На правах рукописи

Манаенкова Татьяна Алексеевна

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы

и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Белгород – 2013

Работа выполнена в Белгородском государственном национальном исследовательском университете

Научный руководитель:

Глушак Александр Васильевич, доктор
физико-математических наук, профессор,
Белгородский государственный национальный
исследовательский университет,
профессор кафедры математического анализа

Официальные оппоненты:

Асхабов Султан Нажмудинович, доктор
физико-математических наук, профессор,
Чеченский государственный университет,
декан факультета математики
и компьютерных технологий

Ситник Сергей Михайлович, кандидат
физико-математических наук, доцент,
Воронежский институт МВД,
доцент кафедры высшей математики

Ведущая организация:

Южный федеральный университет

Защита состоится 10 декабря 2013 г. в 16.00 на заседании диссертационого совета Д 212.015.08 в Белгородском государственном национальном исследовательском университете по адресу: 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14, БелГУ, корп. 1, ауд. 407.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Белгородского государственного национального исследовательского университета.

Автореферат разослан 1 ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного
совета Д 212.015.08 Гриценко С.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Развитие области математического анализа, называемой дробным исчислением и посвященной исследованию и применению производных и интегралов произвольного (вещественного или комплексного) порядка, обусловлено проникновением и взаимосвязями с самыми разнообразными вопросами теории функций, интегральных и дифференциальных уравнений и др.

История развития дробного интегродифференцирования знает немало работ, в которых в разное время переоткрывались уже известные результаты, иногда теми же самыми средствами, что и у предшественников, иногда на основе других методов. Важным шагом в развитии дробного интегродифференцирования стала книга, написанная Самко С.Г., Килбасом А.А. и Маричевым О.И. "Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения", которая объединила разные исследования в направлении по изучению дробных производных и интегралов.

В последние годы возрос интерес к исследованию так называемых дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция содержится под знаком производной дробного порядка. Это обусловлено как развитием самой теории дробного интегрирования и дифференцирования, так и приложениями таких конструкций в различных областях науки: в физике, механике, химии, инженерии и других областях науки и естествознания. В связи с этим мы приведем список авторов монографий и обзорных статей по этой тематике: Oldham K.B., Spanier J.; Miller K.S., Ross B.; Carpintery A., Mainardi F.; Gorenflo R., Mainardi F.; Podlubny I.; Hilfer R.; Metzler R., Klafter J.; Нахушев А.М.; Псху А.В.; Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. и др.

Дифференциальные операторы дробного порядка могут иметь различные формы. Обзор методов и результатов в теории дифференциальных уравнений дробного порядка был дан в двух обзорных статьях Килбаса А.А. и его расширенный вариант представлен в монографии Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equations. Math. Studies. V. 204. Elsevier. 2006.

Среди одномерных линейных дифференциальных уравнений наиболее изучены уравнения, содержащие дробные производные Римана-Лиувилля. В восьмидесятых годах двадцатого века началось исследование одномерных дифференциальных уравнений с модифицированными дробными производными Римана-Лиувилля. Такая конструкция была введена итальянским механиком Капуто М. в 1967 году, и названа дробной производной Капуто. Но правильнее было бы называть ее дробной производной Герасимова-Капуто, так как в 1948 году советский механик Герасимов А.Н.

в одной из своих работ ввел частную производную аналогичного вида.

Одновременно началось изучение дифференциальных уравнений с частными дробными производными. Большинство исследований в области обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка было посвящено теоремам существования и единственности решений дифференциальных уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля. В работах многих ученых изучалась задача типа Коши. Эти работы базировались на сведении рассматриваемой задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода с последующим применением известных методов для исследования этого уравнения: принцип неподвижной точки, метод последовательных приближений и др. Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и начально-краевых задач применяется также метод интегральных преобразований.

Одним из современных направлений развития теории дифференциальных уравнений является изучение дифференциальных уравнений, решения которых являются функциями со значениями в произвольном банаховом пространстве. Изучение дифференциальных уравнений первого и второго порядков в банаховом пространстве (подход, связанный с теорией полугрупп и теорией косинус-функций) начато в работах Хилле Э. и Иосиды К. в 1948 г. В настоящее время имеются монографии Данфорда Н. и Шварца Дж., Иосиды К., Крейна С.Г., Като Т., Голдстейна Дж., Хилле Э. и Филлипса Р., Фатторини Г. и некоторые другие, излагающие теорию и применение линейных полугрупп и косинус-функций, а также обширные обзоры Крейна С.Г. и Хазана М.И., Васильева В.В., Крейна С.Г. и Пискарева С.И. научных публикаций, начиная с 1968 г. Основные вопросы, подвергавшиеся исследованию, — это корректность задачи Коши (существование решения, его единственность и непрерывная зависимость от начальных условий), устойчивость по отношению к возмущениям операторов, поведение при $t \to \infty$ и т.д.

В последние годы рядом авторов было начато исследование абстрактных дифференциальных уравнений дробного порядка. Среди них Кочубей А.Н., Костин В.А., Бажлекова Е., Глушак А.В., Clement Ph., Gripenberg G., Londen S.-O. и др.

Дробное исчисление функций одной и многих переменных, и в том числе исследование абстрактных дифференциальных уравнений дробного порядка, продолжает интенсивно развиваться и в настоящее время, свидетельством чему служит как большой поток публикаций, так и международные конференции, специально посвященные вопросам дробного исчисления.

