы псевдоскаляров использовать для построения мономов такого типа нельзя вследствие соглашения пункта I. Такой способ построения псевдотензоров дает нам еще два монома: $(M_j \varepsilon_{ikl} M_k (\mathbf{M}, \nabla) M_l)$, $(M_i \varepsilon_{jkl} M_k (\mathbf{M}, \nabla) M_l)$. Следовательно, дополнительный список мономов, у которых один из свободных индексов присвоен элементу ϵ состоит из следующих мономов:

$$\varepsilon_{ikl} M_k \nabla_j M_l, \quad \varepsilon_{jkl} M_k \nabla_i M_l, \quad M_j \varepsilon_{ikl} M_k M_m \nabla_m M_l, \quad M_i \varepsilon_{jkl} M_k M_m \nabla_m M_l. \quad (7)$$

Наконец, список псевдотензоров, у которых оба свободных индекса присвоены элементу ϵ , учитывая список (4), состоит из двух дополнительных мономов:

$$\varepsilon_{ijk} M_m \nabla_m M_k, \quad M_l \varepsilon_{ijk} \nabla_k M_l. \quad (8)$$

Суммируем наши результаты наших рассуждений в виде следующего утверждения.

Теорема. *Имеется 25 линейно независимых мономов в тензорной алгебре с образующими: псевдовектор M_j и векторный оператор ∇_k , при ограничениях на их вид, сформулированных в пп. I-III, которые являются псевдотензорами второго ранга. Множество этих мономов представлено списками (4)-(8).*

Замечание. Псевдотензор $\varepsilon_{jkl} M_k \nabla_i M_l$, соответствующий потоку плотности магнитного момента, который определяет уравнение (3), находится в списке (7).

Литература

1. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны / М.: Наука, 1967. – 368 с.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / М.: Наука, 1967. – 664 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / М.: Наука, 1986.
4. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике / М.: Гос. изд. ФМЛ, 1963. – 412 с.

FLUX DENSITY OF MAGNETIC MOMENT OF SPHERICALLY SYMMETRIC MAGNETIC

Yu.P. Virchenko, D.A. Chursin

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. It is found the total collection of algebraic independent monomials on the basis of which the general expression of magnetic moment $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ may be constructed when it is spherically symmetric contains spatial derivatives no more than first order.

Key words: flux, magnetic moment density, pseudotensor, pseudoscalar, pseudovector.



MSC 35Q30

ОБ АНАЛОГИИ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

В.П. Бушланов, И.В. Бушланов

Государственный морской университет им. Ф.Ф. Ушакова,
Новороссийск, Россия, e-mail: bvp@ngs.ru

Аннотация. Показано, что уравнение Шредингера может быть приведено к форме уравнений Навье-Стокса, в которых тензор напряжения обусловлен градиентом плотности газа. Предложена такая интерпретация тензора напряжений, когда он будет аналогичен линейному тензору вязких напряжений.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, потенциальное течение, уравнение Навье-Стокса, тензор напряжений.

Рассмотрим уравнение Шредингера [1]

$$-\frac{\hbar}{2m} \Delta \Psi + U \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (1)$$

где $\hbar = h/2\pi$, h – постоянная Планка, m – масса электрона, Ψ – волновая функция.

Подставляя в (1) волновую функцию в виде

$$\Psi = ae^{iS/\hbar}, \quad (2)$$

производя дифференцирование и приравнивая нулю отдельно действительную и мнимую части в [1] получили следующие два уравнения:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a}{2m} \Delta S + \frac{1}{m} (\nabla S, \nabla a) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + U - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta a = 0. \quad (4)$$

Обозначим векторную величину, имеющую размерности скорости,

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m} \nabla S. \quad (5)$$

Тогда уравнения (3) и (4) можно написать в следующем виде:

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \operatorname{div}(a^2 \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{m \mathbf{v}^2}{2} = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\operatorname{div} \nabla a}{a} - U. \quad (6)$$

Возьмем операцию градиента от последнего уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 \nabla \left(\frac{\operatorname{div} \nabla a}{a} \right) - \frac{\nabla U}{m}. \quad (7)$$



Заметим, что

$$a^2 \nabla \left(\frac{\operatorname{div} \nabla a}{a} \right) = \nabla (a \operatorname{div} \nabla a) - \frac{\nabla a^2}{a} \operatorname{div} \nabla a = \nabla (a \operatorname{div} \nabla a) - 2 \nabla a \operatorname{div} \nabla a. \quad (8)$$

Имеем для векторной функции \mathbf{A}

$$\nabla_q (A_p A_q) = A_p \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{A}, \nabla) A_p, \quad (9)$$

Возьмем в качестве $\mathbf{A} = \nabla a^2$. Тогда из (8) и (9):

$$a^2 \nabla_p \left(\frac{\operatorname{div} \nabla a}{a} \right) = \nabla_p \left[a \operatorname{div} \nabla a + (\nabla a)^2 \right] - 2 \nabla_q (a_p a_q) = \frac{1}{2} \nabla_p \left(\operatorname{div} \nabla a^2 \right) - 2 \nabla_q (a_p a_q), \quad (10)$$

где $a_p = \nabla_p a$. Подставляя (10) в (7) получим

$$a^2 \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right]_p = \frac{1}{m} \nabla_q (\sigma_{pq}) - a^2 \frac{\nabla_p U}{m}, \quad (11)$$

где

$$\sigma_{pq} = \frac{ma^2}{2} \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 \left\{ \delta_{pq} \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla a^2}{a^2} \right) + \left(\frac{\nabla a^2}{a^2} \right)^2 \right] - \frac{\nabla_p a^2}{a^2} \cdot \frac{\nabla_q a^2}{a^2} \right\}, \quad (12)$$

δ_{pq} – символ Кронекера. Имеет место тождество

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla a^2}{a^2} \right) = \frac{\operatorname{div} \nabla a^2}{a^2} - \left(\frac{\nabla a^2}{a^2} \right)^2. \quad (13)$$

Обозначим

$$\Theta = \ln a^2, \quad (14)$$

тогда

$$\frac{\nabla a^2}{a^2} = \nabla \Theta. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (12) с учетом (13) получим

$$\sigma_{pq} = \frac{ma^2}{2} \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 \left\{ \delta_{pq} \left[\operatorname{div} \nabla \Theta + (\nabla \Theta)^2 \right] - \nabla_p \Theta \cdot \nabla_q \Theta \right\}. \quad (16)$$

Уравнениям (6), (11) (16) можно придать вид уравнений потенциального движения сжимаемого газа, учитывая обозначение (5), и обозначая величину размерности плотности $\rho = ma^2$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right]_p = \nabla_q \sigma_{pq} - \rho \frac{\nabla_p U}{m}, \quad (17)$$

где тензор напряжений имеет вид

$$\sigma_{pq} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 \left\{ \delta_{pq} \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right) + \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2 \right] - \frac{\nabla_p \rho}{\rho} \cdot \frac{\nabla_q \rho}{\rho} \right\}. \quad (18)$$

Из (18) видно, что компоненты тензора напряжений равны нулю, если градиент плотности «газа электрона» равен нулю. Таким образом, наряду с внешней силой-градиентом потенциала, источником количества движения «газа электрона» является градиент плотности «газа электрона».



Пусть V – некоторый произвольный объем электронного газа, а Σ – замкнутая поверхность ограничивающая V , \mathbf{n} – единичная внешняя единичная нормаль к Σ . На поверхность указанного объема, согласно (18), действует сила:

$$\mathbf{F}_{\Sigma} = \mathbf{e}_p \int_{\Sigma} \sigma_{pq} n_q d\Sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 \int_{\Sigma} \left\{ \mathbf{n} \operatorname{div} \nabla \rho - \nabla \rho \cdot \frac{\mathbf{n} \nabla \rho}{\rho} \right\} d\Sigma. \quad (19)$$

Воспользуемся следующей формулой векторного исчисления:

$$(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{A} = \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{n}, \nabla) \mathbf{A}, \quad (20)$$

где \mathbf{n} и \mathbf{A} – некоторые вектора. Положим в (20) $\mathbf{A} = \nabla \rho$, тогда получим

$$\mathbf{n} \operatorname{div} \nabla \rho = -(\mathbf{n} \times \nabla) \times \nabla \rho + (\mathbf{n}, \nabla) \nabla \rho, \quad (21)$$

Подставим (21) в (19) и учтем, что интеграл от первого слагаемого правой части (21) по замкнутой поверхности Σ равен нулю, тогда получим следующее выражение для поверхностной силы

$$\mathbf{F}_{\Sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial \nabla \rho}{\partial n} - \frac{\partial \rho}{\partial n} \frac{\nabla \rho}{\rho} \right] d\Sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 \int_{\Sigma} \rho \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right) d\Sigma = \frac{\hbar^2}{2m^2} \int_{\Sigma} \rho \frac{\partial \Theta}{\partial n} d\Sigma, \quad (22)$$

где введено обозначение $\partial/\partial n = (\mathbf{n}, \nabla)$ для производной по нормали к поверхности Σ .

Замечание. Из (22) видно, что обмен количеством движения выделенного объема V электронного газа идет из-за изменения по нормали к поверхности Σ градиента функции Θ .

