

№19 (190) 2014

Выпуск 36

Научный рецензируемый журнал

Основан в 1995 г.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

#### Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»)

#### Издатель:

НИУ «БелГУ»  
Издательский дом «Белгород».  
Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охраны культурного наследия.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-21121 от 19 мая 2005 г.

#### Редакционная коллегия журнала

##### Главный редактор

**О.Н. Полухин**,  
ректор НИУ «БелГУ», доктор политических наук, профессор

##### Зам. главного редактора

**И.С. Константинов**,  
проректор по научной и инновационной деятельности НИУ «БелГУ», доктор технических наук, профессор

##### Научный редактор:

**В.М. Московкин**,  
доктор географических наук, профессор кафедры мировой экономики НИУ «БелГУ»

**О.В. Шевченко**,  
ответственный секретарь, канд. исторических наук

## НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

Белгородского государственного университета  
Математика Физика

BELGOROD STATE UNIVERSITY  
SCIENTIFIC BULLETIN  
Mathematics & Physics

### Содержание

#### МАТЕМАТИКА

Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями перехода в прямоугольной области.

**А.А. Гималтдинова 5**

Достаточное условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.

**А.В. Глушак,**

**О.А. Покручин 17**

Мультипликативная структура резольвентных матриц упорядоченных интерполяционных задач для неванлинновских функций.

**Ю.М. Дюкарев 27**

К теории спектра  $2 \times 2$ -эллиптических систем.

**Д.В. Корниенко 44**

Исследование нестационарного температурного поля в прямоугольной пластине интерлинационным методом конечных элементов.

**О.Н. Литвин, Л.С. Лобанова, Г.В. Залужная 49**

Спектральный анализ оператора Дирака в лебеговых пространствах. Антиперодические краевые условия и краевые условия Дирихле.

**Е.Ю. Романова 57**

Решение функционального уравнения  $f(f(x)) = \exp(x)$ .

**К.А. Рубцов, G.F. Romerio 64**

О периодических на бесконечности функциях.

**А.А. Рыжкова,**

**И.А. Тришина 71**

Краевая задача с нелокальным условием для нагруженного уравнения смешанного типа.

**Ю.К. Сабитова 76**

Нелокальная обратная задача по определению правых частей вырождающегося уравнения смешанного параболического типа.

**С.Н. Сидоров 91**

О стабильных 2-расслоениях с классами Черна  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 12$  и  $c_2 = 13$  на комплексном проективном пространстве.

**С.А. Тихомиров, А.П. Ляпин 105**

Главный редактор серии

**Ю.П. Вирченко**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (НИУ «БелГУ»)

Заместители главного редактора:

**Н.В. Малай**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (НИУ «БелГУ»)

**А.М. Мейрманов**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (НИУ «БелГУ»)

Ответственный секретарь

**М.Н. Бекназаров**,  
кандидат физико-математических наук  
(НИУ «БелГУ»)

Члены редколлегии:

**С.В. Блажевич**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (НИУ «БелГУ»)

**А.В. Глушак**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (НИУ «БелГУ»)

**С.А. Гриценко**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (НИУ «БелГУ»)

**В.В. Красильников**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (НИУ «БелГУ»)

**О.М. Пенкин**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (НИУ «БелГУ»)

**А.П. Солдатов**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (НИУ «БелГУ»)

**В.В. Сыщенко**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (НИУ «БелГУ»)

Статьи представлены в авторской  
редакции

Компьютерная верстка  
**Ю.П. Вирченко**  
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Подписано в печать 23.09.2014  
Формат 60×84/8  
Гарнитура Courier New  
Усл.п.л. 23.01  
Тираж 1000 экз.  
Заказ 248

Подписные индексы в каталоге агентства  
«Роспечать» – 81466

Оригинал-макет тиражирован  
в издательском доме «Белгород»

Адрес: 308015, г.Белгород, ул.Победы,  
85

О разрешимости эволюционных уравнений с памятью.

**В.Е. Фёдоров, О.А. Стахеева 111**

О числе спектральных типов обратимых динамических систем.

**Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин 126**

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА,  
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Распределение вероятностей времени достижения заданного  
уровня энергетическим функционалом для дихотомического  
случайного процесса. **М.И. Абрамова, Ю.П. Вирченко 133**

Моделирование свойств деформируемых сред взаимодействующими  
частицами. **М.М. Ошхунов, З.В. Нагоев 155**

Метод отражений в описании излучения заряженной частицы  
на идеально проводящей сфере. **В.В. Сыщенко,  
Э.А. Ларикова 163**

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Реальные факты истории ВГУ. Профессор чистой математики  
В.Г. Алексеев и его вклад в становление ВГУ. **В.А. Костин,  
Ю.И. Сапронов, Н.И. Удоденко 171**

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Упрощенный расчет кинематики движения мобильного робота  
с тремя омниколесами. **А.Н. Афонин, А.Ю. Алейников,  
Е.Н. Бондарева 180**

О серии алгебр пуассона с дробными экспонентами.

**О.И. Череватенко 184**

Поиск нового тяжелого бозона  $Z^*$  в эксперименте atlas в моде  
распада на два мюона. **И.В. Елецких, Коллаборация  
ATLAS 187**

Об одном подходе к решению внешних краевых задач для уравнения  
колебаний. **Е.А. Канунникова 192**

Информация для авторов **194**

№19 (190) 2014  
Issue 36

Scientific peer-reviewed journal

Founded in 1995

Journal included into the list of leading peer-reviewed journals and publications coming out in Russian Federation that are recommended for publishing key results of theses for Doktor and Kandidat degree-applicants.

**Founder:**

Federal state autonomous educational establishment of highest professional education "Belgorod National Research University".

**Publisher:**

Belgorod National Research University  
National Research University Publishing House "Belgorod".

The journal is registered in Federal service of control over law compliance in the sphere of mass media and protection of cultural heritage.

Mass media registration certificate  
ПН №ФС77-21121 May 19, 2005.

**Editorial Board of Journal**

Editor-in-Chief

**O.N. Polukhin,**

Rector of Belgorod National Research University, Doctor of political sciences, Professor

Deputy of editor-in-chief

**I.S. Konstantinov,**

Vice-Rector on Scientific and Innovative Work of Belgorod National Research University, Doctor of technical sciences, Professor

Scientific Editor

**V.M. Moskovkin,**

Doctor of geographical sciences, Professor of world economy department

Assistant Editor

**O.V. Shevchenko,**

Deputy of Head of scientific and innovative activity department in Belgorod National Research University, candidate of historical sciences

Belgorod State University  
Scientific Bulletin  
Mathematics & Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

Белгородского государственного университета  
Mathematics & Physics

**Contents**

**MATHEMATICS**

Dirichlet's problem for a mixed type equation with two perpendicular transition lines in rectangular domain.

**A.A. Gimaltdinova 5**

Sufficient condition of the Cauchy problem solvability of abstract Euler-Poisson-Darboux equation. **A.V. Glushak,**

**O.A. Pokruchin 17**

Multiplicative structure of the ordered interpolation problem resolvent matrices for nevanlinna's functions. **Yu. M. Dyukarev 27** To the theory of  $2 \times 2$ -elliptic systems spectrum.

**D.V. Kornienko 44**

Study of unsteady temperature field in rectangular plate by interlination method of finite elements. **O.N. Lytvyn, L.S. Lobanova, G.V. Zalyzhna 49**

Spectral analysis of Dirac operator in the Lebesgue spaces. Antiperiodic boundary conditions and Dirichlet's boundary conditions. **E.Yu. Romanova 57**

The solution of the functional equation  $f(f(x)) = \exp(x)$  by means of a homomorphism. **K.A. Rubtsov, G.F. Romerio 64**

About periodic functions at infinity. **A.A. Ryzhkova, I.A. Trishina 71**

Boundary-value problem with nonlocal condition for a mixed type equation in rectangular area. **Y.K. Sabitova 76**

Nonlocal inverse problem of right parts determining of the mixed parabolic-hyperbolic type degenerate equation. **S.N. Sidorov 91**

On stable 2-bundles with chern classes  $c_1 = 0, c_1 = 12$  and  $c_2 = 13$  on complex projective space. **S.A. Tikhomirov, A.P. Lyapin 105**

On solvability of evolution equations with memory. **V.E. Fedorov, O.A. Stakheeva 111**

About class of hamiltonian matrices. **Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin 126**

## Editorial Board of Journal Series

### Editor-in-Chief

**Yu.P. Virchenko**,  
Professor of Belgorod National Research  
University

### Deputies of editor-in-chief

**N.V. Malay**,  
Professor of Belgorod National Research  
University

**A.M. Meirmanov**,  
Professor of Belgorod National Research  
University

### Responsible Secretary

**M.N. Beknazarov**,  
Associated Professor of Belgorod National  
Research University

### Members of Editorial Board

**S.V. Blazhevich**,  
Professor of Belgorod National Research  
University

**A.V. Glushak**,  
Professor of Belgorod National Research  
University

**S.A. Gritsenko**,  
Professor of Belgorod National Research  
University

**V.V. Krasilnikov**,  
Professor of Belgorod National Research  
University

**O.M. Penkin**,  
Professor of Belgorod National Research  
University

**A.P. Soldatov**,  
Professor of Belgorod National Research  
University

**V.V. Syshchenko**,  
Professor of Belgorod National Research  
University

Proposed articles are given in authors'  
editing

Dummy layout:  
*Yu.P. Virchenko*  
e-mail: virch@bsu.edu.ru

Passed for printing 23.09.2014  
Format 60×84/8  
Typeface Courier New  
Printer's sheets: 23.01  
Calculation: 1000 copies  
Order 248

Subscription reference in Rospechat'  
agency catalogue: 81466

Dummy layout is replicated at Belgorod  
National Research University Publishing  
House "Belgorod"

Address: 85, Pobedy str., Belgorod,  
Russia, 308015

## MATHEMATICAL PHYSICS, MATHEMATICAL MODELING

Probability distribution of first passage time of energy functional on dichotomic random process trajectories. **M.I. Abramova, Yu.P. Virchenko 133**

Modeling the deformable medium properties by interacting particles. **M.M. Oshkhunov, Z.V. Nagoev 155**

Description of charged particle radiation on ideally conducting sphere by the method of images. **V.V. Syshchenko, E.A. Larikova 163**

## HISTORY OF MATHEMATICS

Real facts of Voronezh State University history. Professor of pure mathematics V.G. Alexeyev and his inclusion for VGU generation. **V.A. Kostin, Yu.I. Sapronov, N.I. Udodenko 171**

## SHORT COMMUNICATIONS

Simplified calculation of kinematics of mobile robot with three omnidirectional wheels. **A.N. Afonin, A.Y. Aleynikov, E.N. Bondareva 180**

On series of poisson algebras of different fractional exponents. **O.I. Cherevatenko 184**

Search for new spin-1  $Z^*$  boson at the atlas (LHC) experiment in channel with two muons. **I.V. Yeletsikh, The ATLAS Collaboration 187**

An approach to solution of the external boundary value problems of wave equation. **E.A. Kanunnikova 192**

Information for authors **194**



MSC 35M10

## ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ ПЕРЕХОДА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А.А. Гималтдинова

Поволжская социально-гуманитарная академия,  
ул. М.Горького, 65/67, Самара, 443099, Россия, e-mail: alfiragimaltdinova@mail.ru

**Аннотация.** Для уравнения эллиптико-гиперболического типа с двумя внутренними перпендикулярными линиями степенного и разрывного вырождения изучена первая краевая задача. Методом спектрального анализа установлен критерий единственности решения поставленной задачи. Решение построено в виде суммы ряда Фурье-Бесселя.

**Ключевые слова:** уравнение смешанного типа, задача Дирихле, биортогональная система функций, полнота, существование и единственность решения.

### 1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} y)|y|^n u_{xx} + (\operatorname{sgn} x)u_{yy} = 0, \quad n > 0, \quad (1)$$

в области  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta > 0$ .

Обозначим  $D_1 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$ ,  $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$ ,  $D_3 = D \cap \{x < 0, y < 0\}$ ,  $D_4 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$ .

В области  $D$  для уравнения (1) поставим следующую задачу.

**Задача Дирихле.** Найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4), \quad (2)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4, \quad (3)$$

$$u(x, y) \Big|_{x=1} = u(x, y) \Big|_{x=-1} = 0, \quad y \in [-\alpha, \beta], \quad (4)$$

$$u(x, y) \Big|_{y=\beta} = \varphi(x), \quad u(x, y) \Big|_{y=-\alpha} = \psi(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (5)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  – заданные достаточно гладкие функции.

Краевые задачи для уравнений смешанного типа с одной или несколькими линиями изменения или вырождения типа были объектом изучения многих авторов.

В работе [1] построена теория задачи Трикоми для уравнений смешанного типа в классической смешанной области, в которой гиперболическая часть состоит из двух подобластей, ограниченных характеристиками уравнения и линиями изменения типа. Там приведен достаточно полный обзор работ, посвященных данному направлению.



В работе [2] предложена задача для уравнения с двумя линиями вырождения в смешанной области, состоящей из четырех эллиптических подобластей и четырех гиперболических подобластей, последние из которых ограничены характеристиками данного уравнения и линиями изменения типа.

Многие авторы, например, [4]- [7], занимались поиском областей, в которых является корректной задача Дирихле для уравнений смешанного типа. В этих работах единственность решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа с одной линией вырождения или изменения типа доказана с помощью принципа экстремума или методом интегральных тождеств, а существование – методом интегральных уравнений или разделения переменных.

В работах [8,9] исследована задача Дирихле для уравнения смешанного типа с одной внутренней линией степенного вырождения и вырождением на границе в прямоугольной области и методом спектрального анализа установлен критерий единственности, решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций.

В настоящей работе на основании работы [8] установлен критерий единственности и построено решение задачи (2)-(5) в прямоугольной области, состоящей из двух гиперболических и двух эллиптических подобластей, в виде суммы ряда по системе собственных функций одномерной задачи Штурма-Лиувилля. При доказательстве единственности решения поставленной задачи использовалась только полнота построенной системы собственных функций аналогично тому, как это было сделано в [10] при доказательстве единственности решения смешанной задачи для гиперболических уравнений. При доказательстве существования решения задачи (2)-(5) аналогично [8, 11, 12] возникла так называемая «проблема малых знаменателей», которая создает трудности при обосновании сходимости построенного ряда в классе функций (2). При определенных ограничениях на параметры  $\alpha, \beta$  получены оценки об отделимости малых знаменателей от нуля с соответствующей асимптотикой, которые позволили обосновать сходимость построенных рядов в классе функций (2).

**2. Построение частных решений.** После разделения переменных посредством подстановки  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  в уравнении (1) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения с разрывными коэффициентами и условиями сопряжения:

$$(\operatorname{sgn} x)X'' + d \cdot X = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad (6)$$

$$X(+0) = X(-0), \quad X'(+0) = X'(-0), \quad X(1) = X(-1) = 0, \quad (7)$$

$$Y'' - d(\operatorname{sgn} y)|y|^n Y = 0, \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta), \quad (8)$$

$$Y(+0) = Y(-0), \quad Y'(+0) = Y'(-0), \quad (9)$$

где  $d = \mu^2 \in \mathbb{C}$ .



Можно доказать, что постоянная  $d$  может принимать значения  $d_k = \mu_k^2 > 0$  и  $d_k = -\mu_k^2 < 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , и решениями задачи (6), (7) будут соответственно функции

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} X_{k,+}^{(1)}(x) = \frac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos \mu_k}, & x > 0, \\ X_{k,-}^{(1)}(x) = \frac{\text{sh}[\mu_k(x+1)]}{\text{ch} \mu_k}, & x < 0, \end{cases} \quad X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{\text{sh}[\mu_k(x-1)]}{\text{ch} \mu_k}, & x > 0, \\ \frac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos \mu_k}, & x < 0, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\mu_k$  – положительные корни уравнения  $\text{tg} \mu = -\text{th} \mu$ , для них справедливо асимптотическое представление

$$\mu_k = -\frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k}), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

В силу того, что система  $\{X_k^{(1)}(x), X_k^{(2)}(x)\}$  не ортогональна в  $L_2[-1, 1]$ , рассмотрим задачу, сопряженную к задаче (6), (7), т.е. задачу

$$\text{sgn} x \cdot Z'' + d \cdot Z = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad (12)$$

$$Z(-0) = -Z(+0), \quad Z'(-0) = -Z'(+0), \quad Z(-1) = Z(1) = 0. \quad (13)$$

Решениями задачи (12), (13) являются функции

$$Z_k^{(1)}(x) = \begin{cases} -\frac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos \mu_k}, & x > 0, \\ \frac{\text{sh}[\mu_k(x+1)]}{\text{ch} \mu_k}, & x < 0, \end{cases} \quad Z_k^{(2)}(x) = \begin{cases} -\frac{\text{sh}[\mu_k(x-1)]}{\text{ch} \mu_k}, & x > 0, \\ \frac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos \mu_k}, & x < 0. \end{cases} \quad (14)$$

**Лемма 1.** Система  $\{Z_k^{(1)}(x), Z_k^{(2)}(x)\}$  полна в  $L_2[-1, 1]$  и образует базис Рисса.

□ Доказательство леммы основано на работе [13] и приведено в [14]. ■

Найдем общее решение уравнения (8):

$$Y(y) = \begin{cases} C_1^+ \sqrt{y} I_{1/2q}(\sqrt{d} y^q/q) + C_2^+ \sqrt{y} K_{1/2q}(\sqrt{d} y^q/q), & y > 0, \\ C_1^- \sqrt{-y} J_{1/2q}(\sqrt{d} (-y)^q/q) + C_2^- \sqrt{-y} Y_{1/2q}(\sqrt{d} (-y)^q/q), & y < 0, \end{cases} \quad (15)$$

где  $q = (n + 2)/2$ ,  $J_{1/2q}(\cdot)$ ,  $Y_{1/2q}(\cdot)$  – функции Бесселя порядка  $1/2q$  первого и второго рода соответственно,  $I_{1/2q}(\cdot)$ ,  $K_{1/2q}(\cdot)$  – модифицированные функции Бесселя порядка  $1/2q$  первого и третьего рода соответственно.

1) Пусть  $d_k = \mu_k^2 > 0$ . Аналогично [15] и [9] можно показать, что условия (9) выполнены только при  $C_2^- = -\frac{\pi}{2} C_2^+$  и  $C_1^- = -C_1^+ + C_2^+ \frac{\pi}{2} \text{ctg} \frac{\pi}{4q}$ .

Тогда функции (15) можно привести к виду:

$$Y_k^{(1)}(y) = \begin{cases} a_k^{(1)} \sqrt{y} I_{1/2q}(\mu_k y^q/q) + b_k^{(1)} \sqrt{y} K_{1/2q}(\mu_k y^q/q), & y > 0, \\ -a_k^{(1)} \sqrt{-y} J_{1/2q}(\mu_k (-y)^q/q) + b_k^{(1)} \sqrt{-y} \bar{Y}_{1/2q}(\mu_k (-y)^q/q), & y < 0, \end{cases} \quad (16)$$



где

$$\bar{Y}_{1/2q}(\mu_k(-y)^q/q) = \frac{\pi}{2 \sin(\pi/2q)} [J_{1/2q}(\mu_k(-y)^q/q) + J_{-1/2q}(\mu_k(-y)^q/q)].$$

2) При  $d_k = -\mu_k^2 > 0$  аналогично найдем:

$$Y_k^{(2)}(y) = \begin{cases} -a_k^{(2)} \sqrt{y} J_{1/2q}(\mu_k y^q/q) + b_k^{(2)} \sqrt{y} \bar{Y}_{1/2q}(\mu_k y^q/q), & y > 0, \\ a_k^{(2)} \sqrt{-y} I_{1/2q}(\mu_k (-y)^q/q) + b_k^{(2)} \sqrt{-y} K_{1/2q}(\mu_k (-y)^q/q), & y < 0. \end{cases} \quad (17)$$

В формулах (16) и (17) коэффициенты  $a_k^{(j)}, b_k^{(j)}, j = 1, 2$ , – произвольные постоянные.

**3. Единственность решения задачи (2)-(5).** Пусть существует решение  $u(x, y)$  задачи (2)-(5). Рассмотрим функции

$$u_k^{(1)}(y) = \int_{-1}^1 u(x, y) Z_k^{(1)}(x) dx, \quad u_k^{(2)}(y) = \int_{-1}^1 u(x, y) Z_k^{(2)}(x) dx, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (18)$$

где  $Z_k^{(j)}(x)$  определены по формуле (14). Можно доказать, что  $u_k^{(1)}(y)$  является решением уравнения (8) и удовлетворяют условиям (9), то есть  $u_k^{(1)}(y) \equiv Y_k^{(1)}(y)$ , следовательно, функции  $u_k^{(1)}(y)$  определяются по формулам (16).

Аналогично доказывается, что  $u_k^{(2)}(y) = Y_k^{(2)}(y)$ , т.е. функции  $u_k^{(2)}(y)$  определяются по формулам (17).

Для нахождения постоянных  $a_k^{(j)}, b_k^{(j)}$  воспользуемся граничными условиями (5) и формулами (16) и (17):

$$\begin{aligned} u_k^{(1)}(\beta) &= \int_{-1}^1 u(x, \beta) Z_k^{(1)}(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi(x) Z_k^{(1)}(x) dx = \varphi_k^{(1)}, \\ u_k^{(2)}(\beta) &= \int_{-1}^1 u(x, \beta) Z_k^{(2)}(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi(x) Z_k^{(2)}(x) dx = \varphi_k^{(2)}, \\ u_k^{(1)}(-\alpha) &= \int_{-1}^1 u(x, -\alpha) Z_k^{(1)}(x) dx = \int_{-1}^1 \psi(x) Z_k^{(1)}(x) dx = \psi_k^{(1)}, \\ u_k^{(2)}(-\alpha) &= \int_{-1}^1 u(x, -\alpha) Z_k^{(2)}(x) dx = \int_{-1}^1 \psi(x) Z_k^{(2)}(x) dx = \psi_k^{(2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда на основании (16), (17) и (19) получим системы для нахождения неизвестных





коэффициентов  $a_k^{(j)}, b_k^{(j)}$  :

$$\begin{cases} a_k^{(1)} I_{1/2q}(\mu_k \beta_q) + b_k^{(1)} K_{1/2q}(\mu_k \beta_q) = \frac{\varphi_k^{(1)}}{\sqrt{\beta}}, \\ -a_k^{(1)} J_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) + b_k^{(1)} \bar{Y}_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) = \frac{\psi_k^{(1)}}{\sqrt{\alpha}}, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} -a_k^{(2)} J_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q) + b_k^{(2)} \bar{Y}_{-1/(2q)}(\mu_k \beta_q) = \frac{\varphi_k^{(2)}}{\sqrt{\beta}}, \\ a_k^{(2)} I_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) + b_k^{(2)} K_{-1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) = \frac{\psi_k^{(2)}}{\sqrt{\alpha}}, \end{cases} \quad (21)$$

где  $\alpha_q = \alpha^q/q, \beta_q = \beta^q/q$ .

Если при всех  $k \in \mathbb{N}$  определители систем (20) и (21) отличны от нуля:

$$\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) = \bar{Y}_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) I_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q) + J_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) K_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q) \neq 0, \quad (22)$$

$$\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta) = I_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) \bar{Y}_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q) + K_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) J_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q) \neq 0, \quad (23)$$

то они имеют единственное решение:

$$\begin{aligned} a_k^{(1)} &= \frac{\sqrt{\alpha} \varphi_k^{(1)} \bar{Y}_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) - \sqrt{\beta} \psi_k^{(1)} K_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q)}{\sqrt{\alpha\beta} \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)}, \\ b_k^{(1)} &= \frac{\sqrt{\alpha} \varphi_k^{(1)} J_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) + \sqrt{\beta} \psi_k^{(1)} I_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q)}{\sqrt{\alpha\beta} \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)}, \\ a_k^{(2)} &= \frac{-\sqrt{\alpha} \varphi_k^{(2)} K_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) + \sqrt{\beta} \psi_k^{(2)} \bar{Y}_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q)}{\sqrt{\alpha\beta} \Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)}, \\ b_k^{(2)} &= \frac{\sqrt{\alpha} \varphi_k^{(2)} I_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) + \sqrt{\beta} \psi_k^{(2)} J_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q)}{\sqrt{\alpha\beta} \Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)}. \end{aligned}$$

Тогда с учетом найденных значений  $a_k^{(j)}, b_k^{(j)}$  функции (18) примут вид:

$$u_k^{(1)}(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\alpha\beta} \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)} \left[ \sqrt{\alpha} \varphi_k^{(1)} \Delta_k^{(1)}(\alpha, y) - \sqrt{\beta} \psi_k^{(1)} M_k(y, \beta) \right], & y > 0, \\ \frac{\sqrt{-y}}{\sqrt{\alpha\beta} \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)} \left[ \sqrt{\alpha} \varphi_k^{(1)} N_k(\alpha, -y) + \sqrt{\beta} \psi_k^{(1)} \Delta_k^{(1)}(-y, \beta) \right], & y < 0, \end{cases} \quad (24)$$

$$u_k^{(2)}(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\alpha\beta} \Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)} \left[ \sqrt{\alpha} \varphi_k^{(2)} \Delta_k^{(2)}(\alpha, y) - \sqrt{\beta} \psi_k^{(2)} N_k(y, \beta) \right], & y > 0, \\ \frac{\sqrt{-y}}{\sqrt{\alpha\beta} \Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)} \left[ \sqrt{\alpha} \varphi_k^{(2)} M_k(\alpha, -y) + \sqrt{\beta} \psi_k^{(2)} \Delta_k^{(2)}(-y, \beta) \right], & y < 0, \end{cases} \quad (25)$$



где

$$M_k(c, d) = I_{1/(2q)}(\mu_k c^q/q) K_{1/(2q)}(\mu_k d^q/q) - K_{1/(2q)}(\mu_k c^q/q) I_{1/(2q)}(\mu_k d^q/q), \quad (26)$$

$$N_k(c, d) = J_{1/(2q)}(\mu_k c^q/q) \bar{Y}_{1/(2q)}(\mu_k d^q/q) - \bar{Y}_{1/(2q)}(\mu_k c^q/q) J_{1/(2q)}(\mu_k d^q/q). \quad (27)$$

Пусть  $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$  на  $[-1, 1]$  и выполнены условия (22) и (23) при всех  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда на основании (18), (19), (24) – (25) получим

$$\int_{-1}^1 u(x, y) Z_k^{(j)}(x) dx = 0, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Отсюда в силу полноты системы  $\{Z_k^{(1)}(x), Z_k^{(2)}(x)\}$  в  $L_2[-1, 1]$  имеем, что функция  $u(x, y) = 0$  почти всюду при  $x \in [-1, 1]$  при любом  $y \in [-\alpha, \beta]$ . А в силу непрерывности  $u(x, y)$  в  $\bar{D}$  будет  $u(x, y) \equiv 0$  в  $\bar{D}$ .

Пусть при некоторых  $\alpha, \beta$  и  $k = s \in \mathbb{N}$  нарушено одно из условий (22) или (23). Пусть, например,  $\Delta_s^{(1)}(\alpha, \beta) = 0, \Delta_s^{(2)}(\alpha, \beta) \neq 0$ . Тогда однородная задача (2) – (5) (где  $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ ) имеет нетривиальное решение

$$u_s(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin \mu_s(x-1)\sqrt{y} \Delta_s^{(1)}(\alpha, y)}{\cos \mu_s J_{1/(2q)}(\mu_s \alpha_q)}, & (x, y) \in D_1, \\ \frac{\sin \mu_s(x-1)\sqrt{-y} N_s(\alpha, -y)}{\cos \mu_s J_{1/(2q)}(\mu_s \alpha_q)}, & (x, y) \in D_2, \\ \frac{\text{sh} \mu_s(x+1)\sqrt{-y} N_s(\alpha, -y)}{\text{ch} \mu_s J_{1/(2q)}(\mu_s \alpha_q)}, & (x, y) \in D_3, \\ \frac{\text{sh} \mu_s(x+1)\sqrt{y} \Delta_s^{(1)}(\alpha, y)}{\text{ch} \mu_s J_{1/(2q)}(\mu_s \alpha_q)}, & (x, y) \in D_4. \end{cases}$$

Докажем существование нулей выражения  $\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)$ . Для этого представим его в виде

$$\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) = I_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q) \delta_k^{(1)}(\alpha, \beta), \quad (28)$$

где

$$\delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) = J_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) \frac{K_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q)}{I_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q)} + \bar{Y}_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) = \gamma_k(\alpha, \beta) + \sigma_k(\alpha). \quad (29)$$

Существование нулей  $\delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)$  относительно  $\alpha$  следует из того, что функции  $J_{1/(2q)}(\mu_k z)$  и  $\bar{Y}_{1/(2q)}(\mu_k z)$ ,  $z = \alpha_q$ , являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя

$$y''(z) + \frac{1}{z} y'(z) + \left[ \mu_k^2 - \left( \frac{1}{2qz} \right)^2 \right] y(z) = 0. \quad (30)$$



Тогда функции  $J_{1/(2q)}(\mu_k z)$  и  $\delta_k^{(1)}(z^{1/q}, \beta)$  также являются линейно независимыми решениями уравнения (30). Из общей теории линейных дифференциальных уравнений известно, что нули двух линейно независимых решений уравнения Бесселя строго чередуются, т.е. на интервале между любыми двумя последовательными нулями каждого из этих решений содержится ровно один нуль другого решения. Функция  $J_{1/(2q)}(\mu_k z)$  имеет счетное множество положительных нулей, тогда функция  $\delta_k^{(1)}(z^{1/q}, \beta)$  также имеет счетное множество положительных нулей.

Таким образом, доказан следующий критерий единственности.

**Теорема 1.** *Если существует решение задачи (2)-(5), то оно единственно, только если для всех  $k \in \mathbb{N}$  выполняются условия  $\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta) \neq 0, j = 1, 2$ .*

**4. Существование решения задачи Дирихле.** Из формул (24) и (25) видно, что выражения  $\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta)$  являются знаменателями дробей и могут обратиться в нуль, т.е. возникает проблема «малых знаменателей» [8, 11, 12]. Поэтому для обоснования существования решения задачи (2)-(5) необходимо показать существование чисел  $\alpha$  и  $\beta$  таких, что при больших  $k$  выражения  $\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta)$  отделены от нуля.

Исходя из представления (29), рассмотрим выражение

$$\bar{\sigma}_k(\alpha) = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2q}\right) \sigma_k(\alpha) = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2q}\right) \bar{Y}_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) = J_{1/2q}(\mu_k \alpha_q) + J_{-1/2q}(\mu_k \alpha_q). \quad (31)$$

На основании асимптотической формулы для функции Бесселя [16, с.98]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (32)$$

при достаточно больших  $k$  выражение (31) примет вид

$$\bar{\sigma}_k(\alpha) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi \mu_k \alpha_q}} \cos\left(\mu_k \alpha_q - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4q} + O(k^{-3/2}). \quad (33)$$

С учетом (11) из равенства (33) имеем

$$\sqrt{k} \bar{\sigma}_k(\alpha) = A_k \cos\left[\pi k \alpha_q - \frac{\pi}{4}(\alpha_q + 1) + O(e^{-2\pi k})\right] + O(k^{-1}), \quad (34)$$

где  $A_k = 2\sqrt{2}\pi^{-1} \cos \frac{\pi}{4q} \left[\pi \alpha_q \left(1 + \frac{1}{k}\right) + O\left(\frac{e^{-2\pi k}}{k}\right)\right]^{-1/2}$ , причем величина  $A_k$  ограничена и отделена от нуля:  $0 < A < A_k < B = A_\infty$ .

Пусть  $\alpha_q = p/h$  – рациональное число,  $p, h \in \mathbb{N}$ ,  $(p, h) = 1$ . Разделим  $pk$  на  $h$  с остатком:  $pk = sh + r$ ,  $r, s \in \mathbb{N}_0$ ,  $0 \leq r \leq h - 1$ , и оценим первое слагаемое в (34) следующим образом:

$$\left|A_k \cos\left[\pi k \alpha_q - \frac{\pi}{4}(\alpha_q + 1) + O(e^{-2\pi k})\right]\right| \geq \frac{A}{2} \left|\cos\left[\frac{\pi r}{h} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{p}{h} + 1\right)\right]\right| = \tilde{K}_1 \geq 0. \quad (35)$$



В (35) потребуем, чтобы  $\tilde{K}_1 > 0$ , а это возможно только при  $\frac{\pi r}{h} - \frac{\pi}{4} \left( \frac{p}{h} + 1 \right) \neq \frac{\pi}{2} + d\pi$ ,  $d \in \mathbb{Z}$ , т.е.

$$\frac{4r - p - 3h}{4h} \neq d, \quad d \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r \leq h - 1. \quad (36)$$

В частности, если  $h = 1$ , то  $r = 0$ , и условие (36) примет вид  $p \neq 4d - 3$ ,  $d \in \mathbb{N}$ .

Таким образом, при выполнении условия (36) при достаточно больших  $k$  имеем, что выражение  $\sqrt{k} \bar{\sigma}_k(\alpha)$  отделено от нуля, и в силу известных асимптотических формул [16, с.99]

$$I_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi z}} e^z, \quad K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad \bar{Y}(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{\cos(z - \pi/4)}{\sin(\nu\pi/2)}, \quad z \rightarrow +\infty, \quad (37)$$

величина  $\gamma_k(\alpha, \beta)$  из (29) есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с  $\sigma_k(\alpha)$ .

Тогда из (28) с учетом (37) получим, что  $|\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)| \geq R_1 e^{\pi k \beta_q} / k$ .

Итак, нами доказано утверждение.