Цель работы. Исследование разрешимости задачи типа Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля; нахождение операторной функции Коши, позволяющей решать задачу типа Коши для неоднородного уравнения; установление однозначной разрешимости начальных задач для дифференциальных уравнений с дробными производными Адамара; исследование разрешимости ряда обратных задач.

Методы исследования. Используются методы функционального анализа и теории операторов в банаховом пространстве, метод сведения к интегральным уравнениям, а также метод последовательного приближения.

Научная новизна. Результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Среди наиболее важных отметим следующие:
1) установление критерия равномерной корректности задачи типа Коши для дифференциального уравнения, содержащего дробную производную Римана-Лиувилля;
2) получение достаточных условий существования аналитического разрешающего оператора этой задачи;
3) нахождение операторной функции Коши, позволяющей определить решение неоднородной задачи;
4) установление критерия равномерной корректности задачи типа Коши для дифференциального уравнения, содержащего дробные производные Адамара;
5) нахождение достаточных условий разрешимости обратной коэффициентной задачи для дифференциального уравнения, содержащего дробные производные Адамара;
6) доказательство равномерной корректности задачи типа Коши с двумя дробными производными Адамара.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер, в ней приводятся условия разрешимости некоторых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. Полученные результаты могут быть использованы при установлении корректной разрешимости конкретных уравнений математической физики.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих международных и российских конференциях:

1. XVI Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". V Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Ростов-на-Дону. 27 мая – 3 июня 2008.

2. Международный Российско-Абхазский симпозиум "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". VII Школа молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". Нальчик. Эльбрус. 17 – 22 мая 2009.

3. I Всероссийская конференция молодых ученых "Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики". Кабардино-Балкарская республика пос. Терскол. 6 – 9 декабря 2010.

4. Международная конференция "Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел". Белгород. 17 – 21 октября 2011.

5. Международная молодежная конференция "Прикладная математика, управление и информатика". Белгород. 3 – 5 октября 2012.

6. Международная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения". Белгород. 26 – 31 мая 2013.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [13]. Работы [8], [11] и [12] опубликованы в изданиях, соответствующих списку ВАК РФ.

В совместных работах с научным руководителем Глушаком А.В. руководителю принадлежит постановка задач и руководство работой. Автору диссертации принадлежит выбор методик исследования и их реализация.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из трех глав, разбитых на одинадцать пунктов, и списка литературы, включающего 66 источников. Общий объём диссертации 99 страниц.

Краткое содержание работы

П.п. 1 – 5 главы 1 носят вспомогательный характер, в них приводятся исторические и библиографические сведения о предмете исследования.

П. 6 главы 1 содержит обзор полученных в диссертации результатов.

В пункте 7 главы 2 в банаховом пространстве X при $\alpha > 0$ и $n = [\alpha]+1$ рассматривается задача типа Коши

$$D^{\alpha}_{0+}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0+} D^{\alpha-n}_{0+}u(t) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+} D^{\alpha-k}_{0+}u(t) = 0, \quad k = 1, ..., n-1. \tag{2}$$

где $D^{\alpha}_{0+}u(t) = \dfrac{d^n}{dt^n}\left(I^{n-\alpha}_{0+}u\right)(t)$ — левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$, $I^{\beta}_{0+}u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\beta-1}u(s)\,ds$ — левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\beta > 0$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, $u_0 \in D(A)$, A — линейный, замкнутый, плотно определенный оператор.

Определение 1. *Решением задачи* (1), (2) *называется функция* $u(t)$ *такая, что имеют место включения* $u(t) \in C(\mathbb{R}_+, D(A))$, $I^{k-\alpha}_{0+}u(t) \in C^k(\mathbb{R}_+, X)$ *для* $k = 0, 1, ..., n-1$, $I^{n-\alpha}_{0+}u(t) \in C^n(\overline{\mathbb{R}}_+, X)$, *и удовлетворяющая* (1), (2).

Определение 2. *Задача* (1), (2) *называется равномерно корректной, если при любом* $u_0 \in D(A)$, *существует единственное решение* $u(t; u_0)$

задачи (1), (2) *и если* $u_{0,m} \in D(A)$, $u_{0,m} \to 0$ *влечет* $u(t; u_{0,m}) \to 0$ *равномерно по* t *на любом компактном интервале из* $(0, \infty)$.

Целью этого раздела является установление критерия равномерной корректности данной задачи типа Коши.

Пусть $\mathcal{B}(X)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в X.

Определение 3. *Операторная функция* $T_\alpha(t) \in \mathcal{B}(X)$ *называется разрешающим оператором для задачи* (1), (2), *если выполнены следующие условия:*

(i) $T_\alpha(t)$ *сильно непрерывна при* $t > 0$ *и* $D_{0+}^{\alpha-n} T_\alpha(0) = I$,

(ii) $T_\alpha(t)$ *коммутирует с* A, *то есть,* $T_\alpha(t) D(A) \subset D(A)$ *и* $A T_\alpha(t) u_0 = T_\alpha(t) A u_0$ *для любого* $u_0 \in D(A)$ *и* $t > 0$,

(iii) $T_\alpha(t) u_0$ *является решением задачи* (1), (2) *для любого* $u_0 \in D(A)$.