Обозначим величину размерности потока массы

$$\rho \mathbf{W} = D \nabla \rho, \quad (23)$$

где D – величина размерности коэффициента диффузии. Назовем величину $D \nabla \rho$ диффузионным потоком, а \mathbf{W} – скоростью диффузии. Так как $\Theta = \ln \rho$, то из (22-23) получим

$$\mathbf{F}_{\Sigma} = \frac{\hbar^2}{2m^2 D} \int_{\Sigma} \rho \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial n} d\Sigma. \quad (24)$$

Сила (24) аналогична силе вязкости в законе Ньютона для несжимаемой жидкости, которая имеет вид (учитывая потенциальность поля скоростей (5))

$$\mathbf{F}_{\text{Ньютон}} = \int_{\Sigma} \nu \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} d\Sigma, \quad (25)$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости. Сравнивая (24) и (25) можно интерпретировать величину $\nu = \hbar^2/2m^2 D$, как коэффициент кинематической вязкости а (25) как вязкую силу Ньютона для диффузионного потока со скоростью диффузии W . Если ν и D одного порядка то $D \sim \nu \sim \sqrt{2\nu D} = \hbar/m = 6.62517 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}/2 \cdot 3.14 \cdot 9.1083 \cdot 10^{-28} \text{ г} = 1.158 \text{ см}^2/\text{сек}$.

Выводы. Основываясь на уравнении Шредингера и следующих из него в [1], уравнений для действительной и мнимой части, указанные уравнения приведены к форме уравнений Навье-Стокса для потенциального течения сжимаемого газа (17)-(18). Отмечена аналогия тензора напряжений с тензором вязких напряжений Ньютона, если интерпретировать величину градиента плотности как вектор пропорциональный скорости диффузионного потока.



Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория (Серия: «Теоретическая физика», том 3) / М.: Наука, 1974. – 752 с.

ON ANALOGY OF SCHRÖDINGER'S EQUATION AND NAVIER-STOCKS'S EQUATION OF COMPRESSIBLE GAS POTENTIAL FLUX

V.P. Bushlanov, I.V. Bushlanov

Sea State University of F.F. Ushakov,
Lenina Av., 93, Novorossiysk, 353925, Russia, e-mail: bvp@ngs.ru

Abstract. It is shown that Schrödinger's equation may be reduced to the form of Navier-Stocks's equations where the stress tensor is connected with the gradient of gas density. It is proposed the interpretation of the stress tensor such that it is analogous to linear the viscous stress tensor.

Key words: Schrödinger's equation, potential flux, Navier-Stocks's equation, stress tensor.



УДК 620.1.72:532.783

ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ИНДУЦИРОВАННЫЙ МОЛЕКУЛЯРНЫЙ КРИСТАЛЛ В НЕМАТИКЕ

С.И. Кучеев

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, 308015, Белгород, Россия, e-mail: skucheev@yahoo.com

Аннотация. В работе сообщается о наблюдении формирования молекулярного кристалла в нематическом жидком кристалле 5СВ в окрестности кремниевого р-п перехода, необходимым условием формирования которого является протекание электрического тока. Экспериментально продемонстрировано, что молекулярный кристалл обладает электрически управляемым двулучепреломлением.

Ключевые слова: нематик, молекулярный кристалл, электрически управляемое двулучепреломление, р-п переход.

Структура ячейки, в которой образовывались молекулярные кристаллы (далее МК) схематично показана на рис. 1. Ячейка представляет собой сэндвич, в основе которой лежит кремниевая пластина п-типа проводимости (4,5 Ом·см) с изолированными карманами р⁺ типа проводимости (0,1 Ом·см). Толщина слоя жидкого кристалла (LC) между поверхностями кремниевой подложки и стеклянным покрытием (G) без проводящей пленки, фиксировался фторопластовыми пленками толщиной 5 мкм.

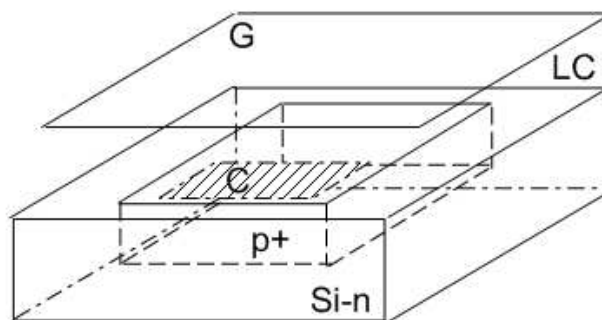


Рис. 1. Схематическое представление нематической ячейки. Si-n – кремниевая подложка п-типа проводимости. P+ – карман р-типа проводимости. С – электрический контакт к р⁺ – карману. G – покровное стекло. LC – нематический жидкий кристалл 5СВ.

В работе использовался нематический жидкий кристалл (НЖК) 5СВ, который заправлялся в ячейку капиллярным образом в изотропной фазе. Для формирования гомеотропной ориентации молекул НЖК, поверхности кремния и стеклянной подложки G обрабатывались раствором лецитина в толуоле.

Процесс образования изолированных друг от друга, и разных по размеру МК, на первом этапе, начинается с воздействия (длительность час и более) электрического тока на слой НЖК, что имеет место при прикладывании переменного напряжения (~ 10 В) к р-п переходу.

Электрический ток, через контактирующий с р-п переходом слой НЖК, протекает в периоды, соответствующие закрытому состоянию р-п перехода, при этом зона формирования МК в нематике локализована вблизи контакта последнего с атмосферой (в окрестности края стеклянной подложки G). Обнаружение МК становится возможным через некоторый промежуток времени после действия электрического тока (второй этап формирования МК), который насчитывает от нескольких суток до пары недель. Второй этап обусловлен ростом МК до размеров, которые обеспечивают их оптическую регистрацию.

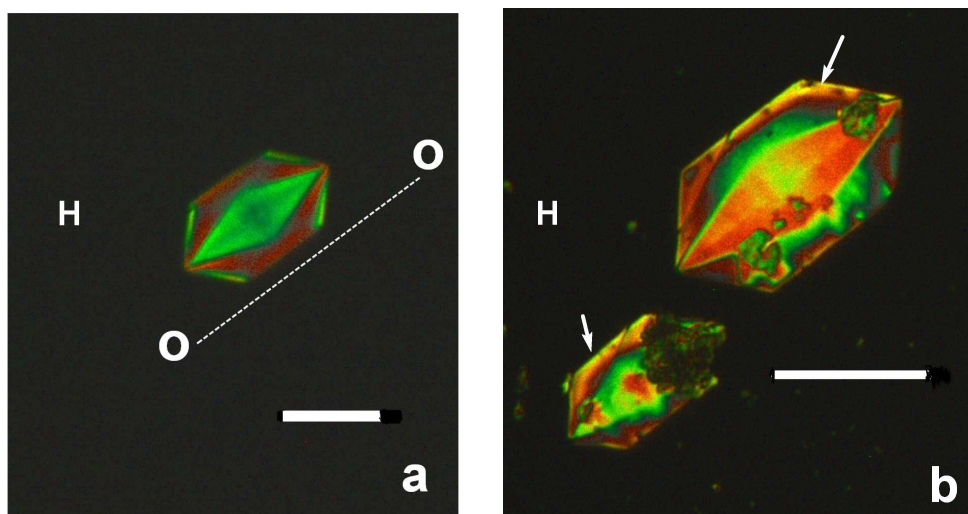


Рис. 2. Поляризационное изображение (поляроиды скрещены) молекулярных кристаллов. ОО – оптическая ось молекулярного кристалла. Реперные отрезки: (а) – 65 мкм, (b) – 105 мкм. Н – гомеотропная ориентация нематика.

В поляризованном свете МК можно отличить от других вкраплений в ЖК (на фоне темного поля (Н), соответствующего гомеотропной ориентации НЖК) по их правильной, слегка вытянутой шестигранной форме, рис. 2. Для МК небольших размеров цветное поле МК однородно, тогда как для МК больших размеров во внутренней области МК появляется правильный ромб, который имеет другой интерференционный цвет, рис. 2. Важно отметить самопроизвольный рост МК (без действия электрического тока), при котором происходит пропорциональное масштабирование рисунка МК. В качестве примера на рис. 2, отмечен один и тот-же МК (на рис. 2b верхний) с разницей по времени в 2 месяца. Из приведенных иллюстраций видно, что размер упомянутого МК за указанный период времени увеличился почти в два раза.

Потоками ЖК материала, которые возникают, например, при механической деформации ячейки, МК могут быть перемещены в слое нематика в требуемом направлении, причем разрушение МК не наблюдается. Из этого экспериментального факта вытекает, что МК не связаны с поверхностями ячейки и являются объемными по происхождению структурами.

Соответствующей деформацией ячейки можно добиться изменения двулучепреломления НЖК материала, и, соответственно, изменения его интерференционной окраски, однако, при этом, интерференционные цвета присущие области МК не изменяются. Этот экспериментальный факт может служить косвенным доказательством наличия двулучепреломления у МК, и исключает вариант, при котором МК был бы изотропным, но его поверхность обладала бы свойством ориентировать молекулы нематика. Поворотом ячейки в поляризованном свете, при

котором наблюдается периодическое (через каждые 90 град.) затемнение МК, было установлено направление оптической оси OO у МК, которая располагается параллельно удлиненной оси шестигранника, как показано на рис. 2а.

