На правах рукописи

ШУВАЛОВА ТАТЬЯНА ВИТАЛЬЕВНА

ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Белгород – 2008

Работа выполнена на кафедре высшей математики Самарского государственного архитектурно-строительного университета.

Научный руководитель:	*доктор физико-математических наук,* *профессор Репин Олег Александрович*
Официальные оппоненты:	*доктор физико-математических наук,* *профессор Килбас Анатолий Александрович* *кандидат физико-математических наук,* *доцент Ситник Сергей Михайлович*
Ведущая организация:	*научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации при Кабардино-Балкарском научном центре Российской академии наук*

Защита состоится 11 ноября 2008 г. в 15 часов 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.015.08 при Белгородском государственном университете, расположенном по адресу: 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белгородского государственного университета.

Автореферат разослан «_____» _______________ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
канд. физ.-мат. наук, доцент Прядиев В.Л.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В современной теории дифференциальных уравнений с частными производными важное место занимают исследования уравнений смешанного типа. Повышенный интерес к этому классу уравнений объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и их многочисленными приложениями в газовой динамике, в теории бесконечно-малых изгибаний поверхностей, в безмоментной теории оболочек, в магнитной гидродинамике и во многих других областях.

Изучение краевых задач для уравнений смешанного типа находится в центре внимания специалистов по дифференциальным уравнениям с частными производными благодаря глубокому математическому содержанию этих задач и наличию многочисленных приложений. Эта теория включает рассмотрение ряда трудных и интересных задач. К их числу относятся краевые задачи для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Такими задачами занимались А.М. Нахушев, М.М. Зайнулабидов, В.Ф. Волкодавов, В.В. Азовский, О.И. Маричев, А.М. Ежов, Н.И. Поливанов, Хе Кан Чер, С.И. Макаров, С.С. Исамухамедов, Ж. Орамов, М.С. Салахитдинов с учениками, К.Б. Сабитов, О.А. Репин и другие авторы.

В последние годы большое внимание уделяется задачам, в которых краевые условия представляют собой соотношения между значениями искомых функций, вычисленными в различных точках, лежащих на границе или внутри рассматриваемой области. Нелокальные задачи такого типа для различных классов дифференциальных уравнений изучали А.В. Бицадзе, А.А. Самарский, В.А. Ильин, Е.И. Моисеев, А.М. Нахушев, В.И. Жегалов, М.М. Салахитдинов, Т.Д. Джураев, М.М. Смирнов, А.П. Солдатов, А.Н. Зарубин, В.Ф. Волкодавов, В.А. Елеев, А.А. Килбас, С.А. Кумыкова, О.А. Репин, А.А. Андреев, их ученики и последователи.

Исследования диссертационной работы примыкают с одной стороны к направлениям, связанным с краевыми задачами для уравнений смешанного типа, а с другой - к направлению, связанному с теорией дробного интегродифференцирования.

Благодаря исследованиям А.М. Нахушева, в теорию краевых задач прочно вошли интегралы и производные дробного порядка. Первые работы по исследованию задач со смещением в краевых условиях содержали классические операторы Римана-Лиувилля. Естественным обобщением этих операторов стали операторы, введенные Э. Лавом (E.R. Love, Австралия), А. Мак-Брайдом (A.C. McBride, Англия), М. Сайго (M. Saigo, Япония).

При исследовании краевых задач для уравнений смешанного типа с необходимостью возникает проблема изучения свойств и законов композиции обобщенных операторов дробного интегродифференцирования с одинаковыми и различными началами, ядра которых содержат гипергеометрические функции Гаусса и Мейера.

В работах М.С. Салахитдинова и Б. Исломова, О.А. Репина и Л. Гайсиной найдены различные свойства и законы композиции операторов обобщенного интегродифференцирования дробного порядка, которые широко применяются при изучении краевых задач.

Исследованием нелокальных задач с обобщенными операторами в краевых условиях занимались многие математики. Д. Аманов, Б. Исломов, А. Хасанов, С.И. Макаров изучали задачи с нелокальными краевыми условиями, содержащими операторы, введенные Э. Лавом, для уравнения с двумя линиями вырождения в случае, когда порядок вырождения различен. О.А. Репин и его ученики исследовали задачи, характерной особенностью которых является наличие в краевых условиях операторов М. Сайго, с помощью которых связываются след искомого решения на характеристике и нормальная производная на линии вырождения уравнения.

Интерес к исследованиям в этом направлении поддерживается как потребностью в теоретическом обобщении классических задач для уравнений математической физики, так и прикладным значением.

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению новых нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа. Поставленные и исследованные в работе задачи характерны тем, что содержат в краевых условиях обобщенные операторы дробного интегродифференцирования в смысле М. Сайго с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре.