Определение 4. *Будем говорить, что оператор* A *принадлежит классу* $\mathcal{G}^\alpha(M, \omega)$, *если задача* (1), (2) *имеет разрешающий оператор* $T_\alpha(t)$, *удовлетворяющий неравенству*

$$\|T_\alpha(t)\| \leq M(t) e^{\omega t}, \quad t > 0,$$

где $\omega \in \mathbb{R}$ *и функция* $M(t) \in C(0, \infty)$ *и абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$, *тогда* $A \in \mathcal{G}^\alpha(M, \omega)$ *и оператор* $D_{0+}^{\alpha-n} T_\alpha(t)$ *непрерывен при* $t \geq 0$ *в равномерной операторной топологии только тогда, когда* $A \in \mathcal{B}(X)$.

Теорема 2. *Пусть* $A \in \mathcal{G}^\alpha(M, \omega)$ *для некоторого* $\alpha > 2$ *и*

$$\int\limits_0^\infty e^{-\nu t} M(t) dt \leq \frac{C_1}{\nu^{\alpha - n + 1}}, \quad \nu > 0, \;\; n = [\alpha] + 1, \; C_1 > 0.$$

Тогда $A \in \mathcal{B}(X)$.

При $0 < \alpha < 1$ критерий разрешимости задачи (1), (2) формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *В этом случае* $A \in \mathcal{G}^\alpha(M, \omega)$ *только тогда, когда* $(\omega^\alpha, \infty) \subset \rho(A)$ *и*

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda - \omega)^n}{n!} \left\| \frac{d^n R(\lambda^\alpha, A)}{d\lambda^n} \right\| \leq C_2, \quad \lambda > \omega, \; C_2 > 0. \tag{3}$$

Теорема 4. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Для того, чтобы оператор* $A \in \mathcal{G}^\alpha(M, \omega)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $(\omega^\alpha, \infty) \subset \rho(A)$ *и существовала сильно непрерывная операторная функция* $T(t)$, *удовлетворяющая* *неравенству* $\|T(t)\| \leq M(t)e^{\omega t}, \quad t > 0, \quad M(t) \in C(0,\infty)$ *и абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t = 0$ *такая, что*

$$R(\lambda^\alpha, A)u_0 = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)u_0 \, dt, \quad u_0 \in X, \tag{4}$$

и в этом случае $T_\alpha(t) = T(t)$.

Кроме того, указано выражение оператора A через соответствующий ему разрешающий оператор. При этом оператор A называется генератором.

Теорема 5. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Если* $T_\alpha(t)$ *— разрешающий оператор задачи* (1), (2), *то*

$$Au_0 = \Gamma(\alpha+1) \lim_{t\to 0+} \frac{I_{0+}^{1-\alpha} T_\alpha(t)u_0 - u_0}{t^\alpha}$$

для тех $u_0 \in X$, *для которых этот предел существует.*

Вводится понятие аналитического разрешающего оператора задачи (1), (2) и устанавливаются достаточные условия его существования. Приводятся примеры таких операторов.

Пусть $\Xi(\theta,\omega)$ — открытый сектор с вершиной $\omega \in \mathbb{R}$ и углом 2θ в комплексной области, симметричный относительно действительной положительной оси, то есть

$$\Xi(\theta,\omega) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\right\},$$

и пусть $\Xi_\theta = \Xi(\theta, 0)$.

Определение 5. *Разрешающий оператор* $T_\alpha(t)$ *задачи* (1), (2) *называется аналитическим, если* $T_\alpha(t)$ *допускает аналитическое продолжение в сектор* Ξ_{θ_0} *при некотором* $\theta_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Теорема 6. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$ *и* $\lambda^\alpha \in \rho(A)$ *для каждого* $\lambda \in \Xi(\theta_0 + \pi/2, \ \omega_0)$. *Если для любых* $\omega > \omega_0, \ \ \theta < \theta_0$ *существует постоянная* $C = C(\theta,\omega)$ *такая, что*

$$\|R(\lambda^\alpha, A)\| < \frac{C|\lambda|^{1-\alpha}}{|\lambda - \omega|}, \qquad \lambda \in \Xi(\theta + \pi/2, \omega),$$

то линейный замкнутый плотно определенный оператор A *является генератором аналитического разрешающего оператора* $T_\alpha(t)$, *удовлетворяющего неравенству*

$$\|T_\alpha(t)\| \leq M(|t|)e^{(\omega+\varepsilon)\mathrm{Re}\ t}, \quad t \in \Xi_{\theta_0}$$

с некоторой функцией $M(s) = M_{\theta,\omega}(s) \in C(0,\infty)$ *и абсолютно интегрируемой в окрестности точки* $s = 0$.

Пусть A — линейный замкнутый плотно определенный оператор в банаховом пространстве X с областью определения $D(A)$ и непустым резольвентным множеством. В п. 8 главы 2 при $\alpha > 0$ и $n = [\alpha] + 1$ рассматривается задача о нахождении операторной функции Коши из условий

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{5}$$

$$\lim_{t \to 0+} D_{0+}^{\alpha - k} u(t) = 0, \quad k = 2, ..., n, \quad \lim_{t \to 0+} D_{0+}^{\alpha - 1} u(t) = u_{n-1}. \tag{6}$$

Для задачи (5), (6) мы приведем условия ее корректной разрешимости, а разрешающий оператор этой задачи мы назовем операторной функцией Коши. С ее помощью будет построено решение задачи типа Коши для неоднородного уравнения.

Определение 6. *Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{H}^{\alpha}(M, \omega)$, если задача (5), (6) имеет разрешающий оператор $K_{\alpha}(t)$, удовлетворяющий неравенству*

$$\|K_{\alpha}(t)\| \le M(t) e^{\omega t}, \quad t > 0,$$

где $\omega \in \mathbb{R}$ и функция $M(t) \in C(0, \infty)$ и абсолютно интегрируема в окрестности точки $t = 0$.