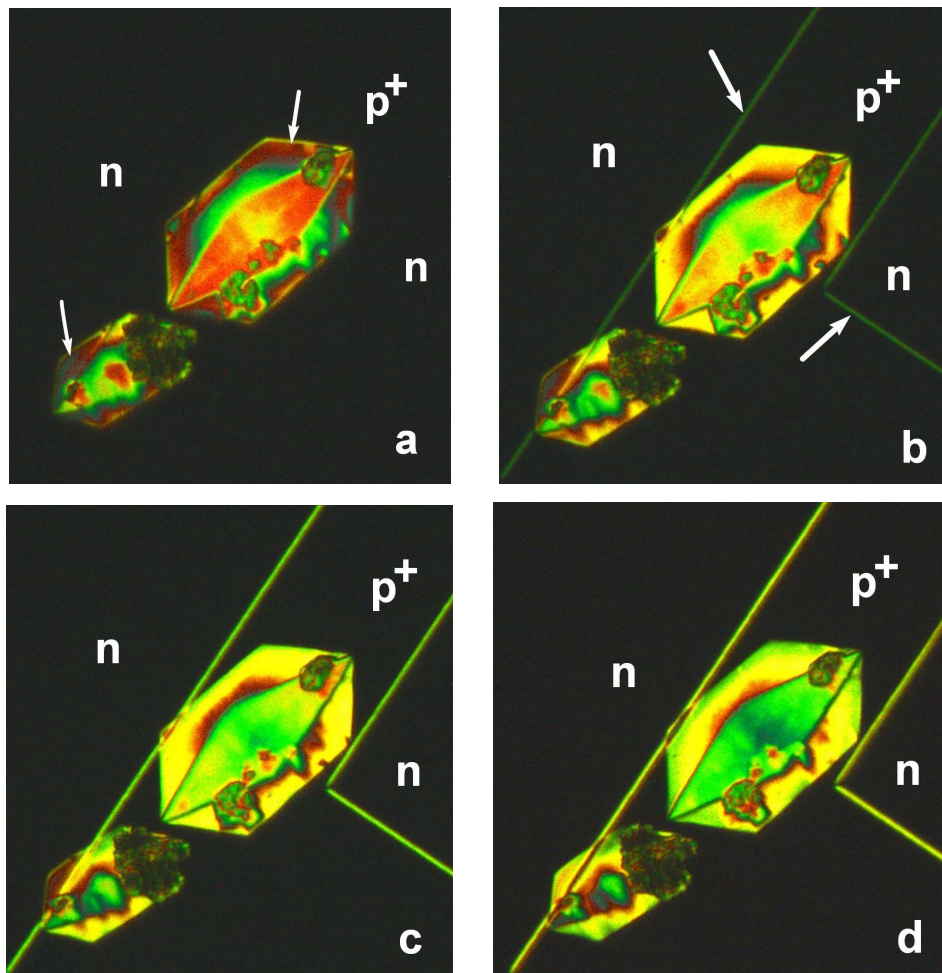


Рис. 3. МК в области электрического поля (над p^+ областью).

Напряжение, В: а-1, б- 2, с-3, д-4. Частота – 40 кГц.

С целью установления характера поведения МК в электрическом поле, МК с помощью потока был перемещен в слое жидкого кристалла в область над p^+ карманом, где электрическое поле, при подключении переменного напряжения к p - n переходу, перпендикулярно поверхности кремния. В такой геометрии ячейки и исходной ориентации нематика, электрическое поле не только не изменяет ориентацию нематика, но благодаря диэлектрическому взаимодействию гомеотропная ориентация становится более устойчивой. На рис. 3 приведены микрофотографии фрагмента ячейки с двумя МК над p^+ карманом, соответствующие действию переменного напряжения на ячейку. Из приведенных фотографий можно сделать вывод, что МК демонстрирует реакцию на действие электрического поля, при этом, обнаруживается более высокая чувствительность МК к электрическому полю, чем у исходного нематика. На это указывает следующий факт. Рис. 3а соответствует случаю, когда к p - n переходу приложено напряжение 1В. В окрестности границы p - n перехода молекулы нематика могут беспрепятственно



переориентироваться вдоль горизонтальной составляющей электрического поля (в согласии с диэлектрическим механизмом), однако переориентации нематика не наблюдается, рис. 3а. Однако, некоторые участки МК (отмечены стрелками на рис. 2b (без поля) и рис. 3а) при этом напряжении реагируют на электрическое поле, что проявляется в изменении поляризационного цвета этих участков. Отметим, что переориентация нематика вдоль линии p-n перехода (например отмечена стрелками на рис. 3b) появляется при более высоком напряжении, рис. 3 b-d. Анализ поведения МК в электрическом поле позволяет заключить, что с увеличением электрического поля двулучепреломление МК уменьшается, рис. 3 b-d. Из этого следует, что в МК, в определенной степени, проявляются свойства исходного нематика, молекулы которого обладают положительной анизотропией диэлектрической проницаемости и обязаны ориентироваться длинными осями вдоль вектора электрического поля, в данном случае, нормально к плоскости рис. 3. Поэтому, принимая во внимание, что в стандартных условиях, например, классического типа ЖК ячейках [1], образование подобных МК не происходит, можно полагать, что «строительными блоками» описываемых МК являются не индивидуальные молекулы нематика, а ассоциаты молекул, группирующиеся вокруг ионов, которые возникают в НЖК при протекании ионного тока в условиях контакта НЖК с атмосферой.

Таким образом, в условиях протекания электрического тока в нематическом жидком кристалле 5CB и контакта жидкокристаллического материала с атмосферой имеет место формирование молекулярных кристаллов, которые обладают электрически управляемым двулучепреломлением. Предполагается, что рост молекулярного кристалла в нематике обусловлен самосборкой ассоциатов молекул нематика, центрами локализации которых являются ионы.

Литература

1. Блинов Л.М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов / М.: Наука, 1978. – 384 с.

ELECTRICALLY INDUCED MOLECULAR CRYSTAL IN NEMATIC

S.I. Kucheev

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: skucheev@yahoo.com

Abstract. It is presented the report on the observation of molecular crystals formation of in nematic liquid crystal 5CB in the vicinity of the silicon p-n junction. Necessary condition of the formation is the flow of electric current. It is experimentally demonstrated that the molecular crystal has electrically controlled birefringence.

Key words: nematic, molecular crystal, electrically controlled birefringence, p-n junction.



STUDY ON THE ACHIEVING TO STRONG COUPLING REGIME FOR InAs/GaAs QUANTUM DOT EMBEDDED IN THE NANOCAVITY

M.R. Mohebbifar, R.Kh. Gainutdinov, M.A. Khamadeev

Optics and Nanophotonics Department, Institute of Physics, Kazan Federal University,
Kremlevskaya St., Kazan, 420008, Russia, e-mail: mmohebbifar@gmail.com

Abstract. In order to the generation of single photon and the production of dressed states between photons and electrons in nanophotonic structures, achieving strong coupling regime is necessary. One of the best ways achieving to strong coupling, is quantum dots embedded in nanocavity of photonic crystals. In this paper, Hamiltonian of the interaction of nanoparticle - photon, based on semiclassical approach is obtained. Then total Hamiltonian of this system, by Rotating Wave Approximation (RWA) is calculated. By solving this Hamiltonian for Schrödinger equation, eigen values of this system, level shift factor and the strong coupling regime condition for InAs/GaAs quantum dots embedded in the nanocavity was calculated. For three cavities by decay rates of $200\mu\text{eV}$, $600\mu\text{eV}$ and $1000\mu\text{eV}$, the graph $(\Delta E - \gamma_c - g)$ presents that when decreasing decay rate of nanocavity, both coupling constant and levels shift are increased. This means that, only for high quality factor cavities, Strong coupling will occur. Indeed slope of coupling constant graph more than slope of decay rate of cavity. This means that coupling constant plays more important role for achieving to strong coupling regime.

Key words: InAs/GaAs quantum dot, strong coupling regime, nanocavity, dressed state, cavity decay rate.

1. Introduction. A self-assembled single quantum dot (QD) is a nanocrystal made of semiconductor materials that are small enough to exhibit quantum mechanical properties. The electronic properties of these materials are intermediate between those of bulk semiconductors and of discrete molecules. Due to their relatively higher efficiency compared to bulk, they have also found applications as optoelectronic devices [1-5], biotechnology, solar cell [5-12], single photon emitters [13] or qubits for quantum computers [14], quantum interference, Rabi oscillations, Quantum coherence, photon anti-bunching, etc. [15-23]. In zero-dimension structures, the free carriers are confined to a small region by a so called confinement potential providing the quantization of electronic energy states based on the size of the dots. Atom-like discrete energy-levels are occurred when confining the carriers in a nanoregion. The formation of self-assembled InAs QDs on GaAs substrates has attracted much interest, due to their promising applications in nanoscale devices. Various shapes of QDs can be grown by Stranski-Krastanow method [24-26]. The size and shape of such QDs depend on the growth conditions and the used techniques [27-29]. The optical properties of an ensemble of quantum dots are affected by the size distribution and the geometry of the dots [30]. The Stranski-Krastanow method is essentially a self-organized hetero-epitaxial growth during molecular beam epitaxy (MBE) [10]. In this technique, after a number of lattice-mismatched atomic layers deposited on a substrate, accumulated strain energy forces transition from layer to island growth. This happens when a so called wetting layer reaches to a critical 3 thickness of 3-4 nm [31-33]. Semiconductor nanocavity systems with a QD have been investigated because of their unique physics based on cavity quantum electrodynamics and their potentials in future applications such as quantum information processing. In semiconductor microcavity systems [34], vacuum Rabi splitting in the strong coupling regime [35-38] and highly efficient lasing in the weak-coupling regime [39-47] have been observed. Here,



by solving this Hamiltonian for Schrödinger equation, eigenvalues of InAs/GaAs quantum dots embedded in the nanocavity, level shift factor and the strong coupling regime condition for this nanosystem for three cavities by decay rates of $200\mu\text{eV}$, $600\mu\text{eV}$ and $1000\mu\text{eV}$ was studied.

2. Results and Discussion. To simplify the problem, we start the study with the two-level atom system. In quantum mechanics, a two-level system is a system which can exist in any quantum superposition of two independent (physically distinguishable) quantum states. Figure 1 shows the schema of two-level atom system.