**Лемма 2.** Если  $\alpha_q = p/h$ ,  $p, h \in \mathbb{N}$ ,  $(p, h) = 1$  и выполнено условие (36), то существуют положительные постоянные  $R_1$  и  $k_1$ ,  $k_1 \in \mathbb{N}$ , зависящие, вообще говоря, от  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $n$ , такие, что при всех  $k > k_1$  справедлива оценка

$$|\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)| \geq R_1 \frac{e^{\pi k \beta_q}}{k} > 0. \quad (38)$$

Аналогично доказывается

**Лемма 3.** Если  $\beta_q = p/h$ ,  $p, h \in \mathbb{N}$ ,  $(p, h) = 1$  и выполнено условие (36), то существуют положительные постоянные  $R_2$  и  $k_2$ ,  $k_2 \in \mathbb{N}$ , зависящие, вообще говоря, от  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $n$ , такие, что при всех  $k > k_2$  справедлива оценка

$$|\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)| \geq R_2 \frac{e^{\pi k \alpha_q}}{k} > 0. \quad (39)$$

Если  $\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta) \neq 0$ ,  $j = 1, 2$ , при  $k < \max\{k_1, k_2\}$  для указанных  $\alpha$  и  $\beta$  из лемм 1 и 2 и выполнены оценки (38) и (39), то решение задачи (2)-(5) можно искать в виде суммы ряда Фурье

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( u_k^{(1)}(y) X_k^{(1)}(x) + u_k^{(2)}(y) X_k^{(2)}(x) \right). \quad (40)$$

Покажем, что при определенных условиях на функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  ряд (40) сходится равномерно в области  $\bar{D}$  и его там можно почленно дифференцировать по  $x$  и  $y$ , и дважды дифференцировать по  $x$  и  $y$  в  $\bar{D}_i$ ,  $i = \bar{1}, 4$ .

Исходя из формул (24), (26), (27), рассмотрим следующие отношения:

$$A_k(y) = \sqrt{y} \Delta_k^{(1)}(\alpha, y) / \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta), \quad B_k(y) = \sqrt{y} M_k(y, \beta) / \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta), \quad y \in [0, \beta],$$



$$C_k(y) = \sqrt{-y} N_k(\alpha, -y) / \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta), \quad D_k(y) = \sqrt{-y} \Delta_k^{(1)}(-y, \beta) / \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta), \quad y \in [-\alpha, 0].$$

Далее через  $P_i$  будем обозначать положительные постоянные.

Используя асимптотические формулы (32) и (37), легко доказать следующие утверждения.

**Лемма 4.** При выполнении условия (38) для достаточно больших  $k$  справедливы следующие оценки:

$$|A_k(y)| \leq P_1, \quad |A'_k(y)| \leq P_1 k, \quad |A''_k(y)| \leq P_1 k^2,$$

$$|B_k(y)| \leq P_2 k^{1/2-\lambda}, \quad |B'_k(y)| \leq P_2 k^{1/2+\lambda}, \quad |B''_k(y)| \leq P_2 k^{5/2-\lambda}, \quad y \in [0, \beta],$$

$$|C_k(y)| \leq P_3 k^{1/2+\lambda} e^{-kd}, \quad |C'_k(y)| \leq P_3 k e^{-kd}, \quad |C''_k(y)| \leq P_3 k^{5/2+\lambda} e^{-kd},$$

$$|D_k(y)| \leq P_4 k^{1/2+\lambda}, \quad |D'_k(y)| \leq P_4 k^{1+\lambda}, \quad |D''_k(y)| \leq P_4 k^{5/2+\lambda}, \quad y \in [-\alpha, 0],$$

где  $d = \pi\beta_q$ ,  $\lambda = 1/(2q)$ .

Такие же оценки справедливы и для аналогичных отношений из (25).

**Лемма 5.** Пусть выполнена оценка (38). Тогда при любом  $y \in [-\alpha, \beta]$  для достаточно больших  $k$  справедливы оценки

$$|u_k^{(1)}(y)| \leq P_5 k^{1/2+\lambda} (|\varphi_k| + |\psi_k|), \quad |(u_k^{(1)}(y))'| \leq P_6 k (|\varphi_k| + k^\lambda |\psi_k|),$$

$$|(u_k^{(1)}(y))''| \leq P_7 k^{5/2+\lambda} (|\varphi_k| + |\psi_k|).$$

Аналогичное утверждение справедливо и для  $u_k^{(2)}(y)$  и ее производных. Доказательство лемм 4 и 5 проводится аналогично работе [15].

Из леммы 5 следует, что ряд (40) и его производные первого порядка в  $\overline{D}$ , а производные второго порядка в  $\overline{D}_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , мажорируются числовым рядом

$$P_8 \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2+\lambda} (|\varphi_k| + |\psi_k|). \quad (41)$$

**Лемма 6.** Если  $\varphi(x), \psi(x) \in C^1[-1, 1] \cap C^3[-1, 0] \cap C^3[0, 1]$  и на этих сегментах имеют кусочно-непрерывные четвертые производные, причем  $\varphi(\pm 1) = \varphi''(\pm 1) = 0$ ,  $\psi(\pm 1) = \psi''(\pm 1) = 0$ ,  $\varphi''(+0) = -\varphi''(-0)$ ,  $\varphi'''(+0) = -\varphi'''(-0)$ ,  $\psi''(+0) = -\psi''(-0)$ ,  $\psi'''(+0) = -\psi'''(-0)$ , то справедливы соотношения

$$\varphi_k^{(1)} = \frac{p_k^{(1)}}{\mu_k^4}, \quad \varphi_k^{(2)} = \frac{p_k^{(2)}}{\mu_k^4}, \quad \psi_k^{(1)} = \frac{q_k^{(1)}}{\mu_k^4}, \quad \psi_k^{(2)} = \frac{q_k^{(2)}}{\mu_k^4},$$



$$\text{где } p_k^{(j)} = \int_{-1}^1 \varphi^{IV}(x) Z_k^{(j)}(x) dx, \quad q_k^{(j)} = \int_{-1}^1 \psi^{IV}(x) Z_k^{(j)}(x) dx, \quad j = 1, 2.$$

Тогда легко получить сходимость ряда (41) и равномерную сходимость ряда (40), а также рядов, полученных однократным дифференцированием по переменным  $x$  и  $y$ , в  $\overline{D}$ , а ряды из вторых производных сходятся равномерно в замкнутых областях  $\overline{D}_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

Если при указанных в леммах 2 и 3 числах  $\alpha$  и  $\beta$  и некоторых  $k = k_1, k_2, \dots, k_l$ , где  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_l \leq k_0$ , одно из выражений  $\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta) = 0$  (пусть для определенности  $\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) = 0$  при этих  $k_i$ ,  $\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta) \neq 0$ ), то для разрешимости системы (20) относительно  $a_k^{(1)}$  и  $b_k^{(1)}$  необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sqrt{\lambda} \varphi_{k_i}^{(1)} J_{1/(2q)}(\mu_{k_i} \alpha_q) + \sqrt{\beta} \psi_{k_i}^{(1)} I_{1/(2q)}(\mu_{k_i} \beta_q) = 0, \quad i = \overline{1, l}. \quad (42)$$

Тогда при  $k = k_1, k_2, \dots, k_l$  функции (16) примут вид:

$$Y_k^{(1)}(y) = \begin{cases} Y_{k,+}^{(1)}(y) = \frac{\sqrt{y} I_{1/(2q)}(\mu_k y_q)}{\sqrt{\beta} I_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q)} - C_k \sqrt{y} \frac{M_k(y, \beta)}{I_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q)}, & y > 0, \\ Y_{k,-}^{(1)}(y) = -\frac{\sqrt{-y} J_{1/(2q)}(\mu_k (-y)_q)}{\sqrt{\beta} I_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q)} + C_k \sqrt{-y} \frac{\Delta_k^{(1)}(-y, \beta)}{I_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q)}, & y < 0, \end{cases} \quad (43)$$

где  $C_k$  – произвольная постоянная.

Поэтому решение задачи (2)-(5) в этом случае определяется в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \left( \sum_{k=1}^{k_1-1} + \sum_{k=k_1+1}^{k_2-1} + \dots + \sum_{k=k_{l-1}+1}^{k_l-1} + \sum_{k=k_l+1}^{\infty} \right) u_k^{(1)}(y) X_k^{(1)}(x) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(2)}(y) X_k^{(2)}(x) + \sum_{k=k_1, k_2, \dots, k_l} \tilde{u}_k(x, y), \quad (44)$$

где  $\tilde{u}_k(x, y)$  определяются формулой

$$\tilde{u}_k(x, y) = \begin{cases} X_{k,+}^{(1)}(x) Y_{k,+}^{(1)}(y), & (x, y) \in D_1, \\ X_{k,+}^{(1)}(x) Y_{k,-}^{(1)}(y), & (x, y) \in D_2, \\ X_{k,-}^{(1)}(x) Y_{k,-}^{(1)}(y), & (x, y) \in D_3, \\ X_{k,-}^{(1)}(x) Y_{k,+}^{(1)}(y), & (x, y) \in D_4, \end{cases}$$

$X_{k,\pm}^{(1)}(x)$  задаются формулой (10),  $Y_{k,\pm}^{(1)}(y)$  – формулой (43), конечные суммы считаем равными нулю, если нижний предел суммирования больше верхнего.

Аналогичное решение строится в случае, когда при некоторых  $k$  будет  $\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta) = 0$ ,  $\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) \neq 0$ , или если оба знаменателя обращаются в нуль.



**Теорема 2.** Пусть  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  удовлетворяют условиям леммы 6 и выполнены оценки (38), (39) при  $k > k_0$ . Тогда если при указанных в леммах 2 и 3 значениях  $\alpha$  и  $\beta$  при всех  $k = 1, k_0$  выполнены условия (22), (23), то существует единственное решение задачи (2)-(5) и оно определяется рядом (40).

Если  $\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) = 0$  при некоторых  $k = k_1, k_2, \dots, k_l \leq k_0$ , и  $\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta) \neq 0$  при всех  $k = 1, k_0$ , то задача (2)-(5) разрешима только тогда, когда выполнены условия (42), и решение определяется в виде суммы ряда (44).

### Литература

1. Сабитов К.Б., Биккулова Г.Г., Гималтдинова А.А. К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа / Уфа: Гилем, 2006. – 150 с.
2. Rassias J.M. The exterior Tricomi and Frankl problems for quaterelliptic-quatergiperbolic equations with eight parabolic lines // European journal of pure and applied mathematics. – 2011. – 4, №2. – P.186-208.
3. Шабат Б.В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // ДАН СССР. – 1957. – 112, №3. – С.386-389.
4. Cannon J.R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient // Ann. math. pure and appl. – 1963. – 62. – P.371-377.
5. Нахушев А.М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. – 1970. – 6, №1. – С.190-191.
6. Хачев М.М. О задаче Дирихле для одного уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. – 1976. – 12, №1. – С.137-143.
7. Солдатов А.П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. I, II // Докл. РАН. – 1993. – 332, №6. – С.696-698; 333, №1. – С. 16-18.
8. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. – 2007. – 413, №1. – С.23-26.
9. Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2013. – 49, №1. – С.68-78.
10. Ильин В.А. Единственность и принадлежность  $W_2^1$  классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения // Мат. заметки. – 1975. – 17, №1. – С.91-101.
11. Арнольд В.И. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. – 1961. – 25. – С.21-86.
12. Ломов И.С. Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1993. – 29, №12. – С.2079-2089.
13. Ломов И.С. Негладкие собственные функции в задачах математической физики // Дифференц. уравнения. 2011. – 47, №3. – С.358-365.
14. Гималтдинова А.А. О полноте системы собственных функций дифференциального оператора с разрывным коэффициентом // Труды междунар. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы»: в 2-х т. (26-30 июня 2013 г., г. Стерлитамак). – Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. – Т.1. – С.39-47.
15. Сабитов К.Б., Сидоренко О.Г. Задача с условиями периодичности для вырождающегося уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. – 2010. – 46, №1. – С.105-113.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / М., 1966. – 296 с.



**DIRICHLET'S PROBLEM FOR A MIXED TYPE EQUATION WITH TWO  
PERPENDICULAR TRANSITION LINES IN RECTANGULAR DOMAIN**

A.A. Gimaltdinova

Samara State Academy of Social Sciences and Humanities,  
M.Gorky, 65/67, Samara, 443099, Russia, e-mail: [alfiragimaltdinova@mail.ru](mailto:alfiragimaltdinova@mail.ru)

**Abstract.** First boundary-value problem for an equation of elliptic-hyperbolic type with two perpendicular lines of internal power and burst degeneration is studied. Uniqueness criterion of solution is proved by spectral analysis. The solution is built as the Fourier-Bessel sum.





MSC 35Q05

## ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

А.В. Глушак, О.А. Покручин

Белгородский государственный университет,  
ул. Студенческая, 14, 308007, Белгород, Россия, e-mail:  
[Glushak@bsu.edu.ru](mailto:Glushak@bsu.edu.ru), [pokru4in.oleg@yandex.ru](mailto:pokru4in.oleg@yandex.ru)

**Аннотация.** Доказано достаточное условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.

**Ключевые слова:** абстрактная задача Коши, уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, операторная функция Бесселя, достаточное условие разрешимости.

Пусть  $A$  — замкнутый оператор в банаховом пространстве  $E$  с плотной в  $E$  областью определения  $D(A)$ . При  $k > 0$  рассмотрим абстрактную задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \quad (2)$$

Случай  $k = 0$  подробно рассмотрен в [1], [2], [3]. В этих работах установлено, что задача (1), (2) при  $k = 0$  равномерно корректна только тогда, когда оператор  $A$  является генератором операторной косинус-функции  $C(t)$  или косинус-оператор-функции (КОФ). По поводу терминологии см. [4] и обзорные работы [?], [5]. В этих же работах приводятся необходимые и достаточные условия того, что оператор  $A$  является генератором КОФ, которые формулируются в терминах оценки нормы резольвенты  $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$  оператора  $A$  и ее производных.

Задача (1), (2) исследовалась ранее в работе [6], в которой необходимое и достаточное условия разрешимости сформулированы в терминах оценки нормы резольвенты  $R(\lambda)$  и ее весовых производных. В рассматриваемой работе получено достаточное условие на резольвенту оператора  $A$ , которое, в отличие от [6], формулируется в терминах дробной степени резольвенты и ее, как и в случае КОФ, невесовых производных. Необходимое условие разрешимости получено ранее в [7].

Обозначим через  $C^n(I, E_0)$  пространство  $n$  раз сильно непрерывно дифференцируемых при  $t \in I$  функций со значениями в  $E_0 \subset E$ .

**Определение 1.** Решением уравнения (1) называется функция  $u(t)$ , которая при  $t \geq 0$  дважды сильно непрерывно дифференцируема, при  $t > 0$  принимает значения,



принадлежащие  $D(A)$ , то есть,  $u(t) \in C^2(\bar{R}_+, E) \cap C(R_+, D(A))$ , и удовлетворяет уравнению (1).

**Определение 2.** Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если существуют заданная на  $E$  коммутирующая с  $A$  операторная функция  $Y_k(t)$  и числа  $M \geq 1$ ,  $\omega \geq 0$ , такие, что для любого  $u_0 \in D(A)$  функция  $Y_k(t)u_0$  является ее единственным решением и при этом

$$\|Y_k(t)\| \leq M \exp(\omega t), \quad (3)$$

$$\|Y'_k(t)u_0\| \leq M \exp(\omega t) \|Au_0\|. \quad (4)$$

Функцию  $Y_k(t)$  назовем операторной функцией Бесселя (ОФБ) задачи (1), (2), а множество операторов, для которых задача (1), (2) равномерно корректна, обозначим через  $G_k$ , при этом  $G_0$  — множество генераторов операторной косинус-функции, а  $Y_0(t) = C(t)$ .

В определении 2 и в дальнейшем используется обозначение  $Y'_k(t)u_0 = (Y_k(t)u_0)'$ .

В работе [7] доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Если задача (1), (2) равномерно корректна и  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ , то  $\lambda^2$  принадлежит резольвентному множеству  $\rho(A)$  оператора  $A$ , для дробной степени резольвенты справедливо представление

$$R^{1+k/2}(\lambda^2) = \frac{1}{\Gamma(k+1) \lambda} \int_0^\infty t^k \exp(-\lambda t) Y_k(t) dt \quad (5)$$

и при этом выполняются оценки

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda R^{1+k/2}(\lambda^2)) \right\| \leq \frac{M \Gamma(k+n+1)}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{k+n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Теперь покажем, что неравенство (6) будет являться и достаточным условием равномерной корректности задачи (1), (2). В последующих леммах 1 – 7 мы будем предполагать, что оператор  $A$  является генератором аналитической  $C_0$ -полугруппы  $T(t)$  (обозначим этот класс операторов через  $G$ ) и выполнены оценки (6). Для  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$  положим  $F_k(\lambda) = \Gamma(k+1) \lambda R^{1+k/2}(\lambda^2)$ .

**Лемма 1.** Для для любого  $x \in E$  справедливо равенство

$$\frac{1}{\Gamma(k+1)} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k+1} F_k(n)x = x. \quad (7)$$

□ Пусть  $x \in D(A)$  и  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , где  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  — контур, состоящий из лучей  $\lambda = \sigma + \rho \exp(-i\varphi)$ ,  $0 \leq \rho < \infty$  и  $\lambda = \sigma + \rho \exp(i\varphi)$ ,  $0 \leq \rho < \infty$ ,  $\sigma \geq \omega_0$ ,  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} + \arcsin[M_0(k)]^{-1}$ . Тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{\Gamma(k+1)} n^{k+1} F_k(n)x = n^{k+2} R^{1+k/2}(n^2)x = \frac{n^{k+2}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(\mu)}{(n^2 - \mu)^{1+k/2}} x d\mu =$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{n^{k+2}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(n^2 - \mu)^{1+k/2}} R(\mu) \frac{(\mu I - A) + A}{\mu} x \, d\mu = \\
 &= \frac{n^{k+2}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu(n^2 - \mu)^{1+k/2}} x \, d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{n^{k+2}}{\mu(n^2 - \mu)^{1+k/2}} R(\mu) Ax \, d\mu = \\
 &= x + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{n^{k+2}}{\mu(n^2 - \mu)^{1+k/2}} R(\mu) Ax \, d\mu.
 \end{aligned}$$

При этом интеграл был вычислен с помощью замыкания в левую полуплоскость контура  $\Gamma$  частью окружности радиуса  $R$ , интеграл по которой стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ .

Нам осталось показать, что интеграл в последнем равенстве при  $n \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Действительно,

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Gamma} \frac{n^{k+2}}{\mu(n^2 - \mu)^{1+k/2}} R(\mu) Ax \, d\mu = \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu} \left( 1 + \frac{\mu}{(n^2 - \mu)} \right)^{1+k/2} R(\mu) Ax \, d\mu = \\
 &= \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu} \left( 1 + (1 + k/2) \frac{\mu}{n^2 - \mu} + \dots + \frac{(1 + k/2) \dots (k/2 + 1 - m)}{(m + 1)!} \left( \frac{\mu}{n^2 - \mu} \right)^{m+1} + \dots \right) R(\mu) Ax \, d\mu.
 \end{aligned}$$

При  $m \in \mathbb{N}$  вычислим интеграл

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Gamma} \frac{\mu^m}{(n^2 - \mu)^{m+1}} R(\mu) Ax \, d\mu = 2\pi i \lim_{\mu \rightarrow n^2} (\mu^m R(\mu))^{(m)} Ax = \\
 &= 2\pi i \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j n^{2j} R^{j+1}(n^2) Ax.
 \end{aligned}$$

Полученная сумма стремится к 0 при  $n \rightarrow \infty$ , поскольку операторная функция  $n^2 R(n^2)$  ограничена, а  $R(n^2)$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . ■

Наша цель заключается в определении ОФБ  $Y_k(t)$  как сильного предела некоторой последовательности. Предполагая, что  $A \in G$  и выполнены оценки (6), при  $k > 0$  введем в рассмотрение последовательность линейных ограниченных при каждом  $t \geq 0$  операторов

$$Y_{k,n}(t) = e^{-nt} \left( I + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{n^{k+2m+2}}{m! \Gamma(k + m + 2)} t^{m+1} F_k^{(m)}(n) \right). \quad (8)$$

Отметим, что при  $k = 0$  аналогичная последовательность была использована в [8].

Из неравенства (6) следует, что ряд в (8) сходится равномерно по  $t$  в любом ограниченном интервале и, кроме того, для  $t \geq 0$

$$\|Y_{k,n}(t)\| \leq M_1 e^{\omega_1 t}, \quad \omega_1 > \omega. \quad (9)$$



Действительно,

$$\begin{aligned} \|Y_{k,n}(t)\| &\leq e^{-nt} \left( 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^{k+2m+2} t^{m+1}}{m! \Gamma(k+m+2)} \cdot \frac{M \Gamma(k+m+1)}{(n-\omega)^{k+m+1}} \right) \leq \\ &\leq e^{-nt} \left( 1 + M \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^{k+2m+2} t^{m+1}}{(m+1)! (n-\omega)^{k+m+1}} \right) \leq M_2 e^{-nt} \exp\left(\frac{n^2 t}{n-\omega}\right) \leq M_1 e^{\omega_1 t}, \end{aligned}$$

что и доказывает справедливость неравенства (9).

Аналогично доказывается и дифференцируемость  $Y_{k,n}(t)$  в пространстве линейных ограниченных операторов.

Таким образом, к  $t^k Y_{k,n}(t)$  можно применить преобразование Лапласа. Обозначим

$$F_{k,n}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^k Y_{k,n}(t) dt, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega_1, \quad (10)$$

при этом в силу дифференцируемости  $Y_{k,n}(t)$  справедлива формула обращения

$$t^k Y_{k,n}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} F_{k,n}(\lambda) d\lambda, \quad \sigma > \omega_1. \quad (11)$$

**Лемма 2.** Для любого  $x \in D(A)$  существует сильный предел последовательности  $Y_{k,n}(t)$ , и справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t^k Y_{k,n}(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} F_k(\lambda)x d\lambda, \quad \sigma > \omega_1. \quad (12)$$

□ Докажем вначале, что интеграл

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} F_k(\lambda)x d\lambda \quad (13)$$

имеет смысл для  $x \in D(A)$ . Действительно, используя формулу представления полугруппы через резольвенту, будем иметь

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} F_k(\lambda)x d\lambda = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} \left( \frac{x}{\lambda^{k+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda}{\mu(\lambda^2 - \mu)^{1+k/2}} R(\mu)Ax d\mu \right) d\lambda.$$

Далее, оценим интеграл

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda}{\mu(\lambda^2 - \mu)^{1+k/2}} R(\mu)Ax d\mu \right) d\lambda,$$

учитывая очевидное неравенство  $\frac{|\lambda|}{|\lambda^2 - \mu|^{1+k/2}} \leq \frac{C_0}{|\lambda|^{1+k}}$  справедливое для  $\operatorname{Re} \lambda = \sigma$ ,  $\operatorname{Re} \mu = \omega_1 > \sigma$ , при этом  $|\lambda^2 - \mu| > \delta > 0$ . Получим

$$\left\| \int_{\Gamma} \frac{\lambda}{\mu(\lambda^2 - \mu)^{1+k/2}} R(\mu)Ax d\mu \right\| \leq \frac{M \|Ax\|}{|\lambda|^{k+1}} \left( \int_{\Gamma_1} \frac{ds}{|\mu|(|\mu| + 1)} + \int_{\Gamma_2} \frac{ds}{|\mu|(|\mu| + 1)} \right) =$$



$$= \frac{2M\|Ax\|}{|\lambda|^{k+1}} \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{ds}{s(s+1)} = \frac{2M\|Ax\|}{|\lambda|^{k+1}} \ln \left( 1 + \frac{1}{\sigma_0} \right), \quad \sigma_0 > \omega_1,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} F_k(\lambda) x \, d\lambda \right\| &\leq \frac{e^{\sigma t} M \ln(1 + \sigma_0^{-1}) \|Ax\|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{(\sigma^2 + \tau^2)^{1/2+k/2}} = \\ &= \frac{B(1/2, k/2) M e^{\sigma t} \ln(1 + \sigma_0^{-1}) \|Ax\|}{\pi \sigma^k}, \end{aligned}$$

и рассматриваемый интеграл (13) существует.

Мы хотим показать, что для  $x \in D(A)$  имеет место равенство (12). Отметим вначале, что справедливо равенство

$$F_{k,n}(\lambda) = \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} I + \frac{n^{k+2}}{(n+\lambda)^{k+2}} F_k \left( \frac{\lambda n}{n+\lambda} \right). \quad (14)$$

Действительно, из (10) и (8) выводим

$$\begin{aligned} F_{k,n}(\lambda) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^k Y_{k,n}(t) \, dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+n)t} \left( t^k I + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{n^{k+2m+2}}{m! \Gamma(k+m+2)} t^{k+m+1} F_k^{(m)}(n) \right) dt = \\ &= \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} I + \sum_{m=0}^{\infty} \left( (-1)^m \frac{n^{k+2m+2}}{m! \Gamma(k+m+2)} \int_0^{\infty} t^{k+m+1} e^{-(\lambda+n)t} \, dt F_k^{(m)}(n) \right) = \\ &= \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} I + \frac{n^{k+2}}{(n+\lambda)^{k+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{n^2}{n+\lambda} \right)^m F_k^{(m)}(n) \right) = \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} I + \\ &+ \frac{n^{k+2}}{(n+\lambda)^{k+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1}{m!} \left( \frac{\lambda n}{n+\lambda} - n \right)^m F_k^{(m)}(n) \right) = \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} I + \frac{n^{k+2}}{(n+\lambda)^{k+2}} F_k \left( \frac{\lambda n}{n+\lambda} \right), \end{aligned}$$

что и доказывает (14).

При каждом  $\lambda : \operatorname{Re} \lambda = \sigma > \omega_1$ , из установленного соотношения (14) вытекает равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( F_{k,n}(\lambda) - \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} I \right) = F_k(\lambda). \quad (15)$$

Чтобы перейти к пределу под знаком интеграла в равенстве (11) покажем, что справедливо неравенство

$$\left\| F_{k,n}(\lambda) - \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} I \right\| \leq \frac{M_1}{|\lambda|^{k+1}}, \quad k > 0. \quad (16)$$



Для доказательства (16) воспользуемся представлением (14) и вытекающей из неравенства для резольвенты генератора аналитической полугруппы оценкой  $\|F_k(\lambda)\| \leq \frac{M_0}{|\lambda|^{k+1}}$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0 > 0$ ,  $k > 0$ . Имеем

$$\left\| F_{k,n}(\lambda) - \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} I \right\| = \left\| \frac{n^{k+2}}{(n+\lambda)^{k+2}} F_k\left(\frac{\lambda n}{n+\lambda}\right) \right\| \leq M_0 \left| \frac{n}{n+\lambda} \right|^{k+2} \left| \frac{n+\lambda}{\lambda n} \right|^{k+1} \leq \frac{M_1}{|\lambda|^{k+1}},$$

что и доказывает (16).

Из (15), (16) следует, что при  $x \in D(A)$  можно перейти к пределу под знаком интеграла в равенстве

$$t^k Y_{k,n}(t)x - t^k e^{-nt}x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} \left( F_{k,n}(\lambda) - \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} I \right) x d\lambda, \quad \sigma > \omega_1 > 0,$$

и мы приходим к равенству (12). ■

Как следует из неравенства (9), последовательность  $Y_{k,n}(t)$  равномерно по  $n$  ограничена и по лемме 2 сильно сходится на плотном в  $E$  множестве  $D(A)$ . В силу теоремы Банаха-Штейнгауза уже для любого  $x \in E$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_{k,n}(t)x = Y_k(t)x. \quad (17)$$

При этом определяемая равенством (17) операторная функция  $Y_k(t)$  обладает следующими свойствами:

$$Y_k(0) = I, \quad (18)$$

$$\|Y_k(t)\| \leq M_1 e^{\omega_1 t}, \quad \omega_1 > \omega > 0. \quad (19)$$

Стало быть, к операторной функции  $t^k Y_k(t)$  можно применить преобразование Лапласа и, учитывая (9), (14) и (19), из (10) получим

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^k Y_k(t) dt = F_k(\lambda), \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega_1. \quad (20)$$

**Лемма 3.** Равенство (12) справедливо для любого  $x \in E$ , если интеграл в правой части (12) существует.

□ Действительно, если интеграл в правой части (12) существует, то положив  $x_n = \frac{1}{\Gamma(k+1)} n^{k+1} F_k(n)x \in D(A)$ , в силу леммы 2 получим

$$t^k Y_k(t)x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} F_k(\lambda)x_n d\lambda = \frac{n^{k+1} F_k(n)}{2\pi i \Gamma(k+1)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} F_k(\lambda)x d\lambda. \quad (21)$$

Учитывая лемму 1, после перехода к пределу в (21), получим требуемое утверждение. ■



**Лемма 4.** Равенство  $AY_k(t)x = Y_k(t)Ax$  справедливо для любого  $x \in D(A)$ .

□ Поскольку  $F_k(n) = \Gamma(k + 1)nR^{1+k/2}(n^2)$ , то, очевидно,  $F_k(n) \in D(A)$  и  $AF_k(n)x = F_k(n)Ax$ .

По индукции для  $m = 1, 2, \dots$  имеем  $F_k^{(m)}(n) \in D(A)$  и  $AF_k^{(m)}(n)x = F_k^{(m)}(n)Ax$ . Следовательно, из (8) следует, что  $Y_{k,n}(t)x \in D(A)$  и  $AY_{k,n}(t)x = Y_{k,n}(t)Ax$ , и, в силу замкнутости оператора  $A$ , получаем требуемое утверждение. ■

**Лемма 5.** Для определяемой равенствами (17), (8) операторной функции  $Y_k(t)$  справедливо соотношение

$$k \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t s^{k-1} Y_k(s) ds dt = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda} R^{k/2}(\lambda^2), \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega_1.$$

□ Свойства изображения интеграла и интегрирование изображения для преобразования Лапласа, а также соотношение (20) позволяют записать равенства

$$\begin{aligned} k \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t s^{k-1} Y_k(s) ds dt &= \frac{k}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{k-1} Y_k(t) dt = \frac{k}{\lambda} \int_\lambda^\infty F_k(z) dz = \\ &= \frac{k \Gamma(k+1)}{\lambda} \int_\lambda^\infty z R^{1+k/2}(z^2) dz = \frac{k \Gamma(k+1)}{2\lambda} \int_{\lambda^2}^\infty R^{1+k/2}(\zeta) d\zeta = \\ &= -\frac{\Gamma(k+1)}{\lambda} R^{k/2}(\zeta) \Big|_{\lambda^2}^\infty = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda} R^{k/2}(\lambda^2), \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega_1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Лемма 6.** Пусть  $x \in D(A)$ , тогда для определяемой равенствами (17), (8) операторной функции  $Y_k(t)$  справедливо соотношение

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^k Y_k(t) Ax dt = \lambda^2 F_k(\lambda)x - \Gamma(k+1)\lambda R^{k/2}(\lambda^2)x, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega_1.$$

□ В силу леммы 4 и равенства (20) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^k AY_k(t)x dt &= F_k(\lambda)Ax = \Gamma(k+1)\lambda R^{1+k/2}(\lambda^2)Ax = \\ &= -\Gamma(k+1) (\lambda R^{k/2}(\lambda^2)R(\lambda^2)(-\lambda^2 I + \lambda^2 I - A) x = \lambda^2 F_k(\lambda)x - \Gamma(k+1)\lambda R^{k/2}(\lambda^2)x. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Следующая лемма 7 является непосредственным следствием лемм 3, 5 и 6.

**Лемма 7.** Пусть  $x \in D(A)$ , тогда для определяемой равенствами (17), (8) операторной функции  $Y_k(t)$  справедливо соотношение

$$\int_0^t \int_0^\tau s^k Y_k(s) Ax ds d\tau = t^k Y_k(t)x - k \int_0^t s^{k-1} Y_k(s)x ds. \quad (22)$$



□ Действительно, в силу леммы 6 справедливо равенство

$$\frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^k A Y_k(t) x \, dt + \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda} R^{k/2}(\lambda^2) x = F_k(\lambda) x, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega_1,$$

из которого, учитывая леммы 3 и 5, выводим требуемое соотношение (22). ■

С помощью доказанных лемм 1 – 7 установим достаточное условие равномерной корректности задачи (1), (2). Напомним, что требования, обеспечивающие равномерную корректность, приведены в определении 2.

**Теорема 2.** Пусть  $A \in G$  и выполнены оценки (6). Тогда задача (1), (2) равномерно корректна и при этом ОФБ  $Y_k(t)$  определяется равенствами (17), (8), в частности, на элементах из области определения оператора  $A$  она имеет вид

$$Y_k(t) u_0 = \frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i} t^k \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} \lambda R^{1+k/2}(\lambda^2) u_0 \, d\lambda, \quad u_0 \in D(A), \quad \sigma > \omega. \quad (23)$$

□ Нам осталось проверить, что построенная с помощью равенств (17), (8) операторная функция  $Y_k(t)$ , удовлетворяет всем требованиям определения 2.

Из установленного в лемме 7 равенства (22) выводим равенства

$$\int_0^t s^k Y_k(s) A u_0 \, ds = t^k Y_k'(t) u_0, \quad (24)$$

$$t^k Y_k(t) A u_0 = k t^{k-1} Y_k'(t) u_0 + t^k Y_k''(t) u_0,$$

следовательно,  $Y_k(t) u_0$  удовлетворяет уравнению (1). Равенство (18) обеспечивает выполнение начального условия (2). Единственность же построенного решения задачи (1), (2) фактически доказана в теореме 1 [7], если положить  $w(t, s) = f(Y_k(s)(u_1(t) - u_2(t)))$ .

Операторная функция  $Y_k(t)$  коммутирует с оператором  $A$  (лемма 4). Ее оценка вида (3) установлена в (19), а оценка вида (4) вытекает из (24) и (19).

Таким образом, операторная функция  $Y_k(t)$  является ОФБ для задачи (1), (2), а задача (1), (2) равномерно корректна. Завершая доказательство теоремы, укажем, что равенство (23) установлено в лемме 2. ■

Доказанные теоремы 1 и 2 объединяются в следующий критерий.

**Теорема 3** (критерий равномерной корректности). Пусть оператор  $A$  является генератором аналитической  $C_0$ -полугруппы. Для того чтобы задача (1), (2) была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы при некоторых постоянных  $M \geq 1$ ,  $\omega \geq 0$  число  $\lambda^2$  с  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$  принадлежало резольвентному множеству оператора  $A$  и для дробной степени резольвенты оператора  $A$  были выполнены оценки

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda R^{1+k/2}(\lambda^2)) \right\| \leq \frac{M \Gamma(k+n+1)}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{k+n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Установим далее еще некоторые свойства ОФБ  $Y_k(t)$ .