Цель работы. Основной целью работы является исследование вопросов однозначной разрешимости нелокальных задач со смещением для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения с операторами М. Сайго в краевых условиях.

Методика исследований. При доказательстве единственности и существования решений поставленных в работе задач широко используется аппарат специальных функций и преобразования Меллина, методы теории интегральных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, свойства обобщенных операторов дробного интегродифференцирования.

Научная новизна. Научная новизна диссертационной работы состоит в следующем:

во-первых, в работе изучены задачи, краевые условия которых содержат не классические операторы, а операторы более сложной структуры - операторы М. Сайго. Во-вторых, при получении функциональных соотношений между функциями $\tau_i(x)$ и $\nu_i(x)$, принесенных из областей гиперболичности, используется формула композиции обобщенных дробных производных в смысле М. Сайго. В-третьих, при доказательстве существования решения поставленных задач применен метод редукции краевых задач со смещением к вопросу разрешимости интегральных уравнений Фредгольма второго рода с регулярным ядром и непрерывной правой частью.

Практическая и теоретическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и методы исследования представляют научный интерес и могут быть использованы для дальнейшей разработки теории нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа, а также для решения прикладных задач, приводящихся к таким уравнения.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Изучение композиционных свойств для обобщенных дробных производных в смысле М. Сайго, полученных на основании аппарата специальных функций и преобразования Меллина.

2. Постановка и исследование новых нелокальных задач со смещением для уравнений смешанного типа с одним оператором М. Сайго в краевом условии и с двумя операторами в смысле М. Сайго в краевых условиях. При этом найдены условия на параметры операторов, содержащихся в краевых условиях, при которых справедливы теоремы единственности и существования решения этих задач.

3. Доказательство однозначной разрешимости исследуемых задач с помощью принципа экстремума и метода редукции этих задач к сингулярным интегральным уравнениям.

Апробация работы. Результаты исследования, приведенные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на международной научной конференции "Современные методы физико-математических наук" , посвященной 75-летию Орловского государственного университета (г. Орел, 2006 г.), на международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения" , посвященной 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа (г. Новосибирск, 2007 г.), на V школе молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики" , посвященной 50-летию Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова и

15-летию Адыгской (Черкесской) Международной академии наук (г. Нальчик - п. Эльбрус, 2007 г.), на 12-ой международной научной конференции имени академика М. Кравчука (г. Киев, 2008 г.), на международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы"(г. Стерлитамак, 2008 г.), на международной конференции по математической физике и ее приложениям (г. Самара, 2008 г.), на научно-исследовательском семинаре по дифференциальным уравнениям (Белгородский государственный университет, руководитель - д.ф.-м.н., проф. А.П. Солдатов).

Публикации. По теме диссертации опубликованы 9 работ, список которых приведен в конце автореферата. Из совместных работ [1] и [4] в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично диссертанту. О.А. Репину принадлежит постановка задач и идея доказательства, а автору диссертации точные формулировки и доказательства утверждений.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, включающих 12 параграфов, заключения и списка литературы. Объем диссертации - 129 страниц. Список использованных источников на 10 страницах содержит 87 наименований, при этом работы автора по теме диссертации приведены в конце списка. Нумерация формул организована по порядку, в соответствии с номером главы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приведен краткий обзор литературы по теме диссертации, показана актуальность темы исследований, излагается краткое содержание работы и сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

Первая глава диссертации, состоящая из трех параграфов, посвящена изучению свойств обобщенных операторов дробного интегродифференцирования и получению различных формул композиций для них.

В параграфе 1.1, носящем вспомогательный характер, приведены дробные интегралы и производные с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре:

$$I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x(x-t)^{\alpha-1}F(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\dfrac{t}{x})f(t)dt, \ (\alpha>0,\beta,\eta\in C); \\ \dfrac{d^n}{dx^n}I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f(x), \ (\alpha<0,\beta,\eta\in C, n=[-\alpha]+1), \end{cases} \tag{1}$$

введенные японским математиком М. Сайго, а также различные понятия и утверждения математического анализа и теории специальных функций, выписаны простейшие свойства и формулы преобразования Меллина.