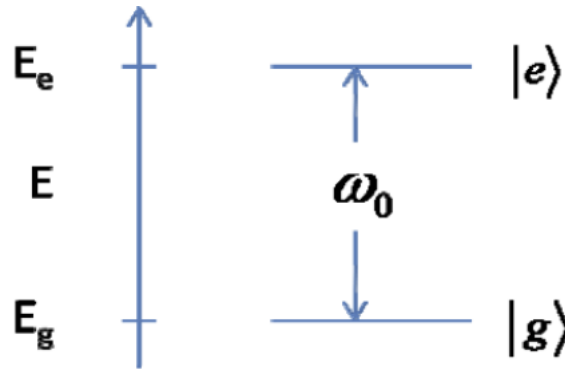


Fig. 1. Schema of two-level atom system.

The Hamiltonian of two-level atom system described by equation (1).

$$H_a = E_g|g\rangle\langle g| + E_e|e\rangle\langle e| \quad (1)$$

By using $|g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and Pauli's matrix $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, equal to equation (2).

$$H_a = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z. \quad (2)$$

By semiclassical approach which in this approach the atoms are classical and the photons are quantum are studied, and by using "rotating wave approximation" (RWA) for this atom equal to equation (3).

$$H_{int} = q\vec{r} \cdot \vec{E}. \quad (3)$$

where q is electric charge ($-e$), \vec{r} is position of electron in the nucleus and \vec{E} is electric field. \vec{r} can be considered as an operator and:

$$q\vec{r} = P_{ee}|e\rangle\langle e| + P_{gg}|g\rangle\langle g| + P_{eg}|e\rangle\langle g| + P_{ge}|g\rangle\langle e|, \quad (4)$$

$$P_{ab} = e\langle a|\vec{r}|b\rangle = \int e\vec{r}\Psi_a\Psi_b^*d^3r. \quad (5)$$

This equation for $a = b$ equal to zero and for $a \neq b$ we have $P_{ab} = P_{ba}^*$ with assumption Λ^+ and Λ^-

$$\Lambda^+ = |e\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$



$$\Lambda^- = |g\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

And dipole operator describes by equation(8)

$$e\vec{r} = P\Lambda^+ + P^*\Lambda^-. \quad (8)$$

Interaction Hamiltonian becomes as follows:

$$H_{int} = \hbar(g\Lambda^+ + g^*\Lambda^-)(a - a^\dagger) \quad (9)$$

where in these equations g is coupling constant and a is annihilation(creation) operator. By applying operator to ground state atom goes to excited state and by to excited state atom goes to ground state. By using RWA interaction Hamiltonian becomes as follows:

$$H_{int} = \hbar(g\Lambda^+a + g^*\Lambda^-a^\dagger). \quad (10)$$

Finally, total Hamiltonian equal to equation (11),

$$H_{total} = \hbar(g\Lambda^+ + g^*\Lambda^-)(a - a^\dagger) + \hbar\omega a a^\dagger + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z. \quad (11)$$

By using this Hamiltonian in the time-independent Schrödinger equation Energy Eigenvalues of this system:

$$E_1 = \frac{E_c + E_a}{2} - i\frac{\gamma_c + \gamma_a}{4} + \sqrt{g^2 - \left(\frac{\gamma_c - \gamma_a - 2i\Delta}{4}\right)^2}, \quad (12)$$

$$E_2 = \frac{E_c + E_a}{2} - i\frac{\gamma_c + \gamma_a}{4} - \sqrt{g^2 - \left(\frac{\gamma_c - \gamma_a - 2i\Delta}{4}\right)^2} \quad (13)$$

where in these equations $E_a(E_c)$ is the atom(cavity) energy and γ_a (γ_c) is the atom(cavity) decay rate.

At resonance state which $E_0 = E_a = E_c$

$$E_1 = E_0 - i\frac{\gamma_c + \gamma_a}{4} + \sqrt{g^2 - \left(\frac{\gamma_c - \gamma_a}{4}\right)^2}, \quad (14)$$

$$E_2 = E_0 + i\frac{\gamma_c + \gamma_a}{4} - \sqrt{g^2 - \left(\frac{\gamma_c - \gamma_a}{4}\right)^2}. \quad (15)$$

Here $\Delta E = E_1 - E_2$ which represents the difference between two peaks called Splitting Index:

$$\Delta E = 2\sqrt{g^2 - \left(\frac{\gamma_c - \gamma_a}{4}\right)^2}. \quad (16)$$

The equation (16) expresses coupling regime of system. If $g > |(\gamma_c - \gamma_a)/4|$ there is strong coupling for atom-cavity system. If $g < |(\gamma_c - \gamma_a)/4|$ there is weak coupling for atom-cavity system.

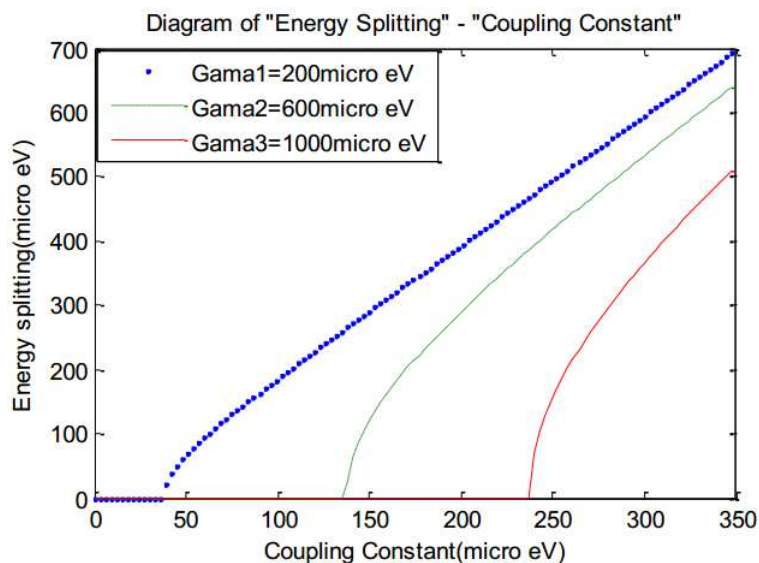


Fig. 2. Graph of coupling constant-energy splitting for three cavities by decay rates of $200\mu\text{eV}$, $600\mu\text{eV}$ and $1000\mu\text{eV}$ of InAs/GaAs quantum dots embedded in the nanocavity.

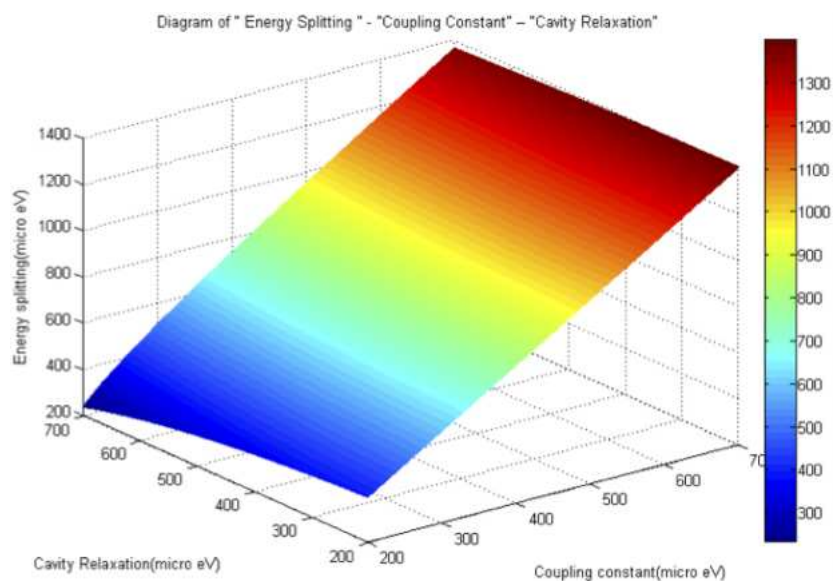


Fig. 3. Graph of coupling constant-cavity relaxation-energy splitting for InAs/GaAs quantum dots embedded in the nanocavity.

Figures 2 and 3 show results of calculation for InAs/GaAs quantum dots embedded in the nanocavity for three cavities by decay rates of $200\mu\text{eV}$, $600\mu\text{eV}$ and $1000\mu\text{eV}$. These figures present that when decreasing decay rate of cavity, both coupling constant and levels shift are increased. This means that, only for high quality factor cavities, Strong coupling will occur. Indeed slope of coupling constant graph more than slope of decay rate of cavity. This means that coupling constant plays more important role for achieving to strong coupling regime.



Conclusion. In this paper by solving the Schrödinger equation, eigenvalues of InAs/GaAs quantum dots embedded in the nanocavity, level shift factor and the strong coupling regime condition for this nanosystem for three decay rates cavities was studied. Results show that when decreasing decay rate of cavity, both coupling constant and levels shift are increased. This means that, only for high quality factor cavities, Strong coupling will occur. Indeed, slope of coupling constant graph more than slope of decay rate of cavity. This means that coupling constant plays more important role for achieving to strong coupling regime.

Acknowledgments. We would like to gratefully thank Prof. R.Kh. Gainutdinov for his guidance and the helpful discussions. Also we would like to thank the Department of Optics and Nanophotonics at Kazan Federal University for providing computer support for this project.