**Лемма 8.** Пусть  $u_0 \in D(A)$ , тогда для операторной функции  $Y_k(t)$  справедливо соотношение

$$Y_k'(t)u_0 = \frac{t}{k+1}Y_{k+2}(t)Au_0, \quad (26)$$

□ Пусть  $u_0 \in D(A^2)$ , тогда, учитывая (24), непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция  $h(t) = \frac{1}{t}Y_k'(t)u_0$  является решением уравнения

$$h''(t) + \frac{k+2}{t}h'(t) = Ah(t), \quad t > 0, \quad (27)$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}Y_k'(t)u_0 = \frac{1}{k+1}Au_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t}Y_k'(t)u_0 \right)' = 0, \quad u_0 \in D(A). \quad (28)$$

Действительно,

$$h'(t) = \frac{1}{t}Y_k(t)Au_0 - \frac{k+1}{t^{k+2}} \int_0^t s^k Y_k(s)Au_0 ds, \quad (29)$$

$$h''(t) = \frac{1}{t}Y_k'(t)Au_0 - \frac{2k+2}{t^2}Y_k(t)Au_0 - \frac{(k+1)(k+2)}{t^{k+3}} \int_0^t s^k Y_k(s)Au_0 ds, \quad (30)$$

и из (29), (30) выводим (27).

Первое из равенств (28) очевидно, в силу (24). А второе вытекает из (29), поскольку

$$h'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{k+2}} \left( t^{k+1}Y_k(t)Au_0 - (k+1) \int_0^t s^k Y_k(s)Au_0 ds \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_k'(t)Au_0}{k+2} = 0.$$

На основании теоремы о единственности решения задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, мы приходим к равенству (26), которое справедливо пока для  $u_0 \in D(A^2)$ .

Если  $u_0 \in D(A)$ , то, применяя доказанное утверждение к элементу  $w_0 = R(\mu^2)u_0$ ,  $\mu > \omega$ , мы установим справедливость равенства (26) уже для  $u_0 \in D(A)$ .

Отметим также, что из (26) вытекает и равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} Y_k''(t)u_0 = \frac{1}{k+1}Au_0, \quad u_0 \in D(A). \quad \blacksquare$$

**Теорема 4.** Пусть задача (1), (2) равномерно корректна и  $Y_k(t)$  является соответствующей ОФБ. Тогда имеет место равенство

$$Y_k(t)Y_k(s) = T_s^t Y_k(s),$$

где оператор обобщённого сдвига  $T_s^t$ , соответствующий уравнению (1), определяется равенством (см. [9])

$$T_s^t H(s) = \frac{1}{B(k/2, 1/2)} \int_0^\pi H \left( \sqrt{s^2 + t^2 - 2st \cos \varphi} \right) \sin^{k-1} \varphi d\varphi.$$



□ Введем в рассмотрение функцию двух переменных  $w(t, s) = f(Y_k(t)Y_k(s)u_0)$ , где  $f \in E^*$  ( $E^*$  — сопряженное пространство),  $t, s \geq 0$ . Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{k}{t} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{k}{s} \frac{\partial w}{\partial s}, \quad t, s > 0$$

и условиям

$$w(0, s) = f(Y_k(s)u_0), \quad \frac{\partial w(0, s)}{\partial t} = 0.$$

Полученная задача в классе дважды непрерывно дифференцируемых при  $t, s \geq 0$  функций рассматривалась в [9] (§5, п.2). Из установленной в [9] явной формулы для решения указанной задачи получаем  $w(t, s) = T_s^t f(Y_k(s)u_0) = f(T_s^t Y_k(s)u_0)$ , откуда, в силу произвольности  $f \in E^*$  и вытекает требуемое равенство. ■

### Литература

1. Fattorini Н.О. Ordinary differential equations in linear topological space, II // J. Different. Equat. – 1969. – 6. – P.50-70.
2. Sova M. Cosine operator functions // Rozpr. mat. – 1966. – № 49. – P.1-47.
3. Da Prato G., Giusti E. Una caratterizzazione dei generatori di funzioni coseno astratte // Boll. Union. Mat. Ital. – 1967. – №22. – P.357-362.
4. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Киев: Выща школа, 1989. bibitemУКР  
Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Серия Математический анализ. – М.: ВИНТИ, 1990. – Т.28. – С.87-202.
5. Васильев В.В., Пискарев С.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве II. Теория косинус оператор-функций // [http://www.srcc.msu.su/nivc/english/about/home\\_pages/piskarev/obz2ru.pdf](http://www.srcc.msu.su/nivc/english/about/home_pages/piskarev/obz2ru.pdf)
6. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // Доклады РАН. – 1997. – 352, №5. – С.587-589.
7. Глушак А.В., Покручин О.А. Необходимое условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2012. – №11(130). Вып. 27. – С.29-37.
8. Da Prato G., Iannelli M. Linear integro-differential equations in banach spaces // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova / 1980. – 62. – P.207-219.
9. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. – 1951. – 1, Вып.2(42). – С. 102 – 143.

### SUFFICIENT CONDITION OF THE CAUCHY PROBLEM SOLVABILITY OF ABSTRACT EULER-POISSON-DARBOUX EQUATION

A.V. Glushak, O.A. Pokruchin

Belgorod State University,  
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:  
[Glushak@bsu.edu.ru](mailto:Glushak@bsu.edu.ru), [pokru4in.oleg@yandex.ru](mailto:pokru4in.oleg@yandex.ru)

**Abstract.** The sufficient condition of the Cauchy problem solvability of abstract Euler-Poisson-Darboux equation is proved.

**Key words:** abstract Cauchy problem, Euler-Poisson-Darboux's equation, operator Bessel function, sufficient condition of solvability.



MSC 30E05

## МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ СТРУКТУРА РЕЗОЛЬВЕНТНЫХ МАТРИЦ УПОРЯДОЧЕННЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕВАНЛИННОВСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю.М. Дюкарев

Белгородская государственная сельскохозяйственная академия им. В.Я. Горина,  
ул. Вавилова, 1, Майский, Белгородский р-н, Белгородская обл., 308503, Россия,  
e-mail: yu.dyukarev@karazin.ua

**Аннотация.** В этой статье исследована мультипликативная структура резольвентных матриц упорядоченных интерполяционных задач для неванлинновских функций. Приведен алгоритм пошагового решения упорядоченных интерполяционных задач. Общие построения проиллюстрированы на примерах задачи Неванлинны-Пика и проблемы моментов Гамбургера.

**Ключевые слова:** неванлинновские функции, упорядоченные интерполяционные задачи, факторизация резольвентных матриц, пошаговое решение интерполяционных задач.

**1. Введение.** Интерполяционная задача Неванлинны-Пика впервые была рассмотрена в статьях [1]- [3]. Эти исследования были продолжены в работах многих авторов. Особо отметим статью [4], в которой впервые было получено разложение резольвентной матрицы в произведение матричных множителей Бляшке-Потапова. В статье [4] были использованы идеи и методы В.П. Потапова в мультипликативной теории  $J$ -растягивающих матриц-функций [5]. После статьи [4] появилось большое количество работ, в которых были исследованы мультипликативные структуры резольвентных матриц различных интерполяционных задач для неванлинновских функций и их аналогов (см., например, [6]- [9]). Современное состояние теории интерполяционных задач изложено в монографии [10].

В работах [8], [9], [11] были поставлены и решены обобщённые интерполяционные задачи, которые содержат в себе основные примеры интерполяционных задач для неванлинновских функций и их аналогов. Однако в этих построениях отсутствуют структуры, которые позволяют ввести в рассмотрение пошаговое решение интерполяционных задач, мультипликативные разложения резольвентных матриц, ортонормированные семейства функций и связанные с этими объектами проблемы теории интерполяции и ее приложений. Для включения этих вопросов в контекст интерполяционных задач в статьях [12], [13], [14] были введены упорядоченные последовательности обобщённых интерполяционных задач для неванлинновских и стилтьесовских функций. Основными результатами этой статьи являются мультипликативное разложение резольвентных матриц последовательности обобщённых интерполяционных задач для неванлинновских функций (теорема 2) и пошаговое решение упорядоченных обобщённых интерполяционных задач (теорема 3). В качестве примеров рассмотрены задача Неванлинны-Пика и проблема моментов Гамбургера.

**2. Основные определения и обозначения.** Для верхней и нижней полуплоскости введем обозначения  $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  и  $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z < 0\}$  соответственно и



пусть  $\mathbb{C}_{\pm} = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ . Через  $\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$  обозначим множество ограниченных линейных операторов, действующих из конечномерного гильбертова пространства  $\mathcal{H}$  в сепарабельное гильбертово пространство  $\mathcal{G}$ , а через  $\{\mathcal{G}\}$  обозначим множество ограниченных операторов в  $\mathcal{G}$ . Множество ограниченных эрмитовых операторов в  $\mathcal{G}$  обозначим через  $\{\mathcal{G}\}_H$ . Эрмитов оператор  $A \in \{\mathcal{G}\}_H$  называется неотрицательным, если  $(f, Af) \geq 0, \forall f \in \mathcal{G}$ . Множество неотрицательных операторов в  $\mathcal{G}$  обозначим через  $\{\mathcal{G}\}_{\geq}$ . Неотрицательный оператор  $A \in \{\mathcal{G}\}_{\geq}$  называется положительным, если он обратим и  $A^{-1} \in \{\mathcal{G}\}$ . Множество положительных операторов в  $\mathcal{G}$  обозначим через  $\{\mathcal{G}\}_{>}$ . Для эрмитовых операторов  $A, B \in \{\mathcal{G}\}_H$  неравенство  $A \geq B$  (соотв.  $A > B$ ) означает, что  $A - B \in \{\mathcal{G}\}_{\geq}$  (соотв.  $A - B \in \{\mathcal{G}\}_{>}$ ).

Тождественный и нулевой операторы в гильбертовом пространстве  $\mathcal{G}$  обозначим через  $I_{\mathcal{G}}$  и  $O_{\mathcal{G}}$ . Нулевой оператор, действующий из гильбертова пространства  $\mathcal{G}_1$  в гильбертово пространство  $\mathcal{G}_2$ , обозначим через  $O_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}$ . Для упрощения записи мы часто будем опускать нижние индексы у тождественного и нулевого операторов.

Пусть операторы  $K \in \{\mathcal{G}\}_{\geq}, T \in \{\mathcal{G}\}, u, v \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$  удовлетворяют Основному Тождеству (ОТ)

$$TK - KT^* = vu^* - uv^*. \quad (1)$$

И пусть, далее, оператор-функция (ОФ)  $R_T(z) = (I_{\mathcal{G}} - zT)^{-1}$  мероморфна в  $\mathbb{C}$ . Множество особых точек ОФ  $R_T(z)$  обозначим через  $\mathcal{Z}$ , а множество комплексно сопряжённых точек обозначим через  $\bar{\mathcal{Z}} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \mathcal{Z}\}$ .

**Определение 1.** ОФ  $w : \mathbb{C}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}$  называется неванлинновской, если она голоморфна в  $\mathbb{C}_+$  и  $\{w(z) - w^*(z)\}/2i \geq O_{\mathcal{H}}, \forall z \in \mathbb{C}_+$ .

Класс всех неванлинновских ОФ обозначим  $\mathcal{R}$ .

**Определение 2.** Обобщённой интерполяционной задачей с масштабными пространствами  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{G}$  называется упорядоченный набор операторов

$$\mathcal{P} = \{K, T, u, v\}, \quad (2)$$

удовлетворяющий ОТ (1).

ОФ  $w \in \mathcal{R}$  называется решением интерполяционной задачи (2), если она удовлетворяет следующему Основному Матричному Неравенству (ОМН) В.П. Потапова

$$\begin{pmatrix} K & R_T(z) \{vw(z) - u\} \\ \{vw(z) - u\}^* R_T^*(z) & \{w(z) - w^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{pmatrix} \geq O_{\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}}, z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{Z}. \quad (3)$$

Типичными обобщёнными интерполяционными задачами для неванлинновских ОФ являются задача Неванлинны-Пика, задача Каратеодори, проблема моментов Гамбургера и другие интерполяционные задачи для неванлинновских функций (см. [4]- [6]). Современное состояние теории интерполяционных задач для неванлинновских функций имеется в монографии [10].

**Определение 3.** Обобщённая интерполяционная задача  $\mathcal{P} = \{K, T, u, v\}$  называется вполне неопределённой, если

$$K \in \{\mathcal{G}\}_{>}, \quad vh = 0 \Leftrightarrow h = 0. \quad (4)$$



Далее в этой статье мы будем рассматривать только вполне неопределённые обобщённые интерполяционные задачи. Множество всех решений обобщённой интерполяционной задачи (2) обозначим через  $\mathcal{F}$ . Известно (см. [8]- [9]), что при сделанных предположениях множество  $\mathcal{F}$  не пусто.

Пусть дана бесконечная последовательность гильбертовых пространств  $\{\mathfrak{h}^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ . Рассмотрим ортогональные суммы этих пространств

$$\mathfrak{G}^{(l)} = \mathfrak{h}^{(1)} \oplus \mathfrak{h}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}^{(l)}. \quad (5)$$

Каждое из пространств  $\mathfrak{G}^{(k)}$  можно рассматривать и как подпространство в любом пространстве  $\mathfrak{G}^{(l)}$  при  $l > k$ . Мы будем отождествлять векторы  $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$  из  $\mathfrak{G}^{(l)}$  с векторами  $(x_1, \dots, x_k)$  из  $\mathfrak{G}^{(k)}$ . Сужения операторов в пространстве  $\mathfrak{G}^{(l)}$  на подпространство  $\mathfrak{G}^{(k)}$  мы тоже будем отождествлять с операторами в пространстве  $\mathfrak{G}^{(k)}$ .

Пусть теперь для всех  $l \geq 1$  определены обобщённые вполне неопределённые интерполяционные задачи

$$\mathcal{P}^{(l)} = \{K^{(l)}, T^{(l)}, u^{(l)}, v^{(l)}\} \quad (6)$$

с масштабными пространствами  $\mathfrak{G}^{(l)}$ ,  $\mathcal{H}$ .

Пусть произвольные натуральные числа  $l$  и  $k$  удовлетворяют неравенствам  $1 \leq k < l$ . Рассмотрим ортогональное разложение масштабных пространств интерполяционной задачи (6)

$$\mathfrak{G}^{(l)} = \mathfrak{G}^{(k)} \oplus (\mathfrak{G}^{(l)} \ominus \mathfrak{G}^{(k)}). \quad (7)$$

**Определение 4.** Пусть дана последовательность обобщённых интерполяционных задач (6) и матричные представления операторов интерполяционной задачи  $\mathcal{P}^{(l)}$ , построенные по разложению (7), имеют вид

$$K^{(l)} = \begin{pmatrix} \tilde{K}^{(k)} & B^{(l,k)} \\ B^{(l,k)*} & C^{(l,k)} \end{pmatrix}, \quad T^{(l)} = \begin{pmatrix} \tilde{T}^{(k)} & O_{\mathfrak{G}^{(l)} \ominus \mathfrak{G}^{(k)} \mathfrak{G}^{(k)}} \\ T_{21}^{(l,k)} & T_{22}^{(l,k)} \end{pmatrix},$$

$$v^{(l)} = \begin{pmatrix} \tilde{v}^{(k)} \\ \tilde{v}^{(l,k)} \end{pmatrix}, \quad u^{(l)} = \begin{pmatrix} \tilde{u}^{(k)} \\ \tilde{u}^{(l,k)} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Последовательность интерполяционных задач (6) называется упорядоченной, если операторы  $\tilde{K}^{(k)}$ ,  $\tilde{T}^{(k)}$ ,  $\tilde{v}_1^{(k)}$ ,  $\tilde{u}^{(k)}$ , рассматриваемые как операторы в пространствах  $\mathfrak{G}^{(k)}$  и  $\mathcal{H}$ , совпадают с операторами  $K^{(k)}$ ,  $T^{(k)}$ ,  $v^{(k)}$ ,  $u^{(k)}$  интерполяционной задачи  $\mathcal{P}^{(k)}$ .

Для упрощения записи в формулах (8) мы будем обозначать  $\tilde{K}^{(l)}$  через  $K^{(l)}$  и т.д. Упорядоченную последовательность обобщённых интерполяционных задач обозначим через  $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathbb{N}}$ . В этом контексте обобщённые интерполяционные задачи  $\mathcal{P}^{(l)}$  называются *усеченными интерполяционными задачами*. В обозначения объектов, связанных с усечённой задачей  $\mathcal{P}^{(l)}$ , введем верхний индекс  $(l)$ . Имеют место включения  $\mathcal{F}^{(l+1)} \subset \mathcal{F}^{(l)}$ . Упорядоченные последовательности интерполяционных задач были введены для неванлинновских функций в статье [12], а для стилтьесовских функций – в статье [13].



Рассмотрим упорядоченную последовательность обобщённых интерполяционных задач  $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathbb{N}}$ . Резольвентной матрицей для усечённой задачи  $\mathcal{P}^{(l)}$  называется

$$U^{(l)}(z) = \begin{pmatrix} \alpha^{(l)}(z) & \beta^{(l)}(z) \\ \gamma^{(l)}(z) & \delta^{(l)}(z) \end{pmatrix} = I_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} + z \begin{pmatrix} v^{(l)*} \\ u^{(l)*} \end{pmatrix} R_{T^{(l)*}}(z) K^{(l)-1} \begin{pmatrix} u^{(l)} & -v^{(l)} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Пара мероморфных в  $\mathbb{C}_+$  ОФ  $\begin{pmatrix} p(z) \\ q(z) \end{pmatrix}$ , принимающих значения в  $\{\mathcal{H}\}$ , называется неванлинновской, если

$$p(z)p^*(z) + q(z)q^*(z) > O, \quad i(-p^*(z)q(z) + q^*(z)p(z)) \geq O.$$

Две неванлинновские пары  $\begin{pmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} p_2(z) \\ q_2(z) \end{pmatrix}$  называются эквивалентными, если существует мероморфная и мероморфно обратимая в  $\mathbb{C}_+$  ОФ  $Q(z)$  такая, что

$$\begin{pmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2(z) \\ q_2(z) \end{pmatrix} Q(z).$$

Классы эквивалентности неванлинновских ОФ обозначим через  $\overline{\mathcal{R}}$ .

**Теорема 1.** Пусть операторы  $\alpha^{(l)}(z)$ ,  $\beta^{(l)}$ ,  $\gamma^{(l)}(z)$ ,  $\delta^{(l)}(z)$  являются блоками резольвентной матрицы из представления (9). Тогда формула

$$w(z) = (\gamma^{(l)}(z)p(z) + \delta^{(l)}(z)q(z)) \cdot (\alpha^{(l)}(z)p(z) + \beta^{(l)}(z)q(z))^{-1} \quad (10)$$

устанавливает биективное соответствие между  $\mathcal{F}^{(l)}$  и  $\overline{\mathcal{R}}$ .

Доказательство этой теоремы имеется, например, в статьях [6], [8], [9].

**3. Мультипликативная структура резольвентной матрицы.** Пусть в представлении масштабных пространств (7)  $k = l - 1$ . Тогда

$$\mathcal{G}^{(l)} = \mathcal{G}^{(l-1)} \oplus \mathfrak{h}^{(l)}, \quad l \geq 2.$$

Для этого представления введём блочные обозначения для операторов

$$K^{(l)} = \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & B^{(l)} \\ B^{(l)*} & C^{(l)} \end{pmatrix}, \quad v^{(l)} = \begin{pmatrix} v^{(l-1)} \\ \check{v}^{(l)} \end{pmatrix}, \quad u^{(l)} = \begin{pmatrix} u^{(l-1)} \\ \check{u}^{(l)} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

И пусть подпространство  $\mathcal{G}^{(l-1)} \subset \mathcal{G}^{(l)}$  является инвариантным для оператора  $T^{(l)} \in \{\mathcal{G}^{(l)}\}$ . Тогда имеют место представления

$$T^{(l)} = \begin{pmatrix} T^{(l-1)} & O \\ T_{21}^{(l)} & \widehat{T}^{(l)} \end{pmatrix}, \quad R_{T^{(l)}}(z) = \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)}}(z) & O \\ zR_{\widehat{T}^{(l)}}(z)T_{21}^{(l)}R_{T^{(l-1)}}(z) & R_{\widehat{T}^{(l)}}(z) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Здесь  $R_{T^{(l)}}(z) = (I - zT^{(l)})^{-1}$ ,  $R_{T^{(l-1)}}(z) = (I - zT^{(l-1)})^{-1}$ ,  $R_{\widehat{T}^{(l)}}(z) = (I - z\widehat{T}^{(l)})^{-1}$ .



Легко видеть, что выполнены равенства

$$K^{(l)} = \begin{pmatrix} I & O \\ B^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & O \\ O & \widehat{K}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ O & I \end{pmatrix} > O. \quad (13)$$

Здесь

$$\widehat{K}^{(l)} = C^{(l)} - B_r^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} > O, \quad l > 1.$$

Отсюда

$$K^{(l)^{-1}} = \begin{pmatrix} K^{(l-1)^{-1}} & O \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} -B^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix}. \quad (14)$$

И пусть, далее,

$$\widehat{v}^{(l)} = -B^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} v^{(l-1)} + \check{v}^{(l)}, \quad \widehat{u}^{(l)} = -B^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} u^{(l-1)} + \check{u}^{(l)}, \quad l > 1. \quad (15)$$

Подставим в ОТ (1) блочные представления (11) - (13). Получим

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} T^{(l-1)} & O \\ T_{21}^{(l)} & \widehat{T}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ B^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & O \\ O & \widehat{K}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ O & I \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} I & O \\ B^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & O \\ O & \widehat{K}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(l-1)*} & T_{21}^{(l)*} \\ O & \widehat{T}^{(l)*} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} v^{(l-1)} \\ \check{v}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(l-1)*} & \check{u}^{(l)*} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{(l-1)} \\ \check{u}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} & \check{v}^{(l)*} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Умножим это равенство слева и справа соответственно на операторы

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -B^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I & -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ O & I \end{pmatrix}.$$

С учётом (15) получим

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I & O \\ -B^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(l-1)} & O \\ T_{21}^{(l)} & \widehat{T}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ B^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & O \\ O & \widehat{K}^{(l)} \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & O \\ O & \widehat{K}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(l-1)*} & T_{21}^{(l)*} \\ O & \widehat{T}^{(l)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ O & I \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} v^{(l-1)} \\ \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(l-1)*} & \widehat{u}^{(l)*} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{(l-1)} \\ \widehat{u}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} & \widehat{v}^{(l)*} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} T^{(l-1)} & O \\ Y^{(l)} & \widehat{T}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & O \\ O & \widehat{K}^{(l)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & O \\ O & \widehat{K}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(l-1)*} & Y^{(l)*} \\ O & \widehat{T}^{(l)*} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} v^{(l-1)} u^{(l-1)*} & v^{(l-1)} \widehat{u}^{(l)*} \\ \widehat{v}^{(l)} u^{(l-1)*} & \widehat{v}^{(l)} \widehat{u}^{(l)*} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{(l-1)} v^{(l-1)*} & u^{(l-1)} \widehat{v}^{(l)*} \\ \widehat{u}^{(l)} v^{(l-1)*} & \widehat{u}^{(l)} \widehat{v}^{(l)*} \end{pmatrix}. \quad (16) \end{aligned}$$



Здесь

$$Y^{(l)} = -B^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} T^{(l-1)} + T_{21}^{(l)} + \widehat{T}^{(l)} B^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}}. \quad (17)$$

Рассмотрим ОФ

$$\begin{aligned} b^{(1)}(z) &= U^{(1)}(z), \\ b^{(l)}(z) &= I_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)*} \\ \widehat{u}^{(l)*} \end{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}, \quad l > 1. \end{aligned} \quad (18)$$

**Теорема 2.** Пусть дана упорядоченная последовательность обобщённых вполне неопределённых интерполяционных задач для неванлинновских функций  $(\mathcal{P}^{(l)})_{l=1}^{\infty}$  и для всех  $l \geq 2$  подпространства  $\mathcal{G}^{(l-1)} \subset \mathcal{G}^{(l)}$  являются инвариантными для операторов  $T^{(l)} \in \{\mathcal{G}^{(l)}\}$ . Тогда резольвентные матрицы (9) допускают представления

$$U^{(l)}(z) = b^{(1)}(z) \cdot b^{(2)}(z) \cdot \dots \cdot b^{(l)}(z), \quad l \geq 1. \quad (19)$$

Здесь ОФ  $b^{(l)}(z)$  определены формулами (18).

□ Доказательство формул (19) проведем индукцией по  $l$ . При  $l = 1$  формула (19) очевидна. Пусть формулы (19) выполнены для всех  $l < n$ . Тогда для  $l = n$  имеем

$$\begin{aligned} U^{(l)}(z) &= I + z \begin{pmatrix} v^{(l)*} \\ u^{(l)*} \end{pmatrix} R_{T^{(l)*}}(z) K^{(l)-1} \begin{pmatrix} u^{(l)} & -v^{(l)} \end{pmatrix} \\ &= I + z \begin{pmatrix} v^{(l)*} \\ u^{(l)*} \end{pmatrix} R_{T^{(l)*}}(z) \begin{pmatrix} K^{(l-1)^{-1}} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(l-1)} & -v^{(l-1)} \\ \check{u}^{(l)} & -\check{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\ &+ z \begin{pmatrix} v^{(l)*} \\ u^{(l)*} \end{pmatrix} R_{T^{(l)*}}(z) \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} -B^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} u^{(l-1)} & -v^{(l-1)} \\ \check{u}^{(l)} & -\check{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\ &= I + z \begin{pmatrix} v^{(l)*} \\ u^{(l)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) & z R_{T^{(l-1)*}}(z) T_{21}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(l-1)^{-1}} \\ O \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} u^{(l-1)} & -v^{(l-1)} \end{pmatrix} \\ &+ z \begin{pmatrix} v^{(l)*} \\ u^{(l)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) & z R_{T^{(l-1)*}}(z) T_{21}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \\ &= I + z \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} & \check{v}^{(l)*} \\ u^{(l-1)*} & \check{u}^{(l)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) K^{(l-1)^{-1}} \\ O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(l-1)} & -v^{(l-1)} \end{pmatrix} \\ &+ z \begin{pmatrix} v^{(l)*} \\ u^{(l)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) & z R_{T^{(l-1)*}}(z) T_{21}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \\ &\quad \times \widehat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 &= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} & \check{v}^{(l)*} \\ u^{(l-1)*} & \check{u}^{(l)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) & zR_{T^{(l-1)*}}(z)T_{21}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \\ O & R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \end{pmatrix} \\
 &\times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \hat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(l-1)} & -\hat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \\
 &= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} & \check{v}^{(l)*} \\ u^{(l-1)*} & \check{u}^{(l)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) & zR_{T^{(l-1)*}}(z)T_{21}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \\ O & O \end{pmatrix} \\
 &\times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \hat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(l-1)} & -\hat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \\
 &+ z \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} & \check{v}^{(l)*} \\ u^{(l-1)*} & \check{u}^{(l)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & O \\ O & R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \hat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(l-1)} & -\hat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \\
 &= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} \\ u^{(l-1)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) & zR_{T^{(l-1)*}}(z)T_{21}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \\ O & O \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \hat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(l-1)} & -\hat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \\
 &+ z \begin{pmatrix} \check{v}^{(l)*} \\ \check{u}^{(l)*} \end{pmatrix} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(l-1)} & -\hat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 U^{(l)}(z) &= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} \\ u^{(l-1)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) & zR_{T^{(l-1)*}}(z)T_{21}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \\ O & O \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \hat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(l-1)} & -\hat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \\
 &+ z \begin{pmatrix} \check{v}^{(l)*} \\ \check{u}^{(l)*} \end{pmatrix} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(l-1)} & -\hat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix}. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
 U^{(l-1)}(z)b^{(l)}(z) &= U^{(l-1)}(z) \\
 &\times \left\{ \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \hat{v}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{u}^{(l)} & -\hat{v}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{v}^{(l)} \\ \hat{u}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{u}^{(l)} & -\hat{u}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \right\} \\
 &= U^{(l-1)}(z) + zU^{(l-1)}(z) \begin{pmatrix} \hat{v}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{u}^{(l)} & -\hat{v}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{v}^{(l)} \\ \hat{u}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{u}^{(l)} & -\hat{u}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\
 &= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} \hat{v}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{u}^{(l)} & -\hat{v}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{v}^{(l)} \\ \hat{u}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{u}^{(l)} & -\hat{u}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\
 &+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) K^{(l-1)^{-1}} u^{(l-1)} & -v^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) K^{(l-1)^{-1}} v^{(l-1)} \\ u^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) K^{(l-1)^{-1}} u^{(l-1)} & -u^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) K^{(l-1)^{-1}} v^{(l-1)} \end{pmatrix} \\
 &\times \begin{pmatrix} \hat{v}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{u}^{(l)} & -\hat{v}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{v}^{(l)} \\ \hat{u}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{u}^{(l)} & -\hat{u}^{(l)*} R_{\hat{T}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \hat{v}^{(l)} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\
&+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) K^{(l-1)-1} & O \\ O & u^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) K^{(l-1)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(l-1)} & -v^{(l-1)} \\ u^{(l-1)} & -v^{(l-1)} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)*} & -\widehat{v}^{(l)*} \\ \widehat{u}^{(l)*} & -\widehat{u}^{(l)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & O \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\
&= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\
&+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) K^{(l-1)-1} & O \\ O & u^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) K^{(l-1)-1} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} u^{(l-1)} \widehat{v}^{(l)*} - v^{(l-1)} \widehat{u}^{(l)*} & -u^{(l-1)} \widehat{v}^{(l)*} + v^{(l-1)} \widehat{u}^{(l)*} \\ u^{(l-1)} \widehat{v}^{(l)*} - v^{(l-1)} \widehat{u}^{(l)*} & -u^{(l-1)} \widehat{v}^{(l)*} + v^{(l-1)} \widehat{u}^{(l)*} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & O \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\
&= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\
&+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) K^{(l-1)-1} & O \\ O & u^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) K^{(l-1)-1} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} K^{(l-1)} Y^{(l)*} & -K^{(l-1)} Y^{(l)*} \\ K^{(l-1)} Y^{(l)*} & -K^{(l-1)} Y^{(l)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & O \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\
&= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\
&+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) & O \\ O & u^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} Y^{(l)*} \begin{pmatrix} I & -I \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & O \\ O & R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\
&= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\
&+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) & \\ u^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) & \end{pmatrix} Y^{(l)*} \begin{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & -R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Здесь шестое равенство следует из (16). Таким образом,

$$U^{(l-1)}(z)b^{(l)}(z) = U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \\ \widehat{u}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{u}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} +$$



$$+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) \\ u^{(l-1)*} R_{T^{(l-1)*}}(z) \end{pmatrix} Y^{(l)*} \begin{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{u}^{(l)} & -R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Из формул (20) и (21) имеем

$$\begin{aligned} U^{(l-1)}(z)b_l(z) - U^{(l)}(z) &= U^{(l-1)}(z) + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)*} \\ \widehat{u}^{(l)*} \end{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \\ &+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} \\ u^{(l-1)*} \end{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) Y^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\ &- U^{(l-1)}(z) - z \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} \\ u^{(l-1)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) & zR_{T^{(l-1)*}}(z)T_{21}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)-1} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \\ &- z \begin{pmatrix} \check{v}^{(l)*} \\ \check{u}^{(l)*} \end{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \\ &= z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(l)*} - \check{v}^{(l)*} \\ \widehat{u}^{(l)*} - \check{u}^{(l)*} \end{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \\ &+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} \\ u^{(l-1)*} \end{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) Y^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\ &- z \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} \\ u^{(l-1)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) & zR_{T^{(l-1)*}}(z)T_{21}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)-1} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \\ &= -z \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} \\ u^{(l-1)*} \end{pmatrix} K^{(l-1)-1} B^{(l)} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \\ &+ z^2 \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} \\ u^{(l-1)*} \end{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) Y^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l)} & -\widehat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\ &- z \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} \\ u^{(l-1)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) & zR_{T^{(l-1)*}}(z)T_{21}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} -K^{(l-1)-1} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \widehat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \\ &= -z \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} \\ u^{(l-1)*} \end{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) \\ &\times \left\{ R_{T^{(l-1)*}}^{(-1)}(z) K^{(l-1)-1} B^{(l)} - zY^{(l)*} + \begin{pmatrix} I & zT_{21}^{(l)*} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K^{(l-1)-1} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} R_{\widehat{T}^{(l)*}}^{-1}(z) \right\} \\ &\quad \times R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z) \widehat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \\ &= -z \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} \\ u^{(l-1)*} \end{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times \left\{ (I - zT^{(l-1)*})K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} - z \left( -T^{(l-1)*}K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} + T_{21}^{(l)*} + K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)}\widehat{T}^{(l)*} \right) \right. \\
& \quad \left. - K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)}(I - z\widehat{T}^{(l)*}) + zT_{21}^{(l)*} \right\} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} \\
& = -z \begin{pmatrix} v^{(l-1)*} \\ u^{(l-1)*} \end{pmatrix} R_{T^{(l-1)*}}(z) \\
& \times \left\{ K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} - zT^{(l-1)*}K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} + zT^{(l-1)*}K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} - zT_{21}^{(l)*} - zK^{(l-1)^{-1}}B^{(l)}\widehat{T}^{(l)*} \right. \\
& \quad \left. - K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} + zK^{(l-1)^{-1}}B^{(l)}\widehat{T}^{(l)*} + zT_{21}^{(l)*} \right\} R_{\widehat{T}^{(l)*}}(z)\widehat{K}^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(l-1)} & -\widehat{v}^{(l-1)} \end{pmatrix} = O.
\end{aligned}$$

Здесь третье равенство следует из (15). Следовательно,  $U^{(l)}(z) = U^{(l-1)}(z)b_l(z)$ . Отсюда и из предположения индукции вытекает формула (19). ■

Сравнивая 22-блоки в левой и правой части (16) получим индуцированные ОТ

$$\widehat{T}^{(l)}\widehat{K}^{(l)} - \widehat{K}^{(l)}\widehat{T}^{(l)*} = \widehat{v}^{(l)}\widehat{u}^{(l)*} - \widehat{u}^{(l)}\widehat{v}^{(l)*}, \quad l > 1. \quad (22)$$

Отсюда и из неравенства  $\widehat{K}^{(l)} > O$  следует, что для всех  $l > 1$  определены обобщённые интерполяционные задачи

$$\widehat{\mathcal{P}}^{(l)} = \{\widehat{K}^{(l)}, \widehat{T}^{(l)}, \widehat{u}^{(l)}, \widehat{v}^{(l)}\} \quad (23)$$

с масштабными пространствами  $\widehat{\mathcal{G}}^{(l)}$ ,  $\mathcal{H}$ . Будем считать, что  $\widehat{v}^{(l)}h = 0 \Leftrightarrow h = 0$ . Тогда все задачи (23) являются вполне неопределёнными.