В параграфе 1.2 установлены формулы композиций обобщенных операторов

$$(I_{0+}^{a,b,c} x^d (I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} t^l f)(t))(x) \ \text{ при } \ a<0.$$

Лемма 1.1. *Если некоторая функция имеет преобразование Меллина вида*

$$\varphi^*(s) = \frac{\Gamma(a_1-s)\Gamma(b_1-s)}{\Gamma(c_1-s)\Gamma(d_1-s)} f^*(s+l_1),$$

то эту функцию можно выразить через обобщенный оператор дробного интегродифференцирования:

$$\varphi(x) = x^{1-c_1}(I_{0+}^{d_1+c_1-a_1-b_1,a_1-c_1,b_1-c_1} t^{l_1+a_1-1} f(t))(x).$$

В параграфе 1.2 показано, что композиция операторов $(I_{0+}^{a,b,c} x^d (I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} t^l f)(t))(x)$ при $a<0$ имеет преобразование Меллина следующего вида:

$$\frac{\Gamma(b+1-s)\Gamma(c+1-s)\Gamma(1+\beta-d+b-s)\Gamma(1+\eta-d+b-s)}{\Gamma(1-s)\Gamma(a+b+c+1-s)\Gamma(1-d+b-s)\Gamma(1+\alpha+\beta+\eta-d+b-s)} f^*(s-b+d+l-\beta).$$

На основании леммы 1.1 получены 32 формулы для композиций операторов

$$(I_{0+}^{a,b,c} x^d (I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} t^l f)(t))(x).$$

Эти композиционные свойства представляют самостоятельный интерес, а также находят применение при решении задач с обобщенными операторами дробного интегродифференцирования в краевых условиях.

В параграфе 1.3 найдены преобразования Меллина некоторых интегродифференциальных операторов, что дает возможность воспользоваться ими при получении интегральных уравнений.

Во второй и третьей главах диссертационной работы исследованы нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа. В параграфе 2.1 рассматривается уравнение

$$xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y = 0, \qquad \frac{1}{2} < \alpha, \beta < 1 \tag{2}$$

в области D, ограниченной при $x>0$, $y>0$ кривой Жордана σ с концами в точках $A(1;0)$ и $B(0;1)$ и отрезком $OB(x=0, 0\le y\le 1)$; при $x>0$, $y<0$ характеристиками уравнения (2): $OC: x+y=0$, $AC: \sqrt{x}+\sqrt{-y}=1$.

Обозначим через $D_0 = D\cap\{x>0, y>0\}$ эллиптическую часть области D и через $D_1 = D\cap\{x>0, y<0\}$ гиперболическую часть области D.

Пусть $\theta_0(x) = \dfrac{x}{4} - i\dfrac{x}{4}$ - точка пересечения характеристик уравнения (2), выходящих из точек $(x;0)$, $0<x<1$, с характеристикой OC.

Для уравнения (2) поставлена и изучена краевая задача 1.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y)$ является решением уравнения (2) в области D;

2) $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_0 \cup D_1)$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{\sigma} = \varphi(s), 0 \leq s \leq l; \tag{3}$$

$$u(0;y) = \varphi_1(y), 0 \leq y \leq 1; \tag{4}$$

$$\left(I_{0+}^{\frac{1}{2}-\beta, \frac{1+\beta-\alpha}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2}} t^{\beta-1} u[\theta_0(t)]\right)(x) = Ax^{\frac{\alpha+\beta-3}{2}} a(x) u(x,0) + b(x),\ 0 < x < 1; \tag{5}$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет условию сопряжения

$$\lim_{y\to 0+0} y^{\beta} u_y(x,y) = \lim_{y\to 0-0} (-y)^{\beta} u_y(x,y),\ 0 < x < 1, \tag{6}$$

где l - длина кривой σ; $\varphi(s)$ и $\varphi_1(y)$ - заданные непрерывные функции; A - отрицательная действительная константа; $a(x) \in C[0,1]$, $a(x)$ - положительная, неубывающая на отрезке $[0;1]$ функция; $b(x) \in H^{\lambda}[0;1]$, $0 < \lambda \leq 1$.

Вторая глава диссертации, состоящая из пяти параграфов, посвящена доказательству однозначной разрешимости задачи 1.

В параграфе 2.2 рассматривается вспомогательная задача DN (Дирихле-Неймана).

Задача DN. Найти в области D_0 регулярное решение уравнения (2), непрерывное в замкнутой области $\overline{D_0}$, удовлетворяющее краевым условиям (3), (4) и

$$\lim_{y\to 0+0} y^{\beta} u_y(x,y) = \nu_1(x), 0 < x < 1,$$

где $\nu_1(x) \in C(0;1)$ и может обращаться в бесконечность на концах интервала $(0;1)$ порядка меньше $1-\beta$.

Определение 2.1. *Регулярным решением уравнения (2) в области D_0 будем называть функцию $u(x,y)$, имеющую непрерывные производные до второго порядка в области D_0 и удовлетворяющую уравнению (2) во всех точках области D_0.*

Будем рассматривать область Ω_0, ограниченную "нормальной кривой"$\sigma_0 : x+y=1$.