References

1. Sun K., Vasudev M., Jung H.-S., Yang J., Kar A., Li Y., Reinhardt K., Snee P., Strosio M.A., Dutta M. // *Microelectron. J.* – 2009. – 40. – P.644–649.
2. Newell T.C., Bossert D.J., Stintz A., Fuchs B., Malloy K.L., Lester L.F. // *IEEE J.Quantum Electron.* – 1999. – 11. – P.1527–1529.
3. Teleb 3.H., Abedi K., Golmohammadi S. // *Appl. Opt.* – 2011. – 50. – P.608–617.
4. Karimkhani A., Moravvej-Farsh M.K. // *Appl. Opt.* – 2010. – 49. – P.1012–1019.
5. Bhattacharya P., Ghosh S., Stiff-Roberts A.D. // *Annu. Rev. Mater. Res.* – 2004. – 34. – P.1–40.
6. Jorge P.A.S., Mayeh M., Benrashid R., Caldas P., Santos J.L., Farahi F. // *Appl.Opt.* – 2006. – 45. – P.3760–3767.
7. Jamieson T., Bakhshi R., Petrova D., Pocock R., Imani M., Seifalian A.M. // *Biomaterials.* – 2007. – 28. – P.4717–4732.
8. Liang B.L., Wang Z.M., Mazur Yu.I., Salamo G.J. // *Appl. Phys. Lett.* – 2006. – 89. – P.243124.
9. Luque A., Marti A., Antolin E., Garcia-Linares P. // *Sol. Energy Mater. Sol. Cells.* – 2010. – 94. – P.2032–2035.
10. Zhou Y., Eck M., Veit C., Zimmermann B., Rauscher F., Niyamakom P., Yilmaz S., Dumsch L., Allard S., Scherf U., Kruger M. // *Sol. Energy Mater. Sol. Cells.* – 2011. – 95. – P.1232–1237.
11. Suraprapich S., Thainoi S., Kanjanachuchai S., Panyakeow S. // *Sol. Energy Mater. Sol. Cells.* – 2006. – 90. – P.2968–2974.
12. Ee Y.-K., Zhao H., Arif R.A., Jamil M., Tansu N. // *J. Cryst. Growth.* – 2008. – 310. – P.2320–2325.
13. Michler P., Kiraz A., Becher C., Schoenfeld W. V., Petroff P. M., Zhang L., Hu E., Imamoglu A. // *Science.* – 2000. – 290(55). – P.2282–2885.
14. Michler P., Imamoglu A., Mason M.D., Carson P.J., Strouse G.F., Buratto S.K. // *Nature.* – 2000. – 406(6799). – P.968–970.
15. Loss D., DiVincenzo D.P. // *Phys. Rev.A.* – 1998. – 57(1). – P.120–126.
16. Kamada H., Gotoh H., Temmyo J., Takagahara T., Ando H. // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – 87(10). – P.246–250.
17. Zrenner A., Beham E., Stuffer S., Findeis F., Bichler M., Abstreiter G. // *Nature.* – 2002. – 418(12). – P.612–614.
18. Bonadeo N.H., Erland J., Gammon D., Park D., Katzer D.S., Steel D.G. // *Science.* – 1998. – 282(5393). – P.1473–1475.
19. Patton B., Woggon U., Langbein W. // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – 2005. – 95(11). – P.6401–6406.
20. Mohebbifar M.R., Ahmadi daryakenari M., Mosallanezhad G., Zohrabi M. // *Nanosystems: physics, chemistry, mathematics.* – 2014. – 5(6). – P.737–751.
21. Stievater T.H., Li X., Steel D.G., Gammon D., Katzer D.S., Park D., Piermarocchi C., Sham L.J. // *Phys.Rev. Lett.* – 2001. – 87(13). – P.3603–3608.



22. Htoon H., Takagahara T., Kulik D., Baklenov O., Holmes Jr A.L., Shih C.K. // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – 88(8). – P.7401-7405.
23. Mohebbifar M.R., Khalilzadeh J., Dibaei B., Parvin P. // *Infrared Physics & Technology.* – 2014. – 65. – P.61–66.
24. Rangel-Kuoppa V.-T., Chen G., Jantsch W. // *Solid State Phenom.* – 2011. – 178–179. – P.67–71.
25. Lang C., Nguen-Manh D., Cochayne D.J.H. // *J. Phys. Conf. Ser.* – 2006. – 29. – P.141–144.
26. Yang X.-F., Fu K., Xu W.-L., Fu Y. // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2009. – 42. – P.125414.
27. Kim N.H., Ramamurthy P., Mawst L.J., Kuech T.F., Modak P., Goodnough T.J., Forbes D.V., Kanshar M. // *J. Appl. Phys.* – 2005. – 97. – P.093518.
28. Nuntawong N., Birudavolu S., Hains C.P., Xu H., Huffaker D.L. // *Appl. Phys. Lett.* – 2004. – 85. – P.3050–3052.
29. Dubrovskii V.G., Cirilin G.E., Musikhin Y.G., Samsonenko Y.B., Tonkikh A.A., Polyakov N.K., Egorov V.A., Tsatsul'nikov A.F., Krizhanovskaya N.A., Ustinov V.M., Werner P. // *J. Cryst. Growth.* – 2004. – 267. – P.47–59.
30. Li Y., Voskoboynikov O., Lee C.P., Sze S.M. // *Comput. Phys. Commun.* – 2001. – 141. – P.66–72.
31. Gullis A.G., Norris D.J., Walther T., Migliorato M.A., Hopkinson M. // *Phys. Rev. B.* – 2002. – 66. – P.81305–81401.
32. Leonard D., Pond K., Petroff P.M. // *Phys. Rev. B.* – 1994. – 50. – P.11687–11692.
33. Walther T., Gullis A.G., Norris D.J., Hopkinson M. // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – 86. – P.2381–2384.
34. Vahala K.J. // *Nature.* – 2003. – 424. – P.839-846.
35. Reithmaier J.P., Sek G., Löffler A., Hofmann C., Kuhn S., Reitzenstein S., Keldysh L.V., Kulakovskii V.D., Reinecke T.L., Forchel A. // *Nature.* – 2004. – 432. – P.197-200.
36. Yoshie T., Shchekin O.B., Chen H., Deppe D.G., Scherer A. // *Electron. Lett.* – 2002. – 38. – P.967-968.
37. Peter E., Senellart P., Martrou D., Lemaitre A., Hours J., Gerard J.M., Bloch J. // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – 95. – P.067401.
38. Hennessy K., Badolato A., Winger M., Gerace D., Atature M., Gulde S., Falt S., Hu E.L., Imamoglu A. // *Nature.* – 2007. – 445. – P.896-899.
39. Strauf S., Hennessy K., Rakher M.T., Choi Y.-S., Badolato A., Andreani L.C., Hu E.L., Petroff P.M., Bouwmeester D. // *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – 96. – P.127404.
40. Xie Z.G., Gotzinger S., Fang W., Cao H., Solomon G.S. // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – 98. – P.117401.
41. Reitzenstein S., Bockler C., Bazhenov A., Gorbunov A., Löffler A., Kamp M., Kulakovskii V.D., Forchel A. // *Opt. Express.* – 2008. – 16. – P.4848-4857.
42. Gainutdinov R.Kh., Khamadeev M.A., Mohebbifar M.R., Mutygullina A.A. // *Journal of Physics: Conference Series.* – 2014. – 560 (1). – 012006, 1-4.
43. Painter O., Lee R.K., Scherer A., Yariv A., O'Brien J.D., Dapkus P.D. // *Science.* – 1999. – 284. – P.1819-1821.
44. Park H.-G., Kim S.-H., Kwon S.-H., Ju Y.-G., Yang J.-K., Baek J.-H., Kim S.-B., Lee Y.-H. // *Science.* – 2004. – 305. – P.1444-1447.
45. Nomura M., Iwamoto S., Watanabe K., Kumagai N., Nakata Y., Ishida S., Arakawa Y. // *Opt. Express.* – 2006. – 14. – P.6308-6315.
46. Nozaki K., Kita S., Baba T. // *Opt. Express.* – 2007. – 15. – P.7506-7514.
47. Nomura M., Iwamoto S., Kumagai N., Arakawa Y. // *Phys. Rev. B.* – 2007. – 75. – P.195313.



УДК 620.192

ЕМКОСТНОЙ КОНТРОЛЬ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ИЗОЛЯЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ ПРОВОДНИКОВ

*А.В. Матвеев, **Г.А. Пюкке

*ООО «Газпромтрансгаз Томск»,

ул. Гастелло, 7, Петропавловск-Камчатский, 683032, Россия, e-mail: nadzorrpu@mail.ru

**Камчатский государственный технический университет,

ул. Владивостокская, 2, Петропавловск-Камчатский, 683017, geopyukke@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматривается способ неразрушающего контроля изоляции вновь изготавливаемой кабельной продукции на предмет отсутствия дефектов. Исследование производится посредством получения параметров схемы замещения участка изоляции подачей на внутренний проводник и внешнюю поверхность высокочастотного напряжения околорезонансной частоты. Показано, что исследуемый участок при такой компоновке проявляет свойства цилиндрического конденсатора. Емкость данного конденсатора находится в прямой зависимости от величины диэлектрической проницаемости изоляции и следовательно ее качества. Уменьшение величины емкости данного участка является явным признаком наличия дефектов.

Ключевые слова: кабель, изоляция, контроль качества, обнаружение дефектов изоляции.

В современной технике проектирования и строительства сетей распределения и потребления электрической энергии имеется тенденция для все более широкого применения самонесущих изолированных проводов. Провода класса СИП не нуждаются в изоляторах, имеют большую безопасность при прокладке через ветви деревьев, по поверхности зданий, не требуют высокой подготовки монтирующего персонала, мало подвержены образованию гололеда и обладают целым рядом других полезных свойств. Этим и обусловлена высокая и все увеличивающаяся популярность проводов этого класса в промышленности. Однако процесс покрытия проводника изоляционным материалом сопряжен с рядом сложностей. Полимер не способен связываться с металлом в единую структуру и как следствие на границе раздела сред прочность соединения крайне мала. Многочисленные механические нагрузки, которыми сопровождается процесс изготовления самонесущего изолированного провода, способны привести к разрушению связи и появлению дефекта в изоляции. Сам полимер также склонен к образованию таких локальных дефектов как пузырьки воздуха, локальные включения и прочие. Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод о необходимости контроля качества исполнения изоляционного покрытия.