Теорема 7. *Пусть $\alpha > 0$, тогда $A \in \mathcal{H}^{\alpha}(M, \omega)$ и оператор $D_{0+}^{\alpha-1} K_{\alpha}(t)$ непрерывен в равномерной операторной топологии только тогда, когда $A \in \mathcal{B}(X)$.*

Теорема 8. *Пусть $A \in \mathcal{H}^{\alpha}(M, \omega)$ для некоторого $\alpha > 2$ и*

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu t} M(t) dt \le \frac{C_3}{\nu^{\alpha}}, \qquad \nu > 0, \quad C_3 > 0.$$

Тогда $A \in \mathcal{B}(X)$.

Теорема 9. *Пусть $0 < \alpha \le 2$. В этом случае $A \in \mathcal{H}^{\alpha}(M, \omega)$ только тогда, когда $(\omega^{\alpha}, \infty) \subset \rho(A)$ и*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda - \omega)^n}{n!} \left\| \frac{d^n R(\lambda^{\alpha}, A)}{d\lambda^n} \right\| \le C_4, \quad \lambda > \omega, \ C_4 > 0. \tag{7}$$

Теорема 10. *Пусть $0 < \alpha \le 2$. Тогда $A \in \mathcal{H}^{\alpha}(M, \omega)$ только тогда, когда $(\omega^{\alpha}, \infty) \subset \rho(A)$ и существует сильно непрерывная операторная функция $K(t)$, удовлетворящая неравенству $\|K(t)\| \le M(t) e^{\omega t}$, $t > 0$, $M(t) \in C(0, \infty)$ и абсолютно интегрируема в окрестности точки $t = 0$ такая, что*

$$R(\lambda^{\alpha}, A) u_{n-1} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} K(t) u_{n-1} \, dt, \quad u_{n-1} \in X, \tag{8}$$

и в этом случае $K_\alpha(t) = K(t)$.

Разрешимость неоднородной задачи при $\alpha > 0$ и нулевых начальных условиях

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = Au(t) + h(t), \quad t > 0, \tag{9}$$

$$\lim_{t \to 0+} D_{0+}^{\alpha - k} u(t) = 0, \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{10}$$

установлена в следующей теореме.

Теорема 11. *Пусть* $A \in \mathcal{H}^{\alpha}(M, \omega)$, *функция* $M(t) \in C(0, \infty)$ *абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t = 0$, *а функция* $h(t) \in C\left((0, \infty), X\right)$ *абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t = 0$, *принимает значения в* $D(A)$, $Af(t) \in C\left((0, \infty), X\right)$ *и также абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t = 0$. *Тогда функция*

$$u(t) = \int\limits_0^t K_\alpha(t - s) h(s)\, ds, \tag{11}$$

является решением задачи (9), (10).

Заметим, что при $0 < \alpha < 1$ $K_\alpha(t) = T_\alpha(t)$, где $T_\alpha(t)$ — разрешающий оператор рассмотренной в пункте 7 задачи

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = Au(t), \quad t > 0,$$

$$\lim_{t \to 0+} D_{0+}^{\alpha - 1} u(t) = u_0.$$

При $\alpha = 1$ разрешающий оператор $K_1(t)$ — это C_0-полугруппа и A — ее генератор. Если $\alpha = 2$, то $K_2(t)$ — синус оператор-функция и A — ее генератор. Если оператор A ограничен и $\alpha > 2$, то $K_\alpha(t) = t^{\alpha - 1} E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha A)$.

Завершающая третья глава диссертации посвящена задаче типа Коши для дифференциального уравнения, содержащего дробные производные Адамара, а также исследованию одной обратной задачи.

В п. 9 главы 3 рассматривается задача типа Коши

$${}^H D_{1+}^{\alpha} u(t) = Au(t), \quad t > 1, \tag{12}$$

$$\lim_{t \to 1+} {}^H I_{1+}^{1-\alpha} u(t) = u_0, \tag{13}$$

с левосторонней дробной производной Адамара порядка $\alpha \in (0, 1)$ ${}^H D_{a+}^{\alpha} u(t) = t \dfrac{d}{dt} {}^H I_{a+}^{1-\alpha} u(t)$, а ${}^H I_{a+}^{1-\alpha} u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int\limits_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{-\alpha} u(s)\, \frac{ds}{s}$ — левосторонний дробный интеграл Адамара порядка $1 - \alpha$, $a > 0$.

Определение 7. *Задача* (12), (13) *называется равномерно корректной, если существует заданная на* X, *коммутирующая с* A *операторная* *функция* ${}^H T_\alpha(t)$ *и числа* $M_0 > 0,\ \omega \in \mathbb{R}$ *такие, что для любого* $u_0 \in D(A)$ *функция* ${}^H T_\alpha(t) u_0$ *является ее единственным решением, и при этом*

$$\left\| {}^H T_\alpha(t) \right\| \le M_0 (\ln t)^{\alpha-1} t^\omega, \quad t > 1.$$

Наряду с уравнением (12) мы также будем рассматривать и неоднородное уравнение

$$ {}^H D^\alpha_{1+} u(t) = Au(t) + h(t), \qquad t > 1. \tag{14}$$

Теорема 12. *Пусть* $A \in \mathcal{B}(X)$, $u_0 \in X$, *функция* $h(t) \in C(1, \infty)$ *абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t = 1$. *Тогда задача* (12), (13) *равномерно корректна и*

$$ {}^H T_\alpha(t) u_0 = (\ln t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left((\ln t)^\alpha A\right) u_0, \tag{15}$$

а неоднородная задача (14), (13) *имеет единственное решение, определяемое равенством*

$$u(t) = (\ln t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left((\ln t)^\alpha A\right) u_0 + \int\limits_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\ln \frac{t}{s}\right)^\alpha A\right) h(s)\, \frac{ds}{s}. \tag{16}$$

Условие 1. Начальный элемент u_0 принадлежит $D(A)$ и оператор A является производящим оператором экспоненциально ограниченной полугруппы $T(t)$ класса C_0, причем $\|T(t)\| \le M_0 e^{\omega t}$.