ОФ  $b^{(l)}(z)$ ,  $l > 1$  являются резольвентными матрицами для вполне неопределённых задач (23) и ОФ  $b^{(1)}(z) = U^{(1)}(z)$  является резольвентной матрицей для вполне неопределённой задачи  $\mathcal{P}^{(1)} = \{K^{(1)}, T^{(1)}, u^{(1)}, v^{(1)}\}$ . По теореме 1 при всех  $l \geq 1$  корректно определены дробно-линейные преобразования

$$b^{(l)}(z)\{p(z), q(z)\} = (c^{(l)}(z)p(z) + d^{(l)}(z)q(z)) \cdot (a^{(l)}(z)p(z) + b^{(l)}(z)q(z))^{-1}$$

над произвольной неванлинновской парой  $\begin{pmatrix} p(z) \\ q(z) \end{pmatrix}$ . Здесь введены естественные блочные представления

$$b^{(l)}(z) = \begin{pmatrix} a^{(l)}(z) & b^{(l)}(z) \\ c^{(l)}(z) & d^{(l)}(z) \end{pmatrix}, \quad l \geq 1.$$

Дробно-линейное преобразование над неванлинновской парой  $\begin{pmatrix} I \\ w(z) \end{pmatrix}$  обозначим через

$$b^{(l)}(z)\{w(z)\} = (c^{(l)}(z) + d^{(l)}(z)w(z)) \cdot (a^{(l)}(z) + b^{(l)}(z)w(z))^{-1}.$$

Из сделанных выше замечаний следует, что для любой неванлинновской пары  $\begin{pmatrix} p(z) \\ q(z) \end{pmatrix}$  корректно определена суперпозиция дробно-линейных преобразований

$$w(z) = b^{(1)}(z)\{\dots b^{(l-1)}(z)\{b^{(l)}(z)\{p(z), q(z)\}\}\dots\}. \quad (24)$$

Здесь ОФ  $w(z)$  является неванлинновской.



Суперпозиция дробно-линейных преобразований (24) снова является дробно-линейным преобразованием с матрицей  $b^{(1)}(z) \cdot b^{(2)}(z) \cdot \dots \cdot b^{(l)}(z)$ . Таким образом, имеем

$$b^{(1)}(z) \cdot b^{(2)}(z) \cdot \dots \cdot b^{(l)}(z) \{p(z), q(z)\} = b^{(1)}(z) \{ \dots b^{(l-1)}(z) \{ b^{(l)}(z) \{p(z), q(z)\} \} \dots \}.$$

Отсюда и из (19) следует, что

$$U^{(l)}(z) \{p(z), q(z)\} = b^{(1)}(z) \{ \dots b^{(l-1)}(z) \{ b^{(l)}(z) \{p(z), q(z)\} \} \dots \}.$$

Из этой формулы и теоремы 1 немедленно следует такая теорема.

**Теорема 3.** Пусть дана упорядоченная последовательность обобщённых вполне неопределённых интерполяционных задач для неванлинновских функций  $(\mathcal{P}^{(l)})_{l=1}^{\infty}$  и для всех  $l \geq 2$  подпространства  $\mathcal{G}^{(l-1)} \subset \mathcal{G}^{(l)}$  являются инвариантными для операторов  $T^{(l)} \in \{\mathcal{G}^{(l)}\}$ . И пусть, далее, ОФ  $b^{(l)}(z)$  определены формулами (18). Тогда формула

$$w(z) = b^{(1)}(z) \{ \dots b^{(l-1)}(z) \{ b^{(l)}(z) \{p(z), q(z)\} \} \dots \} \quad (25)$$

устанавливает биективное соответствие между  $\mathcal{F}^{(l)}$  и  $\overline{\mathcal{R}}$ .

Последняя формула показывает, что множество всех решений  $\mathcal{F}^{(l)}$  интерполяционной задачи  $\mathcal{P}^{(l)}$  может быть описано как формулой (10), так и формулой (25). Описание множества всех решений интерполяционной задачи  $\mathcal{P}^{(l)}$  суперпозицией дробно-линейных преобразований (25) называется *обобщённым пошаговым алгоритмом Шура решения упорядоченных интерполяционных задач*.

**4. Примеры.** В этом разделе мы рассмотрим примеры интерполяционных задач для неванлинновских функций, резольвентные матрицы которых допускают представление в виде произведения простейших множителей Бляшке-Потапова. Таким задачам соответствуют упорядоченные последовательности интерполяционных задач специального вида. А именно, пусть в представлении (5) все пространства  $\mathfrak{h}^{(l)}$  совпадают с  $\mathcal{H}$ , т.е.

$$\mathcal{G}^{(l)} = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_{l \text{ слагаемых}}. \quad (26)$$

И пусть, далее, существует последовательность комплексных чисел  $(\zeta_l)_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  такая, что операторы  $T_1$  и  $\widehat{T}_l$ ,  $l > 1$  (см. (12)) имеют вид

$$T_1 = \zeta_1 I_{\mathcal{H}}, \quad \widehat{T}_l = \zeta_l I_{\mathcal{H}}, \quad l > 1. \quad (27)$$

Отсюда следует, что

$$T_1^* = \bar{\zeta}_1 I_{\mathcal{H}}, \quad R_{T_1^*}(z) = \frac{1}{1 - \bar{\zeta}_1 z} I_{\mathcal{H}}, \quad \widehat{T}_l^* = \bar{\zeta}_l I_{\mathcal{H}}, \quad R_{\widehat{T}_l^*}(z) = \frac{1}{1 - \bar{\zeta}_l z} I_{\mathcal{H}}, \quad l > 1. \quad (28)$$

**Теорема 4.** При сделанных предположениях операторы  $v^{(1)}$ ,  $u^{(1)}$ ,  $\widehat{v}^{(l)}$ ,  $\widehat{u}^{(l)}$ ,  $l > 1$  обратимы. Резольвентные матрицы (9) допускают мультипликативное разложение

$$U^{(l)}(z) = b_1(z) \cdot b_2(z) \cdot \dots \cdot b_l(z), \quad l \geq 1. \quad (29)$$



ОФ  $b^{(l)}(z)$ ,  $l \geq 1$  называются множителями Бляшке-Потапова и задаются формулами

$$b^{(l)}(z) = I + \frac{z}{1 - \bar{\zeta}_l z} \begin{pmatrix} I \\ w^{(l)*} \end{pmatrix} \left( \frac{w^{(l)} - w^{(l)*}}{\zeta_l - \bar{\zeta}_l} \right)^{-1} \begin{pmatrix} -w^{(l)} & I \end{pmatrix}, \quad l \geq 1. \quad (30)$$

Здесь операторы  $w^{(l)}$  имеют вид

$$w^{(1)} = v^{(1)-1} u^{(1)}, \quad w^{(l)} = \hat{v}^{(l)-1} \hat{u}^{(l)}, \quad l > 1 \quad (31)$$

и называются параметрами Шура.

□ В силу (22) и (28) имеем  $(\zeta_l - \bar{\zeta}_l) \hat{K}^{(l)} = \hat{v}^{(l)} \hat{u}^{(l)*} - \hat{u}^{(l)} \hat{v}^{(l)*}$ ,  $l > 1$ . Отсюда следует, что

$$\hat{K}^{(l)} = \frac{\hat{v}^{(l)} \hat{u}^{(l)*} - \hat{u}^{(l)} \hat{v}^{(l)*}}{\zeta_l - \bar{\zeta}_l}. \quad (32)$$

Пусть, например,  $(\zeta_l - \bar{\zeta}_l)/2i > 0$ . Отсюда, из неравенств  $\hat{K}^{(l)} > 0$ , и из (32) следует, что  $(\hat{v}^{(l)} \hat{u}^{(l)*} - \hat{u}^{(l)} \hat{v}^{(l)*})/2i > 0$ , т.е.  $\text{Im}(\hat{v}^{(l)} \hat{u}^{(l)*}) > 0$ . Поэтому произведение операторов  $\hat{v}^{(l)} \hat{u}^{(l)*}$  обратимо и, следовательно, обратимы операторы  $\hat{v}^{(l)}$ ,  $\hat{u}^{(l)}$ ,  $l > 1$ . Обратимость операторов  $v^{(1)}$ ,  $u^{(1)}$  доказывается аналогичным образом.

Для  $l > 1$  имеем

$$\begin{aligned} b^{(l)}(z) &= I + z \begin{pmatrix} \hat{v}^{(l)*} \\ \hat{u}^{(l)*} \end{pmatrix} R_{\hat{v}^{(l)*}}(z) \hat{K}^{(l)-1} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(l)} & -\hat{v}^{(l)} \end{pmatrix} \\ &= I + \frac{z}{1 - \bar{\zeta}_l z} \begin{pmatrix} I \\ \hat{u}^{(l)*} \hat{v}^{(l)*-1} \end{pmatrix} \hat{v}^{(l)*} \left( \frac{\hat{v}^{(l)} \hat{u}^{(l)*} - \hat{u}^{(l)} \hat{v}^{(l)*}}{\zeta_l - \bar{\zeta}_l} \right)^{-1} \hat{v}^{(l)} \begin{pmatrix} \hat{v}^{(l(-1))} \hat{u}^{(l)} & -I \end{pmatrix} \\ &= I + \frac{z}{1 - \bar{\zeta}_l z} \begin{pmatrix} I \\ \hat{u}^{(l)*} \hat{v}^{(l)*-1} \end{pmatrix} \left( \frac{\hat{u}^{(l)*} \hat{v}^{(l)*-1} - \hat{v}^{(l(-1))} \hat{u}^{(l)}}{\zeta_l - \bar{\zeta}_l} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{v}^{(l(-1))} \hat{u}^{(l)} & -I \end{pmatrix} \\ &= I + \frac{z}{1 - \bar{\zeta}_l z} \begin{pmatrix} I \\ w^{(l)*} \end{pmatrix} \left( \frac{w^{(l)} - w^{(l)*}}{\zeta_l - \bar{\zeta}_l} \right)^{-1} \begin{pmatrix} -w^{(l)} & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Формулы (30) доказаны для  $l > 1$ . Для  $l = 1$  формула (30) доказывается аналогичным образом. ■

**Пример 1. Задача Неванлинны-Пика.** В задаче Неванлинны-Пика задана бесконечная последовательность попарно различных комплексных чисел из верхней полуплоскости  $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$  и бесконечная последовательность операторов  $w_1, w_2, \dots, w_k, \dots$ , действующих в пространстве в  $\mathcal{H}$ . Требуется описать множество ОФ  $w : \mathbb{C}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}$  таких, что

$$w(z_k) = w_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad w \in \mathcal{R}. \quad (33)$$

Вместе с задачей (33) с бесконечным числом узлов интерполяции будем рассматривать и усеченные задачи Неванлинны-Пика. В таких задачах фиксируется число  $l \in \mathbb{N}$  и требуется описать множество ОФ  $w : \mathbb{C}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}$  таких, что

$$w(z_j) = w_j, \quad 1 \leq j \leq l, \quad w \in \mathcal{R}. \quad (34)$$



Покажем, что усеченную задачу (34) можно рассматривать как обобщённую интерполяционную задачу неванлинновской типа. В качестве масштабных пространств выберем пространства

$$\mathcal{G}^{(l)} = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_{l \text{ слагаемых}}, \quad \mathcal{H}.$$

Операторы  $K^{(l)}, T^{(l)}, v^{(l)}, u^{(l)}$  зададим естественными матричными представлениями

$$\begin{aligned} T^{(l)} &= \text{diag}\{z_1^{-1}I_{\mathcal{H}}, \dots, z^{(l)-1}I_{\mathcal{H}}\} \in \{\mathcal{G}^{(l)}\}, \\ K^{(l)} &= T^{(l)-1} \cdot \left\{ \frac{w_i - w_j^*}{z_i - \bar{z}_j} \right\}_{i,j=1,\dots,l} \cdot T^{(l)-1*} \in \{\mathcal{G}^{(l)}\}, \\ v^{(l)} &= \text{col} \{I_{\mathcal{H}}, \dots, I_{\mathcal{H}}\} \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}^{(l)}\}, \\ u^{(l)} &= \text{col} \{w_1, \dots, w_l\} \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}^{(l)}\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что выполнено ОТ (1). В [4] показано, что условием вполне неопределённости задачи (34) является неравенства  $K^{(l)} > O_{\mathcal{G}^{(l)}}$ . Более того (см. [4]), ОФ  $w \in \mathcal{R}$  является решением усечённой задачи (34) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ОМН (3). Таким образом, множество решений интерполяционной задачи (34) совпадает с множеством решений следующей обобщённой интерполяционной задачи неванлинновской типа

$$\mathcal{P}^{(l)} = \{K^{(l)}, T^{(l)}, v^{(l)}, u^{(l)}\}. \tag{35}$$

Из (4) следует, что задача (35) является вполне неопределённой тогда и только тогда, когда вполне неопределённой является усеченная задача Неванлинны-Пика (34). Таким образом, усеченная вполне неопределённая задача Неванлинны-Пика (34) эквивалентна обобщённой интерполяционной задаче (35). Из блочной структуры операторов  $K^{(l)}, T^{(l)}, v^{(l)}, u^{(l)}$  следует упорядоченность последовательности обобщённых интерполяционных задач  $(\mathcal{P}^{(l)})_{l=1}^{\infty}$ . Итак, последовательность усечённых вполне неопределённых задач Неванлинны-Пика (34) является примером последовательности вполне неопределённых обобщённых интерполяционных задач для неванлинновских функций.

Легко видеть, что в рассматриваемой задаче операторы  $T_l, \hat{T}_l, l \geq 2$  имеют вид (28) с  $\zeta_l = 1/z_l$ . Следовательно, формулы (29) задают мультипликативное представления резольвентных матриц усечённых задач, формулы (31) явно выражают параметры Шура через данные интерполяционных задач и формула (25) задаёт пошаговое решение усечённых задач Неванлинны-Пика.

В задаче Неванлинны-Пика множители Бляшке-Потапова (30) допускают представления

$$b^{(l)}(z) = I + \frac{(\bar{z}_l - z_l)z}{|z_l|^2(1 - \bar{z}_l^{-1}z)} \mathcal{P}^{(l)}, \tag{36}$$

в которых операторы  $\mathcal{P}^{(l)}$  выражаются через параметры Шура по формулам

$$\mathcal{P}^{(l)} = \begin{pmatrix} I \\ w^{(l)*} \end{pmatrix} \left( \frac{w^{(l)} - w^{(l)*}}{i} \right)^{-1} \begin{pmatrix} I & w^{(l)} \end{pmatrix} \mathcal{J}, \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} O & -iI \\ iI & O \end{pmatrix} \tag{37}$$



и удовлетворяют условиям

$$\mathcal{P}^{(l)2} = -\mathcal{P}^{(l)}, \quad \mathcal{P}^{(l)}\mathcal{J} \geq \mathcal{O}; \quad (38)$$

Эти множители Бляшке-Потапова допускают представление, часто встречающееся в математической литературе

$$\begin{aligned} b_l(z) &= I + \frac{(\bar{z}_l - z_l)z}{|z_l|^2(1 - \bar{z}_l^{-1}z)}\mathcal{P}^{(l)} = I + \mathcal{P}^{(l)} + \left( \frac{(\bar{z}_l - z_l)z}{|z_l|^2(1 - \bar{z}_l^{-1}z)} - 1 \right)\mathcal{P}^{(l)} \\ &= I + \mathcal{P}^{(l)} - \frac{\bar{z}_l}{z_l} \cdot \frac{z - z_l}{z - \bar{z}_l}\mathcal{P}^{(l)} = I + \mathcal{P}^{(l)} + b_{z_l}(z)\mathcal{P}^{(l)}. \end{aligned}$$

Здесь скалярный множитель Бляшке  $b_{z_l}(z) = -\frac{\bar{z}_l}{z_l} \cdot \frac{z - z_l}{z - \bar{z}_l}$  отличается от простейшего множителя Бляшке для верхней полуплоскости  $\frac{z - z_l}{z - \bar{z}_l}$  лишь равным по модулю единице множителем  $-\frac{\bar{z}_l}{z_l}$ .

Пример 2. Проблема моментов Гамбургера. В проблеме моментов Гамбургера по заданной последовательности операторов  $s_0, \dots, s_k, \dots \in \{\mathcal{H}\}_H$  требуется описать множество монотонно возрастающих ОФ  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{\mathcal{H}\}_H$  таких, что

$$s_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k d\sigma(t), \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (39)$$

Можем считать, не изменяя значений интегралов, что ОФ  $\sigma$  удовлетворяет следующим условиям нормировки:  $\sigma(t)$  непрерывна слева при всех  $t$  и  $\sigma(t) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{H}}$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Множество нормированных решений  $\sigma$  проблемы моментов (5.40) обозначим символом  $\mathcal{M}_{\infty}$ . С каждой  $\sigma \in \mathcal{M}_{\infty}$  свяжем ОФ

$$w(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z}. \quad (40)$$

ОФ  $w$  определена и голоморфна в  $\mathbb{C}_+$  и называется *ассоциированной* с проблемой моментов (39). Множество ОФ  $w$ , ассоциированных с проблемой (39), обозначим символом  $\mathcal{F}_{\infty}$ . Из формулы обращения Стильтеса следует, что соответствие, устанавливаемое между  $\mathcal{F}_{\infty}$  и  $\mathcal{M}_{\infty}$  формулой (40), является взаимно однозначным. Поэтому, вместо описания множества  $\mathcal{M}_{\infty}$ , мы можем ограничиться описанием множества  $\mathcal{F}_{\infty}$ .

Вместе с бесконечной проблемой моментов (39) будем рассматривать и усеченные проблемы моментов. В таких проблемах фиксируется целое число  $l \geq 0$  и требуется описать все нормированные монотонно возрастающие ОФ  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{\mathcal{H}\}_H$  и операторы  $M \in \{\mathcal{H}\}_{\geq}$  такие, что

$$s_j = \int_{-\infty}^{+\infty} t^j d\sigma(t), \quad 0 \leq j \leq 2n - 1, \quad s_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} d\sigma(t) + M. \quad (41)$$

Проблема моментов (41) называется  $n$ -ой усеченной проблемой моментов, а множество её нормированных решений  $\sigma$  обозначим через  $\mathcal{M}_n$ . Как и в случае проблемы





моментов (5.40), с каждой  $\sigma \in \mathcal{M}_n$  свяжем ассоциированную ОФ  $w$  вида (40). Множество всех ОФ  $w$ , ассоциированных с проблемой (41), обозначим через  $\mathcal{F}_n$ .

Покажем, что задачу описания ассоциированных ОФ усечённых проблем моментов можно рассматривать как обобщённую интерполяционную задачу для неванлиновских функций. В качестве масштабных пространств выберем пространства  $\mathcal{G}_n = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_{n+1}$ ,  $\mathcal{H}$ . Операторы  $K_n, T_n, v_n, u_n$  зададим естественными матричными представлениями

$$K_n = \begin{pmatrix} s_0 & \dots & s_{n-1} & s_n \\ s_1 & \dots & s_n & s_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_n & \dots & s_{2n-1} & s_{2n} \end{pmatrix}, \quad T_n = \begin{pmatrix} O_{\mathcal{H}} & \dots & O_{\mathcal{H}} & O_{\mathcal{H}} \\ I_{\mathcal{H}} & \dots & O_{\mathcal{H}} & O_{\mathcal{H}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_{\mathcal{H}} & \dots & I_{\mathcal{H}} & O_{\mathcal{H}} \end{pmatrix},$$

$$v_n = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ O_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ O_{\mathcal{H}} \end{pmatrix}, \quad u_n = - \begin{pmatrix} O_{\mathcal{H}} \\ s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяем, что определённые выше операторы удовлетворяют ОТ (1). В [6] показано, что необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы моментов (41) является неравенство  $K_n \geq O_{\mathcal{G}_n}$ . Более того (см. [6]), ОФ  $w \in \mathcal{F}_n$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ОМН (3). Таким образом, множество  $\mathcal{F}_n$  совпадает со множеством решений обобщённой интерполяционной задачи

$$\mathcal{P}_n = \{K_n, T_n, v_n, u_n\}. \tag{42}$$

Условием полной неопределённости проблемы моментов (41) является условие  $K_n > O_{\mathcal{G}_n}$ . Легко видеть, что при этом все условия в (4) выполнены, т.е. задача (42) является вполне неопределённой. Будем считать, что задачи (42) являются вполне неопределёнными при всех  $n \geq 0$ .

Из блочной структуры операторов  $K_n, T_n, v_n, u_n$  следует упорядоченность последовательности обобщённых интерполяционных задач  $(\mathcal{P}_n)_{n=1}^{\infty}$ . Более того, из блочной структуры операторов  $T_n$  следует, что  $T_0 = O_{\mathcal{H}}$ ,  $\widehat{T}_n = O_{\mathcal{H}}$ ,  $n \geq 1$ . По теореме 2 резольвентные матрицы усечённых проблем допускают мультипликативное представление вида

$$U^{(n)}(z) = b_0(z) \cdot b_1(z) \cdot \dots \cdot b_n(z), \quad n \geq 0.$$

Здесь ОФ  $b_j(z)$ ,  $j \geq 0$  определены формулами (18) и, с учетом равенств  $R_{T_0}(z) = I_{\mathcal{H}}$ ,  $R_{T_j}(z) = I_{\mathcal{H}}$ ,  $j \geq 1$ , имеют вид

$$b_0(z) = I_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} + z \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ O_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} s_0^{-1} \begin{pmatrix} O_{\mathcal{H}} & -I_{\mathcal{H}} \end{pmatrix},$$

$$b_j(z) = I_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} + z \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(j)*} \\ \widehat{u}^{(j)*} \end{pmatrix} \widehat{K}^{(j)-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}^{(j)} & -\widehat{v}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad j \geq 1.$$



Легко видеть, что эти множители Бляшке-Потапова можно записать в виде

$$b_j(z) = I_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} + iz\mathcal{E}_j, \quad j \geq 0.$$

Здесь введены операторы

$$\mathcal{E}_0 = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ O_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} s_0^{-1} \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} & O_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} \mathcal{J}, \quad \mathcal{E}_j = \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(j)*} \\ \widehat{u}^{(j)*} \end{pmatrix} \widehat{K}^{(j)-1} \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(j)} & \widehat{u}^{(j)} \end{pmatrix} \mathcal{J}, \quad j \geq 1,$$

которые удовлетворяют условиям

$$\mathcal{E}_j \mathcal{J} \geq O, \quad \mathcal{E}_j^2 = O.$$

Последнее равенство очевидно при  $j = 0$ . При  $j > 0$  оно следует из индуцированного тождества (22), которое для проблемы моментов имеет вид

$$O_{\mathcal{H}} = \widehat{v}^{(j)} \widehat{u}^{(j)*} - \widehat{u}^{(j)} \widehat{v}^{(j)*}, \quad j > 0.$$

### Литература

1. Pick G. Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden // Math. Ann. – 1916. – 77. – P.17-23.
2. Nevanlinna R. Über beschränkte Functionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 1919. – A 13;1. – P.1-71.
3. Nevanlinna R. Über beschränkte analitische Functionen // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 1929. – A 32;7. – P.1-75.
4. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика // ДАН Арм. ССР. – 1974. – 59;1. – С.17-22.
5. Потапов В.П. Мультипликативная структура  $J$ -растягивающих матриц-функций // Труды ММО. – 1955. – 4. – С.125-236.
6. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1983. – 47;3. – С.455-497.
7. Нудельман А.А. Об одной проблеме типа проблемы моментов // Докл. АН СССР. – 1977. – 233;5. – С.79-795.
8. Иванченко Т.С., Сахнович Л.А. Операторный подход к схеме В.П. Потапова исследования интерполяционных задач // Укр. мат. журн. – 1987. – 39;5. – С. 573-578.
9. Ivanchenko T.S., Sakhnovich L.A. An operator approach to the Potapov scheme for the solution of interpolation problems // Operator Theory: Advances and Applications. – 1994. – 72. – P.48-86.
10. Arov D.Z., Дум Н.  $J$ -contractive matrix valued functions and related topics / Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 116.: Cambridge University Press, 2008. – 565 с.
11. Кацнельсон В.Э., Хейфец А.Я., Юдицкий П.М. Абстрактная интерполяционная проблема и теория расширений изометрических операторов / Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций. Сб. науч. тр.(изд. Марченко В.А.). К.: Наукова думка, 1987. – С.83-96.
12. Дюкарев Ю.М. О неопределённости интерполяционных задач для неванлинновских функций // Известия высших учебных заведений. Серия «Математика». – 2004. – 507;8. – С.26-38.



13. Дюкарев Ю.М. О неопределённости интерполяционных задач в классе Стильтьеса // Математический сборник. – 2005. – 196;3. – С.61-88.
14. Дюкарев Ю. М. Обобщённый критерий Стильтьеса полной неопределённости интерполяционных задач // Матем. заметки. – 2008. – 84;1. – С.23-39.

### MULTIPLICATIVE STRUCTURE OF THE ORDERED INTERPOLATION PROBLEM RESOLVENT MATRICES FOR NEVANLINNA'S FUNCTIONS

Yu. M. Dyukarev

Belgorod State Agricultural Academy by V.Ya. Gorin,  
Vavilova St., 1, Maiskiy, Belgorod Reg., 308503, Russia, e-mail: [yu.dyukarev@karazin.ua](mailto:yu.dyukarev@karazin.ua)

**Abstract.** Multiplicative structure of the ordered interpolation problem resolvent matrices for Nevanlinna's functions is studied. An algorithm for step by step solution of ordered interpolation problems is obtained. General constructions are illustrated by examples of the Nevanlinna-Pick problem and the Hamburger moment problem.

**Key words:** Nevanlinna's functions, ordered interpolation problems, factorization of resolvent matrix, step by step solution of interpolation problems.



MSC 47F05

## К ТЕОРИИ СПЕКТРА $2 \times 2$ -ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д.В. Корниенко

Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина,  
ул. Коммунаров, 28, Елец, 399770, Россия,  
e-mail: v\_v\_kornienko@mail.ru, dmkornienko@mail.ru

**Аннотация.** Для замкнутых дифференциальных операторов  $L : \mathcal{H}_{x,t} \rightarrow \mathcal{H}_{x,t}$ , порождённых задачей Дирихле для эллиптических систем второго порядка изучены спектры:  $C\sigma L = R\sigma L$  – пустое множество; точечный спектр  $P\sigma L$  располагается в левой полуплоскости ( $\operatorname{Re} z < 0$ ) комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ . В случае эллиптической системы без младших членов собственные вектор-функции оператора  $L$  образуют ортогональный базис. В случае эллиптической системы с младшими членами вектор-функции оператора  $L$  образуют базис Рисса, не являющимся ортогональным в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_{x,t}$ .

**Ключевые слова:** эллиптические системы, граничные задачи, замкнутые операторы, спектр, ортогональный базис, базис Рисса.

Работа посвящена сравнительному изучению и описанию спектральных свойств дифференциальных операторов, порождённых задачей Дирихле для эллиптической системы (1) без «младших членов»

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = \lambda u^1 + f^1, \\ \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} = \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \quad (1)$$

и для эллиптической системы (2) с «младшими членами» по переменным  $x, t$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^1}{\partial t} - \frac{\partial u^2}{\partial x} = \lambda u^1 + f^1, \\ \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial u^1}{\partial x} = \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \quad (2)$$

рассматриваемых в замыкании  $V_{x,t}$  ограниченной области  $\Omega_{x,t} = (0; \pi)^2$  евклидова пространства  $\mathbb{R}_{x,t}^2$ .

Присоединив к системам уравнений (1) и (2) условие Дирихле

$$u|_{\partial\Omega_{x,t}} = 0 \quad (3)$$

получим две граничные задачи: задачу (1), (3) и задачу (2), (3).



Для системы Коши-Римана и более общих, так называемых симметричных и несимметричных систем, имеется ряд глубоких результатов, относящихся к описанию правильных граничных условий [1].<sup>1)</sup>

Описанию регулярных граничных задач для более общих систем уравнений первого порядка по выделенной переменной  $t$  при числе переменных более двух посвящена работа [14].<sup>2)</sup> Исследованию свойств задачи Дирихле для  $2 \times 2$  — эллиптических систем посвящена работа [2]; сильно и усиленно эллиптические системы изучались в работах [3], [4] соответственно. Однако, спектральные свойства этих граничных задач и граничных задач иного типа при числе переменных больше двух почти не изучены.

Элементы спектральной теории замкнутых операторов подробно изложены в книгах [5], [6]. Спектральные свойства задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений изучались в работах [7], [8], [9], [10].

Для систем Коши-Римана имеется ряд глубоких результатов, относящихся к описанию правильных граничных условий [1] в областях специального вида. Описанию регулярных граничных задач для более общих систем уравнений при числе переменных более двух посвящены работы [13], [14]. Сильно и усиленно эллиптическим системам посвящены работы [3], [4] соответственно. Однако спектральные свойства этих граничных задач и граничных задач иного типа почти не изучены.

Также, как и в работах [8], [9], [10] системы дифференциальных уравнений (1) и (2) для удобства будем называть эллиптическими системами первого типа. Эллиптической системой второго типа с младшими членами в данном случае будет система вида

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial u^1}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = \lambda u^1 + f^1, \\ \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial u^1}{\partial x} = \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \quad (4)$$

Отметим, что система (4) равносильна системе (6) (для  $\lambda = 0$ ) в следующем смысле: после умножения первого уравнения системы (1) на  $-1$  и формальной замены  $-f^1$  на  $f^1$  (в силу произвольности правой части), получаем систему (2). Эти рассуждения наводят на мысль о совпадении свойств разрешимости граничных задач для данных систем безотносительно к условиям, определяющим граничную задачу. Однако, исследования в случае эллиптических систем первого порядка показывают, что спектральные свойства рассматриваемых дифференциальных операторов различны; они в некотором смысле аналогичны тем отличиям, которые проявились при сопоставлении слабой иррегулярности сильной в работе [11], а также при изучении эллиптических систем в [7], [8]. Обозначим символами  $e_i = (\delta_i^1 \ \delta_i^2)^T$ ,  $i = 1, 2$ ; ортонормированный базис евклидова пространства  $\mathcal{E}_2^2$  вектор-столбцов, а через  $\mathcal{U}_2^2$  — унитарное пространство элементов  $u = u^1 e_1 + u^2 e_2$ ;  $u^k \in \mathbb{C}$ ;  $k = 1, 2$ ; со скалярным произведением  $(u, v; \mathcal{U}_2^2) = u^1 \bar{v}^1 + u^2 \bar{v}^2$ .

<sup>1)</sup>Дезин Алексей Алексеевич (23 апреля 1923г., Москва - 4 марта 2008г., Москва) — советский и российский математик.

<sup>2)</sup>Романко Василий Кириллович (28 декабря 1936, Москва - 27 сентября 2012 года, Москва) — советский и российский математик.



Пусть  $\mathcal{H}_{x,t}^2 = \mathcal{L}_2^2(V_{x,t})$  – гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций  $u : V_{x,t} \rightarrow \mathbb{C}^2$ , норма в котором задаётся формулой

$$|u; \mathcal{H}_{x,t}^2|^2 = \iint_{V_{x,t}} |u(\xi, \tau); \mathcal{U}_2^2|^2 d\xi d\tau.$$

Пусть также  $\mathfrak{D}$  – линейное многообразие гладких комплекснозначных вектор-функций  $u = u(x, t)$ , принадлежащих классу  $\mathbb{C}(\overline{\Omega}_{x,t}) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\Omega_{x,t})$  и удовлетворяющих условиям (3). Опишем вначале спектральные свойства эллиптической системы первого типа без младших членов.

**Эллиптическая система без младших членов.** Обозначая символом  $\tilde{L}$  оператор, областью определения которого является  $\mathfrak{D}$ , а множество значений определяется правой частью (1), получаем эллиптический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в  $\mathcal{H}_{x,t}^2$  стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение  $L$  оператора  $\tilde{L}$ . В этом случае говорят, что замкнутый оператор  $L : \mathcal{H}_{x,t}^2 \rightarrow \mathcal{H}_{x,t}^2$  порождён задачей (1), (2). Изучим его спектр и спектральные свойства его собственных вектор-функций. Говоря о спектре замкнутого оператора, мы следуем терминологии, принятой в монографиях [5, с. 25], [6, с. 620]. Резольвентное множество, спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора  $L$  обозначим символами  $\rho L$ ,  $\sigma L$ ,  $P\sigma L$ ,  $C\sigma L$  и  $R\sigma L$  соответственно. Имеет место [10] следующая теорема.

**Теорема 1.** *Спектр  $\sigma L$  оператора  $L$ , порождённого задачей (1), (3), состоит из замыкания  $\overline{P\sigma L}$  на комплексной плоскости его точечного спектра  $P\sigma L$ . Множество  $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$  образует непрерывный спектр оператора  $L$ . Точечный спектр оператора  $L$  даётся формулой*

$$\lambda_{m,k,s} = -k^2 + i(-1)^m s^2; \quad m = 1, 2; \quad k \in \mathbb{N}; \quad s \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

*Собственная вектор-функция оператора  $L$ , принадлежащая его собственному значению (6), представима в виде*

$$u_{m,k,s}(x, t) = (ie_1 + (-1)^{m+1}e_2) \sin(kt) \sin(sx).$$

*Последовательность  $\{u_{m,k,s}(t, x) : m = 1, 2; k \in \mathbb{N}; s \in \mathbb{N}\}$  собственных вектор-функций оператора  $L$  образует ортогональный базис в пространстве  $\mathcal{H}_{x,t}^2$ .*

**Эллиптическая система с младшими членами по переменным  $x, t$ .** Также, как и в случае эллиптической системы без младших членов обозначим символом  $\tilde{L}$  оператор, областью определения которого является  $\mathfrak{D}$ , а множество значений определяется правой частью (2), получаем эллиптический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в  $\mathcal{H}_{x,t}^2$  стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение  $L$  оператора  $\tilde{L}$ . В этом случае говорят, что замкнутый оператор  $L : \mathcal{H}_{x,t}^2 \rightarrow \mathcal{H}_{x,t}^2$  порождён задачей (2), (3). Изучим его спектр и спектральные свойства его собственных вектор-функций.