На данный момент существует ряд способов реализации данного контроля. Наиболее распространенным является способ, указанный в патенте за авторством А.Е. Гольдштейна, В.В. Редько и Л.Б. Бурцевой [2]. Суть метода заключена в протягивании изготовленного провода через кольцевой электрод и подаче высокого напряжения на провод и электрод. При этом в местах наличия дефектов изоляции происходит образование частичных разрядов и как следствие появления высокочастотных токовых разрядов.

Существуют также следующие способы диагностики:



1. Г.В. Смирнов, Д.Г. Смирнов [1]. Метод заключен в протягивании провода через коронирующий электрод. В местах наличия нарушений изоляции происходит резкое изменение структуры короны.

2. Г.В. Смирнов, Д.Г. Смирнов [3]. Метод заключается в исследовании зон прогрева изоляции.

3. Г.К. Новиков, А.И. Смирнов, А.С. Жданов, Л.Н. Новикова, Г.В. Маркова [4]. Метод заключается в наложении на поверхность изоляции тонкой алюминиевой фольги и исследовании интенсивности рентгеновского излучения.

Исследовав преимущества и недостатки перечисленных методов, приходим к выводу, что способ контроля по исследованию зон прогрева изоляции недостаточно информативен и неспособен выявлять все возможные дефекты. Все остальные методы сопряжены с подачей на изоляцию напряжения, близкого к напряжению пробоя. Это в той или иной мере снижает качество изоляции. На основании вышеперечисленного можно сделать вывод о необходимости создания иного способа диагностики.

Предлагается производить контроль изоляции путем приложения к внешней поверхности провода кольцевого электрода и подаче на внутренний провод и кольцевой электрод высокочастотного напряжения с напряжением много меньше напряжения пробоя изоляции. При такой схеме, участок изоляции между кольцевым электродом и проводом проявляет свойства цилиндрического конденсатора с емкостью, определяемой по формуле (1).

$$C = 2\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{l}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (1)$$

Эта формула не является точной, так как не учитывает емкости, создаваемой торцевыми фрагментами поля конденсатора, которые при условии малой длины измеряемого участка будут играть значительную роль, однако по указанным ниже причинам в данной ситуации может быть использована.

Так как внешний и внутренний диаметр провода является жестко фиксированным параметром, участок с дефектом в изоляции может быть представлен в виде двух последовательно соединенных конденсаторов представляющих собой схему замещения поврежденного участка и соединенным с ними параллельно конденсатора, являющегося схемой замещения неповрежденного участка изоляции. Или же упрощенно в виде двух параллельно соединенных конденсаторов в котором емкость дефектного участка будет представлена одним цилиндрическим конденсатором с однородным диэлектриком эквивалентной диэлектрической проницаемости. Суммарная емкость поврежденного участка может быть определена по формуле (2).

$$C = 2\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{l - l_d}{\ln(R_2/R_1)} + 2\pi\epsilon_d\epsilon_0 \frac{l_d}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} (\epsilon l - \epsilon l_d + \epsilon_d l_d), \quad (2)$$

где:

l_d – длина дефектного участка,

ϵ_d – диэлектрическая проницаемость дефектного участка.

Величина относительного изменения величины емкости по сравнению с емкостью неповрежденного участка выражается формулой (3).

$$\eta = \frac{(\epsilon l - \epsilon l_d + \epsilon_d l_d)}{\epsilon l} = 1 - \frac{l_d}{l} + \frac{\epsilon_d l_d}{\epsilon l}. \quad (3)$$

Из указанных выше зависимостей можно сделать следующие выводы:



– Уменьшение емкости диагностируемого промежутка по сравнению с емкостью остальных участков является явным и однозначным следствием наличия дефекта на данном участке и может быть использовано для диагностики;

– Необходимость в оценке величины емкости промежутка, создаваемого боковыми сегментами поля цилиндрического конденсатора, отсутствует, так как оценка производится по отношению емкости дефектного участка и неповрежденного. Боковые сегменты поля в поврежденном и неповрежденном участке одинаковы и их влияние лишь несколько снижает чувствительность;

– При таком способе оценки качества изоляции отсутствует необходимость в приложении к изоляции высокого напряжения и следовательно способ не повреждает изоляцию;

– Чувствительность будет наибольшей при длине кольцевого электрода соизмеримой с размерами характерных повреждений в изоляции (при длине, при которой поле в диагностируемом участке можно считать условно равномерным). Эффективной будет длина, вдвое превышающая внешний диаметр провода.

Используя параметры распространенных марок СИП, можно оценить величину емкости диагностического промежутка по формулам, представленным выше.

СИП-3 с сечением токопроводящей жилы 35 мм^2 (наименьший по площади поперечного сечения и как следствие имеющий наименьшую емкость вид СИП-3) имеет следующие параметры:

- изоляцию толщиной 1,3 мм.;
- изоляция из полиэтилена с диэлектрической проницаемостью 3,7;
- внутренний провод диаметром 7 мм.

При указанных параметрах емкость изоляции составляет 11,54 пФ. Данная величина является относительно небольшой и для регистрации изменений в ее величине необходимо привести схему замещения к режиму резонанса напряжений. При этом любое малейшее отклонение емкости приведет к выходу из резонансного режима, что легко фиксируется.

Наиболее эффективна для диагностической деятельности резонансная частота в районе 10 МГц. Большая частота приведет к:

- проявлению межвитковых емкостей катушки и индуктивности конденсатора, что внесет сложности в процесс диагностики;
- созданию диагностическим устройством помех работе радиосвязи;
- увеличению необходимой индуктивности диагностического устройства, что в итоге приведет к усложнению конструкции, увеличению чувствительности к помехам и ряду иных факторов.

Меньшая частота приведет к увеличению времени, необходимому для диагностики и как следствие к необходимости замедлить выпуск продукции.

При указанной рекомендуемой резонансной частоте необходимая индуктивность диагностического устройства вычисляется по формуле (4).

$$L = \left((2\pi f_0 C) \right)^{-1}. \quad (4)$$

Для данного типа провода индуктивность составит 22 мкГн.

Уровень чувствительности устройства определяется отношением величины тока в резонансном режиме к току при величине емкости уменьшенной на коэффициент k .



Ток в таком контуре определяется соотношением (5)

$$I(k) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L + (\omega k C)^{-1})^2}}. \quad (5)$$

В неповрежденном участке коэффициент k равен единице, а выражение $(\omega L + (\omega k C)^{-1})^2$, определяющее реактивное сопротивление равно нулю. Общий коэффициент чувствительности $\eta = I(1)/I(k)$ определяется соотношением (6).

$$\eta = I(1)/I(k) = \sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left((\omega C)^{-1} - (k\omega C)^{-1} \right)^2}. \quad (6)$$

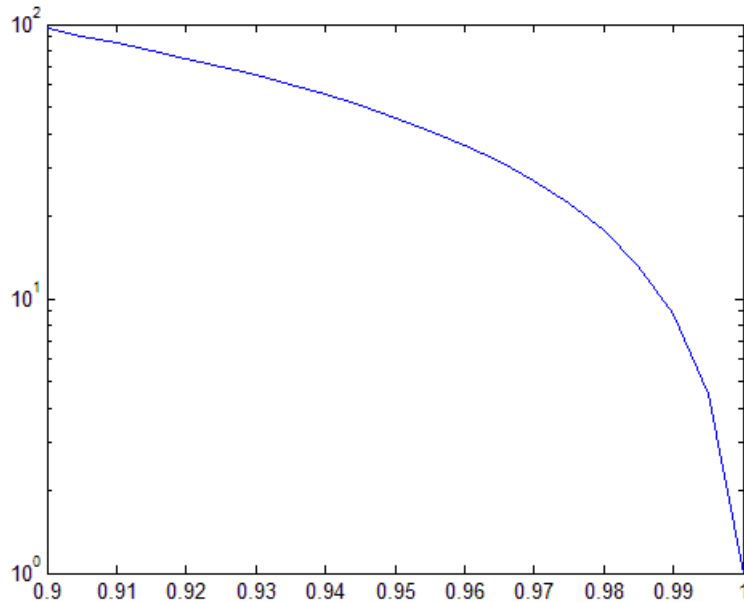


Рис. 1. Зависимость коэффициента η от k .

По анализу полученной зависимости можно сделать вывод, что чувствительность находится в обратной непропорциональной зависимости от величины квадрата активного сопротивления и квадрата частоты. При частоте в 10 МГц, емкости диагностического промежутка 11,54 пФ, внутреннем сопротивлении 10 Ом, зависимость коэффициента чувствительности от коэффициента k будет иметь вид, представленный на рисунке 1. Видно, что даже при изменении емкости всего на 1% ток падает в 7 раз. Это говорит о возможности применения предложенного способа контроля и весьма высокой точности контроля.

Литература

1. Смирнов Г.В., Смирнов Д.Г. // 2014. Устройство контроля дефектов изоляции. Патент РФ №2506601.