Определение 2.2. *Область Ω_0, ограниченную отрезком $[0;1]$ оси абсцисс, отрезком $[0;1]$ оси ординат и "нормальной кривой" , будем называть "нормальной областью".*

На основании известного решения задачи DN получено первое соотношение между функциями $\tau_1(x) = u(x,0)$ и $\nu_1(x)$, принесенное из области эллиптичности D_0 на отрезок

OA, которое имеет вид

$$\tau_1(x) = -kA_2\Gamma(2-2\beta)x^{1-\alpha}(I_{0+}^{2-2\beta,\beta-\alpha,\beta-1}\nu_1(t))(x)-$$
$$-kA_2x^{\beta-\alpha}\int\limits_x^1 \nu_1(t)t^{\alpha-1}(t-x)^{1-2\beta}F\Big(\alpha-\beta,1-\beta;2-2\beta;1-\frac{t}{x}\Big)dt-$$
$$-kA_1x^{1-\alpha-\beta}\int\limits_0^1 \nu_1(t)t^{\alpha-1}F\Big(\beta+\alpha-1,\beta;2\beta;1-\frac{t}{x}\Big)dt+ \tag{7}$$
$$+kA_1\int\limits_0^1 \nu_1(t)t^{\alpha-1}F(\beta+\alpha-1,\beta;2\beta;1-tx)dt+$$
$$+kA_2\int\limits_0^1 \nu_1(t)t^{\alpha-1}(1-tx)^{1-2\beta}F(\alpha-\beta,1-\beta;2-2\beta;1-tx)dt+f(x),$$

где

$$f(x) = k(1-\alpha)x^{1-\alpha}\int\limits_0^1 \varphi_1(t)t^{\beta-1}\left[\frac{1}{(x+t)^{1+\beta-\alpha}}-\frac{1}{(1+tx)^{1+\beta-\alpha}}\right]dt+f_0(x),$$

$$f_0(x) = (1+\beta-\alpha)kx^{1-\alpha}\int\limits_0^1 \varphi[\sqrt{2}(1-t)](1-t)^{\beta-1}(1+x+2\sqrt{xt})^{\alpha-\beta-2}\times$$
$$\times F\Big(\beta-\alpha+2,\frac{3}{2}-\alpha;3-2\alpha;\frac{4\sqrt{tx}}{2\sqrt{tx}+x+1}\Big)dt,$$
$$A_1=\frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2-\alpha-\beta)}, A_2=\frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta)},$$
$$k=\frac{2^{\beta-\alpha-1}\Gamma\Big(\frac{3}{2}-\alpha\Big)\Gamma\Big(\beta-\frac{1}{2}\Big)\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\pi\Gamma(3-2\alpha)\Gamma(2\beta-1)}.$$

Лемма 2.1. *Если решение $u(x,y)$ уравнения (2) достигает максимума (минимума) в точке $(x_0;0)$, $0<x_0<1$, то $\lim\limits_{y\to 0+0} y^\beta u_y(x_0,y)<0$ ($\lim\limits_{y\to 0+0} y^\beta u_y(x_0,y)>0$) при условии, что этот предел существует.*

В параграфе 2.3 уравнение (2) исследовано в гиперболической области D_1. Этот параграф посвящен доказательству единственности решения задачи 1.

В качестве вспомогательной задачи в области D_1 для уравнения (2) рассматривается задача Коши с данными:

$$u(x,0)=\tau_2(x), x\in[0;1], \quad \lim_{y\to 0-0}(-y)^\beta u_y(x,y)=\nu_2(x), x\in(0;1).$$

На основании решения задачи Коши и краевого условия (5) получено второе функциональное соотношение между функциями $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесенное из области гиперболичности на отрезок OA :

$$\tau_2(x) = \frac{k_2}{Aa(x)-k_1} x^{1-\alpha} (I_{0+}^{2-2\beta,\beta-\alpha,\beta-1} \nu_2(t))(x) - \frac{1}{Aa(x)-k_1} x^{\frac{3-\alpha-\beta}{2}} b(x), \tag{8}$$

где

$$k_1 = \frac{2^{\alpha-\beta}\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma\Big(\beta-\frac{1}{2}\Big)},\ k_2 = -\frac{2^{\alpha+3\beta-3}\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma\Big(\frac{3}{2}-\beta\Big)}.$$

Важно отметить, что при получении этого функционального соотношения использовалась формула композиции для обобщенных дробных производных

$$(I_{0+}^{a,b,c} x^{b+\beta} (I_{0+}^{\alpha,\beta,a+b+c+\beta} t^l f)(t))(x) = x^\beta I_{0+}^{a+\alpha,b+\beta,c+\beta} t^{l+b} f(t)$$

при $a < 0$, доказанная в параграфе 1.2.

В параграфе 2.3 приводятся доказательства следующих утверждений.