Теорема 13. *Пусть выполнено условие* 1. *Тогда однородная задача* (12), (13) *равномерно корректна и при этом*

$$ {}^H T_\alpha(t) u_0 = \int\limits_0^\infty f_{\tau,\alpha}(\ln t)\, T(\tau) u_0\, d\tau, \tag{17}$$

$$\left\| {}^H T_\alpha(t) \right\| \le M_0 (\ln t)^{\alpha-1} t^{\omega_1}, \qquad \omega_1 > \omega^{1/\alpha},$$

функция $f_{\tau,\alpha}(t)$ — *функция типа Райта, которая при* $a > \max\{0; b\}$, $\mu, z \in \mathbb{C}$ *определяется равенством*

$$f_{\tau,\alpha}(t) = t^{-1} e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\tau t^{-\alpha}\right),\ e^{\mu,\delta}_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(ak+\mu)\, \Gamma(\delta - bk)}.$$

Условие 2. Выполнено одно из следующих требований: a) $h(t) \in C(1, \infty)$ абсолютно интегрируема в окрестности точки $t = 1$ и принимает значения в $D(A)$, функция $Ah(t) \in C(1, \infty)$ также абсолютно интегрируема в окрестности точки $t = 1$; b) функция ${}^H I^{1-\alpha}_{1+} h(t)$ непрерывна при $t \ge 1$, непрерывно дифференцируема при $t > 1$ и ${}^H D^\alpha_{1+} h(t)$ абсолютно интегрируема в окрестности точки $t = 1$.

Теорема 14. *Пусть задача* (12), (13) *равномерно корректна,* $u_0 \in D(A)$ *и выполнено условие* 2. *Тогда задача* (14), (13) *имеет единственное решение, определяемое равенством*

$$u(t) = {}^H T_\alpha(t) u_0 + \int_1^t {}^H T_\alpha\left(\frac{t}{s}\right) h(s)\, \frac{ds}{s}.$$

Кроме того, в п. 9 главы 3 вводится понятие регуляризованной дробной производной Адамара и рассматривается задача

$$^H\partial^\alpha_{1+} u(t) = Au(t) + h(t), \quad t \ge 1, \tag{18}$$

$$u(1) = u_0, \tag{19}$$

где ${}^H\partial^\alpha_{a+} u(t) = {}^H D^\alpha_{a+}\left(u(t) - u(a)\right) = {}^H D^\alpha_{a+} u(t) - \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{-\alpha} \dfrac{u(a)}{\Gamma(1-\alpha)}$ – регуляризованная производная Адамара.

Обозначим разрешающий оператор задачи (18), (19) через ${}^H S_\alpha(t) u_0$.

Теорема 15. *Пусть выполнено условие* 1. *Тогда однородная задача* (18), (19) *равномерно корректна и при этом*

$$^H S_\alpha(t) u_0 = \int_0^\infty g_{\tau,\alpha}(\ln t)\, T(\tau) u_0\, d\tau, \tag{20}$$

$$\left\| {}^H S_\alpha(t) \right\| \le M_0\, t^{\omega_1}, \quad t \ge 1, \quad \omega_1 > \omega^{1/\alpha}, \tag{21}$$

где $g_{\tau,\alpha}(t) = t^{-\alpha} e^{1,1-\alpha}_{1,\alpha}\left(-\tau t^{-\alpha}\right)$.

Условие 3. Выполнено одно из следующих требований: a) $h(t) \in C[1,\infty)$, принимает значения в $D(A)$, $Ah(t) \in C[1,\infty)$; b) $h(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \ge 1$.

Теорема 16. *Пусть* $u_0 \in D(A)$ *и выполнены условия* 1 *и* 3. *Тогда задача* (18), (19) *имеет единственное решение, определяемое равенством*

$$u(t) = {}^H S_\alpha(t) u_0 + \int_1^t {}^H T_\alpha\left(\frac{t}{s}\right) h(s)\, \frac{ds}{s}, \tag{22}$$

где ${}^H S_\alpha(t), {}^H T_\alpha(t)$ *определяются равенствами* (20) *и* (17), *соответственно.*

Теорема 17. *Пусть* $A \in \mathcal{B}(X)$, $u_0 \in X$, *функция* $h(t) \in C[1,\infty)$. *Тогда однородная задача* (18), (19) *равномерно корректна и*

$$^H S_\alpha(t) u_0 = E_{\alpha,1}\left((\ln t)^\alpha A\right) u_0,$$

а неоднородная задача (18), (19) *имеет единственное решение, определяемое равенством*

$$u(t) = E_{\alpha,1}\left((\ln t)^{\alpha} A\right) u_0 + \int\limits_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha} A\right) h(s)\,\frac{ds}{s}.$$

В п. 10 главы 3 приводятся достаточные условия разрешимости обратной коэффициентной задачи в двух случаях: с ограниченным оператором и с генератором непрерывной C_0-полугуппы.