2. Гольдштейн А.Е., Редько В.В., Бурцева Л.Б. // 2013 Искровое устройство для контроля дефектов изоляции. Патент РФ №2491562.
3. Смирнов Г.В., Смирнов Д.Г. // 2014. Устройство для контроля дефектов изоляции. Патент РФ №2505830.
4. Новиков Г.К., Смирнов А.И., Жданов А.С., Новикова Л.Н., Маркова Г.В. // 2009. Рентгенографическое устройство для проверки качества изоляции кабельной продукции. Патент РФ №2377588.

CAPACITIVE CONTROL OF PERMITTIVITY INSULATING COATINGS OF CONDUCTORS

*A.V. Matveev, **G.A. Pukke

ООО «Gazprom transgaz Tomsk», Gastello St., 7, Petropavlovsk-Kamchatsky, 683032, Russia, e-mail: nadzorrpu@mail.ru

Kamchatka State Technical University,
Vladivostokskaya St., 2, Petropavlovsk-Kamchatsky, 683017, Russia, e-mail: geopyukke@yandex.ru

Abstract. The method of not destroying control of isolation in again made cable production is examined. Absence of defects is searched. Research is done by means of reception of an equivalent circuit parameters connected with the site of isolation. It is done by submission on an internal explorer and an external surface of a high-frequency voltage with the frequency being closed to resonance frequency. It is shown that the researched site, at such configuration, shows properties of the cylindrical condenser. The capacity of the condenser is at direct dependence on size of dielectric permeability of isolation and, therefore, on its qualities. Reduction of capacity magnitude of the site is the explicit attribute of defects presence.

Key words: cable production, isolation, quality assurance, detection of defects of isolation.



К ВОПРОСУ О МЕТОДАХ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

С.В. Блажевич, Е.С. Селютина

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: blazh@bsu.edu.ru

Аннотация. Обсуждается субпиксельная обработка цифровых изображений, направленная на улучшение качества изображения. Представлен модифицированный алгоритм синтеза изображения высокого разрешения на основе группы изображений низкого разрешения с использованием принципа сверхразрешения.

Ключевые слова: цифрового изображения, изменение масштаба, сверхразрешение.

Введение. Цифровые изображения – одно из наиболее информативных средств визуальной формы представления информации. Цифровая форма информации позволяет проводить разнообразные преобразования изображения, позволяющие улучшить его качество. Характеристики цифрового изображения можно в значительной степени варьировать в процессе компьютерной обработки. Можно отметить возможности компьютерной компенсации дефектов фокусировки изображения, устранение «шума» на изображении. Важной возможностью компьютерной обработки цифровых изображений является изменение размеров изображения путем изменения числа пикселей, которыми оно представляется. Изменять размер изображения можно на стадии его визуализации путем изменения размера пикселя, однако при этом начинает проявляться пиксельная структура изображения, ухудшающая его восприятие. Наиболее важной задачей повышения качества цифрового изображения является задача повышения его разрешения, которое определяет его информативность.

Изменение масштаба цифрового изображения. Когда говорят об увеличении (уменьшении) цифрового изображения, то подразумевают изменение его размера на экране или на другом носителе с целью более удобного наблюдения. Если при этом не изменять число пикселей, представляющих это изображение, то при его увеличении будет наблюдаться в виде хорошо заметных квадратиков пиксельная структура, которая ухудшает восприятие рисунка. Устранить этот эффект можно, если искусственно увеличить число пикселей, раздвинув имеющиеся пиксели (см. рис. 1.), и вставляя новые дополнительные пиксели, значения которых следует выбрать таким образом, чтобы минимизировать визуальный эффект пикселизации. Если нет дополнительной информации о деталях данного изображения, то новые пиксели следует определить таким образом, чтобы максимально сгладить переходы между имеющимися пикселями. Простейшим способом такого определения является присвоение каждому новому пикселю, расположенному между двумя соседними известными пикселями, значения равного их среднеарифметическому. Пикселю, расположенному на пересечении новых столбцов с новыми строками в разреженной матрице, можно присвоить значение равное среднеарифметическому от значений четырех ближайших пикселей исходной матрицы.

Реализующая такую схему увеличения линейных размеров цифрового изображения (в два раза) программа, созданная в среде математического пакета Mathcad, представлена на рис. 2.

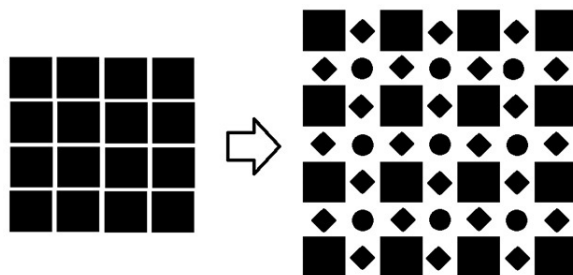


Рис. 1. Схема формирования увеличенной матрицы цифрового изображения: раздвинутые пиксели исходной матрицы (изображены большими квадратами) окружены новыми пикселями, (обозначены, в зависимости от их положения относительно пикселей исходной матрицы, кружками и ромбиками).

```

XX2(M) :=
  for i ∈ 0..rows(M) - 2
  for k ∈ 0..cols(M) - 2
    aa2.i,2.k ← Mi,k
    aa2.i+1,2.k+0 ←  $\frac{M_{i+1,k} + M_{i,k}}{2}$ 
    aa2.i+0,2.k+1 ←  $\frac{M_{i,k+1} + M_{i,k}}{2}$ 
    aa2.i+1,2.k+1 ←  $\frac{M_{i+1,k+1} + M_{i+1,k} + M_{i,k+1} + M_{i,k}}{4}$ 
  aa
  
```

Рис. 2. Программа увеличения линейного размера цифрового изображения в два раза.

На рисунке рис. 3 демонстрируются исходное (q) и увеличенное цифровые изображения, полученные с использованием представленной программы XX2(q).

Представленный алгоритм увеличения цифрового изображения отражает частный случай более общего интерполяционного метода. Действительно, если рассматривать строку матрицы цифрового изображения как функцию, заданную набором значений формирующих ее пикселей, то можно рассчитать значения дополнительных промежуточных пикселей, реализующих заданную степень увеличения размера матрицы цифрового изображения.

Если увеличение размера изображения используется для улучшения его зрительного восприятия, сглаживая пиксельную структуру изображения, то уменьшение размеров пикселя менее, чем в два раза не даст заметного эффекта. Однако, если необходимо изменить размеры изображения с целью оптимального размещения на странице документа, и для этого может потребоваться увеличение изображения в нецелое число раз, то алгоритм изменения масштаба будет иным. В этом случае может быть использован интерполяционный метод, но для построения изображения необходимо использовать значения только новых пикселей, рассчитанных на основе исходных и отличающиеся от них как по значению, так и по расположению на плоскости изображения.



Построив на основе матрицы цифрового изображения интерполяционную функцию в виде двумерного сплайна [1], осуществляется переход от дискретного цифрового представления изображения возвратимся к непрерывному. Далее, можно снова перейти к дискретному уже с новыми параметрами дискретизации. На этом пути нет ограничения на значения коэффициента масштабирования изображения.

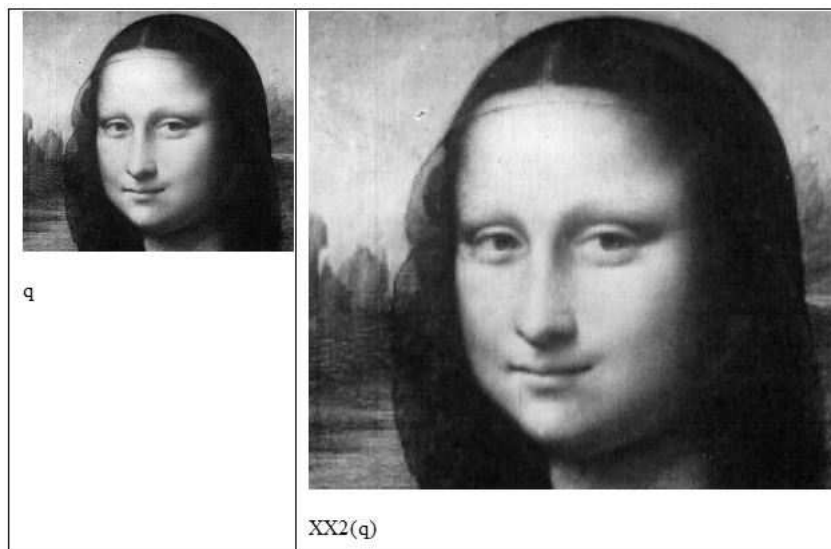


Рис. 3. Исходное цифровое изображение (q), увеличенное изображение $XX2(q)$. Детали изображения демонстрируют уменьшение эффекта пиксолидации при увеличении числа пикселей.

На рис. 4 представлена программа, реализующая в среде математического пакета MathCad алгоритм ресайзинга с использованием для интерполяции значений яркости непрерывного изображения кубического сплайна, построенного на значениях матричных элементов, которые описывают исходное изображение. На рис.5 представлены картинки исходного и увеличенного по этой программе в 1.2 раза по линейным размерам изображения.

Очевидно, что, используя ресайзинг, можно повысить разрешение цифрового изображения, однако реального увеличения его информативности при использовании подобных методов, применяемых к одному конкретному цифровому снимку, не происходит. С их помощью можно лишь изменить отдельные его характеристики, такие как насыщенность цветовой палитры, контрастность, выделение светлых или темных деталей и другие, которые помогут человеку лучше воспринимать заложенную в этом конкретном изображении информацию. Существуют также методы преобразования изображения, направленно искажающие снимок с целью решить ту или иную задачу.