Лемма 2.2. *Если решение $u(x,y)$ уравнения (2) такое, что $u(x,0) = \tau_2(x)$ достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке x_0, $0 < x_0 < 1$ (при этом $b(x) \equiv 0$), то $\nu_2(x_0) > 0$ ($\nu_2(x_0) < 0$).*

Теорема 2.1. *Если решение задачи 1 существует, то оно единственно.*

Доказательство теоремы 2.1 непосредственно следует из лемм 2.1 и 2.2 и условия сопряжения (6).

В параграфе 2.4 доказано существование решения задачи 1 в случае, когда кривая σ совпадает с "нормальной кривой". Исключая $\tau(x) = \tau_1(x) = \tau_2(x)$ из (7) и (8), применяя преобразование Меллина и методику, разработанную О.И. Маричевым, можно получить интегральное уравнение

$$p_1\nu(x) + p_2 \int_0^1 \left(\frac{x}{t}\right)^{\beta-\alpha} \Big[\frac{1}{t-x} - \frac{t^{\beta-\alpha}}{1-tx}\Big] \nu(t)dt = \frac{1}{k}F(x), \tag{9}$$

где $\nu(x) = \nu_1(x) = \nu_2(x)$, $p_1 = \dfrac{k^*}{k} + 2A_2\Gamma(2-2\beta)\cos^2\pi\beta$, $p_2 = \dfrac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta)}$,

$$F(x) = I_{0+}^{2\beta-2,\alpha-\beta,1-\beta} x^{\alpha-1}(f(x) - b^*(x)),\quad k^* = \frac{k_2}{Aa(x)-k_1},\quad b^*(x) = -\frac{x^{\frac{3-\alpha-\beta}{2}} b(x)}{Aa(x)-k_1}.$$

Здесь и в дальнейшем для уменьшения громоздкости вычислений будем считать, что $a(x) = c_1 = const$, причем

$$Aa(x) - k_1 = Ac_1 - k_1 \neq 0, \tag{10}$$

а также

$$\varphi_1(x) = x^\delta\varphi_0(x),\ \delta \geq 1-\alpha,\ \ \varphi_0(x) \in C[0;1],\ b^*(x),\ f(x) \in H^\lambda[0;1],\ \alpha < \beta. \tag{11}$$

Лемма 2.3. *Пусть* $0 < -\alpha < \lambda \leq 1$, $\beta < min(0, \eta + 1)$. *Если* $\varphi(x) \in H^{\lambda}[0; 1]$, *то* $(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x) \in H^{min(\lambda+\alpha,-\beta)}[0; 1]$.

Опираясь на лемму 2.3 и условие (11), можно сделать вывод о том, что функция $F(x)$ удовлетворяет условию Гельдера на интервале $(0; 1)$, при $x = 0$ обращается в ноль порядка $\beta - \alpha$ и при $x \to 1$ ограничена.

Методом регуляризации Карлемана-Векуа уравнение (9) редуцируется к уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи 1.

Основным результатом второй главы диссертации является следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть* $\varphi(s)$, $\varphi_1(y)$, $b(x)$ *- заданные достаточно гладкие функции, причем справедливы условия (10) и (11),* A *- отрицательная константа,* $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$. *Тогда уравнение (9) имеет единственное решение, а задача 1 для уравнения (2) однозначно разрешима.*

В параграфе 2.5 рассмотрен частный случай задачи 1 для уравнения (2) при $\alpha = \beta$.

В третьей главе, состоящей из четырех параграфов, рассматривается уравнение

$$xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha(x, y)u_x + \beta(x, y)u_y = 0, \quad \frac{1}{2} < \alpha(x, y), \beta(x, y) < 1 \qquad (12)$$

в области G, ограниченной при $x > 0$, $y > 0$ кривой Жордана σ с концами в точках $A(1; 0)$ и $B(0; 1)$; при $x > 0$, $y < 0$ характеристиками уравнения (12): $OC : x + y = 0$, $AC : \sqrt{x}+\sqrt{-y} = 1$; при $x < 0$, $y > 0$ характеристиками: OD: $x+y = 0$, $BD : \sqrt{-x}+\sqrt{y} = 1$.

Обозначим через $G_0 = G \cap \{x > 0, y > 0\}$ эллиптическую часть области G и через $G_1 = G \cap \{x > 0, y < 0\}$, $G_2 = G \cap \{x < 0, y > 0\}$ гиперболические части области G, через Ω_0 - "нормальную область" , ограниченную отрезками OA, OB и прямой $x + y = 1$.

Предполагается, что функции $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ кусочнопостоянные: $\alpha(x, y) = \alpha_i$, $\beta(x, y) = \beta_i$, $(x, y) \in G_i$, $i = 0, 1, 2$, $\frac{1}{2} < \alpha_i$, $\beta_i < 1$, причем $\alpha_1 \leq \beta_1$, $\beta_2 \leq \alpha_2$.