Рассматриваем задачу определения функции $u(t)$, принадлежащей $D(A)$ при $t \in (1, e]$ и элемента $p \in X$ из условий

$$^{H}D^{\alpha}_{1+}u(t) = Au(t) + (\ln t)^{k-1}p, \tag{23}$$

$$\lim_{t\to 1} {}^{H}I^{1-\alpha}_{1+}u(t) = u_0, \tag{24}$$

$$\lim_{t\to e} {}^{H}I^{\beta}_{1+}u(t) = u_1, \tag{25}$$

где $0 < \alpha < 1,\ k > 0,\ \beta \geq 0$.

Определение 8. *Решением задачи* (23) – (25) *называется пара* $(u(t), p)$, *где* $u(t) \in D(A)$ *непрерывная при* $t \in (1, e]$ *функция такая, что* $^{H}I^{1-\alpha}_{1+}u(t)$ *представляет собой непрерывно дифференцируемую при* $t \in (1, e]$ *функцию,* $p \in X$, $u(t)$ *и* p *удовлетворяют соотношениям* (23) – (25).

Задачу (23) – (25) называют обратной задачей в противоположность прямой задаче типа Коши (23), (24) с известным элементом $p \in X$. Рассматриваемую задачу можно интерпретировать как восстановление в уравнении (23) нестационарного слагаемого $(\ln t)^{k-1}p$ с помощью дополнительного граничного условия (25).

Теорема 18. *Пусть* $A \in \mathcal{B}(X)$, $u_0, u_1 \in X$. *Для того, чтобы задача* (23) – (25) *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре* $\sigma(A)$ *ограниченного оператора* A *выполнялось условие*

$$E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z) \neq 0, \qquad z \in \sigma(A). \tag{26}$$

Из теоремы 18 следует, что расположение нулей функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ определяет однозначную разрешимость задачи (23) – (25) с ограниченным оператором A. Для уравнения первого порядка с неограниченным оператором A условие вида (26) уже не будет достаточным условием однозначной разрешимости, хотя расположение нулей также играет важную роль.

Установлено необходимое условие единственности решения обратной задачи (23) – (25) с неограниченным оператором A.

Теорема 19. *Пусть A — линейный замкнутый оператор в X. Предположим, что обратная задача (23) – (25) имеет решение $(u(t), p)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо, чтобы ни один нуль μ_n целой функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ не являлся собственным значением оператора A.*

В следующей теореме установлено представление для оператора $G = \lim\limits_{t\to e} {}^H I_{1+}^{k+\beta} {}^H T_\alpha(t)$, $G : X \to X$, ${}^H T_\alpha(t)$ определяется формулой (17). Это представление используется при доказательстве теорем 21 и 22 о разрешимости обратной задачи (23) – (25).

Теорема 20. *Пусть выполнено условие* 1. *Тогда для любого $p \in D(A)$ справедливо представление*

$$Gp = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z) R\,(z)\, p\; dz, \quad \sigma > \omega.$$

Далее переходим к достаточным условиям однозначной разрешимости задачи (23) – (25). Как следует из теоремы 19, нам придется потребовать, чтобы ни один нуль μ_n функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ не являлся собственным значением оператора A. Более того, для установления разрешимости потребуем, чтобы все нули принадлежали резольвентному множеству $\rho(A)$. Учитывая их асимптотику

$$\mu_n^{1/\alpha} = 2\pi n i + (k+\beta-1)\left(\ln 2\pi|n| + \frac{\pi i}{2}\,\mathrm{sign}\; n\right) + \ln\frac{\alpha}{\Gamma(k+\beta)} + o(1), \;\; n \to \pm\infty$$

отметим, что при $k + \beta > 1$ условие будет налагаться лишь на конечное число нулей μ_n, $n = 1, 2, ..., n_0$ с $\mathrm{Re}\; \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$, поскольку остальные автоматически принадлежат $\rho(A)$. В случае $k + \beta \le 1$ нулей с $\mathrm{Re}\; \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ будет счетное множество.

Теорема 21. *Пусть оператор A удовлетворяет условию* 1, $k + \beta > 1$, $\sigma > \omega$ *и* u_0, $u_1 \in D\left(A^3\right)$. *Если каждый нуль μ_n, $n = 1, 2, ..., n_0$ функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ с $\mathrm{Re}\; \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ принадлежит $\rho(A)$, то задача* (23) – (25) *имеет единственное решение.*

Условие 4. Каждый нуль μ_n, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ с $\mathrm{Re}\; \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ принадлежит $\rho(A)$ и существуют $\varepsilon \in [0, 1)$ и $d > 0$ такие, что $\sup\limits_{\mathrm{Re}\; \mu_n^{1/\alpha} < \,\sigma} \left\| \dfrac{R(\mu_n)}{\mu_n^\varepsilon} \right\| \le d.$

Теорема 22. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 4, $k + \beta \le 1$ *и* u_0, $u_1 \in D\left(A^3\right)$. *Тогда задача* (23) – (25) *имеет единственное решение.*

В пункте 11 главы 3 в банаховом пространстве X рассматривается задача типа Коши с линейным замкнутым оператором A

$$L_q^{\alpha,\beta}u(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\gamma} Au(t), \quad t > 0, \tag{27}$$

$$\lim_{t\to a+} {}^H D_{a+}^{\beta-1}u(t) = u_0, \quad \lim_{t\to a+} {}^H D_{a+}^{\alpha-1}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q} {}^H D_{a+}^{\beta}u(t)\right) = 0, \tag{28}$$

где

$$L_q^{\alpha,\beta} = {}^H D_{a+}^{\alpha}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q} {}^H D_{a+}^{\beta}\right).$$

Специфика постановки начальных условий (28) состоит в том, что суммарный порядок производных, по сравнению с уравнением (27), уменьшается сначала на 1 в одном условии, а потом еще на α — в другом.