Повышение информативности изображения означает раскрытие дополнительной информацию об объекте, которая не проявлялась в исходном его изображении. Очевидно, что новая информация может возникнуть на изображении, если только она туда внесена. Например, если исходное изображение искажено, размыто или имеет другие дефекты, маскирующие реальные характеристики объектов на нем, то для восстановления потерянной информации нужно иметь информацию каким образом эти дефекты возникали и как их устранить. Тогда, исправляя изображение, утраченная информация устанавливается. Это относится к методам повышения



информативности снимка путем реконструкции одного исходного изображения, например, путем восстановления фокусировки на расфокусированном изображении.

```

a1 := READBMP("mona.bmp" )      nn := min(rows(a1), cols(a1))
a := submatrix(a1, 0, nn - 1, 0, nn - 1)

Fit(a, k) :=
| n ← rows(a)
| for i ∈ 0..n - 1
|   | Xi ← i
|   | Yi ← i
| Mxy ← augment(sort(X), sort(Y))
| coef ← cspline(Mxy, a)
| fit(x, y) ← interp[coef, Mxy, a,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ]
| xlow ← Mxy0,0
| xhigh ← Mxyn-1,0
| ylow ← Mxy0,1
| yhigh ← Mxyn-1,1
| xn ← k·n
| yn ← k·n
| for i ∈ 0..xn - 1
|   | xindi ← xlow + i ·  $\frac{xhigh - xlow}{xn - 1}$ 
|   | for j ∈ 0..yn - 1
|   |   | yindj ← ylow + j ·  $\frac{yhigh - ylow}{yn - 1}$ 
|   |   | FITi,j ← fit(xindi, yindj)
| FIT

```

Рис. 4. Программа изменения размеров изображения с произвольным масштабом, составленная в среде математического пакета MathCad: a – матрица исходного цифрового изображения, k – коэффициент увеличения ($k > 1$) или уменьшения ($k < 1$) изображения. Результатом программы является матрица требуемого размера $FIT = Fit(a, k)$.

В качестве дополнительной информация, позволяющей улучшить качество и информативность изображения, также может быть использована известные характеристики некоторых конкретных объектов, представленных на исходном изображении с искажениями, которая позволит исправить их, а заодно и искажения других объектов, о которых не имелось какой-либо априорной дополнительной информации. Известные объекты при этом будут использоваться как опорные в процедуре восстановления качества исходного изображения.

Каким образом увеличить разрешение и информативность цифрового изображения? Проще всего, если такая возможность имеется, переснять изображение с использованием аппаратуры, обеспечивающей более высокого разрешения. При этом, если детектирующая матрица не обеспечивает требуемого разрешения, можно использовать оптическое увеличение и снимать

изображение по фрагментам, объединяя их потом в одно цифровое изображение большого размера, обладающее таким образом и высоким разрешением. Повышение информативности изображения будет обеспечено использованием оптимальных условий регистрации для всех фрагментов: освещенность объектов, правильная их фокусировка в плоскости изображения, оптимальные характеристики детектирующей матрицы.

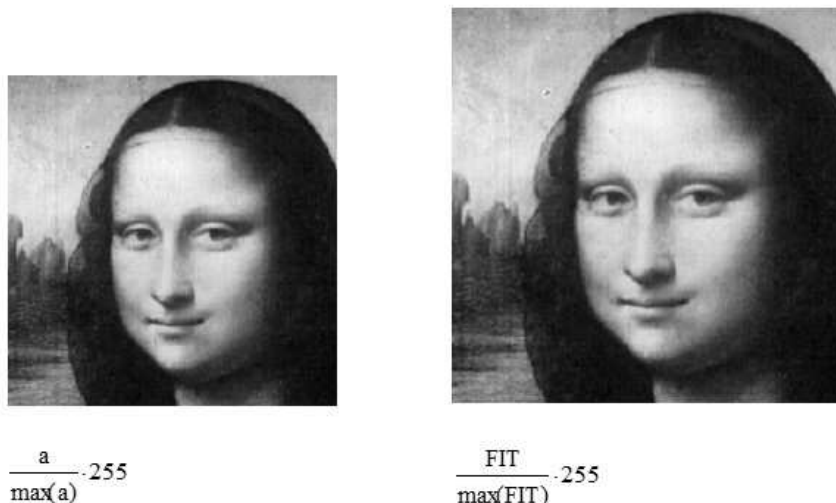


Рис. 5. Пример изменения масштаба цифрового изображения: a – матрица исходного изображения, FIT – матрица изображения увеличенного в $k=1.2$ раза.

Все перечисленные пути повышения качества изображения имеют одно общее свойство, они предполагают использование целопиксельных преобразований цифрового изображения. Однако существует группа методов обработки цифровых изображений, которые строятся на субпиксельном анализе. К таким методам, в частности, относится метод получения цифровых изображений высокого разрешения, называемый методом свехразрешения, который заключается в синтезе изображения высокого разрешения на основе группы цифровых изображений низкого разрешения того же объекта. С позиции получения свехразрешения, к методам субпиксельной обработки изображений могут быть отнесены и методы ресайзинга, использующие искусственный переход к системе более мелких пикселей при преобразовании изображения. При этом также возникает задача определения значений новых пикселей на основе значений пикселей исходного изображения. Однако в этом случае эта задача решается из других соображений и с использованием значений пикселей только одного исходного изображения.

Синтез изображений высокого разрешения. Проблеме свехразрешения цифровых изображений за последние годы посвящено большое число работ [2-5]. Отметим наиболее важные задачи, которые стоят на пути построения методов синтеза цифровых изображений высокого разрешения (более высокого, чем разрешение, которое обеспечивает его регистрации имеющимися матрицами детекторов).

Первая задача состоит в создании группы изображений низкого разрешения таких, чтобы в них содержалась вся необходимая для синтеза информация. Например, если два изображения отличаются друг от друга сдвигом на целое число пикселей, то они практически не несут новой информации, по сравнению друг с другом. Таким образом для синтеза необходимы цифровые изображения, имеющие относительный сдвиг на доли пикселя. В любом случае,



для получения эффективного результата в процессе синтеза одного изображения на основе группы изображений, необходимо достаточно точно знать значение субпиксельного сдвига каждого изображения относительно одного, взятого в качестве начального. Если цифровые изображения получены в различных условиях съёмки, то возникает также необходимость согласования таких свойств цифровых изображений, входящих в рассматриваемую группу, как сбалансированность по яркости и контрасту. Необходимо также устранить дефекты изображения, связанные с проявлением различных помех в канале регистрации. Созданная группа изображений должна быть полной для решения задачи синтеза изображения с требуемым разрешением.

Вторая задача – создание такого алгоритма синтеза изображения со сверхразрешением, который бы правильно учитывал характеристики изображений низкого разрешения, входящих в группу. Задача сверхразрешения обычно оказывается недоопределенной обратной интегральной задачей [6], требующей дополнительных условий для своего решения. Количество неизвестных значений пикселей новой синтезируемой матрицы оказывается больше, чем количество уравнений, связывающих их со значениями пикселей группы исходных матриц. В работе [7] с целью формирования полной системы уравнений был предложен способ регистрации изображения, при котором изображение ограничивалось специальным экраном равным по размеру регистрирующей матрицы (см. рис. 4). При регистрации первого цифрового изображения, матрица за экраном размещалась точно в апертуре экрана и все ее детекторы (пиксели) были полностью открыты для восприятия изображения. Последующие цифровые изображения регистрировались матрицей, сдвинутой относительно оптического изображения на заданную долю пиксела по вертикали и по горизонтали, располагая таким образом части пикселей вне границы оптического изображения, в тени экрана. Таким образом формировались граничные условия, позволяющие однозначно решать обратную задачу синтеза изображения высокого разрешения. Частным случаем такого граничного условия является нулевое: изображение, спроецированное на матрице детекторов не должно выходить за ее пределы для любого из положений матрицы, используемых при регистрации группы исходных цифровых изображений. Такое условие может быть создано при формировании изображения оптической системой съёмочной камеры. В этом случае для реализации синтеза изображения по полной группе изображений с фиксированными субпиксельными смещениями, т.е. по группе, обеспечивающей получение требуемого сверхразрешения, могут использоваться алгоритмы, описанные в работе [7].

Литература

1. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы / Новосибирск, 1983.
2. Sung Cheol Park, Super-resolution image reconstruction: a technical overview // Signal Processing Magazine, IEEE. - 2003. - 20, №3. - С.21–36.
3. Elad M., Feuer A. Super-resolution reconstruction of continuous image sequences // International Conference on Image Processing (ICIP 99). - 1999. - 3. - С.459–463.
4. Elad M., Feuer A. Super-resolution reconstruction of continuous image sequences: adaptive filtering approach // Image Processing, IEEE Transactions on. - 1999. - 8, №3. - С.387–395.
5. Блажевич С.В., Винтаев В.Н., Ушакова Н.Н. Синтез космического изображения с улучшенной разрешающей способностью на основе субпиксельного сканирования // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. - 2010. - 7, №2. - С.9–13.
6. Васьков С.Т., Ефремов В.М., Резник А.Л. Быстрая цифровая реконструкция сигналов и изображений по критерию минимума энергии // Автометрия. - 2003. - 39, №4. - С.13-20.



7. Блажевич С.В., Селютина Е.С. Повышение разрешения цифровых изображений с использованием субпиксельного сканирования // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физикаю. - 2014. - 5(176), Вып. 34. - С.186-190.

TO METHODS OF QUALITY INCREASE OF DIGITAL IMAGES

S.V. Blazhevich, E.S. Selyutina

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: blazh@bsu.edu.ru

Abstract. Subpixel digital image processing is discussed. It is proposed the modified algorithm of superresolution image synthesis on the base of image group of small resolution with the use of the superresolution principle.

Key words: digital image, resizing, superresolution.