Пусть $\theta_1(x) = \frac{x}{4} - i\frac{x}{4}$ - точка пересечения характеристик уравнения (12), выходящих из точек $(x; 0)$, $0 < x < 1$, с характеристикой OC; $\theta_2(y) = \frac{y}{4} - i\frac{y}{4}$ - точка пересечения характеристик, выходящих из точек $(0; y)$, $0 < y < 1$, с характеристикой OD.

В параграфе 3.1 для уравнения (12) поставлена задача 2.

Задача 2. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x, y)$ является решением уравнения (12) в области G;

2) $u(x, y) \in C(\overline{G}) \cap C^1(G) \cap C^2(G_0 \cup G_1 \cup G_2)$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_\sigma = \varphi(s), 0 \le s \le l; \tag{13}$$

$$\left(I_{0+}^{\frac{1}{2}-\beta_1,\frac{1+\beta_1-\alpha_1}{2},\frac{\alpha_1+\beta_1-1}{2}} t^{\beta_1-1}u[\theta_1(t)]\right)(x) = Ax^{\frac{\alpha_1+\beta_1-3}{2}}a(x)u(x,0)+b(x), 0<x<1; \tag{14}$$

$$\left(I_{0+}^{\frac{1}{2}-\alpha_2,\frac{1+\alpha_2-\beta_2}{2},\frac{\alpha_2+\beta_2-1}{2}} t^{\alpha_2-1}u[\theta_2(t)]\right)(y) = By^{\frac{\alpha_2+\beta_2-3}{2}}c(y)u(0,y)+d(y), 0<y<1; \tag{15}$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет условиям сопряжения:

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y(x,y) = \lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_1}u_y(x,y), 0<x<1; \tag{16}$$

$$\lim_{x\to+0} x^{\alpha_0}u_x(x,y) = \lim_{x\to-0}(-x)^{\alpha_2}u_x(x,y), 0<y<1; \tag{17}$$

где функции $y^{\beta_0}u_y(x,y)|_{y=+0}$ и $x^{\alpha_0}u_x(x,y)|_{x=+0}$ могут обращаться в бесконечность порядка не выше $1-\beta_0$ и $1-\alpha_0$ соответственно на концах интервала $(0;1)$; l - длина кривой σ; $\varphi(s)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(y)$, $d(y)$ - заданные непрерывные функции, причем $a(x)$ и $c(y)$ - положительные, неубывающие на отрезке $[0;1]$ функции, $b(x), d(y) \in H^\lambda[0;1]$, $0<\lambda\le 1$; A и B - отрицательные константы.

В параграфе 3.2 рассматривается вспомогательная задача N (Неймана).

Задача N. Найти в области G_0 регулярное решение уравнения (12), непрерывное в замкнутой области $\overline{G_0}$ и удовлетворяющее краевым условиям (13) и

$$\lim_{y\to 0} y^{\beta_0}u_y(x,y) = \nu_1(x), 0<x<1;$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha_0}u_x(x,y) = \nu_2(y), 0<y<1;$$

где $\nu_1(t)$ и $\nu_2(t)$ - непрерывные в интервале $(0;1)$ функции, которые могут обращаться в бесконечность на концах интервала $(0;1)$ порядка меньше $1-\beta_0$ и $1-\alpha_0$ соответственно.

В параграфе 3.2 получены два функциональных соотношения между функциями $\nu_i(t)$ и $\tau_i(t)$, $i=1,2$ $(\tau_1(x)=u(x,0),\ \tau_2(y)=u(0,y))$, принесенные из области эллиптичности на отрезки OA и OB соответственно. Также в этом параграфе сформулированы две леммы о знаке функций $\nu_1(x)$ и $\nu_2(y)$ в области эллиптичности на линиях вырождения.

Лемма 3.1. *Если решение $u(x,y)$ уравнения (12) в области G_0 достигает максимума (минимума) в точке $(x_0;0)$, $0<x_0<1$, то $\lim\limits_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y(x_0,y)<0$ $\left(\lim\limits_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y(x_0,y)>0\right)$ при условии, что этот предел существует.*

Лемма 3.2. *Если решение $u(x,y)$ уравнения (12) в области G_0 достигает максимума (минимума) в точке $(0;y_0)$, $0<y_0<1$, то $\lim\limits_{x\to+0} x^{\alpha_0}u_x(x,y_0)<0$ $\left(\lim\limits_{x\to+0} x^{\alpha_0}u_x(x,y_0)>0\right)$ при условии, что этот предел существует.*

Параграф 3.3 посвящен исследованию уравнения (12) в гиперболических областях G_1 и G_2. На основании решения задачи Коши в области G_1 с условиями:

$$u(x,0)=\tau_1(x), 0\le x\le 1; \quad \lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_1}u_y(x,y)=\nu_1(x), 0<x<1$$

и в области G_2 с условиями:

$$u(0,y)=\tau_2(y), 0\le y\le 1; \quad \lim_{x\to -0}(-x)^{\alpha_2}u_x(x,y)=\nu_2(y), 0<y<1$$

получены еще два функциональных соотношения между функциями $\tau_i(t)$ и $\nu_i(t)$, $i=1,2$, принесенные из областей гиперболичности на отрезки OA и OB соответственно.