Кроме того, особенностью рассматриваемой задачи является наличие двух условий вида (28) даже в том случае, когда $0 < \alpha + \beta < 1$.

Доказывается равномерная корректность задачи (27), (28) с ограниченным оператором.

Теорема 23. *Пусть $A \in \mathcal{B}(X)$ и параметры задачи* (27), (28) *удовлетворяют неравенствам $\beta + \gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma - q > 0$, $\gamma \leq q$. Тогда задача* (27), (28) *равномерно корректна и при этом*

$$\Phi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_0 = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{i-1}\frac{\Gamma(\beta+\gamma+j\mu)\Gamma(\mu+j\mu)}{\Gamma(q+\mu+j\mu)\Gamma(\beta+\mu+j\mu)}\right)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{i\mu+\beta-1} A^i u_0,$$

где $\mu = \alpha + \beta + \gamma - q > 0$.

Для задачи

$$L_q^{\alpha,\beta}u(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\gamma} Au(t), \quad t > 0, \tag{29}$$

$$\lim_{t\to a+} {}^H D_{a+}^{\beta-1}u(t) = 0, \quad \lim_{t\to a+} {}^H D_{a+}^{\alpha-1}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q} {}^H D_{a+}^{\beta}u(t)\right) = u_1, \tag{30}$$

получены аналогичные результаты.

Теорема 24. *Пусть $A \in \mathcal{B}(X)$ и параметры задачи* (29), (30) *удовлетворяют неравенствам $\alpha - q > 0$, $\alpha + \beta + \gamma - q > 0$, $\gamma \leq q$. Тогда задача* (29), (30) *равномерно корректна, и при этом*

$$\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_1 = \frac{\Gamma(\alpha-q)\ \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\gamma)}\,(u_1+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{\Gamma(\alpha-q+j\mu)\Gamma(j\mu)}{\Gamma(\alpha+j\mu)\Gamma(\mu-\gamma+j\mu)}\right)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{i\mu} A^i u_1\right),$$

где $\mu = \alpha + \beta + \gamma - q > 0$.

В пункте 11 мы рассматриваем случай неограниченного оператора A при $\gamma = 0, q = 0$, когда оператор $L_q^{\alpha,\beta}$ примет вид

$$L_0^{\alpha,\beta} = {}^H D_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\beta},$$

а задача (29), (30), в свою очередь, преобразуется в задачу

$$L_0^{\alpha,\beta} u(t) = Au(t), \quad t > a, \tag{31}$$

$$\lim_{t\to a+} {}^H D_{a+}^{\beta-1} u(t) = 0, \quad \lim_{t\to a+} {}^H D_{a+}^{\alpha-1} \left({}^H D_{a+}^{\beta} u(t) \right) = u_1, \tag{32}$$

где A – линейный замкнутый оператор, и $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$.

Определение 9. *Задача* (31), (32) *называется равномерно корректной, если существует заданная на* X, *коммутирующая с* A *операторная функция* $W_{\alpha,\beta}(t)$ *и* $M(t) \in C(0,\infty)$ *и абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t = 0$, $\omega \geq 0$ *такие, что для любого* $u_1 \in D(A)$ *функция* $W_{\alpha,\beta}(t)u_1$ *является ее единственным решением, и при этом*

$$\|W_{\alpha,\beta}(t)\| \leq M\left(\ln\frac{t}{a}\right)t^{\omega}.$$

Определение 10. *Операторная функция* $W_{\alpha,\beta}(t) \in \mathcal{B}(X)$ *называется разрешающим оператором для задачи* (31), (32), *если выполнены следующие условия:*

(i) $W_{\alpha,\beta}(t)$ *сильно непрерывна при* $t > 0$ *и* $D_{0+}^{\alpha-1}(D_{0+}^{\beta})W_{\alpha,\beta}(0) = I$,

(ii) $W_{\alpha,\beta}(t)$ *коммутирует с* A, *то есть,* $W_{\alpha,\beta}(t)D(A) \subset D(A)$ *и* $AW_{\alpha,\beta}(t)u_1 = W_{\alpha,\beta}(t)Au_1$ *для любого* $u_1 \in D(A)$ *и* $t > 0$,

(iii) $W_{\alpha,\beta}(t)u_1$ *является решением задачи* (31), (32) *для любого* $u_1 \in D(A)$ *и* $t > 0$.

Определение 11. *Будем говорить, что оператор* A *принадлежит классу* $\mathcal{F}^{\alpha,\beta}(M,\omega)$, *если задача* (31), (32) *имеет разрешающий оператор* $W_{\alpha,\beta}(t)$, *удовлетворяющий неравенству*

$$\|W_{\alpha,\beta}(t)\| \leq M\left(\ln\frac{t}{a}\right)t^{\omega}, \quad t > 0,$$

где $\omega \in \mathbb{R}$ *и функция* $M(t) \in C(0,\infty)$ *и абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t = 0$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 25. *Пусть* $\alpha > 0, \beta > 0$, *тогда* $A \in \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(M,\omega)$ *и оператор* $D_{0+}^{\alpha-1}(D_{0+}^{\beta})W_{\alpha,\beta}(t)$ *непрерывен в равномерной операторной топологии только тогда, когда* $A \in \mathcal{B}(X)$.