**Теорема 2.** Спектр  $\sigma L$  оператора  $L$ , порождённого задачей (2), (3) состоит из замыкания  $\overline{P\sigma L}$  на комплексной плоскости его точечного спектра  $P\sigma L$ . Множество  $S\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$  образует непрерывный спектр оператора  $L$ . Точечный спектр оператора  $L$  даётся формулой

$$\lambda_{m,k,s} = i(-1)^m \left( \frac{1}{4} + s^2 \right) - k^2 - \frac{1}{4}, \quad m = 1, 2; k, s \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Собственная вектор-функция оператора  $L$ , принадлежащая его собственному значению (6), представима в виде:

$$u_{m,k,s}(x, t) = e^{-\frac{t}{2}} e^{ikt} \left( e_1 + i(-1)^m e_2 \right) e^{\frac{x}{2}} \sin(sx).$$

Последовательность  $\{u_{m,k,s}(t, x) : m = 1, 2; k \in \mathbb{N}; s \in \mathbb{N}\}$  собственных вектор-функции оператора  $L$  образует базис Рисса в пространстве  $\mathcal{H}_{x,t}^2$ .

□ Достаточно заметить, что последовательность  $\{u_{m,k,s}(t) : m = 1, 2; k \in \mathbb{N}\}$  вектор-функций

$$u_{m,k,s}(t) = e^{-\frac{t}{2}} e^{ik\pi t} \left( e_1 + i(-1)^m e_2 \right); \quad m = 1, 2;$$

является базисом Рисса в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_t^2 = \mathcal{H}_t \oplus \mathcal{H}_t$ ,  $\mathcal{H}_t = \mathcal{L}_2[0, \pi]$ , и воспользоваться, доказанным в [8], представлением  $\mathcal{H}_{x,t}^2$  в виде тензорного произведения гильбертовых пространств  $\mathcal{H}_t^2$  и  $\mathcal{H}_x$ , то есть формулой  $\mathcal{H}_{x,t}^2 = \mathcal{H}_t^2 \otimes \mathcal{H}_x$ , где  $\mathcal{H}_x = \mathcal{L}_2[0, \pi]$ . ■

### Литература

1. Дезин А.А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // Успехи матем. наук. – 1959. – XIV, вып. 3 (87). – С.21-73.
2. Бицадзе А.В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи матем. наук. – 1948. – 3, № 6. – С.211-212.
3. Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сборник. – 1951. – 29, (71), Вып. 4. – С.615-676.
4. Солдатов А.П. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. – 2003. – 39, №5. – С.674-686.
5. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 207 с.
6. Качмаж С. Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов / М.: Гос.из-во физ.-мат. литературы, 1958. – 508 с.
7. Корниенко Д.В. О спектральных задачах для линейных систем дифференциально-операторных уравнений // Вестник Елецкого госуниверситета им. И. А. Бунина. Вып. 5: Серия «Математика, физика». – Елец: ЕГУ им. И.А.Бунина, 2004. – С.71-78.
8. Корниенко Д.В. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42, №1. – С.91-100.
9. Корниенко Д.В. О спектре задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42, №8. – С.1063-1071.
10. Алексеева О.В. О спектре задачи Дирихле для двух эллиптических систем // Научные ведомости БелГУ. Математика Физика. – 2010. – №17(88). – Вып.20. – С.5-9.



11. Дезин А.А. О слабой и сильной иррегулярности // Дифференц. уравнения. – 1981. – 17, №10. – С.1851-1858.
12. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, Т.1. Общая теория / М.: ИЛ., 1962. – 895 с.
13. Романко В.К. К теории операторов вида  $\frac{d^m}{dt^m} - A$ . // Дифференц. уравнения. – 1967. – 3, №11. – С.1957-1970.
14. Романко В.К. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Докл. АН СССР. – 1986. – 286, №1. – С.47-50.

## TO THE THEORY OF $2 \times 2$ -ELLIPTIC SYSTEMS SPECTRUM

D.V. Kornienko

Elets State University,

Kommunarov St., 28, Elets, 399770, Russia, e-mail: [o.v.alexeeva@gmail.com](mailto:o.v.alexeeva@gmail.com), [wk1953@mail.ru](mailto:wk1953@mail.ru)

**Abstract.** Spectra of closed differential operators  $L : \mathcal{H}_{x,t} \rightarrow \mathcal{H}_{x,t}$  generated by the Dirichlet problem for elliptic systems of second order are studied. Namely,  $C\sigma L = R\sigma L$  is empty; the point spectrum of  $P\sigma L$  is located in the left half ( $\operatorname{Re} z < 0$ ) of complex plane  $\mathbb{C}$ . In the case of the elliptic system without less terms, vector-valued eigenfunctions of the operator  $L$  form the orthogonal basis. In the case of the elliptic system with some less terms, vector-valued eigenfunctions of the operator  $L$  form the Riesz basis. But it is not orthogonal in the Hilbert space  $\mathcal{H}_{x,t}$ .

**Keywords:** elliptic systems, boundary problems, closed operators, spectrum, orthogonal basis, Riesz' basis.





MCS 65N30

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ ИНТЕРЛИНАЦИОННЫМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

О.Н. Литвин, Л.С. Лобанова, Г.В. Залужная

Украинская инженерно-педагогическая академия,  
ул. Университетская, 16, Харьков, 61003, Украина, e-mail: [zal\\_artem@mail.ru](mailto:zal_artem@mail.ru)

**Аннотация.** Исследуются некоторые аспекты численной реализации интерлинационного метода конечных элементов (МКЭ) решения нестационарной задачи теплопроводности для прямоугольной пластины. Исследование проводится с использованием точных решений, метод построения которых предложено авторами, а также сравнением с результатами, полученными классическим МКЭ. Интерлинационный метод конечных элементов позволяет свести нестационарную задачу теплопроводности к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений меньшего порядка, чем в классическом методе конечных элементов.

**Ключевые слова:** нестационарная задача теплопроводности, метод конечных элементов, интерлинация функций.

**Введение.** МКЭ является одним из наиболее используемых методов решения реальных нестационарных задач по распределению температуры в областях сложной формы. Практика иногда требует решения задач с большим количеством элементов, а следовательно, и неизвестных функций  $C_k(t)$ ,  $k = \overline{1, M}$ , которые определяют следы  $C_k(t) = u(x_k, y_k, t)$ ,  $k = \overline{1, M}$  приближенного решения  $u(x, y, t)$  в узлах  $A_k(x_k, y_k)$  элементов разбиения. Поэтому актуальной является разработка и исследование новых методов решения нестационарных задач теплопроводности, которые используют меньшее количество элементов для достижения той же точности  $\varepsilon > 0$  [1-5]. Такими методами являются методы, основанные на использовании интерлинации функций двух и трех переменных [1,2].

В работе [5] рассмотрена аналогичная задача для прямоугольной пластины с проведением анализа численного эксперимента для случая, когда  $u(x, y, t)$  есть бесконечное число раз дифференцируемая функция, но без теоретического (априорного) анализа оценок погрешности. В данной работе эти результаты анализируются также и для случая, когда точное решение  $u(x, y, t) \in W_2^1(G) \cap C^\infty[0; +\infty)$ .

**Основные утверждения работы.** Дан анализ возможностей интерлинационного метода конечных элементов на основе результатов вычислительного эксперимента.

Для ограниченной области  $G \subset R^2$  будем решать нестационарную краевую задачу:

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( a_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + b(x, y) u = f(x, y, t), \quad (1)$$

$$(x, y) \in G, \quad t > 0$$



при следующих начальной и граничной условиях:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), (x, y) \in G, \quad G \subseteq \Pi, \quad \Pi = E^2, \quad E = [0, 1], \quad (2)$$

$$u(x, y, t)|_{\partial G} = \varphi(x, y, t)|_{\partial G}. \quad (3)$$

Считаем, что  $a_1(x, y), a_2(x, y) \in C^1(G)$ ,  $b(x, y) \in C(G)$ ,  $f(x, y, t) \in C(G \times R^+)$ ,  $R^+ = [0, \infty)$  и решение поставленной задачи удовлетворяет условиям:

1)  $u(x, y, t)$  имеет непрерывные производные до 2-го порядка включительно по переменным  $x$  и  $y$ ,  $u^{(p,q,0)}(x, y, t) \in C(G \times R^+)$ ,  $\forall t \geq 0, 0 \leq p, q \leq 2$ ;

2)  $\frac{\partial u}{\partial t} \in C(G \times R^+)$ .

Кроме этого, считаем, что граничная  $\varphi(x, y, t)$  и начальная  $u_0(x, y)$  функции удовлетворяют соотношению:  $\varphi(x, y, 0)|_{\partial G} = u_0(x, y)|_{\partial G}$ .

Заменяем задачу (1)-(3) соответствующей задачей с однородными начальными и граничными условиями. Для этого введем вместо функции  $u(x, y, t)$  функцию  $v(x, y, t)$  следующим образом:

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) + \varphi(x, y, t) + u_0(x, y) - \varphi(x, y, 0).$$

Функция  $v(x, y, t)$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению и однородным начальному и граничному условиям:

$$Lv(x, y, t) = f(x, y, t) - L\varphi(x, y, t) - L(u_0(x, y) - \varphi(x, y, 0)),$$

$$v(x, y, 0) = 0, \quad v(x, y, t)|_{\partial G} = 0,$$

$$u(x, y, t) \in C^{2,2,1}(G \times R^+) = \{v : v^{(p,q,1)}(x, y, t) \in C(G \times R^+), 0 \leq p, q \leq 2\}.$$

Если  $u$  — построенная указанным методом функция, то она является точным решением соответствующей начально-краевой задачи. Далее считаем начальное и граничное условия однородными.

Введем оператор-интерлиант

$$\begin{aligned} Of(x, y, t) &= \sum_{i=0}^m h(mx - i) f\left(\frac{i}{m}, y, t\right) + \sum_{j=0}^n h(ny - j) f\left(x, \frac{j}{n}, t\right) - \\ &- \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}, t\right) h(mx - i) h(ny - j), \end{aligned}$$

который имеет свойства:



$$Of\left(\frac{i}{m}, y, t\right) = f\left(\frac{i}{m}, y, t\right), \quad Of\left(x, \frac{j}{n}, t\right) = f\left(x, \frac{j}{n}, t\right), \quad i = \overline{0, m}; \quad j = \overline{0, n}.$$

Погрешность приближения функции  $f(x, y, t) \in C^{2,2,\infty}(G \times R^+)$  с помощью оператора-интерлинанта (при  $(x, y) \in E$ ):

$$|f(x, y, t) - Of(x, y, t)| = O\left(\frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{n^2}\right) = O(\Delta^4), \quad \Delta = \max\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right\}, \quad \Delta \rightarrow 0.$$

Заменим в формуле оператора-интерлинанта каждую из функций  $f\left(\frac{i}{m}, y, t\right), f\left(x, \frac{j}{n}, t\right)$  ее соответствующим интерполянт по пространственным переменным:

$$f\left(\frac{i}{m}, y, t\right) \approx A_{1i}f(y, t) = \sum_{\ell=0}^{n^2} f\left(\frac{i}{m}, \frac{\ell}{n^2}, t\right) h(n^2y - \ell),$$

$$f\left(x, \frac{j}{n}, t\right) \approx A_{2j}f(x, t) = \sum_{k=0}^{m^2} f\left(\frac{k}{m^2}, \frac{j}{n}, t\right) h(m^2x - k)$$

с погрешностями

$$\left|f\left(\frac{i}{m}, y, t\right) - A_{1i}f(y, t)\right| = O\left(\frac{1}{m^2}\right) \forall y \in [0, 1], t \geq 0,$$

$$\left|f\left(x, \frac{j}{n}, t\right) - A_{2j}f(x, t)\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \forall x \in [0, 1], t \geq 0.$$

В результате получим оператор:

$$Jf(x, y, t) = \sum_{i=0}^m h(mx - i) A_{1i}f(y, t) + \sum_{j=0}^n h(ny - j) A_{2j}f(x, t) - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}, t\right) h(mx - i) h(ny - j),$$

который приближает функцию  $f(x, y, t)$  с погрешностью

$$|f(x, y, t) - Jf(x, y, t)| = O(\Delta^4) \forall t \geq 0.$$

В более детальной записи имеем интерполянт:

$$Jf(x, y, t) = \sum_{i=0}^m h(mx - i) \sum_{\ell=0}^{n^2} f\left(\frac{i}{m}, \frac{\ell}{n^2}, t\right) h(n^2y - \ell) +$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^n h(ny - j) \sum_{k=0}^{m^2} f\left(\frac{k}{m^2}, \frac{j}{n}, t\right) h(m^2x - k) - \\
& \quad - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}, t\right) h(mx - i) h(ny - j) = \\
& = \sum_{i=0}^m h(mx - i) \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq 0, n, 2n, \dots, n^2}}^{n^2} f\left(\frac{i}{m}, \frac{\ell}{n^2}, t\right) h(n^2y - \ell) + \\
& \quad + \sum_{j=0}^n h(ny - j) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 0, m, 2m, \dots, m^2}}^{m^2} f\left(\frac{k}{m^2}, \frac{j}{n}, t\right) h(m^2x - k) + \\
& + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}, t\right) [h(mx - i) h(n^2y - jn) + \\
& \quad + h(ny - j) h(m^2x - im) - h(mx - i) h(ny - j)]
\end{aligned}$$

со следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
Jf\left(\frac{i}{m}, \frac{\ell}{n^2}, t\right) &= f\left(\frac{i}{m}, \frac{\ell}{n^2}, t\right), \quad i = \overline{0, m}, \quad \ell = \overline{0, n^2}, \\
Jf\left(\frac{k}{m^2}, \frac{j}{n}, t\right) &= f\left(\frac{k}{m^2}, \frac{j}{n}, t\right), \quad k = \overline{0, m^2}, \quad j = \overline{0, n}.
\end{aligned}$$

Этот интерполянт приближает функцию  $f(x, y, t)$  с погрешностью  $O(\Delta^4) \forall t \geq 0$ . Итак, порядок погрешности относительно  $\Delta \rightarrow 0$  такой же, как и порядок погрешности приближения с помощью оператора-интерлинанта  $|f(x, y, t) - Jf(x, y, t)| = O(\Delta^4), (x, y) \in E, \forall t \geq 0$ .

**Теорема.** Если  $u(x, y, t)$  — точное решение задачи (1)-(3) и  $u \in C^{2,2}(E^2) \forall t \geq 0$ , то найденная методом ЛИДУ (линейных интегро-дифференциальных уравнений) функция  $u_2$  будет приближать точное решение  $u$  с такой погрешностью:

$$\exists M_2(t) > 0 : \|u - u_2\|_{C(\Omega)} \leq M_2(t) \Delta_1^2 \Delta_2^2 = O(\Delta^4) \quad \forall t \geq 0.$$

□ Для упрощения доказательства будем считать граничное условие однородным. Применяя к уравнению (1), граничному и начальным условиям (2)-(3) интегральное преобразование Лапласа с параметром  $p$   $\tilde{u}(x, y, p) = \int_0^\infty u(x, y, t) e^{-pt} dt$ , получим для функции  $\tilde{u}$  граничную задачу:

$$L_1[\tilde{u}(x, y, p)] := p\tilde{u} - (a_1(x, y) \tilde{u}'_x)' - (a_2(x, y) \tilde{u}'_y)' + b(x, y) \tilde{u} = \tilde{f}(x, y, p) + u_0(x, y), \quad (4)$$



$$(x, y) \in E^2 = [0, 1]^2, \quad \forall p,$$

$$\tilde{u}(x, y, p) = 0, \quad (x, y) \in \partial G. \quad (5)$$

Таким образом, мы пришли к эллиптической задаче (4)-(5). Считаем, что  $a(u, v) = \int \int_G [a_1 u'_x v'_x + a_2 u'_y v'_y + (p + b) uv] dx dy \in V$  - эллиптическая, непрерывная, симметрическая билинейная форма уравнения (4), которая удовлетворяет условиям:

$$\exists \rho(p) > 0, \quad M_4(\lambda) : a(v, v) \geq \rho \|v\|_{W_2^1(G)}^2, \quad a(u, v) \leq M_4 \|u\|_{W_2^1(G)} \|v\|_{W_2^1(G)},$$

$$u, v \in W_2^1(G) \quad \forall p.$$

Тогда, если  $\tilde{u}_2$  — приближенное решение задачи (4)-(5), найденное методом ЛИДУ, то справедливо такое обобщение леммы Сеа [6]:

$$\exists K(p) > 0 : \|\tilde{u} - \tilde{u}_2\|_{C(G)} \leq K(p) \inf \| \tilde{u} - w \|_{C(G)}. \quad (6)$$

Здесь  $\inf$  берется по функциям  $w \in V$ , где  $V$  — бесконечномерное линейное пространство функций, определяемых оператором  $J$ ,

$$V = \{w = Jv : v(x, y, p) \in C^{2,2}(G), v|_{\partial G} = 0, \forall p\}.$$

Если выполняются условия относительно билинейной формы  $a(u, v)$ , написанной выше, и  $u \in C^{2,2}(E^2)$ , то для множителя справа в формуле (6) можем написать [7]:

$$\|\tilde{u} - w\|_{C(G)} \leq C(p) \cdot \Delta_1^2 \cdot \Delta_2^2, \quad C(p) > 0, \quad \forall p, \quad (7)$$

поскольку функция  $w(x, y, p)$  строится в виде, который имеет те же следы на линиях интерлинации, что и функция  $\tilde{u}(x, y, p)$ . Это означает, что погрешность  $\tilde{u} - \tilde{w}$  приближения функции  $\tilde{u}(x, y, p)$  с помощью функции  $\tilde{w}(x, y, p)$  будет определяться для каждого значения параметра  $p$  формулой для оценки погрешности интерлинации на системе взаимно перпендикулярных прямых [7, с. 167]. Учитывая это, можно записать:

$$u(x, y, t) - w(x, y, t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N h_i(x) h_j(y) \int_{x_i}^x \int_{y_j}^y u^{2,2,0}(\xi, \eta, t) (x - \xi) (y - \eta) d\xi d\eta,$$

откуда в изображениях получаем равенство

$$\tilde{u}(x, y, p) - \tilde{w}(x, y, p) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N h_i(x) h_j(y) \int_{x_i}^x \int_{y_j}^y \tilde{u}^{2,2,0}(\xi, \eta, p) (x - \xi) (y - \eta) d\xi d\eta,$$



а также неравенство

$$\|\tilde{u}(\cdot, \cdot, p) - \tilde{w}(\cdot, \cdot, p)\| \leq \|\tilde{u}^{2,2,0}(\cdot, \cdot, p)\| \cdot \Delta_1^2 \cdot \Delta_2^2 \cdot C, \quad C > 0.$$

С учетом неравенств (6) и (7) можно утверждать, что для приближенного решения  $\tilde{u}_2(x, y, p)$ , найденного методом ЛИДУ, будет выполняться неравенство

$$\exists M_3(p) > 0 : \|\tilde{u} - \tilde{u}_2\|_{C(G)} \leq M_3(p) \Delta_1^2 \Delta_2^2 \quad \forall p, \quad M_3(p) = K(p) \cdot C(p)$$

при условии, что граничная задача Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений интерлиационного метода решается точно. ■

**Замечание 1.** При решении задачи (1)-(3) классическим МКЭ с кусочно-линейными вспомогательными функциями погрешность приближенного решения  $u_1$  (при том же разбиении области  $G$  на элементы) удовлетворяет такое неравенство:

$$\exists M_1(t) > 0 : \|u - u_1\|_{C(G)} \leq M_1(t) \max\{\Delta_1^2, \Delta_2^2\} \quad \forall t \geq 0.$$

Итак, интерлиационный метод требует для достижения точности  $\varepsilon = O(\Delta^4)$  разбиения области интегрирования на  $N = O(n^2 m^2) = O(\Delta^{-2}) = (\Delta = \varepsilon^{1/4}) = O(\varepsilon^{-1/2})$  элементов, а классический МКЭ требует для достижения той же точности разбиения области интегрирования на  $N_2 = O(n^4 m^4) = O(\Delta^{-4}) = (\Delta = \varepsilon^{1/4}) = O(\varepsilon^{-1})$  элементов. То есть в классическом МКЭ каждую сторону области  $G$  нужно разбивать не на  $n_1 = O(n)$ , а на  $n_2 = O(n^2)$  отрезков.

**Замечание 2.** Если в формуле для  $w(x, y, p)$  следы на линиях интерлиации заменяем сплайн-интерполяционными формулами, которые приближают следы также с погрешностью  $O(\Delta^4)$ , то получаем схемы МКЭ, которые для каждого  $p$  будут иметь ту же за порядком погрешность, что и метод ЛИДУ.

**Пример.** Приведем результаты вычислительного эксперимента для решения такой тестовой нестационарной задачи теплопроводности:

$$\frac{\partial u(x_1, y_1, t)}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u(x_1, y_1, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, y_1, t)}{\partial y_1^2} \right) + f(x_1, y_1, t), \quad (8)$$

$$(x, y) \in \Omega = [0, \ell] \times [0, \ell], \quad t > 0,$$

$$u(x_1, y_1, 0) = \varphi(x_1, y_1), \quad (x_1, y_1) \in \bar{\Omega}, \quad (9)$$

$$u(x_1, y_1, t)|_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (10)$$

Для безразмерных переменных  $x = x_1/\ell$ ,  $y = y_1/\ell$ ,  $Fo = a^2 t/\ell^2$ ,  $u^* = u/u_0$  ( $u_0$  — постоянная, которая имеет размерность температуры) задача (8)-(10) принимает вид:

$$\frac{\partial u^*(x, y, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 u^*(x, y, Fo)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*(x, y, Fo)}{\partial y^2} + f^*(x, y, Fo), \quad (11)$$



$$u^*(x, y, 0) = \varphi^*(x, y), \quad (x, y) \in G = [0, 1] \times [0, 1], \quad (12)$$

$$u^*(x, y, Fo)|_{\partial G} = 0, \quad \forall Fo \geq 0. \quad (13)$$

Для случая  $\varphi^*(x, y) = A \cdot x(1-x)y(1-y)$ ,

$$f^*(x, y, Fo) = Ae^{-\lambda \cdot Fo} \cdot (2x(1-x) + 2y(1-y) - \lambda x(1-x)y(1-y)),$$

точное решение задачи имеет вид:  $u^*(x, y, Fo) = A \cdot e^{-\lambda \cdot Fo} x(1-x)y(1-y)$ .

Вычислительный эксперимент проводился для решения этой задачи предложенным методом (ИМКЭ) и классическим методом (МКЭ) при условии, что соответствующие системы дифференциальных уравнений решались методом Рунге-Кутты с фиксированным шагом  $\Delta Fo$ :  $\Delta Fo = 0,001$  (при  $M=3, N=3$ ),  $\Delta Fo = 0,0001$  (при  $M=4, N=4$ ).

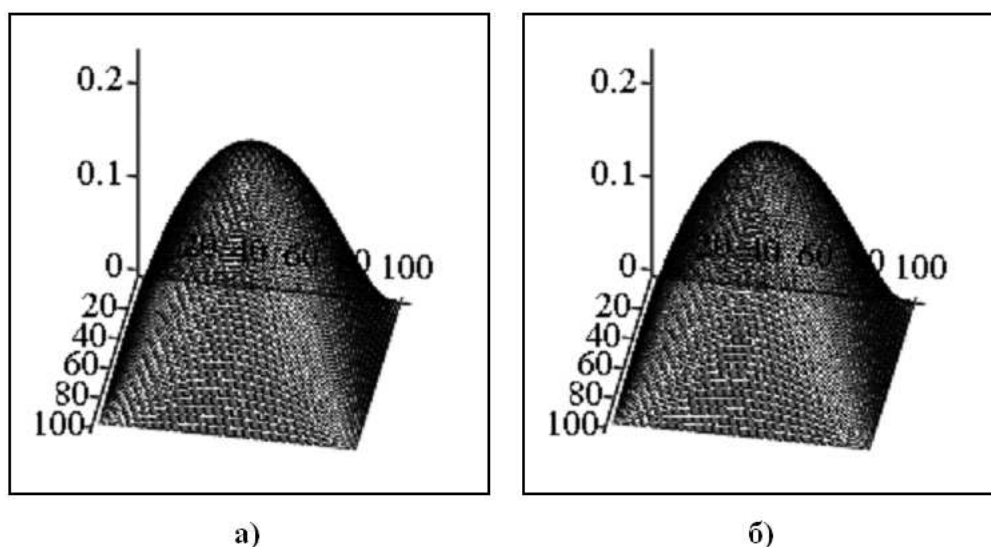


Рис. 1. Графическое изображение точного (а) и приближенного (б) решений.

Анализ результатов вычислительного эксперимента позволяет сделать следующие выводы:

1) максимальная погрешность при  $a > 1$  равна произведению значений  $a$  и максимальной погрешности при  $a = 1$ ;

2) погрешность уменьшается при увеличении числа Фурье  $Fo$  (это можно объяснить тем, что правые части в системе дифференциальных уравнений уменьшаются при увеличении числа Фурье) в  $e^{-\lambda \cdot Fo}$  раз, если задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений решается точно;

3) погрешность  $\varepsilon = O(10^{-3})$  при  $M = N = 3$  достигалась при использовании в 2,4 раза большего количества дифференциальных уравнений в МКЭ (классическом) по сравнению с ИМКЭ (интерлинационным) и при  $M = N = 4$  в 2,8 раз большего



количества дифференциальных уравнений в МКЭ по сравнению с ИМКЭ. В общем случае интерлиначионный МКЭ требует  $(n-1)^2(2n+1)$  количества уравнений, что на порядок меньше, чем в классическом МКЭ -  $(n^2-1)^2$  уравнений.

**Вывод.** При решении задачи нестационарной теплопроводности для квадратной пластины с погрешностью  $O(\varepsilon^2)$  классическим МКЭ необходимо решать задачу Коши для системы  $n^4$  обыкновенных дифференциальных уравнений. Использование сплайн-интерполяции функции  $u(x, y, t) \in C^{2,2,\infty}(G \times R^+)$  пространственных переменных  $x, y$ , построенной на основе сплайн-интерлиначиации этих функций, позволяет уменьшить на порядок количество дифференциальных уравнений для достижения той же по порядку точности.

### Литература

1. Сергиенко И.В., Литвин О.Н. Численная реализация метода ЛИДУ для уравнения нестационарной теплопроводности // Доповіді НАНУ. Сер. А. – 1990. – №10. – С.69-73. (на украинском языке)
2. Сергиенко И.В., Литвин О.Н., Дробот Е.И. Численная реализация метода ЛИДУ для уравнения нестационарной теплопроводности с тремя пространственными переменными // Доповіді НАНУ. – 2000. – №2. – С.67-73. (на украинском языке)
3. Сергиенко И.В., Литвин О.Н., Лобанова Л.С., Залужная Г.В. Анализ вычислительных возможностей интерлиначионного метода конечных элементов решения нестационарной задачи теплопроводности // Доповіді НАНУ. – 2014. – №3. – С.43-50. (на украинском языке)
4. Литвин О.Н., Лобанова Л.С., Залужная Г.В. Численная реализация метода линейных интегро-дифференциальных уравнений для уравнения нестационарной теплопроводности с двумя пространственными переменными // Управляющие системы и машины: Киев, 2012. – №4. – С.11-19.
5. Литвин О.Н., Лобанова Л.С., Залужная Г.В. Решение нестационарной задачи теплопроводности для пластины интерлиначионным методом конечных элементов // Труды Международного симпозиума «Вопросы оптимизации вычислений» (ПОО - XXXV). Киев: Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, 2009. – С.14-19. (на украинском языке)
6. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Пер. с англ. М.: Мир, 1980. – 512 с.
7. Литвин О.Н. Интерлиначиация функций и некоторые ее применения // Харьков: Основа, 2002. – 544 с. (на украинском языке)

### STUDY OF UNSTEADY TEMPERATURE FIELD IN RECTANGULAR PLATE BY INTERLINATION METHOD OF FINITE ELEMENTS

O.N. Lytvyn, L.S. Lobanova, G.V. Zalyzhna

Ukrainian Engineering Pedagogical Academy,  
Universitetskaya St., 16, Kharkiv, 61003, Ukraine, e-mail: [zal\\_artem@mail.ru](mailto:zal_artem@mail.ru)

**Abstract.** Some aspects of numerical realization of interlination finite elements method (FEM) for solutions of non-stationary heat conduction problem in rectangular plate are studied. The research is conducted using exact solutions which are proposed by authors as well as the comparison with results obtained by classical FEM. Interlination finite elements method allows to reduce the transient problem of heat conduction to the Cauchy problem for system of ordinary differential equations of lower order than in the classical finite elements method.

**Key words:** transient heat conduction problem, finite elements method, functions interlination.





MSC 34L40

**СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРА ДИРАКА  
В ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.  
АНТИПЕРИОДИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ  
И КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДИРИХЛЕ**

**Е.Ю. Романова**

Воронежский Государственный Университет,  
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: [vsu.romanova@gmail.com](mailto:vsu.romanova@gmail.com)

**Аннотация.** В статье изучается оператор Дирака в лебеговых пространствах в случае антиперидических краевых условий и краевых условий Дирихле. Для исследования спектральных свойств данного оператора применяется метод подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра, а также оценки равносходимости спектральных разложений.

**Ключевые слова:** спектр оператора, оператор Дирака, метод подобных операторов, асимптотика спектра, спектральные разложения, равносходимость спектральных разложений.

**Введение.** Пусть  $L_p[0, 2\pi]$  – банахово пространство суммируемых со степенью  $p \in [1, \infty)$  на  $[0, 2\pi]$  функций. Посредством  $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$  будем обозначать одно из введенных ниже пространств.

$L_p = L_p([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$  – банахово пространство (пространство Лебега) суммируемых со степенью  $p \in [1, \infty)$  на  $[0, 2\pi]$  и со значениями в  $\mathbb{C}^2$  функций, для которых конечна величина

$$\|x\|_p = \left( \int_0^{2\pi} \|x(t)\|_{\mathbb{C}^2}^p dt \right)^{1/p}, \quad t \in [0, 2\pi];$$

$L_\infty = L_\infty([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$  – банахово пространство существенно ограниченных измеримых функций с нормой

$$\|x\|_\infty = \text{vrai sup}_{t \in [0, 2\pi]} \|x(t)\|_{\mathbb{C}^2};$$

$C_b = C_b([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$  – банахово пространство непрерывных и ограниченных функций на отрезке  $[0, 2\pi]$  и со значениями в  $\mathbb{C}^2$  с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|x(t)\|_{\mathbb{C}^2}.$$

В случае, когда  $\mathcal{F} = L_p$ , определим пространство Соболева  $W_p^1([0, 2\pi], \mathbb{C}^2) = \{y \in L_p([0, 2\pi], \mathbb{C}^2), p \geq 1 : y \text{ абсолютно непрерывна и } \dot{y} \in L_p([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)\}$ .

Через  $C^1([0, 2\pi], \mathbb{C}^2) = \{y \in C_b([0, 2\pi], \mathbb{C}^2) : \dot{y} \in C_b\}$  обозначим банахово пространство непрерывно дифференцируемых функций из  $C_b$  в случае, когда  $\mathcal{F} = C_b$ .



Символ  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^1([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$  будем использовать для обозначения одного из введенных выше пространств.

Рассмотрим оператор Дирака  $L_{bc} : D(L_{bc}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ , заданный дифференциальным выражением

$$l(y) = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} - vy, \text{ где}$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

где  $P, Q \in L_\infty([0, 2\pi], \mathbb{C}^1)$ ,  $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$  – поле комплексных чисел и  $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$ .

Область определения оператора  $L_{bc}$  задается с помощью одного из краевых условий:

- (а) антипериодические (bc=ap:  $x(0) = -x(2\pi)$ );
- (б) Дирихле (bc=dir:  $x_1(0) = x_2(0), x_1(2\pi) = x_2(2\pi)$ ).

Для исследования спектральных свойств оператора Дирака мы будем использовать метод подобных операторов, а также методы гармонического анализа. Именно методом подобных операторов исследовался оператор Дирака в статье [4] в гильбертовом пространстве  $L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2)$ .

Для определения  $D(L_{bc})$  рассмотрим дифференциальное уравнение

$$i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \dot{U}(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix} U(t),$$

где  $U(0) = I$  – тождественный оператор в  $\mathbb{C}^2$ . Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\dot{U}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -iP(t) \\ iQ(t) & 0 \end{pmatrix} U(t).$$

Согласно [1], операторнозначная функция  $U$  обратима. Рассмотрим семейство эволюционных операторов

$$\mathcal{U}(t, s) = \mathcal{U}(t)\mathcal{U}^{-1}(s), \quad t, s \in [0, 2\pi].$$

Функцию  $x \in \mathcal{F}$  отнесем к области определения оператора Дирака

$$L_{bc} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} - v,$$

если существует функция  $f \in \mathcal{F}$  такая, что имеет место равенство

$$x(t) = \mathcal{U}(t, 0)x(0) + \int_0^t \mathcal{U}(t, s)f(s)ds,$$

где  $x$  удовлетворяет одному из краевых условий, определенных выше. Отметим, что функция  $x$  по определению непрерывна.



Согласно [2], спектр оператора  $L_{bc}$  не зависит от выбора пространства  $\mathcal{F}$ , в котором он действует. Поскольку метод подобных операторов относится к возмущениям, область определения которых содержит область определения невозмущенного оператора, то изучение оператора Дирака будем осуществлять в пространстве  $\mathcal{F}$  при условии, что  $P, Q \in \mathcal{F}$ . И ввиду сказанного спектры таких операторов совпадают.

Если  $v = 0$  (нулевой потенциал), то оператор  $L_{bc}$  далее обозначается символом  $L_{bc}^0$ . Оператор  $L_{bc}^0$  будем называть *свободным оператором Дирака*, который при изучении оператора  $L_{bc}$  будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор умножения на потенциал  $v$  — возмущения.