Доказаны следующие утверждения.

Лемма 3.3. *Если* $u(x,y)$ *- решение уравнения (12) в области* G_1 *такое, что* $u(x,0)=\tau_1(x)$ *достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке* x_0, $0<x_0<1$ *(при этом* $b(x)\equiv 0$*), то* $\nu_1(x_0)>0$ $(\nu_1(x_0)<0)$.

Лемма 3.4. *Если* $u(x,y)$ *- решение уравнения (12) в области* G_2 *такое, что* $u(0,y)=\tau_2(y)$ *достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке* y_0, $0<y_0<1$ *(при этом* $d(y)\equiv 0$*), то* $\nu_2(y_0)>0$ $(\nu_2(y_0)<0)$.

Теорема 3.1. *Если решение задачи 2 существует, то оно единственно.*

Доказательство теоремы 3.1 непосредственно следует из лемм 3.1, 3.3 и условия сопряжения (16), из лемм 3.2, 3.4 и условия (17).

В параграфе 3.4 приводится доказательство существования решения задачи 2 в случае, когда "нормальная кривая" $x+y=1$ содержится в эллиптической части области G. Это доказательство основано на следующем. С помощью преобразования Меллина вопрос разрешимости задачи 2 сводится к вопросу разрешимости системы двух сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\nu_1(x)$ и $\nu_2(y)$:

$$\begin{cases} \nu_1(x)+P\int\limits_0^1\left(\dfrac{t}{x}\right)^{1-\beta_0}\Big[\dfrac{1}{t-x}-\dfrac{t^{\alpha_0+\beta_0-2}}{1-tx}\Big]\nu_1(t)dt+ \\ +Px^{\beta_0-1}\int\limits_0^1\nu_2(t)\Big[t^{-\alpha_0}F\Big(\alpha_0,1;\beta_0;-\dfrac{x}{t}\Big)-t^{\beta_0-1}F(\alpha_0,1;\beta_0;-xt)\Big]dt=\overline{P}F_1(x), \\ \nu_2(y)+Q\int\limits_0^1\left(\dfrac{t}{y}\right)^{1-\alpha_0}\Big[\dfrac{1}{t-y}-\dfrac{t^{\alpha_0+\beta_0-2}}{1-ty}\Big]\nu_2(t)dt+ \\ +Qy^{\alpha_0-1}\int\limits_0^1\nu_1(t)\Big[t^{-\beta_0}F\Big(\beta_0,1;\alpha_0;-\dfrac{y}{t}\Big)-t^{\alpha_0-1}F(\beta_0,1;\alpha_0;-yt)\Big]dt=\overline{Q}F_2(y), \end{cases} \tag{18}$$

где $F_1(x) = (I_{0+}^{2\beta_0-2,\alpha_0-\beta_0,1-\beta_0}[t^{\alpha_0-1}(f_1(t) - b^*(t)])(x)$,

$F_2(y) = (I_{0+}^{2\alpha_0-2,\beta_0-\alpha_0,1-\alpha_0}[t^{\beta_0-1}(f_2(t) - d^*(t)])(y)$,

$$f_1(x) = k(\alpha_0+\beta_0-1)(x-1)\int\limits_0^1 \varphi[\sqrt{2}t]t^{\beta_0-1}(1-t)^{\alpha_0-1}[1+x+2\sqrt{(1-t)x}]^{-\alpha_0-\beta_0}\times$$

$$\times F\Big(\alpha_0+\beta_0, \alpha_0-\frac{1}{2}; 2\alpha_0-1; \frac{4\sqrt{(1-t)x}}{1+x+2\sqrt{(1-t)x}}\Big)dt,\ b^*(x) = -\frac{x^{\frac{3-\alpha_0-\beta 0}{2}}b(x)}{Aa(x)-k_1},$$

$$f_2(y) = k(\alpha_0+\beta_0-1)(y-1)\int\limits_0^1 \varphi[\sqrt{2}(1-t)]t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\beta_0-1}[1+y+2\sqrt{(1-t)y}]^{-\alpha_0-\beta_0}\times$$

$$\times F\Big(\alpha_0+\beta_0, \beta_0-\frac{1}{2}; 2\beta_0-1; \frac{4\sqrt{(1-t)y}}{1+y+2\sqrt{(1-t)y}}\Big)dt,\ d^*(y) = -\frac{y^{\frac{3-\alpha_0-\beta 0}{2}}d(y)}{Bc(y)-\overline{k_1}},$$

k, k_1, $\overline{k_1}$, P, $\overline{P}$, Q, $\overline{Q}$ - известные постоянные.