Теорема 26. *Пусть* $A \in \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(M,\omega)$ *для некоторого* $\alpha > 2$ *и*

$$\int_0^\infty e^{-\nu t} M(t)dt \ \le \ \frac{C_5}{\nu^\alpha}, \qquad \nu > 0, \quad C_5 > 0.$$

Тогда $A \in \mathcal{B}(X)$.

Теорема 27. *Пусть* $0 < \alpha, \beta < 1$. *В этом случае* $A \in \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(M,\omega)$ *только тогда, когда* $(\omega^\alpha, \infty) \subset \rho(A)$ *и*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\omega)^n}{n!} \left\| \frac{d^n R(\lambda^{\alpha+\beta}, A)}{d\lambda^n} \right\| \le C_6, \quad \lambda > \omega, \ C_6 > 0.$$

Теорема 28. *Пусть* $0 < \alpha \le 2$. *Тогда* $A \in \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(M,\omega)$ *только тогда, когда* $(\omega^\alpha, \infty) \subset \rho(A)$ *и существует сильно непрерывная операторная функция* $V(t)$, *удовлетворящая неравенству* $\|V(t)\| \le M(t)t^\omega, t > 0$, $M(t) \in C(0,\infty)$ *и абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t = 0$ *такая, что*

$$R(\lambda^\alpha, A)u_{n-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} V(t) u_{n-1} \, dt, \quad u_{n-1} \in X,$$

и в этом случае $V(t) = W_{\alpha,\beta}(t)$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору А.В. Глушаку за постановку задачи, внимание, поддержку и полезные советы на протяжении всей работы.

Статьи в научных журналах и сборниках:

1. Манаенкова, Т.А. Об одной абстрактной задаче типа Коши с дробной производной Адамара / Т.А. Манаенкова // Вестник СНО. БелГУ. – 2007. – Ч.I. – С. 192.

2. Манаенкова, Т.А. Задача типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной Адамара / А.В. Глушак, Т.А. Манаенкова // Научные ведомости БелГУ. Физико-математические науки. – 2008. – № 13(53) вып. 15. – С. 37 – 46.

3. Манаенкова, Т.А. Об одной задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными Адамара / А.В. Глушак, Т.А. Манаенкова // XVI Международная конференция "Математика. Экономика. Образование": Тезисы докладов (Ростов-на-Дону, 27 мая – 3 июня 2008). – Ростов н/Д: Изд-во "ЦВВР". – С. 70.

4. Манаенкова, Т.А. Абстрактные дифференциальные уравнения, содержащие дробные производные Адамара / А.В. Глушак, Т.А. Манаенкова // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии Наук. Нальчик. – 2009. – Т.11. – №1. – С. 17 – 20.

5. Манаенкова, Т.А. Прямая и обратная задачи для абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные Адамара / А.В. Глушак, Т.А. Манаенкова // Международный Российско-Абхазский симпозиум "Уравнения смешанного

типа и родственные проблемы анализа и информатики". VII Школа молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики": Тезисы докладов (Нальчик. Эльбрус. 17 – 22 мая 2009). – С. 69 – 71.

6. Манаенкова, Т.А. Прямая и обратная задачи для абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробную производную Адамара и неограниченный оператор / Т.А. Манаенкова // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2010. – № 17(88) вып. 20. – С. 79 – 90.

7. Манаенкова, Т.А. Задача Коши для уравнения с регуляризованной дробной производной Адамара / Т.А. Манаенкова // Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: материалы I Всероссийской конференции молодых ученых. (п. Терскол, 6 – 9 декабря 2010). – Терскол. – 2010. – С. 115.

8. Манаенкова, Т.А. Прямая и обратная задачи для абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные Адамара / А.В. Глушак, Т.А. Манаенкова // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47. – №9. – С. 1294 – 1304.

9. Манаенкова, Т.А. О разрешимости абстрактных дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля / Т.А. Манаенкова // Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел: материалы Международной конференции (г. Белгород, 17 – 21 октября 2011). – Белгород: ИПК НИУ "БелГУ". – 2011. – С. 77.

10. Манаенкова, Т.А. Обратная коэффициентная задача для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной Адамара / Т.А. Манаенкова // Прикладная математика, управление и информатика: Сборник трудов Международной молодежной конференции (г. Белгород, 3 – 5 октября 2012). – Белгород: ИД "Белгород". – 2012. – Т. 1. – С. 186 – 189.

11. Манаенкова, Т.А. О разрешимости задач типа Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля / А.В. Глушак, Т.А. Манаенкова // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2012. – № 17(136), вып. 28 – С. 28 – 45.

12. Манаенкова, Т.А. Функция Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля / Т.А. Манаенкова // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2012. – № 17(136), вып. 28. – С. 71 – 76.

13. Манаенкова, Т.А. Задача типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными Адамара / Т.А. Манаенкова // Дифференциальные уравнения и их приложения: сб. материалов Международной конференции (Белгород, 26 – 31 мая). – Белгород: ИПК НИУ "БелГУ". – 2013. – С.43 – 44.

Подписано в печать 29.10.2013. TimesNewRoman.
Формат 60×84/16. Усл. п. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 402.
Оригинал-макет тиражирован в ИД "Белгород" НИУ "БелГУ"
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85