Спектр  $\sigma(L_{bc}^0)$  и собственные функции для  $L_{bc}^0$  не зависят от выбора рассматриваемых пространств и легко определяются следующим образом:

(а)  $\sigma(L_{ap}^0) = \mathbb{Z} + 1/2$ ; соответствующие собственные функции имеют вид:

$$e_n^1 = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_n t} \\ 0 \end{pmatrix}, e_n^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

где  $\lambda_n = n + 1/2, n \in \mathbb{Z}$ ;

(б)  $\sigma(L_{dir}^0) = \mathbb{Z}$ ; каждое собственное значение простое и соответствующая нормированная собственная функция имеет вид  $s_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n^1 + e_n^2)$ , где  $\lambda_n = n, n \in \mathbb{Z}$ .

Отметим, что оператор Дирака, определенный выше, ранее не рассматривался (кроме как для  $P, Q \in L_2[0, 2\pi]$ ). Заметим также, что в статьях [8]- [10] изучался оператор Дирака с потенциалом в пространстве  $C[0, 1]$ , и была получена асимптотика собственных значений, построена асимптотика решений соответствующих параболических уравнений.

**2. Основные результаты.** Основная идея метода подобных операторов [3]- [4], [11]- [12] состоит в следующем. Пусть  $A$  — линейный хорошо изученный оператор, действующий в банаховом пространстве  $\mathcal{X}$  (он обычно называется невозмущенным оператором), и  $B$  — другой оператор, который в некотором смысле "мал" по сравнению с  $A$ . При определенных условиях естественно ожидать, что оператор  $A - B$  подобен оператору  $A - B_0$ , где  $B_0$  имеет несложную по отношению к  $A$  структуру. Оказалось, что процедура построения оператора  $B_0$  и оператора преобразования оператора  $A - B$  в  $A - B_0$  тесно связана с гармоническим анализом линейных операторов из некоторого пространства возмущений оператора  $A$ , которому принадлежит и  $B$ . Проверка условия подобия операторов  $A - B$  и  $A - B_0$  обычно приводит к вопросу разрешимости некоторых нелинейных уравнений в пространстве возмущений.

Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора  $L_{bc}, bc \in \{ap, dir\}$ , свободный оператор  $L_{bc}^0$  будем считать невозмущенным оператором. Он будет обозначаться также символом  $A$ . Таким образом,  $L_{bc} = A - B$ , где  $B$ -оператор умножения на потенциал  $v$ .

Всюду в дальнейшем  $\mathcal{X} = \mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$  будем отождествлять с банаховым пространством  $\mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$  периодических периода  $2\pi$  функций одного из пространств, включенных в  $\mathcal{F}$ .



Через  $L_1^{2\pi}(\mathbb{R})$  обозначим банахову алгебру периодических периода  $2\pi$  локально суммируемых функций. Тогда на  $\text{End } \mathcal{X}$  введем структуру банахова  $L_1^{2\pi}(\mathbb{R})$  — модуля, определенную следующим образом:

$$\varphi X = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) T(t) X T(-t) x dt, \quad (1)$$

где  $\varphi \in L_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ ,  $X \in \text{End } \mathcal{X}$ ,  $T(t) : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$  — периодическая периода  $2\pi$  изометрическая сильно непрерывная группа операторов.

Заметим, что  $\|\varphi X\| \leq \|\varphi\|_1 \|X\|$ .

Рассмотрим последовательности трансформаторов, входящих в допустимую тройку метода подобных операторов [3]:

$$\begin{aligned} J_m X &= JX - J(f_m X) + f_m X = J(X - f_m X) + f_m X, \\ \Gamma_m X &= \Gamma X - \Gamma(f_m X) = \Gamma(X - f_m X) = (f * (1 - f_m)) X, \end{aligned}$$

где

$$(JX)x = X_0 x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(t) X T(-t) x dt = \varphi X, \varphi \equiv 1,$$

$$(\Gamma X)x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) T(t) X T(-t) x dt = fX,$$

$$f_m(t) = \sum_{n=-m}^m \left(1 - \frac{|n|}{m}\right) e^{int}, \|f_m\| = 1, f(t) = i(t - \pi),$$

$$t \in [0, 2\pi), \quad x \in \mathcal{X}, X \in \text{End } \mathcal{X}, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Теперь, пользуясь формулами, определенными выше, выпишем представление операторов  $JB = J_{bc}B$ ,  $\Gamma B = \Gamma_{bc}B$ , где  $bc \in \{\text{per}, \text{dir}\}$ .

Отметим, что оператор  $L_{\text{ap}}$  подобен оператору  $L_{\text{per}}^0 - \widehat{B} - I$ , где  $L_{\text{per}}$  — оператор Дирака, определяемый периодическими краевыми условиями  $x(0) = x(2\pi)$  [12];  $\widehat{B}$  — оператор умножения на потенциал  $\widehat{v}(s) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-is}P(s) \\ e^{is}Q(s) & 0 \end{pmatrix}$ ,  $s \in [0, 2\pi]$ . Поэтому изучение спектральных свойств оператора  $L_{\text{ap}}$  сводится к изучению спектральных свойств оператора Дирака  $L_{\text{per}}^0 - \widehat{B}$ .

Таким образом, по существу можно ограничиться изучением операторов  $L_{\text{per}}$  и  $L_{\text{dir}}$ . Имеют место следующие равенства.

$$((J_{\text{per}}B)x)(s) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & P((s+\tau)/2) \\ Q((s+\tau)/2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau, \quad (2)$$



$$((\Gamma_{\text{per}}B)x)(s) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & f\left(\frac{s-\tau}{2}\right)P\left(\frac{s+\tau}{2}\right) \\ f\left(\frac{\tau-s}{2}\right)Q\left(\frac{s+\tau}{2}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau, \quad (3)$$

где  $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ ,  $p \geq 1$ ,  $s \in [0, 2\pi]$ ,  $f(t) = i(t - \pi)$ ,  $t \in [0, \pi)$ ,  $f \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R})$ .

$$((J_{\text{dir}}B)x)(s) = \frac{1}{16\pi} \int_0^{8\pi} \mathcal{K}_{\text{dir}}(s, \tau)x(\tau)d\tau, \quad x \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), \quad s \in [0, 2\pi], \quad (4)$$

$$((\Gamma_{\text{dir}}B)x)(s) = \frac{1}{16\pi} \int_0^{8\pi} \tilde{\mathcal{K}}_{\text{dir}}(s, \tau)x(\tau)d\tau, \quad x \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), \quad s \in [0, 2\pi], \quad (5)$$

где

$$\mathcal{K}_{\text{dir}}(s, \tau) = \begin{pmatrix} \Phi\left(\frac{s-\tau}{2}\right) & \Phi\left(\frac{s+\tau}{2}\right) \\ \Phi\left(\frac{-s-\tau}{2}\right) & \Phi\left(\frac{-s+\tau}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_{\text{dir}}(s, \tau) = \begin{pmatrix} f\left(\frac{s+\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{s-\tau}{2}\right) & f\left(\frac{s-\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{s+\tau}{2}\right) \\ f\left(\frac{\tau-s}{2}\right)\Phi\left(\frac{-s-\tau}{2}\right) & f\left(\frac{-s-\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{-s+\tau}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$$\Phi(u) = \frac{P(u) + Q(-u)}{2}, \quad \Phi \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2).$$

Методом подобных операторов были получены следующие результаты.

**Теорема 1.** Если число  $m \in \mathbb{Z}_+$  таково, что  $\|\Gamma_m B\|_1 < 1$ , (т.е. оператор  $I + \Gamma_m B$  обратим), то оператор  $L_{bc} = A - B$ , где  $A = L_{bc}^0$ ,  $B$  — оператор умножения на  $v$ , подобен оператору  $\tilde{L}_{bc} = L_{bc}^0 - \tilde{B}$ , где

$$\tilde{B} = J_m B + (I + \Gamma_m B)^{-1}(B\Gamma_m B - (\Gamma_m B)J_m B),$$

причем имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma_m B) = (I + \Gamma_m B)(A - \tilde{B}).$$

Операторы  $J_m B$ ,  $\Gamma_m B$ ,  $B\Gamma_m B$ ,  $(\Gamma_m B)J_m B$ ,  $\tilde{B}$  являются компактными.



**Теорема 2.** Пусть число  $m \in \mathbb{Z}_+$  таково, что  $\|\Gamma_m B\|_1 < 1$ . Тогда оператор  $L_{bc} = A - B$  подобен оператору вида

$$A - J(\tilde{X} - f_m \tilde{X}) = A - J_m \tilde{X} = A - B_0, \quad (6)$$

где оператор  $\tilde{X}$  — решение уравнения  $X = B\Gamma_m X - (\Gamma_m X)(J_m X) + B = \Phi(X)$ , которое можно найти методом последовательных приближений.

Преобразование подобия оператора  $A - B$  в оператор  $A - B_0$  осуществляет оператор  $I + \Gamma_m \tilde{X}$ .

Непосредственно из теоремы 2 следует

**Теорема 3.** Возмущенный оператор является оператором с компактной резольвентой и существует такая нумерация собственных значений, что  $\sigma(L_{bc})$  представим в виде

$$\sigma(L_{bc}) = \sigma_{(m)} \cup \left( \bigcup_{|n| \geq m+1} \sigma_n \right), \quad (7)$$

где  $\sigma_{(m)}$  — конечное множество, а  $\sigma_n, |n| \geq m+1$ , определяются равенствами

$$\sigma_n = \{n + 1/2 + \alpha_n^\pm\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^\pm = 0, \quad \text{если } bc = \text{ар};$$

$$\sigma_n = \{n + \gamma_n\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0, \quad \text{если } bc = \text{dir}.$$

Поскольку  $P_n$  — проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству  $\{\lambda_n\} \subset \sigma(L_{bc}^0), n \in \mathbb{N}$ , тогда в следующей теореме  $\tilde{P}_{(m)}, \tilde{P}_n, n \geq m+1$ , — проекторы Рисса, построенные по оператору  $L_{bc}$  и множествам  $\sigma_{(m)}, \sigma_n, n \geq m+1$ , соответственно.

**Теорема 4.** Имеет место равносходимость спектральных разложений операторов  $L_{bc}$  и  $L_{bc}^0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{P}_n - P_n\| = 0, \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^n \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \tilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^n \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) P_k \right\| = 0. \quad (9)$$

### Литература

1. Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / М: Наука, 1970.
2. Диденко В.Б. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, определяемых линейным отношением // Матем. заметки. — 2011. — 89, №2. — С.226–240.
3. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / Воронеж: Воронежский государственный университет, 1987. — 165 с.
4. Баскаков А.Г. Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1986. — 50:4. — С.435–457.
5. Баскаков А.Г. Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов // Известия РАН. Сер.матем. — 1994. — 58:4 — С.3–32.



6. Баскаков А.Г. Метод подобных операторов и формулы и регуляризованных следов // Изв. ВУЗов. Сер. матем. – 1984. – №3. – С.3-12.
7. Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Известия РАН, серия матем. – 2011. – 75:3. – С.4-28.
8. Бурлуцкая М.Ш., Корнев В.В., Хромов А.П. Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2012. – 52:9. – С.1621–1632.
9. Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Хромов А.П. Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака с недифференцируемым потенциалом // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – 12:3. – С.22–30.
10. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Функционально- дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями // Доклады академии наук. – 2014. – 454:1. – С.15-17.
11. Романова Е.Ю. Метод подобных операторов в спектральном анализе дифференциального оператора с инволюцией // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – 2014. – 176:5. – С.73-78.
12. Romanova E.Yu. Similar operators method in spectral analysis of Dirac's operator in the Lebesgue spaces // Spectral and evolution problems. – 21, Issue 2. – 2011. – P.185-186.

**SPECTRAL ANALYSIS OF DIRAC OPERATOR IN THE LEBESGUE SPACES. ANTIPERIODIC BOUNDARY CONDITIONS AND DIRICHLET'S BOUNDARY CONDITIONS**

**E.Yu. Romanova**

Voronezh State University,  
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: [vsu.romanova@gmail.com](mailto:vsu.romanova@gmail.com)

**Abstract.** Dirac's operator in the Lebesgue spaces in case of antiperiodic boundary conditions and Dirichlet's boundary conditions is studied. Method of similar operators is used to analyze spectral properties of the operator. The asymptotic of spectrum and estimates of equiconvergence of spectral decomposition are obtained.

**Key words:** spectrum of operator, Dirac's operator, similar operators method, asymptotic of spectrum, spectral decomposition, equiconvergence of spectral decomposition.



MSC 11Y99

**РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  $f(f(x)) = \exp(x)$** **К.А. Рубцов, G.F. Romerio**Белгородский государственный университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: rubtsov@bsu.edu.ru

**Аннотация.** Описана методика решения функционального уравнения  $f(f(x)) = e^x$ , использующая гомоморфизм сложения на основе понятия суперлогарифма. Методика предполагает взаимосвязь между непрерывным повторным возведением в степень и тетрацией. Расширение этой методики предложено для решения обобщенного функционального уравнения  $f(f(x)) = u(a, x)$  и аналогичных ему. Гомоморфизм сложения, используемый при решении функционального уравнения, находит практическое применение в алгоритмах гиперформата, описывающего сверхбольшие числа.

**Ключевые слова:** гомоморфизм, суперлогарифм, тетрация, сверхстепень, алгоритм, гиперформат.

**Введение.** Более века назад в математике была поставлена задача решения функционального уравнения  $f(f(x)) = e^x$ . В 1950 году Н. Кнесер в работе [1] нашел реальное аналитическое решение. Однако, в дальнейших исследованиях [2,4] отмечается, что полученное решение в работе [1] определено неоднозначно и не может быть вычислено. В последующие годы неоднократно предпринимались попытки найти решение этого функционального уравнения. Например, в работе [4] указана взаимосвязь поиска решения с обобщенными экспоненциальными и логарифмическими функциями. Отмечена их важность будущего применения в вычислительной технике для расширения формата чисел, аналогичных числам с плавающей запятой в арифметике [5,6]. Во всех приведенных исследованиях, включая работу J.C.Appleby [7], осуществлялся поиск приближенного решения функционального уравнения  $f(f(x)) = e^x$ . В настоящей работе, авторы поставили задачу точного решения этого уравнения. Эта задача была решена методом, основанным на использовании гипероперации «Тетрация» и ее инверсии.

**1. Поиск решения.** Рассмотрим два частных случая:  $f_1(f_1(x)) = e + x$  и  $f_2(f_2(x)) = e \cdot x$ . Эти уравнения легко решить:  $f_1(x) = e/2 + x$  и  $f_2(x) = \sqrt{e} \cdot x$ . Сравнивая исходные функциональные уравнения и получаемые результаты, можно сделать следующий прогноз ожидаемого решения уравнения  $f(f(x)) = e^x$  :

- структура решения должна быть аналогична решениям для  $f_1$  и  $f_2$ , то есть  $f(x) = \psi(e) * x$  ;
- ранг оператора «\*» идентичен рангу функции  $e^x$ , то есть рангу операции степени, и желательна его коммутативность;

---

Работа выполнена в рамках проекта «Исследование и разработка эффективных гомоморфных методик для техники и информационных технологий» (регистрационный номер: 8.8539.2013).





- ранг функции  $\psi(e)$ , вероятно, выше ранга  $\sqrt{e}$ , а функция аналогична последовательности  $e/2, \sqrt{e}, \psi(e)$ , то есть характеризует разделение на две операции предыдущего ранга.

Из поставленной задачи и вышеизложенного прогноза можно сделать выводы о методике решения:

1. Следует использовать операции рангом выше чем  $e^x$ .
2. Для сохранения структуры формулы решения и её преобразования необходимо использовать *гомоморфизм*.

**2. Тетрация и обратные функции.** Последовательность операций  $a + b, a \cdot b, a^b$  можно продолжить и ввести  ${}^b a$  [8, 9], где  ${}^b a$  – операция названная *Тетрация*. (Имеется несколько наименований этой операции: «Hyperpower», «Tetration» [10–12], «Power Tower» [13], «Гипероператор-4», «сверхстепень», «суперстепень» [14]. Далее, в статье применяется термин *Тетрация* – русскоязычный аналог *Tetration*. Эта операция определена в четвертом разряде иерархии Grzegorzczuk, для которой авторы использовали примечание Морера [9]:  $x^x = {}^2 x$ .) Тетрация – операция, имеющая ранг выше, чем  $a^b$ . Она не коммутативна и имеет две различные обратные операции типа «корень» и типа «логарифм». Наиболее удачными названиями являются «суперкорень» и «суперлогарифм». В работе [14] предложен простой вариант обозначений этих обратных операций. Так, если  $a^b = c \Rightarrow b = \log_a c$ , то  ${}^b a = c \Rightarrow b = \text{slog}_a c$ , где  $\text{slog}_a c$  – суперлогарифм от  $c$  по основанию  $a$ , а сверхкорень обозначен согласно [21]. В работе [14] дана формула (1), инвариантная относительно операций:

$${}^n R_a^{(k+{}^n R_a^b)} = {}^{n-1} R_a^k \quad (\forall n \in N, \text{ для } n = 1, a < b), \quad (1)$$

где  ${}^n R_a^b$  :  $n$  – ранг операции (полагаем, что  $n = 1$  – ранг сложения,  $n = 2$  – ранг умножения и т.д.),  $i$  – номер инверсии ( $i = 1$  – без инверсии,  $i = 2$  – отношение инверсии типа «корень»,  $i = 3$  – отношение инверсии типа «логарифм»),  $k$  – число повторений операции ( $k = 1$  не пишется),  $a, b$  – аргументы. При  $n = 4, a > 1, k \geq 0$  из (1) нетрудно получить [15, 16] для Тетрации и суперлогарифма:

$$({}^{k+\text{slog}_a b}) a = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a^b}_{k \text{ повторений } a} \quad \text{и} \quad ({}^{-k+\text{slog}_a b}) a = \underbrace{\log_a \dots \log_a b}_{k \text{ повторений } a}. \quad (2)$$

### 3. Гомоморфизм сложения.

**Лемма 1.** Если  $y = f(x)$  – функция действительного переменного, то при  $a > \sqrt[e]{e}$  имеет место тождество:

$$x * y = (\text{slog}_a x + \text{slog}_a y) a.$$



□ В Тетрации и обратных ей операциях отсутствуют некоторые полезные зависимости, имеющиеся в степени. Частично преодолеть эти ограничения позволяет гомоморфизм. Согласно [17], гомоморфизм  $\varphi$ :

$$\varphi(F'_i(a_1, \dots, a_{n_i})) = F_i(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_{n_i})). \quad (3)$$

Приняв в (3):  $\varphi(z) = \text{slog}_a z$ ,  $i = 1$ ,  $n = 2$ ,  $a_1 = x$ ,  $a_2 = y$ ,  $F_1(a_1, a_2) = x + y$ , а  $F'_1(a_1, a_2) = x * y$ , получим гомоморфизм сложения с помощью суперлогарифма (2). В статье принято ограничение  $a > \sqrt[e]{e}$  согласно свойствам Тетрации [11]:

$$\text{slog}_a(x * y) = \text{slog}_a x + \text{slog}_a y, \quad (4)$$

откуда

$$x * y = (\text{slog}_a x + \text{slog}_a y) a. \quad (5)$$

Полученный гомоморфизм сложения (4) правильнее представить во взаимосвязи с основанием суперлогарифма. Тогда, тождество (5) примет вид:

$$x \overset{[a]}{*} y = (\text{slog}_a x + \text{slog}_a y) a. \quad \blacksquare \quad (6)$$

Зависимость (6) имеет, в частности, свойства:

1. Коммутативность:  $x \overset{[a]}{*} y = y \overset{[a]}{*} x$ , если  $a \neq x$ ,  $a \neq y$ .
2. Ранг оператора “\*” соответствует степени, так как  $x \overset{[x]}{*} y = x^y$  и  $x \overset{[y]}{*} y = y^x$ .

Из (4) видно, что найденный гомоморфизм аналогичен умножению в тождестве  $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ . Таким образом, в поиске решения функционального уравнения  $f(f(x)) = e^x$  как и  $f(x) = \psi(e) * x$ , полученный гомоморфизм полностью отвечает поставленным требованиям.

#### 4. Решение функционального уравнения $f(f(x)) = e^x$ .

**Теорема 1.** Функция любого переменного  $f(x) = (0, 5 + \text{sln}x) * e$  является точным решением уравнения  $f(f(x)) = e^x$ .

□ Для нахождения решения функционального уравнения  $f(f(x)) = e^x$ , следует определить  $\psi(e)$ , такое, что  $f(x) = \psi(e) * x$ . Как уже отмечалось, эта функция должна быть подобна обратной операции типа «корень», но она не может быть суперкорнем. Так как оператор «\*» в формуле  $f(x) = \psi(e) * x$  аналогичен умножению для  $f_2(x) = \sqrt{e} \cdot x$ , то аналог корня можно записать как  $\psi(e) \overset{[e]}{*} \psi(e) = e$ , аналогично  $\sqrt{e} \cdot \sqrt{e} = e$ . Тогда, искомая функция принимает вид  $f(x) = \psi(e) \overset{[e]}{*} x$ , а функцию  $e^x$  можно записать как  $e^x = e \overset{[e]}{*} x$ . Откуда,

$$f(f(x)) = \left[ \psi(e) \overset{[e]}{*} \psi(e) \right] \overset{[e]}{*} x = e^x. \quad (7)$$



Из равенства  $\psi(e) \overset{[e]}{*} \psi(e) = e$  найдем функцию  $\psi(e)$ , учитывая Лемму 1:

$$e = \psi(e) \overset{[e]}{*} \psi(e) = (\text{slog}_e \psi(e) + \text{slog}_e \psi(e)) e = 2 \cdot \text{slog}_e \psi(e) e = 2 \cdot \text{sln} \psi(e) e; \tag{8}$$

$$2 \cdot \text{sln} \psi(e) = \text{sln} e \Rightarrow \text{sln} \psi(e) = \frac{1}{2} \Rightarrow \psi(e) = {}^{1/2} e. \tag{9}$$

Таким образом, искомая функция  $f(x)$  согласно (8):

$$f(x) = \psi(e) \overset{[e]}{*} x = {}^{1/2} e \overset{[e]}{*} x.$$

Для проверки подставим  $\psi(e) = {}^{1/2} e$  из (9) в (7):

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \left[ {}^{1/2} e \overset{[e]}{*} {}^{1/2} e \right] \overset{[e]}{*} x = (\text{sln}({}^{1/2} e) + \text{sln}({}^{1/2} e)) e \overset{[e]}{*} x = \\ &= (1/2 + 1/2) e \overset{[e]}{*} x = e \overset{[e]}{*} x = (\text{sln} e + \text{sln} x) e = (1 + \text{sln} x) e = e^{(\text{sln} x)} = e^x. \end{aligned}$$

Итак, решение  $f(f(x)) = e^x$  имеет вид:

$$f(x) = (1/2) e \overset{[e]}{*} x = (0,5 + \text{sln} x) e. \quad \blacksquare \tag{10}$$

### 5. Общее решение функционального уравнения $f(f(x)) = u(a, x)$ .

**Лемма 2.** Решением уравнения  $f(f(x)) = u(a, x)$  для любой действительной функции двух переменных будет  $f(x) = {}^{1/n} a \overset{[a]}{*} x = (1/n + \text{slog}_a x) a$ .

□ Согласно теореме 1 можно решить функциональное уравнение типа

$$\underbrace{f(f(\dots f(x)) \dots)}_{n \text{ повторов } f} = a^x.$$

Решение этого уравнения:

$$f(x) = {}^{1/n} a \overset{[a]}{*} x = (1/n + \text{slog}_a x) a. \quad \blacksquare$$

Методику решения с применением гомоморфизма, приведенную в теореме 1 и лемме 2, целесообразно использовать и для решения уравнения

$$\underbrace{f(f(\dots f(x)) \dots)}_{n \text{ повторов } f} = u(a, x). \tag{11}$$

Рассмотрим решение уравнения  $f(f(x)) = u(a, x)$ , где  $u(a, x)$  – функция 2-х переменных. Тогда запишем функцию  $U(x, n)$ :

$$U(x, n) = \underbrace{u(x, u(x, \dots u(x, x) \dots))}_{n \text{ повторов } x}.$$



Обозначим обратную ей функцию как « $L$ »: если  $U(a, x) = y$ , то  $L(a, y) = x$ .

Из полученных функций и леммы 2 запишем гомоморфизм сложения на базе  $L(a, x)$ :  $b \diamond^{[a]} c = U(a, (L(a, b) + L(a, c)))$ , где « $\diamond$ »- оператор, используемый для компактного обозначения этого гомоморфизма. Далее ищем функцию  $f(x)$ :  $f(x) = g(a) \diamond^{[a]} x$ , где  $g(a) \diamond^{[a]} g(a) = a$  и  $a \diamond^{[a]} x = u(a, x)$ . Откуда, найдем вспомогательную функцию  $g(a)$  и искомое решение  $f(x)$ :

$$g(a) = U\left(a, \frac{L(a, a)}{2}\right) = U\left(a, \frac{1}{2}\right),$$

$$f(x) = g(a) \diamond^{[a]} x = U\left(a, \frac{1}{2}\right) \diamond^{[a]} x = U\left(a, \left(L\left(a, U\left(a, \frac{1}{2}\right)\right) + L(a, x)\right)\right).$$

Для общего случая (11), решение имеет вид:

$$f(x) = U\left(a, \frac{1}{n}\right) \diamond^{[a]} x = U\left(a, \left(L\left(a, U\left(a, \frac{1}{n}\right)\right) + L(a, x)\right)\right).$$

**Заключение.** При решении функционального уравнения  $f(f(x)) = e^x$  авторы использовали оператор « $*$ ». Этот оператор удобно применять для построения новых форматов чисел, аналогичных известному формату с плавающей запятой. В работах [19,20] авторы предлагают несколько алгоритмов и программ для таких форматов. В одном из форматов число  $D$  представляется как:

$$D = {}^{(n+\text{slog}_a d)}a = d *^{[a]} ({}^n a), \quad (12)$$

где  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a > 1$ ,  $d \in [1; a[$ ,  $d \in \mathbf{R}$ . Если для базиса  $a$  (12) принять одно из значений, например  $a = 10$ , или  $a = 2$ , то получим упрощенную запись:

$$D = {}^{(n+\text{slog}_{10} d)}10 = d *^n 10 \quad \text{и} \quad D = {}^{(n+\text{slog}_2 d)}10 = d *^n 2. \quad (13)$$

В случае (13), оператор « $*$ » обязательно следует рассматривать в паре с основанием сверхстепени. Алгоритм преобразования в новый формат чисел и обратно выполняется по формулам (2).

В заключение, следует отметить, что полученное решение (10) может быть вычислено, так как функции  ${}^x e$  и  $\text{sln}(x)$  имеют аппроксимации. Авторы предлагают аппроксимацию, основанную на формулах (2) и приближении  $\text{sln}(x) \approx \ln(x)$  для  $x \in [1; e]$ . Из (6) и известных аппроксимаций [18, 19] можно записать:

$$\text{sln}(x) \approx \begin{cases} \text{sln}(e^x) - 1, & \text{если } x \leq 0, \\ \text{sln}(\ln(x)) + 1, & \text{если } 1 < x, \\ x - 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (14)$$

Гиперформат чисел (12) рационализирует вычисление сверхлогарифмов (14) путем применения стандартных вычислительных процедур для логарифмов. В частности, приближенное вычисление функции  $\text{sln}(x)$  можно реализовать алгоритмом [21]:



1. Преобразовать число  $x$  в новый формат  $x = d * {}^n e$ .
2. Преобразовать  $x = d * {}^n e \Rightarrow x^* = d \cdot e^n$ .
3. Вычислить  $\text{sln}(x) = \ln(x^*) = n + \ln(d)$ , так как  $d \in [1; e[$ .

Авторы использовали указанные алгоритмы в программах преобразования форматов чисел и гиперкалькуляторе [23,24]. Элементы этого исследования были изложены на ICM [19,20]. Авторские права на изложенный в статье материал, а также на алгоритмы и программы защищены [22].

### Литература

1. Kneser H. Reelle analytische Lösungen der Gleichung  $\varphi(\varphi(x)) = e^x$  und verwandter Funktionalgleichungen // J. Reine angew. Math. – 1950. – 187. – В.56-67.
2. Baker I.N. The iteration of entire transcendental functions and the solution of the functional equation  $f(f(z)) = F(z)$  // Math. Ann. – 1955. – 120. – P.174-180.
3. Kuczma M. Functional Equations in a Single Variable / Warsaw: PWN-Polish Scientific Publishers, 1968.
4. Mathematics of Computation, October 1991. – 57;196. – P.723-733.
5. Clenshaw C.W., Lozier D.W., Olver F.W.J., Turner P.R. Generalized exponential and logarithmic functions // Comput. Math. Appl. – 1986. – 128 (5/6). – P.1091-1101.
6. Clenshaw C.W., Olver F.W.J., Turner P.R. Level-index arithmetics an introductory survey // Numerical Analysis and Parallel Processing, Lecture Notes in Math. – vol. 1397, Springer-Verlag, New York, 1989.
7. Appleby J.C. Notes on Hexponentiation // The Mathematical Gazette. – 1995. – 79; №484 1995. A short investigation on finding expressions for  $h(x)$ , such that  $h(h(x)) = \exp(x)$ .
8. Eisenstein G. Entwicklung von  $a^{a^{\dots}}$  // J. reine angew. Math. – 1844. – 28 – В.49-52.
9. Maurer H. Über die Funktion  $y = x^{[x^{(\dots)}]}$  für ganzzahliges Argument (Abundanzen) // Mittheilungen der Mathematische Gesellschaft in Hamburg. – 1901. – 4. – P.33-50.
10. Goodstein R.L. Transfinite ordinals in recursive number theory // Journal of Symbolic Logic. – 1947. – 12.
11. Macdonnell J. Some Critical Points on the Hyperpower Function  ${}^n x = x^{x^{\dots x}}$  // Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. – 1989. – 20. – P.297-305.
12. Wolfram MathWorld™, <http://mathworld.wolfram.com/Tetration.html>
13. Wolfram MathWorld™, <http://mathworld.wolfram.com/PowerTower.html>
14. Рубцов К.А. Алгоритмизация ингредиентов во множестве алгебраических операций // Кибернетика. – 1989. – №3. – С.111-112.
15. Rubtsov K. Integro-differential objects of a new nature // The Proceeding ICM 94. – Zurich, Section: 8, AMS-Classification number: 26 (short communications), P.57.
16. Рубцов К.А. Новые математические объекты // Белгород: БелГТАСМ, Киев: НПП ИНФОРМАВТОСИМ. – 1996, 251 с.
17. Математическая энциклопедия / М.: Сов. энциклопедия, 1977. – Т.1. – С.1061.
18. Super-logarithm, from Wikipedia - The linear approximation approach by Rubstov and Romero, <http://en.wikipedia.org/wiki/Superlogarithm>
19. Rubtsov K.A., Romero G.F. International Congress of Mathematicians, Madrid 2006: Abstracts, Posters, Short Communications, Mathematical Software, Other Activities, p. 22-23, Hyper-operations as a tool for science and engineering.



20. Rubtsov K.A., Romerio G.F., International Congress of Mathematicians, Hyderabad 2010: Abstracts, Short Communications, p. 626-627, Applications of a number notation hyperformat for science and engineering.
21. Rubtsov K.A., Romerio G.F. Hyperoperations, for science and technology. New algorithmic tools for computer science - Lambert Academic Publishing, 2011, 185 p.
22. Romerio G.F., Rubtsov C.A. Iperformato Rubtsov-Romerio (RRH) // Società Italiana degli Autori ed Editori (SIAE), Roma, 2005, 2010.
23. Рубцов К.А., Ромерио Г.Ф. Гипероперации в математическом моделировании и научных исследованиях. Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-25: сб. трудов XXV Междунар. науч. конф.: Т. 1. Секция 1,2, 2012, с. 67-70.
24. Рубцов К.А., Ромерио Г.Ф. Алгоритмизация гиперформата чисел в научных исследованиях. Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-25: сб. трудов XXV Междунар. науч. конф.: Т. 10. Секция 12, 2012, с. 118-122.

**THE SOLUTION OF THE FUNCTIONAL EQUATION  $f(f(x)) = \exp(x)$   
BY MEANS OF A HOMOMORPHISM**

**K.A. Rubtsov, G.F. Romerio**

The National Research University "Belgorod State University" / "BelSU",  
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: [rubtsov@bsu.edu.ru](mailto:rubtsov@bsu.edu.ru)

**Abstract.** The solution strategy of the  $f(f(x)) = e^x$  functional equation is described using a homomorphism with the super-logarithm as mapping function. The strategy shows the analytical relationship between continuous iterated exponentiations and tetration. An extension of the same strategy is proposed for the solution of a generalized  $f(f(x)) = u(a, x)$  functional equation. A practical application is mentioned for the definition of a super-format for the notation of very large numbers.

**Key words:** homomorphisms, computability and recursion theory, arithmetic functions, computational number theory.



MSC 42A99

## О ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЯХ

А.А. Рыжкова, И.А. Тришина

Воронежский государственный университет,

Университетская пл.,1, Воронеж, Воронежская область, 394036, Россия, e-mail:office@main.vsu.ru

**Аннотация.** Введен в рассмотрение класс почти периодических на бесконечности функций. Необходимость рассмотрения таких функций связана с тем, что они возникают при рассмотрении разностных уравнений. Основные результаты статьи связаны с доказательством почти периодичности на бесконечности решений разностных уравнений.

**Ключевые слова:** периодические на бесконечности функции, разностные уравнения, спектральная теория.

**1. Введение.** Пусть  $\mathbb{R}$  — множество вещественных чисел и  $X$  — комплексное банахово пространство. Обозначим через  $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$  банахово пространство ограниченных функций  $x : \mathbb{R} \rightarrow X$  с нормой  $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$ . Через  $C_0(\mathbb{R}, X)$  обозначим (замкнутое) подпространство функций из  $C_b$ , убывающих на бесконечности, т.е.  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ ,  $x \in C_0(\mathbb{R}, X)$ . В пространстве  $C_b(\mathbb{R}, X)$  рассмотрим операторы сдвига

$$S(t) : C_b(\mathbb{R}, X) \rightarrow C_b(\mathbb{R}, X), \quad (S(t)x)(\tau) = x(\tau + t), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ . Используемые результаты из гармонического анализа, функции и векторов, содержатся в работах [1-7]. Следуя [1],[6],[7], дадим определение медленно меняющейся на бесконечности функции.

**Определение 1.** Функция  $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$  называется медленно меняющейся на бесконечности, если  $S(\tau)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X)$ , т.е.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|x(\tau + t) - x(\tau)\| = 0$$

для любого  $t \in \mathbb{R}$ .