Регуляризуя каждое уравнение этой системы методом Карлемана- Векуа, можно получить систему уравнений Фредгольма второго рода с регулярным ядром и непрерывной правой частью, безусловная разрешимость которой следует из единственности решения задачи 2.

Основным результатом третьей главы диссертации является утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть* $\varphi(s)$, $b(x)$, $d(y)$ *- заданные достаточно гладкие функции,* $Aa(x)-k_1 = Ac_1-k_1 \neq 0$, $Bc(y)-\overline{k_1} = Bc_2-\overline{k_1} \neq 0$, $\varphi(t) = t^\delta\varphi_0(t)$, $\delta > 1-\alpha_0$, $\delta > 1-\beta_0$, $\varphi_0(t) \in C[0;1]$, $f_1(x)$, $b^*(x)$, $f_2(y)$, $d^*(y) \in H^\lambda[0;1]$, A, B *- отрицательные действительные константы. Тогда система уравнений (18) имеет единственное решение, а задача 2 для уравнения (12) однозначно разрешима.*

При доказательстве существования и единственности решений краевых задач 1 и 2 для уравнений (2) и (12) соответственно существенно использован аппарат обобщенного интегродифференцирования, изложенный в первой главе, а также методы теории интегральных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными.

Заключение. Выполненные в настоящей диссертационной работе исследования позволяют сформулировать следующие достигнутые результаты:

1. С помощью аппарата специальных функций и преобразования Меллина получены важные формулы композиций обобщенных дробных производных в смысле М. Сайго. Даны приложения композиционных свойств этих операторов при решении краевых задач для уравнений смешанного типа.

2. Для уравнений смешанного типа поставлены и исследованы две новые задачи со смещением с обобщенной дробной производной в краевом условии и с двумя обобщенными

дробными произодными в смысле М. Сайго в краевых условиях. Доказана однозначная разрешимость этих задач с помощью принципа экстремума и метода редукции, позволяющего свести эти задачи к сингулярным интегральным уравнениям.

Методы и результаты работы могут быть использованы в теоретических исследованиях в таких математических дисциплинах, как дробное исчисление, дифференциальные и интегральные уравнения, при решение краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, а также при исследовании конкретных задач математической физики.

Автор диссертации выражает глубокую благодарность своему научному руководителю - профессору, доктору физико-математических наук О.А. Репину за постановку задач, ценные и полезные советы в ходе исследования, а также за поддержку и постоянное внимание к этой работе.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Научные статьи в изданиях перечня, рекомендуемого ВАК

1. Репин О.А. Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. / О.А. Репин, Т.В. Шувалова // Дифференц. уравнения. - 2008. - Т. 44. - №6. - С. 848-851.

2. Шувалова Т.В. Некоторые композиционные свойства обобщенных операторов дробного дифференцирования. / Т.В. Шувалова // Вестник Самарского государственного технического университета. Выпуск 42, Серия "Физико-математические науки". - 2006. - С. 45-48.

3. Шувалова Т.В. Доказательство формул обращения некоторых интегродифференциальных операторов с помощью преобразования Меллина. / Т.В. Шувалова // Вестник Самарского государственного технического университета. Выпуск 43, Серия "Физико-математические науки". - 2006. - С. 15-19.

Научные статьи в других изданиях

4. Репин О.А. О единственности решения нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. / О.А. Репин, Т.В. Шувалова //Труды международной конференции "Современные методы физико-математических наук". - Орел, 2006. - Т. 1. - С. 105-110.

5. Шувалова Т.В. Об однозначной разрешимости нелокальной задачи для уравнения смешанного типа с оператором М. Сайго в краевом условии. / Т.В. Шувалова // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения. Тезисы докладов международной конференции. - Новосибирск, 2007. - С. 382-383.

6. Шувалова Т.В. Об однозначной разрешимости нелокальной задачи для уравнения смешанного типа. / Т.В. Шувалова // Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики: Материалы V школы молодых ученых. - Нальчик-Эльбрус, 2007. - С. 149-151.

7. Шувалова Т.В. Об одном эффективном методе получения сингулярного интегрального уранения. / Т.В. Шувалова // Материалы 12-ой международной научной конференции имени академика М. Кравчука. - Киев, 2008. - С. 869.

8. Шувалова Т.В. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа. / Т.В. Шувалова // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Труды международной научной конференции. - Стерлитамак, 2008. - Т. 2. - С. 189-194.

9. Шувалова Т.В. К вопросу о единственности решения задачи со смещением для уравнения смешанного типа. / Т.В. Шувалова // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. - 2008. - Т. 10. - №1. - С. 87-91.