Примером медленно меняющейся на бесконечности функции является функция вида

$$x(t) = \sin(\ln(\alpha + |t|)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0.$$

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций образуют замкнутое подпространство из  $C_b(\mathbb{R}, X)$ , которое обозначим символом  $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ .

**Определение 2.** Пусть  $\varepsilon > 0$ . Число  $\omega \in \mathbb{R}$  называется  $\varepsilon$ -периодом функции  $x \in C_b$  на бесконечности, если существует такое число  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , что  $\sup_{|t| > \alpha} \|x(t + \omega) - x(t)\| < \varepsilon$ .

Множество  $\varepsilon$ -периодов функции  $x$  на бесконечности обозначим через  $\Omega_\infty(x, \varepsilon)$ .

---

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект 14-21-00066, выполняемый в Воронежском государственном университете), РФФИ (проекты 13-01-00378, 14-01-31196).



**Определение 3.** Множество  $\Omega_\infty(x, \varepsilon)$  называется относительно плотным на  $\mathbb{R}$ , если существует такое  $l \in \mathbb{N}$ , что  $[t, t + l] \cap \Omega_\infty(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ , для любого  $t \in \mathbb{R}$ .

**Определение 4** (определение Бора). Функция  $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$  называется почти периодической на бесконечности, если для любого  $\varepsilon > 0$  множество  $\Omega_\infty(x, \varepsilon)$  относительно плотно на  $\mathbb{R}$ .

Множество почти периодических на бесконечности функций обозначим символом  $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ .

**Теорема 1.** Множество  $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$  образует банахово пространство и банахову алгебру, если  $X$  — банахова алгебра.

Отметим, что банахово пространство  $AP(\mathbb{R}, X)$  почти периодических функций содержится в  $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ .

**Определение 5** (аппроксимационное). Функция  $x \in C_b$  называется почти периодической, если для любого  $\varepsilon > 0$  существуют функции  $x_k \in C_{sl, \infty}$  и числа  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq k \leq N$  такие, что

$$\|x(t) - \sum_{k=0}^N x_k(t)e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon.$$

Можно доказать, что эти определения (Бора и аппроксимационное) эквивалентны. Ясно, что  $C_{sl, \infty}(\mathbb{R}, X) \subset AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ .

**Теорема 2.** Функция вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t)e^{i\lambda_k t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x : \mathbb{R} \rightarrow X,$$

где  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq k \leq m$ ,  $x_k \in C_{sl, \infty}(\mathbb{R}, X)$ ,  $0 \leq k \leq N - 1$ , является почти периодической на бесконечности функцией ( $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ ).

□ Как отмечалось  $C_{sl, \infty}(\mathbb{R}, X) \subset AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ , а также  $t \mapsto e^{i\lambda_k t}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , — почти периодические функции. Поскольку произведения  $\gamma_k x_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , также являются почти периодическими на бесконечности функциями, то их сумма также является почти периодической на бесконечности функцией. ■

**2. О почти периодических на бесконечности решениях разностного уравнения.** В банаховом пространстве  $C_b(\mathbb{R}, X)$ , где конечномерное банахово пространство, рассмотрим разностное уравнение

$$x(t+1) = Bx(t) + y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где  $y \in C_0(\mathbb{R}, X)$ ,  $B \in \text{End } X$  со свойством  $\sigma_0 = \sigma(B) \cap i\mathbb{R} = \{i\lambda_1, i\lambda_2, \dots, i\lambda_m\}$  — совокупность простых собственных значений и  $\sigma(B)$  обозначает спектр оператора  $B$ .

**Теорема 3.** Каждое ограниченное решение  $x : \mathbb{R} \rightarrow X$  уравнения (1) является почти периодической на бесконечности функцией, которое допускает представление вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t)e^{i\lambda_k t},$$





где  $x_k \in C_{sl,\infty}$ ,  $0 \leq \lambda_k < 2\pi$ ,  $0 \leq k \leq N - 1$ .

□ Спектр оператора  $B$  представим в виде:

$$\sigma(B) = \sigma_0 \cup \sigma_{in} \cup \sigma_{out},$$

где

$\sigma_0 = \sigma(B) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$  — совокупность собственных значений, лежащих на окружности  $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 1\}$ ,

$\sigma_{in} = \{\lambda \in \sigma(B) : \operatorname{Re} \lambda < 1\}$  — совокупность собственных значений, лежащих внутри окружности.

$\sigma_{out} = \{\lambda \in \sigma(B) : \lambda > 1\}$  — совокупность собственных значений, лежащих вне окружности.

В соответствии с этим разбиением спектра рассмотрим проекторы  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_{in}, \mathcal{P}_{out}$ , которые соответственно построены по спектральным множествам  $\sigma_0, \sigma_{in}, \sigma_{out}$ . Таким образом,  $I = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{in} + \mathcal{P}_{out}$ . Эти проекторы индуцируют разложение  $X = X_0 \oplus X_{in} \oplus X_{out}$  пространства  $X$ , где  $X_0 = \operatorname{Im} \mathcal{P}_0, X_{in} = \operatorname{Im} \mathcal{P}_{in}, X_{out} = \operatorname{Im} \mathcal{P}_{out}$ . Эти подпространства являются инвариантными для оператора  $B$  и пусть  $B_0 = B|_{X_0}, B_{in} = B|_{X_{in}}, B_{out} = B|_{X_{out}}$ . Таким образом,  $B = B_0 \oplus B_{in} \oplus B_{out}$  относительно построенного разложения пространства  $X$ . К обеим частям уравнения (1) применим проектор  $\mathcal{P}_{in}$ , и тогда получим последовательность  $x_{in} = \mathcal{P}_{in}x$ , удовлетворяющую равенству

$$S(1)x_{in}(t) = B_{in}x_{in}(t) + y_{in}(t), \quad y_{in} = \mathcal{P}_{in}y \in C_0, \quad (2)$$

Из (2) следует, что

$$(I - B_{in}S(-1))x_{in} = S(-1)y_{in}. \quad (3)$$

Поскольку  $\|S(-1)\| = 1$ ,  $B_{in}S(-1)x_{in}(t) = S(-1)B_{in}x_{in}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , и спектральный радиус  $r(B_{in})$  оператора  $B_{in}$  меньше единицы, то оператор  $I - B_{in}S(-1)$  обратим и из (3) получаем, что

$$x_{in}(t) = ((I - B_{in}S(-1))^{-1}S(-1)y_{in})(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{in}^n S(-n(t+1))y_{in}(t-1).$$

Ясно, что  $x_{in} \in C_0(\mathbb{R}, X)$ . Аналогичный результат получим при применении проектора  $\mathcal{P}_{out}$  к уравнению (1):

$$(S(1)x_{out})(t) = B_{out}x_{out}(t) + y_{out}(t), \quad y_{out} = \mathcal{P}_{out}y \in C_0. \quad (4)$$

Оператор  $B_{out}$  обратим, и  $\sigma(B_{out}^{-1}) = \{\lambda^{-1}; \lambda \in \sigma_{out}\}$ , т.е. его спектральный радиус меньше единицы. Используя перестановочность оператора  $S_N$  с  $B_{out}$  из (4), получим равенства

$$S(1)B_{out}^{-1}x_{out}(t) = x_{out}(t) + B_{out}^{-1}y_{out}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

или

$$(I - S(1)B_{out}^{-1})x_{out}(t) = -B_{out}^{-1}y_{out}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$



Таким образом,

$$x_{out}(t) = -(I - S(1)B_{out}^{-1})^{-1}B_{out}^{-1}y_{out}(t) = -\sum_{n=0}^{\infty}(B_{out}^{-1}S(1))^n B_{out}^{-1}y_{out}(t), \quad y_{out} \in C_0.$$

Из этой формулы следует, что  $x_{out} \in C_0(\mathbb{R}, X)$ . Проектор  $P_0$  можно представить в виде

$$P_0 = P_1 + \dots + P_N,$$

где  $P_k$  — проектор, и

$$AP_k = \gamma_k P_k, \quad \text{где } |\gamma_k| = 1, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Ввиду предполагаемой простоты собственных значений число  $\gamma_k$  представимо в виде  $\gamma_k = e^{i\lambda_k}$ ,  $1 \leq k \leq N$ . Применим проектор  $P_0$  к разностному уравнению (1) и далее применим проектор  $P_k$

$$P_k x_0(t+1) = P_k B_0 x_0(t) + P_k y_0(t),$$

где  $x_0(t) = P_0 x(t)$ ,  $x_k(t) = P_k x_0(t)$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

Следовательно,  $x_k(t+1) = \gamma_k x_k(t) + y_k(t)$ , где  $x_k(t) = P_k x_0(t)$ ,  $k = \overline{1, N}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Сделав замену  $x_k(t) = e^{-i\lambda_k t} \tilde{x}_k(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \lambda_k < 2\pi$  получим

$$\tilde{x}_k(t+1) = \tilde{x}_k(t) + \tilde{y}_k(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$\tilde{x}_k$ -медленно меняющаяся последовательность, а  $x_k(t)$  отличается от  $\tilde{x}_k(t)$  по формуле (1) на множитель  $e^{i\lambda_k t}$ . Поскольку  $\tilde{y}_k \in C_0$  и  $S(1)\tilde{x}_k - \tilde{x}_k \in C_0$ . Следовательно,  $\tilde{x}_k$ , где  $1 \leq k \leq m$  — медленно меняющиеся на бесконечности последовательности. ■

### Литература

1. Баскаков А.Г., Калужина Н.С. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // Матем. заметки. — 2012. — 92:5. — С.643–661.
2. Баскаков А.Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Функциональный анализ. — 2004. — СМФН, 9, МАИ, М. — С.3–151.
3. Баскаков А.Г., Криштал И.А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — 69:3. — С.3–54.
4. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / Воронеж: Издательство Воронежского гос. ун-та, 1987.
5. Дуплищева А.Ю. О периодических на бесконечности решениях разностных уравнений // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2012. — №1. — С.110–117.
6. Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. — 2013. — 68:1(409). — С.77–128.
7. Баскаков А.Г., Калужина Н.С., Поляков Д.М. Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов // Известия вузов. Математика. — 2014. — №7. — С.3–14.

**ABOUT PERIODIC FUNCTIONS AT INFINITY****A.A. Ryzhkova, I.A. Trishina**Voronezh State University,  
Universitetskaja Sq., 1, Voronezh, 394036, Russia, e-mail: [office@main.vsu.ru](mailto:office@main.vsu.ru)

**Abstract.** The class of almost periodic functions at infinity is introduced. Necessity of such functions related to the fact that they arise when studying difference equations. Main results of the article are related to the proof of almost periodicity at infinity of difference equations solutions.

**Key words:** periodicity at infinity, difference equations, spectral theory.



MSC 35M10

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Ю.К. Сабитова

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,  
Институт прикладных исследований Республики Башкортостан,  
ул. Одесская, 68, Стерлитамак, 453103, Россия, e-mail: sabitovauk@rambler.ru

**Аннотация.** Для нагруженного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа изучена нелокальная задача в прямоугольной области. Методом спектрального анализа установлен критерий единственности решения поставленной задачи и доказана теорема существования. Решение построено в виде суммы биортогонального ряда.

**Ключевые слова:** нагруженное уравнение смешанного типа, нелокальная задача, полнота, существование и единственность решения.

**1. Введение.** Теория краевых задач для уравнений смешанного типа, в силу теоретической и прикладной важности, является одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными и привлекает к себе внимание многих исследователей, интересующихся как самой теорией, так и ее приложениями. В частности, многие математические модели тепло- и массообмена в средах, окруженных пористой средой, сводятся к краевым задачам для уравнений смешанного типа. Одним из важнейших классов уравнений с частными производными являются нагруженные уравнения смешанного типа. Исследование локальных и нелокальных краевых задач для нагруженных уравнений с частными производными изложено в монографии А.М. Нахушева [1].

Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - b^2u(x, y) + C_1(y)u(x, 0) = 0, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} - b^2u(x, y) + C_2(y)u(x, 0) = 0, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$ , где  $C_1(y)$ ,  $C_2(y)$  – заданные непрерывные функции,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $b \geq 0$  – заданные действительные числа.

**Нелокальная задача.** Найти в области  $D$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C^2(D_+ \cup D_-) \cap C^1(\bar{D}); \quad (2)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (3)$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad u_x(0, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5)$$



где  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  – заданные достаточно гладкие функции,  $D_- = D \cap \{y < 0\}$ ,  $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ .

Отметим работу К.Б. Сабитова и Е.П. Мелишевой [2], где решена задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа (1) в прямоугольной области  $D$ .

В данной работе, следуя [2], при всех  $b > 0$  на основании свойства полноты системы корневых функций одномерной нелокальной спектральной задачи установлен критерий единственности решения задачи. При определенных условиях на функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  и число  $\alpha$  решение  $u(x, y)$  построено в виде суммы биортогонального ряда.

**2. Теорема единственности.** Пусть  $u(x, y)$  – решение задачи (2) – (5). Из работы Е.И. Моисеева [3], известно, что системы функций

$$\{\cos(2\pi kx)\}_{k=1}^{\infty}, 1, \{x \sin(2\pi kx)\}_{k=1}^{\infty}; \tag{6}$$

$$\{4(1-x) \cos(2\pi kx)\}_{k=1}^{\infty}, 2(1-x), \{4 \sin(2\pi kx)\}_{k=1}^{\infty} \tag{7}$$

являются биортонормированными, полны и образуют базис Рисса в пространстве  $L_2(0, 1)$ . Рассмотрим функции

$$u_k(y) = 4 \int_0^1 u(x, y)(1-x) \cos 2\pi kx dx, \tag{8}$$

$$u_0(y) = 2 \int_0^1 u(x, y)(1-x) dx, \tag{9}$$

$$v_k(y) = 4 \int_0^1 u(x, y) \sin 2\pi kx dx, \quad k \in N. \tag{10}$$

На основании (10) введем функцию

$$v_{k,\varepsilon}(y) = 4 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x, y) \sin 2\pi kx dx, \tag{11}$$

где  $\varepsilon$  – достаточно малое число. Дифференцируя равенство (11) по  $y$  два раза при  $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$  и учитывая уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} v_{k,\varepsilon}^{+''}(y) &= 4 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{yy}(x, y) \sin 2\pi kx dx = \\ &= 4 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} [-u_{xx}(x, y) + b^2 u(x, y) - C_1(y) u(x, 0)] \sin 2\pi kx dx = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= -4 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xx}(x, y) \sin 2\pi k x dx + 4b^2 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x, y) \sin 2\pi k x dx - \\
 &\quad - 4C_1(y) \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x, 0) \sin 2\pi k x dx, \quad y > 0; \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{k,\varepsilon}^{-''}(y) &= 4 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{yy}(x, y) \sin 2\pi k x dx = \\
 &= 4 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} [u_{xx}(x, y) - 4b^2 u(x, y) + 4C_2(y) u(x, 0)] \sin 2\pi k x dx = \\
 &= 4 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xx}(x, y) \sin 2\pi k x dx - 4b^2 \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x, y) \sin 2\pi k x dx + \\
 &\quad + 4C_2(y) \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x, 0) \sin 2\pi k x dx, \quad y < 0. \quad (13)
 \end{aligned}$$

В первых интегралах из правой части равенств (12) и (13) интегрируя по частям два раза и переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  с учетом условия (4), получим

$$v_k''(y) - \lambda_k^2 v_k(y) = -C_1(y) v_k(0), \quad y > 0, \quad (14)$$

$$v_k''(y) + \lambda_k^2 v_k(y) = C_2(y) v_k(0), \quad y < 0, \quad (15)$$

где  $\lambda_k^2 = b^2 + (2\pi k)^2$ . Дифференциальные уравнения (14) и (15) имеют общие решения

$$v_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y} - \frac{a_k + b_k}{\lambda_k} \int_0^y C_1(t) \operatorname{sh}[\lambda_k(t-y)] dt, & y > 0, \\ c_k \cos \lambda_k y + d_k \sin \lambda_k y + \frac{c_k}{\lambda_k} \int_y^0 C_2(t) \sin[\lambda_k(y-t)] dt, & y < 0, \end{cases} \quad (16)$$

где  $a_k, b_k, c_k, d_k$  – произвольные постоянные.

Для функций (16) в силу (2) и (10) выполнены условия сопряжения

$$v_k(+0) = v_k(-0), \quad v_k'(+0) = v_k'(-0). \quad (17)$$

Условия (17) имеют место только в том случае, если

$$c_k = a_k + b_k, \quad d_k = a_k - b_k. \quad (18)$$



Подставляя (18) в (16), получим

$$v_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y} + \frac{a_k + b_k}{\lambda_k} C_{1k}(y), & y > 0, \\ a_k (\cos \lambda_k y + \sin \lambda_k y) + b_k (\cos \lambda_k y - \sin \lambda_k y) + \frac{a_k + b_k}{\lambda_k} C_{2k}(y), & y < 0, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$C_{1k}(y) = \int_0^y C_1(t) \operatorname{sh} [\lambda_k(t-y)] dt, \quad C_{2k}(y) = \int_y^0 C_2(t) \sin [\lambda_k(y-t)] dt.$$

Для нахождения постоянных  $a_k$  и  $b_k$  воспользуемся граничными условиями (5) и формулой (10):

$$v_k(\beta) = 4 \int_0^1 u(x, \beta) \sin 2\pi k x dx = 4 \int_0^1 \varphi(x) \sin 2\pi k x dx = \varphi_k, \quad (20)$$

$$v_k(-\alpha) = 4 \int_0^1 u(x, -\alpha) \sin 2\pi k x dx = 4 \int_0^1 \psi(x) \sin 2\pi k x dx = \psi_k. \quad (21)$$

Удовлетворяя функции (19) к граничным условиям (20) и (21), найдем

$$a_k = \frac{\varphi_k}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)} \left[ \cos \lambda_k \alpha + \sin \lambda_k \alpha + \frac{1}{\lambda_k} C_{2k}(-\alpha) \right] - \frac{\psi_k}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)} \left[ e^{-\lambda_k \beta} + \frac{1}{\lambda_k} C_{2k}(\beta) \right], \quad (22)$$

$$b_k = \frac{\varphi_k}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)} \left[ e^{\lambda_k \beta} + \frac{1}{\lambda_k} C_{1k}(\beta) \right] - \frac{\psi_k}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)} \left[ \cos \lambda_k \alpha - \sin \lambda_k \alpha + \frac{1}{\lambda_k} C_{2k}(-\alpha) \right], \quad (23)$$

при условии, что при всех  $k \in N$

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \sin \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k \beta + \operatorname{sh} \lambda_k \beta \cos \lambda_k \alpha + \frac{1}{\lambda_k} [C_{1k}(\beta) \sin \lambda_k \alpha + C_{2k}(-\alpha) \operatorname{sh} \lambda_k \beta] \neq 0. \quad (24)$$

Подставляя (22) и (23) в (19) найдем окончательный вид функций

$$v_k(y) = \begin{cases} v_k^+(y) = \frac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} [\lambda_k^{-1} \psi_k A_{y\beta}(k) + \varphi_k \Delta_{\alpha y}(k)], & y > 0, \\ v_k^-(y) = \frac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} [\psi_k \Delta_{-y\beta}(k) + \lambda_k^{-1} \varphi_k B_{\alpha y}(k)], & y < 0, \end{cases} \quad (25)$$

где

$$\Delta_{\alpha y}(k) = \sin \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k y + \operatorname{sh} \lambda_k y \cos \lambda_k \alpha + \frac{1}{\lambda_k} [C_{1k}(y) \sin \lambda_k \alpha + C_{2k}(-\alpha) \operatorname{sh} \lambda_k y],$$

$$A_{y\beta}(k) = C_{1k}(y) \operatorname{sh} \lambda_k \beta - C_{1k}(\beta) \operatorname{sh} \lambda_k y + \lambda_k \operatorname{sh} [\lambda_k(\beta - y)],$$



$$\Delta_{-y\beta}(k) = \sin \lambda_k y \operatorname{ch} \lambda_k \beta + \operatorname{sh} \lambda_k \beta \cos \lambda_k y - \frac{1}{\lambda_k} [C_{1k}(\beta) \sin \lambda_k y + C_{2k}(y) \operatorname{sh} \lambda_k \beta],$$

$$B_{y\alpha}(k) = C_{2k}(y) \sin \lambda_k \alpha + C_{2k}(-\alpha) \sin \lambda_k y + \lambda_k \sin \lambda_k (\alpha + y).$$

Аналогично  $v_k(y)$  получим, что функция  $u_0(y)$  удовлетворяет условиям:

$$u_0''(y) - b^2 u_0(y) = -C_1(y) u_0(0), \quad y > 0, \quad (26)$$

$$u_0''(y) + b^2 u_0(y) = C_2(y) u_0(0), \quad y < 0, \quad (27)$$

$$u_0(+0) = u_0(-0), \quad u_0'(+0) = u_0'(-0), \quad (28)$$

$$u_0(\beta) = 4 \int_0^1 \varphi(x) (1-x) dx = \varphi_{10}, \quad u_0(-\alpha) = 4 \int_0^1 \psi(x) (1-x) dx = \psi_{10}. \quad (29)$$

Единственное решение задачи (26)-(29) определяется формулой

$$u_0(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(0)} [b^{-1} \psi_0 A_{y\beta}(0) + \varphi_0 \Delta_{\alpha y}(0)], & y > 0, \\ \frac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(0)} [\psi_0 \Delta_{-y\beta}(0) + b^{-1} \varphi_0 B_{\alpha y}(0)], & y < 0, \end{cases} \quad (30)$$

где

$$\Delta_{\alpha y}(0) = \sin b\alpha \operatorname{ch} by + \operatorname{sh} by \cos b\alpha + \frac{1}{b} [C_{10}(y) \sin b\alpha + C_{20}(-\alpha) \operatorname{sh} by],$$

$$A_{y\beta}(0) = C_{10}(y) \operatorname{sh} b\beta - C_{10}(\beta) \operatorname{sh} by + b \operatorname{sh} [b(\beta - y)],$$

$$\Delta_{-y\beta}(0) = \sin by \operatorname{ch} b\beta + \operatorname{sh} b\beta \cos by - \frac{1}{b} [C_{10}(\beta) \sin by + C_{20}(y) \operatorname{sh} b\beta],$$

$$B_{y\alpha}(0) = C_{20}(y) \sin b\alpha + C_{20}(-\alpha) \sin by + b \sin b(\alpha + y),$$

$$C_{10}(y) = \int_0^y C_1(t) \operatorname{sh} [b(t-y)] dt, \quad C_{20}(y) = \int_y^0 C_2(t) \sin [b(y-t)] dt.$$

Повторяя те же действия над функцией  $u_k(y)$ , что и для  $v_k(y)$ , получаем неоднородные дифференциальные уравнения

$$u_k''(y) - \lambda_k^2 u_k(y) = -4\pi k v_k^+(y) - C_1(y) u_k(0), \quad y > 0, \quad (31)$$

$$u_k''(y) + \lambda_k^2 u_k(y) = 4\pi k v_k^-(y) + C_2(y) u_k(0), \quad y < 0, \quad (32)$$

с соответствующими граничными условиями

$$u_k(\beta) = 4 \int_0^1 \varphi(x) (1-x) \cos 2\pi k x dx = \varphi_{1k}, \quad (33)$$





$$u_k(-\alpha) = 4 \int_0^1 \psi(x)(1-x) \cos 2\pi kx dx = \psi_{1k}. \quad (34)$$

и условиями сопряжения

$$u_k(+0) = u_k(-0), \quad u'_k(0+0) = u'_k(-0). \quad (35)$$

На основании метода вариации произвольных постоянных найдём решение задачи (31)-(35), которое определяется по формуле

$$u_k(y) = \begin{cases} v_k^+(y) + \frac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} [\lambda_k^{-1} A_{y\beta}(k) V_k^-(\alpha) - \Delta_{\alpha y}(k) V_k^+(\beta)], & y > 0, \\ v_k^-(y) + \frac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} [\Delta_{-y\beta}(k) V_k^-(\alpha) - \lambda_k^{-1} B_{\alpha y}(k) V_k^+(\beta)], & y < 0, \end{cases} \quad (36)$$

$$V_k^-(\alpha) = \int_{-\alpha}^0 v_k^-(s) \sin[\lambda_k(\alpha + s)] ds, \quad V_k^+(\beta) = \int_0^\beta v_k^+(s) \operatorname{sh}[\lambda_k(s - \beta)] ds. \quad (37)$$

При условии (24) из формул (25), (30), (36) следует единственность решения задачи (2)-(5), так как если  $\varphi(x) \equiv 0$ ,  $\psi(x) \equiv 0$  на  $[0,1]$ , то  $u_k(y) \equiv 0$ ,  $u_0(y) \equiv 0$ ,  $v_k(y) \equiv 0$  для  $k = 0, 1, 2, \dots$  на  $[-\alpha, \beta]$ . Тогда из (8)-(10) имеем:

$$4 \int_0^1 u(x, y)(1-x) \cos 2\pi kx dx = 0, \quad 2 \int_0^1 (1-x)u(x, y) dx = 0,$$

$$4 \int_0^1 u(x, y) \sin 2\pi kx dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда в силу полноты системы корневых функций (7) в пространстве  $L_2[0, 1]$  следует, что функция  $u(x, y) = 0$  почти всюду на  $[0, 1]$  при любом  $y \in [-\alpha, \beta]$ . В силу (2) функция  $u(x, y)$  непрерывна на  $\overline{D}$ , поэтому  $u(x, y) \equiv 0$  на  $\overline{D}$ .

Пусть при некоторых  $\alpha, \beta, C_1(y), C_2(y)$  и  $k = p \in N$  нарушено условие (24), т.е.

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}(p) &= \sin \lambda_p \alpha \operatorname{ch} \lambda_p \beta + \operatorname{sh} \lambda_p \beta \cos \lambda_p \alpha + \\ &+ \frac{1}{\lambda_p} [C_{1p}(\beta) \sin \lambda_p \alpha + C_{2p}(-\alpha) \operatorname{sh} \lambda_p \beta] = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Для нахождения нулей выражения  $\Delta_{\alpha\beta}(p)$  относительно  $\alpha$  представим его в следующем виде:

$$\Delta_{\alpha\beta}(p) = K_p(\beta) \sin(\lambda_p \alpha + \gamma_p) + \frac{\operatorname{sh} \lambda_p \beta \cdot C_{2p}(-\alpha)}{\lambda_p}, \quad (39)$$



где

$$K_p(\beta) = \sqrt{\left[\frac{C_{1p}(\beta)}{\lambda_p} + \operatorname{ch} \lambda_p \beta\right]^2 + \operatorname{sh}^2 \lambda_p \beta}, \quad \gamma_p = \arcsin \frac{\operatorname{sh} \lambda_p \beta}{K_p(\beta)}.$$

Из соотношения (39) имеем

$$\sin(\lambda_p \alpha + \gamma_p) = -\frac{\operatorname{sh} \lambda_p \beta \cdot C_{2p}(-\alpha)}{\lambda_p K_p(\beta)}. \quad (40)$$

Отсюда при условии

$$\left| \frac{\operatorname{sh} \lambda_p \beta \cdot C_{2p}(-\alpha)}{\lambda_p K_p(\beta)} \right| \leq \frac{|C_{2p}(-\alpha)|}{\lambda_p} \leq 1$$

уравнение (40) равносильно следующему уравнению:

$$\alpha = \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_p} \arcsin \frac{\operatorname{sh} \lambda_p \beta \cdot C_{2p}(-\alpha)}{\lambda_p K_p(\beta)} + \frac{\pi n}{\lambda_p} - \frac{\gamma_p}{\lambda_p} = f(\alpha), \quad n \in N. \quad (41)$$

Если  $C_{2p}(-\alpha) = 0$ , то из выражения (41) следует, что

$$\alpha = \frac{\pi n}{\lambda_p} - \frac{\gamma_p}{\lambda_p}, \quad n \in N.$$

Если  $C_2(y) = C_2 = \operatorname{const} \neq 0$ , то  $C_{2p}(-\alpha) = C_2(\cos \lambda_p \alpha - 1)/\lambda_p$  и из формулы (38) получим, что  $\Delta_{\alpha\beta}(p) = 0$  только тогда, когда  $|C_2| \leq \lambda_p^2$  и

$$\alpha = \frac{(-1)^n}{\lambda_p} \arcsin \frac{C_2 \operatorname{sh} \lambda_p \beta}{\lambda_p^2 T_p(\beta)} + \frac{\pi n}{\lambda_p} - \frac{\theta_p}{\lambda_p}, \quad n \in N.$$

Здесь

$$\theta_p = \arcsin \frac{(C_2 + \lambda_p^2) \operatorname{sh} \lambda_p \beta}{\lambda_p^2 T_p(\beta)}, \quad T_p(\beta) = \sqrt{\left[\frac{C_{1p}(\beta)}{\lambda_p} + \operatorname{ch} \lambda_p \beta\right]^2 + \left[\frac{C_2 \operatorname{sh} \lambda_p \beta}{\lambda_p^2} + \operatorname{sh} \lambda_p \beta\right]^2}.$$

Для разрешимости нелинейного уравнения (41) достаточно потребовать, чтобы производная  $|f'(\alpha)| \leq d < 1$ . Последнее выполнено, когда  $\alpha < \sqrt{2\pi}/\|C_2\|$ ,  $\|C_2\| = \max_{-\alpha \leq y \leq 0} |C_2(y)|$ .

Тогда однородная задача (2)-(5) (где  $\varphi(x) \equiv 0$ ,  $\psi(x) \equiv 0$ ) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x, y) = u_p(y) \cos \lambda_p x, \quad (42)$$

здесь функция  $u_p(y)$  определяется по формуле

$$u_p(y) = \begin{cases} \frac{2b_p \Delta_{\alpha y}(p)}{\sin \lambda_p \alpha - \cos \lambda_p \alpha - \lambda_p^{-1} C_{2p}(-\alpha)}, & y > 0, \\ \frac{2b_p \Delta_{-y\beta}(p)}{e^{\lambda_p \beta} + \lambda_p^{-1} C_{1p}(\beta)}, & y < 0, \end{cases} \quad (43)$$



где  $b_p \neq 0$  – произвольная постоянная.

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

**Теорема 1.** *Если существует решение задачи, то для его единственности необходимо и достаточно, чтобы при всех  $k \in \mathbb{N}$  выполнялись условия (24).*

**3. Теорема существования.** Решение задачи (2)-(5) при условии (24) будем искать в виде суммы ряда

$$u(x, y) = u_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(y)x \sin(2\pi kx), \quad (44)$$

где функции  $u_0(y)$ ,  $u_k(y)$  и  $v_k(y)$  определяются соответственно по формулам (30), (36), (25).

Поскольку  $\alpha, \beta$  – любые числа из промежутков задания, то при достаточно больших  $k$  выражение  $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ , которое входит в знаменатели коэффициентов ряда (44) может стать достаточно малым, т.е. возникает проблема «малых знаменателей» [11], [5]. Для обоснования существования решения (44) данной задачи необходимо показать существование чисел  $\alpha, \beta$  и функций  $C_i(y)$ ,  $i = 1, 2$  таких, что выражение  $\Delta_{\alpha\beta}(k)$  отделено от нуля.

**Лемма 1.** *Если выполнено одно из следующих условий: 1)  $\alpha = p$  – натуральное число; 2)  $\alpha = \frac{p}{q} \notin \mathbb{N}$ , где  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $(p, q) = 1$ ,  $(q, 4) = 1$ , то существуют положительные постоянные  $k_0 \in \mathbb{N}$  и  $C_0$  такие, что при любом фиксированном  $\beta > 0$  и всех  $k > k_0$  справедлива оценка*

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geq C_0 e^{2\pi k\beta} > 0; \quad (45)$$

3) если  $\alpha$  является любым иррациональным алгебраическим числом степени 2,  $C_1(y) \geq 0$  монотонно возрастает на  $[0, \beta]$ ,  $C_2(y) \geq 0$  монотонно убывает на  $[-\alpha, 0]$ , то существуют положительные постоянные  $k_0, b_0$  и  $C_0$ , вообще говоря, зависящие от  $\alpha, \beta$  и  $b$ , такие, что при всех  $b < b_0, k > k_0$  справедлива оценка

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geq e^{2\pi k\beta} \frac{C_0}{k}. \quad (46)$$

□ Представим  $\Delta_{\alpha\beta}(k)$  в следующем виде:

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = e^{\lambda_k\beta} A_k(\beta) \sin(\lambda_k\alpha + \varphi_k) + \frac{e^{\lambda_k\beta}}{\lambda_k} \omega_k(\alpha, \beta), \quad (47)$$

где  $\varphi_k = \arcsin(\operatorname{sh} \lambda_k\beta / \sqrt{\operatorname{ch} 2\lambda_k\beta}) \rightarrow \pi/4$  при  $k \rightarrow +\infty$ ,

$$A_k(\beta) = \sqrt{\frac{1 + e^{-4\lambda_k\beta}}{2}}, \quad (48)$$

$$\omega_k(\alpha, \beta) = \frac{\sin \lambda_k\alpha}{e^{\lambda_k\beta}} C_{1k}(\beta) + \frac{C_{2k}(-\alpha)(1 - e^{-2\lambda_k\beta})}{2}. \quad (49)$$



Отметим, что при любом фиксированном  $\beta > 0$  и  $k \in \mathbb{N}$  выражение (48) ограничено:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < A_k(\beta) < 1, \quad (50)$$

Для оценки  $\omega_k(\alpha, \beta)$  воспользуемся формулой (49). Если  $C_1(y) \geq 0$  монотонно возрастает на  $[0, \beta]$ ,  $C_2(y) \geq 0$  монотонно убывает на  $[-\alpha, 0]$ , то воспользовавшись формулами Бонне или второй теоремой о среднем значении, получим

$$|\omega_k(\alpha, \beta)| < \frac{|C_1(\beta)| + |C_2(-\alpha)|}{2\lambda_k} = \frac{M_1}{k}, \quad (51)$$

где  $M_i$  – здесь и далее положительные постоянные, вообще говоря, зависящие от  $\alpha$  или  $\beta$ .

Из представления (47) в силу оценок (51) достаточно оценить выражение

$$\delta_{\alpha\beta}(k) = \sin(\lambda_k \alpha + \varphi_k). \quad (52)$$

При  $k > k_1 > b/2\pi \geq 0$  имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \sqrt{(2\pi k)^2 + b^2} = 2\pi k \left[ 1 + \left( \frac{b}{2\pi k} \right)^2 \right]^{1/2} = \\ &= 2\pi k \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{b}{2\pi k} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{b}{2\pi k} \right)^4 + \dots \right] = 2\pi k + \theta_k, \end{aligned} \quad (53)$$

при этом для остатка ряда справедлива оценка

$$\frac{b^2}{4\pi k} < \theta_k < \frac{b^2}{2\pi k}. \quad (54)$$

Тогда из (52) и (53), обозначая  $\tilde{\theta}_k = \theta_k \alpha$ , получим

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| = \left| \sin(2\pi k \alpha + \tilde{\theta}_k + \varphi_k) \right|. \quad (55)$$

При  $\alpha = p/q$  существует номер  $k_2$ , такой, что при всех  $k > k_2$  имеем следующую оценку:

$$\left| \sin(2\pi kp + \tilde{\theta}_k + \varphi_k) \right| = \left| \sin(\tilde{\theta}_k + \varphi_k) \right| > \frac{1}{2} \left| \sin \frac{\pi}{4} \right| = M_2 > 0. \quad (56)$$

Пусть  $\alpha = p/q$ , где  $p$  и  $q$  – взаимно-простые числа. Разделим  $2kp$  на  $q$  с остатком:  $2kp = sq + r$ , где  $s, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $0 \leq r < q$ . Тогда выражение (55) примет вид

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| = \left| \sin \left( \pi \frac{2kp}{q} + \tilde{\theta}_k + \varphi_k \right) \right| = \left| \sin \left( \frac{\pi r}{q} + \tilde{\theta}_k + \varphi_k \right) \right|. \quad (57)$$



Если  $r = 0$ , то данный случай сводится к уже рассмотренному выше  $\alpha = p \in N$ . Пусть  $r > 0$ . Тогда ясно, что  $1 \leq r \leq q - 1$ ,  $q \geq 2$ , и из (57) получим

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| = \left| \sin \left( \frac{\pi r}{q} + \tilde{\theta}_k + \frac{\pi}{4} - \varepsilon_k \right) \right|, \quad \varepsilon_k > 0 \text{ и } \varepsilon_k \rightarrow 0.$$

Тогда существует натуральное число  $k_3$ , такое, что из последнего соотношения при всех  $k > k_3$  следует неравенство

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| > \frac{1}{2} \left| \sin \left( \frac{\pi r}{q} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \geq M_3 > 0.$$

Пусть  $\alpha$  – алгебраическое иррациональное число степени 2. В этом случае выражение (55) можно представить в виде

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| = \left| \sin \left( 2\pi k\alpha - \pi n + \tilde{\theta}_k + \varphi_k \right) \right|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (58)$$

Для всякого  $k \in N$  можно подобрать  $n \in \mathbb{N}$  [11], такое, что имеет место неравенство

$$\left| \alpha - \frac{n}{2k} \right| < \frac{1}{4k}. \quad (59)$$

Из теории чисел известно (см. теорему Лиувилля ([6], с.60)), что для любого иррационального алгебраического числа  $\alpha$  степени 2 существует положительное число  $\delta$  такое, что при любых целых  $n, k$  ( $k > 0$ ) справедливо неравенство

$$\left| \alpha - \frac{n}{2k} \right| > \frac{\delta}{4k^2}. \quad (60)$$

Из (59) и (60) получим

$$\frac{\pi\delta}{2k} < \left| 2\pi k \left( \alpha - \frac{n}{2k} \right) \right| < \frac{\pi}{2}. \quad (61)$$

Из (54) найдем

$$\frac{b^2\alpha}{8\pi k} < \tilde{\theta}_k < \frac{b^2\alpha}{4\pi k}. \quad (62)$$

Потребуем, чтобы  $\tilde{\theta}_k < \frac{\pi}{8}$ , которое имеет место при всех  $k > k_4 \geq 2b^2\alpha/\pi^2$ . Следовательно,  $\tilde{\theta}_k + \varphi_k < \frac{3\pi}{8}$ . Тогда для аргумента выражения (58) имеем оценку:

$$0 < |2\pi k\alpha - \pi n + \tilde{\theta}_k + \varphi_k| < \frac{7\pi}{8}.$$

Рассмотрим два случая. Если

$$\frac{\pi}{2} < |2\pi k\alpha - \pi n + \tilde{\theta}_k + \varphi_k| < \frac{7\pi}{8},$$



то

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| = \left| \sin \left( 2\pi k\alpha - \pi n + \tilde{\theta}_k + \varphi_k \right) \right| > \sin \frac{7\pi}{8}. \quad (63)$$

Если  $0 < |2\pi k\alpha - \pi n + \tilde{\theta}_k + \varphi_k| < \pi/2$ , тогда с учетом неравенства  $\sin x > (2/\pi)x$ ,  $0 < x < \pi/2$ , и оценок (61) и (62) будем иметь

$$\begin{aligned} |\delta_{\alpha\beta}(k)| &= \left| \sin \left( 2\pi k\alpha - \pi n + \tilde{\theta}_k + \varphi_k \right) \right| > \frac{2}{\pi} \left| 2\pi k\alpha - \pi n + \tilde{\theta}_k + \varphi_k \right| = \\ &= \frac{2}{\pi} \left| 2\pi k \left( \alpha - \frac{4n-1}{8k} \right) + \tilde{\theta}_k - \varepsilon_k \right| \geq \frac{2}{\pi} \left( 2\pi k \left| \alpha - \frac{4n-1}{8k} \right| - |\tilde{\theta}_k| - |\varepsilon_k| \right). \end{aligned}$$

Применяя формулу разности арксинусов

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin \left( x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right), \quad xy > 0,$$

оценим

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \frac{\pi}{4} - \varphi_k = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin \frac{\operatorname{sh} \lambda_k \beta}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\lambda_k \beta}} = \\ &= \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\operatorname{ch} \lambda_k \beta - \operatorname{sh} \lambda_k \beta}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\lambda_k \beta}} \right) = \arcsin \frac{1}{e^{2\lambda_k \beta} \sqrt{1 + e^{-4\lambda_k \beta}}}. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом неравенства  $|\arcsin x| < (\pi/2)|x|$ ,  $0 < |x| < 1$ , получим

$$\arcsin \frac{1}{e^{2\lambda_k \beta} \sqrt{1 + e^{-4\lambda_k \beta}}} < \frac{\pi}{2e^{2\lambda_k \beta} \sqrt{1 + e^{-4\lambda_k \beta}}} < \frac{\pi}{2e^{2\lambda_k \beta}} < \frac{\pi}{2e^{4\pi k/\beta}}. \quad (64)$$

Поскольку  $e^{4\pi k/\beta} > (4\pi k/\beta)^2$  при всех  $k \in N$ , то из (64) следует неравенство

$$|\varepsilon_k| < \frac{1}{32\pi(k\beta)^2}. \quad (65)$$

С учетом (60), (62) и (65) при всех  $b < \pi \sqrt{\frac{\delta}{2\alpha}} = b_0$  и  $k > k_5 \geq \frac{1}{2M_4(\pi\beta)^2}$ , где  $M_4 = \delta - \frac{2b^2\alpha}{\pi^2}$ , выполнено

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| > \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi\delta}{8k} - \frac{b^2\alpha}{4\pi k} - \frac{1}{32\pi(k\beta)^2} \right) > \frac{\delta}{16k}. \quad (66)$$

Из выражения (47) в силу оценок (50), (51), (63) и (66)

$$\begin{aligned} |\Delta_{\alpha\beta}(k)| &= \left| e^{\lambda_k \beta} A_k(\beta) \sin(\lambda_k \alpha + \varphi_k) + \frac{e^{\lambda_k \beta}}{\lambda_k} \omega_k(\alpha, \beta) \right| \geq \\ &\geq e^{\lambda_k \beta} |A_k(\beta)| |\sin(\lambda_k \alpha + \varphi_k)| - \frac{e^{\lambda_k \beta}}{\lambda_k} |\omega_k(\alpha, \beta)| \geq \frac{e^{\lambda_k \beta}}{k} \left[ \frac{\delta}{16\sqrt{2}} - \frac{M_1}{k} \right] \geq e^{\lambda_k \beta} \frac{C_0}{k} \end{aligned}$$



при всех  $k > k_0 = \max_{1 \leq i \leq 6} k_i$ ,  $b < b_0$  и  $k_6 > \frac{16\sqrt{2}M_1}{\delta}$ . ■

**Замечание.** Доказательство леммы 1 отлично от доказательства, приведенного в работе [2]. Примечательно оно тем, что снято условие малости норм  $\|C_1\|$  и  $\|C_2\|$ .

**Лемма 2.** Пусть выполнена оценка (45) при  $k > k_0$ . Тогда для таких  $k$  и при любом  $y \in [-\alpha, \beta]$  справедливы оценки:

$$|v_k(y)| \leq A_1 (|\varphi_k| + |\psi_k|), \tag{67}$$

$$|v'_k(y)| \leq A_2 k (|\varphi_k| + |\psi_k|), \quad |v''_k(y)| \leq A_3 k^2 (|\varphi_k| + |\psi_k|), \tag{68}$$

$$|u_k(y)| \leq A_4 (|\varphi_k| + |\psi_k|), \quad |u'_k(y)| \leq A_5 k (|\varphi_k| + |\psi_k|), \tag{69}$$

$$|u''_k(y)| \leq A_6 k^2 (|\varphi_k| + |\psi_k|), \tag{70}$$

где  $A_i$  — здесь и далее положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от  $\alpha, \beta, \|C_1\|$  и  $\|C_2\|$ .

□ Справедливость оценки из (67) непосредственно следует из формулы (25) и оценки (45). Исходя из (25) вычислим производные  $v'_k(y)$  и  $v''_k(y)$ :

$$v'_k(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} [\lambda_k^{-1} \psi_k A'_{y\beta}(k) + \varphi_k \Delta'_{\alpha y}(k)], & y > 0, \\ \frac{1}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} [\psi_k \Delta'_{-y\beta}(k) + \lambda_k^{-1} \varphi_k B'_{\alpha y}(k)], & y < 0, \end{cases} \tag{71}$$

$$A'_{y\beta}(k) = C'_{1k}(y) \operatorname{sh} \lambda_k \beta - \lambda_k C_{1k}(\beta) \operatorname{ch} \lambda_k y - \lambda_k^2 \operatorname{ch}[\lambda_k(\beta - y)],$$

$$\Delta'_{\alpha y}(k) = \lambda_k \sin \lambda_k \alpha \operatorname{sh} \lambda_k y + \lambda_k \operatorname{ch} \lambda_k y \cos \lambda_k \alpha + \frac{C'_{1k}(y) \sin \lambda_k \alpha + \lambda_k C_{2k}(-\alpha) \operatorname{ch} \lambda_k y}{\lambda_k},$$

$$\Delta'_{-y\beta}(k) = \lambda_k \cos \lambda_k y \operatorname{ch} \lambda_k \beta - \lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k \beta \sin \lambda_k y - \frac{\lambda_k C_{1k}(\beta) \cos \lambda_k y + C'_{2k}(y) \operatorname{sh} \lambda_k \beta}{\lambda_k},$$

$$B'_{\alpha y}(k) = C'_{2k}(y) \sin \lambda_k \alpha + \lambda_k C_{2k}(-\alpha) \cos \lambda_k y + \lambda_k^2 \cos[\lambda_k(\alpha + y)],$$

$$C'_{1k}(y) = \lambda_k \int_0^y C_1(t) \operatorname{ch}[\lambda_k(y - t)] dt,$$

$$C'_{2k}(y) = \lambda_k \int_y^0 C_2(t) \cos[\lambda_k(y - t)] dt.$$

Для вычисления второй производной функции воспользуемся формулами (14) и (15), получим

$$v''_k(y) = \begin{cases} \lambda_k^2 v_k(y) - C_1(y) v_k(0), & y > 0, \\ -\lambda_k^2 v_k(y) + C_2(y) v_k(0), & y < 0, \end{cases} \tag{72}$$



Тогда из равенств (71) и (72) на основании (45) и оценки из (67), убеждаемся в справедливости оценки (68). Аналогичным образом доказываются оценки (69), (70) для функции  $u_k(y)$ . ■

**Лемма 3.** Пусть выполнена оценка (46) при всех  $k \geq k_0$ . Тогда при любом  $y \in [-\alpha, \beta]$  и для таких  $k$  справедливы оценки:

$$|v_k(y)| \leq A_7 k (|\varphi_k| + |\psi_k|), \quad (73)$$

$$|v'_k(y)| \leq A_8 k^2 (|\varphi_k| + |\psi_k|), \quad |v''_k(y)| \leq A_9 k^3 (|\varphi_k| + |\psi_k|), \quad (74)$$

$$|u_k(y)| \leq A_{10} k (|\varphi_k| + |\psi_k|), \quad (75)$$

$$|u'_k(y)| \leq A_{11} k^2 (|\varphi_k| + |\psi_k|), \quad |u''_k(y)| \leq A_{12} k^3 (|\varphi_k| + |\psi_k|). \quad (76)$$

□ Справедливость оценки (73) непосредственно следует из формулы (25) и оценки (45). Из равенств (71) и (72) на основании (46) и (73), убеждаемся в справедливости оценок (74). Аналогично получаем оценки (75) и (76). ■

**Лемма 4.** Пусть  $\varphi(x), \psi(x) \in C^3[0, 1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(1)$ ,  $\psi(0) = \psi(1)$ ,  $\varphi'(0) = 0$ ,  $\psi'(0) = 0$ ,  $\varphi''(0) = \varphi''(1)$ ,  $\psi''(0) = \psi''(1)$ , то справедливы оценки:

$$|\varphi_k| \leq \frac{A_{13}|g_k|}{k^3}, \quad |\psi_k| \leq \frac{A_{15}|\tilde{g}_k|}{k^3}, \quad (77)$$

$$|\varphi_{1k}| \leq A_{14} \left( \frac{|r_k| + |g_{1k}|}{k^3} \right), \quad |\psi_{1k}| \leq A_{16} \left( \frac{|\tilde{r}_k| + |\tilde{g}_{1k}|}{k^3} \right), \quad (78)$$

где

$$g_k = 4 \int_0^1 \varphi'''(x) \cos(2\pi kx) dx, \quad r_k = 4 \int_0^1 \varphi''(x) \sin(2\pi kx) dx,$$

$$g_{1k} = 4 \int_0^1 \varphi'''(x)(1-x) \sin(2\pi kx) dx,$$

$$\tilde{g}_k = 4 \int_0^1 \psi'''(x) \cos(2\pi kx) dx, \quad \tilde{r}_k = \int_0^1 \psi''(x) \sin(2\pi kx) dx,$$

$$\tilde{g}_{1k} = 4 \int_0^1 \psi'''(x)(1-x) \sin(2\pi kx) dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} g_k^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} r_k^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} g_{1k}^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{g}_k^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{r}_k^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{g}_{1k}^2 < +\infty. \quad (79)$$

□ Интегрируя по частям три раза в интегралах из (20), (21), (33) и (34), с учетом условий леммы, получим представления (77) и (78). Обоснование сходимости рядов (79) проводится аналогично [7]. ■





Поскольку системы функций (6) и (7) образуют базис Рисса, то если  $\varphi(x), \psi(x) \in L_2[0, 1]$ , тогда функцию  $u(x, y)$  можно представить в виде биортогонального ряда (44), который сходится в  $L_2[0, 1]$  при любом  $y \in [-\alpha, \beta]$ . В силу лемм 2 и 4 ряд (44) при любом  $(x, y)$  из  $\overline{D}$  мажорируется сходящимся рядом

$$A_{17} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} (|g_k| + |g_{1k}| + |r_k| + |\tilde{g}_k| + |\tilde{r}_k| + |\tilde{g}_{1k}|),$$

поэтому ряд (44) и ряды производных  $u_x$  и  $u_y$  в силу признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно на замкнутой области  $\overline{D}$ . Следовательно, сумма  $u(x, y)$  ряда (44) принадлежит классу  $C^1(\overline{D})$ . Ряды из производных второго порядка на  $\overline{D}_+$  и  $\overline{D}_-$  мажорируются также сходящимся числовым рядом

$$A_{18} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k} (|g_k| + |g_{1k}| + |r_k| + |\tilde{g}_k| + |\tilde{r}_k| + |\tilde{g}_{1k}|).$$

Поэтому сумма  $u(x, y)$  ряда (44) принадлежит пространству  $C^2(\overline{D}_+ \cup \overline{D}_-)$  и удовлетворяет уравнению (1) на множестве  $D_+ \cup D_-$ .

**Лемма 5.** Если  $\varphi(x), \psi(x) \in C^4[0, 1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(1)$ ,  $\psi(0) = \psi(1)$ ,  $\varphi'(0) = 0$ ,  $\psi'(0) = 0$ ,  $\varphi''(0) = \varphi''(1)$ ,  $\psi''(0) = \psi''(1)$ ,  $\varphi'''(0) = 0$ ,  $\psi'''(0) = 0$ , то

$$|\varphi_k| \leq \frac{A_{17}|z_k|}{k^4}, \quad |\psi_k| \leq \frac{A_{18}|\tilde{z}_k|}{k^4}, \quad |\varphi_{1k}| \leq A_{19} \left( \frac{|h_k| + |z_{1k}|}{k^4} \right), \quad |\psi_{1k}| \leq A_{20} \left( \frac{|\tilde{h}_k| + |\tilde{z}_{1k}|}{k^4} \right),$$

где

$$z_k = 4 \int_0^1 \varphi^{(4)}(x) \sin(2\pi kx) dx, \quad h_k = 4 \int_0^1 \varphi'''(x) \cos(2\pi kx) dx,$$

$$z_{1k} = 4 \int_0^1 \varphi^{(4)}(x)(1-x) \cos(2\pi kx) dx,$$

$$\tilde{z}_k = 4 \int_0^1 \psi^{(4)}(x) \sin(2\pi kx) dx, \quad \tilde{h}_k = 4 \int_0^1 \psi'''(x) \cos(2\pi kx) dx,$$

$$\tilde{z}_{1k} = 4 \int_0^1 \psi^{(4)}(x)(1-x) \cos(2\pi kx) dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} h_k^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} z_{1k}^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{z}_k^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{h}_k^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{z}_{1k}^2 < +\infty.$$



□ Проводится аналогично лемме 4. ■

Пусть выполнены условия пункта 3 леммы 1, тогда ряд (44) в силу леммы 3 и 5 мажорируется числовым рядом

$$A_{21} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \left( |z_k| + |z_{1k}| + |h_k| + |\tilde{z}_k| + |\tilde{h}_k| + |\tilde{z}_{1k}| \right).$$

Далее аналогично приведенному выше доказательству убеждаемся, что функция  $u(x, y)$ , определенная рядом (44), удовлетворяет условиям (2) и (3).

Таким образом, нами доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  удовлетворяют условиям леммы 4,  $C_1(y) \in C[0, \beta]$ ,  $C_2(y) \in C[-\alpha, 0]$  и выполнена оценка (45) при всех  $k > k_0$ . Тогда если  $\Delta_{\alpha\beta}(k) \neq 0$  при всех  $k = \overline{1, k_0}$ , то задача (2) – (5) имеет единственное решение, которое определяется рядом (44).

**Теорема 2.** Пусть функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  удовлетворяют условиям леммы 5,  $C_1(y) \in C[0, \beta]$ ,  $C_2(y) \in C[-\alpha, 0]$ ,  $C_1(y) \geq 0$  монотонно возрастает на  $[0, \beta]$ ,  $C_2(y) \geq 0$  монотонно убывает на  $[-\alpha, 0]$ , и выполнена оценка (46). Тогда задача (2)-(5) имеет единственное решение, которое определяется рядом (44).

Отметим, что если для чисел  $\alpha$ , указанных в лемме 1, при некоторых  $k = k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq k_0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , выражение  $\Delta_{\alpha\beta}(k) = 0$ , то в этом случае задача (2)-(5) условно разрешима, т.е. имеет решение при выполнении условий ортогональности  $\varphi_k = \psi_k = 0$ ,  $k = k_1, k_2, \dots, k_m$ .

### Литература

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение / М.: Наука, 2012. – 232 с.
2. Сабитов К.Б., Мелишева Е.П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Изв.вузов.Матем. – 2013. – №7. – С.62-76.
3. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. – 1999. – 35, №8. – С.1094-1100.
4. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. – 2007. – 413, №1. – С.23-26.
5. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. – 1963. – Т.XVIII, вып.6(114). – С.91-192.
6. Хинчин А.Я. Цепные дроби / М.: Наука, 1978. – 112 с.
7. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. – 1977. – 13, №2. – С.294-304.

### BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH NONLOCAL CONDITION FOR A MIXED TYPE EQUATION IN RECTANGULAR AREA

Y.K. Sabitova

Sterlitamak department of Bashkir State University

Institute of researches, Odesskya St., 68, Sterlitamak, 453103, Russia, e-mail: [sabitovauk@rambler.ru](mailto:sabitovauk@rambler.ru)

**Abstract.** Boundary-value nonlocal problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type is studied. Criterion of solution uniqueness is found by spectral analysis. The solution is built as the sum of biorthogonal series.



MSC 35M10

## НЕЛОКАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

С.Н. Сидоров

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,  
пр. Ленина, 37, Стерлитамак, 453103, Россия, e-mail: stsid@mail.ru

**Аннотация.** Для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области изучена обратная задача по поиску неизвестных правых частей с нелокальным граничным условием, связывающим значения решения по нормали на противоположных сторонах прямоугольной области, которые принадлежат разным типам изучаемого уравнения. Решения задач построены в виде сумм рядов по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Установлены критерий единственности и доказана устойчивость решений поставленных обратных задач по граничным данным.

**Ключевые слова:** уравнение смешанного типа, обратная задача, спектральный метод, существование, единственность, устойчивость.

**1. Введение.** Рассмотрим уравнение смешанного парабола-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t + b^2 t^n u = f_1(x), & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2 (-t)^m u = f_2(x), & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, t) | 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$ , где  $\alpha > 0, \beta > 0, n > 0, m > 0$  и  $b \geq 0$  – заданные действительные числа,  $u(x, t)$  и  $f_i(x), i = 1, 2$ , – неизвестные функции. Поставим следующую задачу.

**Задача.** Найти в области  $D$  функции  $u(x, t)$  и  $f_i(x), i = 1, 2$ , удовлетворяющие следующим условиям:

$$u(x, t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+), \quad (2)$$

$$f_i(x) \in C(0, 1) \cap L_2[0, 1], \quad (3)$$

$$Lu(x, t) \equiv f_i(x), \quad (x, t) \in D_- \cup D_+, \quad (4)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (5)$$

$$u(x, -\alpha) - u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (6)$$

$$u_t(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7)$$

$$u_t(x, \beta) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (8)$$

где  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  – достаточно гладкие функции,  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \psi(0) = \psi(1) = 0, D_- = D \cap \{t < 0\}, D_+ = D \cap \{t > 0\}$ .



Отметим, что прямая начально-граничная задача (2), (4)–(6), где вместо условия (6) задано условие  $u(x, -\alpha) = \chi(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , для уравнения (1) при  $f_1(x) = f_2(x) \equiv 0$  в прямоугольной области  $D$  изучалась в работе [1] при всех  $n > 0$  и  $m > 0$ . В работах [2, 3] исследована аналогичная задача для уравнения (1) при  $n = 0$ ,  $m \geq 0$  и  $b \geq 0$ . В [4] методами функционального анализа доказана однозначная разрешимость аналога задачи Трикоми в пространстве  $L_2$  для уравнения типа (1) при  $f(x) = 0$ ,  $n = 0$ ,  $b = 0$ ,  $0 < m \leq 1$  в смешанной области, параболическая часть которой совпадает с  $D_+$ , а гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник с основанием на линии вырождения. Статья [5] посвящена обратной задаче (2)–(8), где вместо условия (6) задано  $u(x, -\alpha) = \psi(x)$  для уравнения (1) при  $n = m = 0$ . Обратные задачи для классических уравнений математической физики изучены достаточно полно (см. [6–10] и приведенную там обширную библиографию).

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия единственности решения. Решение задачи строится в виде суммы рядов по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. При обосновании существования решения задачи возникают малые знаменатели [11, 12], затрудняющие сходимость построенных рядов. В связи с чем установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, которые позволили при некоторых условиях относительно функций  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $g(x)$  и параметра  $\alpha$  доказать принадлежность построенного решения классам (2) и (3). Доказана также устойчивость решения по граничным функциям.

**2. Единственность решения задачи.** Пусть  $u(x, t)$  и  $f_i(x)$ ,  $i = 1, 2$  – решение задачи (2)–(8). Следуя [1, 3] рассмотрим функции

$$u_k(t) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, t) \sin \pi k x dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

На основании (9), введем функцию

$$u_k(t) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, t) \sin \pi k x dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Для функции (10) получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$u'_k(t) + (b^2 + (\pi k)^2)t^n u_k(t) = f_{1k}, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$u''_k(t) + (b^2 + (\pi k)^2)(-t)^m u_k(t) = f_{2k}, \quad t < 0, \quad (12)$$

где

$$f_{ik} = \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \sin \pi k x dx, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (13)$$



Дифференциальные уравнения (11), (12) имеют общие решения [3]

$$u_k(t) = \begin{cases} a_k e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)} + f_{1k} I_k(t), & t > 0, \\ b_k \sqrt{-t} J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) + c_k \sqrt{-t} J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q) + f_{2k} w_k(t), & t < 0. \end{cases} \quad (14)$$

где  $a_k, b_k$  и  $c_k$  – произвольные постоянные,  $J_\nu(z)$  – функция Бесселя первого рода порядка  $\nu$ ,  $\lambda_k^2 = b^2 + (\pi k)^2$ ,

$$I_k(t) = e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)} \int_0^t e^{\lambda_k^2 s^{n+1}/(n+1)} ds, \quad (15)$$

$$w_k(t) = \frac{\pi}{2q \sin \frac{\pi}{2q}} \sqrt{-t} J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) \int_t^0 J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q) \sqrt{-s} ds - \\ - \frac{\pi}{2q \sin \frac{\pi}{2q}} \sqrt{-t} J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q) \int_t^0 J_{1/(2q)}(p_k(-s)^q) \sqrt{-s} ds. \quad (16)$$

Справедливы следующие утверждения.

**Лемма 1.** Функция  $f_{1k} I_k(t)$  является решением неоднородного уравнения (11) и удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$I_k(0) = 0, \quad I'_k(0) = 1.$$

**Лемма 2.** Функция  $f_{2k} w_k(t)$  является решением неоднородного уравнения (12) и удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$w_k(0) = w'_k(0) = 0, \quad w''_k(0) = 1.$$

□ Доказательство лемм 1 и 2 проводится непосредственно на основании (15) и (16) ■.

По условию решение  $u(x, t) \in C^1(\overline{D})$ , тогда аналогично [3] из равенств

$$u_k(+0) = u_k(-0), \quad u'_k(+0) = u'_k(-0),$$

для функций (14) имеем

$$b_k = -f_{1k} \gamma_{1/(2q)}(k), \quad c_k = a_k \gamma_{-1/(2q)}(k).$$

Здесь

$$\gamma_{1/(2q)}(k) = \frac{1}{2q} \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right) \left(\frac{2}{p_k}\right)^{1/(2q)}, \quad \gamma_{-1/(2q)}(k) = -\frac{1}{2q} \Gamma\left(-\frac{1}{2q}\right) \left(\frac{2}{p_k}\right)^{-1/(2q)}.$$



С учетом найденных значений  $b_k$  и  $c_k$  функции (14) принимают вид

$$u_k(t) = \begin{cases} a_k e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)} + f_{1k} I_k(t), & t > 0, \\ a_k \gamma_{-1/(2q)}(k) \sqrt{-t} J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q) - \\ - f_{1k} \gamma_{1/(2q)}(k) \sqrt{-t} J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) + f_{2k} w_k(t), & t < 0. \end{cases} \quad (17)$$

Для нахождения коэффициентов  $a_k$ ,  $f_{1k}$  и  $f_{2k}$  воспользуемся граничными условиями (6), (7), (8) и формулой (9):

$$u_k(-\alpha) - u_k(\beta) = \sqrt{2} \int_0^1 [u(x, -\alpha) - u(x, \beta)] \sin \pi k x dx = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi(x) \sin \pi k x dx = \varphi_k, \quad (18)$$

$$u'_k(-\alpha) = \sqrt{2} \int_0^1 u_t(x, -\alpha) \sin \pi k x dx = \sqrt{2} \int_0^1 \psi(x) \sin \pi k x dx = \psi_k, \quad (19)$$

$$u'_k(\beta) = \sqrt{2} \int_0^1 u_t(x, \beta) \sin \pi k x dx = \sqrt{2} \int_0^1 g(x) \sin \pi k x dx = g_k. \quad (20)$$

Удовлетворяя функции (17) условиям (18)-(20), относительно неизвестных  $a_k$ ,  $f_{1k}$  и  $f_{2k}$  получим систему

$$u_k(t) = \begin{cases} a_k E_{1k}(\alpha) + f_{1k} F_{1k}(\alpha) + f_{2k} w_k(-\alpha) = \varphi_k, \\ a_k E_{2k}(\alpha) + f_{1k} F_{2k}(\alpha) + f_{2k} w'_k(-\alpha) = \psi_k, \\ -a_k \lambda_k^2 \beta^n e^{-\lambda_k^2 \beta^{n+1}/(n+1)} + f_{1k} \left[ -\lambda_k^2 \beta^n I_k(\beta) + 1 \right] = g_k, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$E_{1k}(\alpha) = \sqrt{\alpha} \gamma_{-1/(2q)}(k) J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q) - e^{-\lambda_k^2 \beta^{n+1}/(n+1)}, \quad (22)$$

$$E_{2k}(\alpha) = \lambda_k \alpha^{q-1/2} \gamma_{-1/(2q)}(k) J_{1-1/(2q)}(p_k \alpha^q), \quad (23)$$

$$F_{1k}(\alpha) = -\sqrt{\alpha} \gamma_{1/(2q)}(k) J_{1/(2q)}(p_k \alpha^q) - I_k(\beta), \quad (24)$$

$$F_{2k}(\alpha) = \lambda_k \alpha^{q-1/2} \gamma_{1/(2q)}(k) J_{1/(2q)-1}(p_k \alpha^q). \quad (25)$$

Вычислим определитель системы (21), с учетом равенств (15), (16), (22)-(25) и [13, с.21]:

$$J_\nu(z) J_{1-\nu}(z) + J_{-\nu}(z) J_{\nu-1}(z) = \frac{2}{\pi z} \sin(\nu\pi).$$

Тогда получим

$$\Delta(k) = w_k(-\alpha) \left[ -E_{2k}(\alpha) \lambda_k^2 \beta^n I_k(\beta) + E_{2k}(\alpha) + \lambda_k^2 \beta^n e^{-\lambda_k^2 \beta^{n+1}/(n+1)} F_{2k}(\alpha) \right] - \\ - w'_k(-\alpha) \left[ -E_{1k}(\alpha) \lambda_k^2 \beta^n I_k(\beta) + E_{1k}(\alpha) - e^{-\lambda_k^2 \beta^{n+1}/(n+1)} + \lambda_k^2 \beta^n e^{-\lambda_k^2 \beta^{n+1}/(n+1)} F_{1k}(\alpha) \right] =$$



$$\begin{aligned}
 &= \left[ -w_k(-\alpha)\lambda_k^3\alpha^{q-1/2}\gamma_{-1/(2q)}(k)J_{1-1/(2q)}(p_k\alpha^q)\beta^n I_k(\beta) + \right. \\
 &\quad \left. + w'_k(-\alpha)\lambda_k^2\sqrt{\alpha}\gamma_{-1/(2q)}(k)J_{-1/(2q)}(p_k\alpha^q)\beta^n I_k(\beta) \right] + \\
 &+ \left[ w_k(-\alpha)\lambda_k\alpha^{q-1/2}\gamma_{-1/(2q)}(k)J_{1-1/(2q)}(p_k\alpha^q) - w'_k(-\alpha)\sqrt{\alpha}\gamma_{-1/(2q)}(k)J_{-1/(2q)}(p_k\alpha^q) \right] + \\
 &+ \left[ w_k(-\alpha)\lambda_k^3\alpha^{q-1/2}\gamma_{1/(2q)}(k)J_{1/(2q)-1}(p_k\alpha^q)\beta^n e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)} + \right. \\
 &\quad \left. + w'_k(-\alpha)\lambda_k^2\alpha^{q-1/2}\gamma_{1/(2q)}(k)J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)\beta^n e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)} \right] + w'_k(-\alpha)e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)} = \\
 &= -\lambda_k^2\gamma_{-1/(2q)}(k)\beta^n I_k(\beta) \int_{-\alpha}^0 J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s} ds + \\
 &\quad + \gamma_{-1/(2q)}(k) \int_{-\alpha}^0 J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s} ds - \\
 &e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)} \left[ \lambda_k^2\beta^n \gamma_{-1/(2q)}(k) \int_{-\alpha}^0 J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s} ds - w'_k(-\alpha) \right]. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Тогда система (21) имеет единственное решение

$$\begin{aligned}
 a_k &= (\Delta(k))^{-1}\varphi_k \left[ -\lambda_k^2\beta^n I_k(\beta)w'_k(-\alpha) + w'_k(-\alpha) \right] - \\
 &\quad - (\Delta(k))^{-1}\psi_k \left[ -\lambda_k^2\beta^n I_k(\beta)w_k(-\alpha) + w_k(-\alpha) \right] + \\
 &\quad + (\Delta(k))^{-1}g_k \left[ F_{1k}(\alpha)w'_k(-\alpha) - F_{2k}(\alpha)w_k(-\alpha) \right] \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{1k} &= -(\Delta(k))^{-1}\varphi_k \left[ \lambda_k^2\beta^n I_k(\beta)w'_k(-\alpha) \right] + (\Delta(k))^{-1}\psi_k \left[ \lambda_k^2\beta^n I_k(\beta)w_k(-\alpha) \right] - \\
 &\quad - (\Delta(k))^{-1}g_k \left[ E_{1k}(\alpha)w'_k(-\alpha) - e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)}w'_k(-\alpha) - E_{2k}(\alpha)w_k(-\alpha) \right], \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{2k} &= -(\Delta(k))^{-1}\varphi_k \left[ -E_{2k}(\alpha)\lambda_k^2\beta^n I_k(\beta) + E_{2k}(\alpha) + F_{2k}(\alpha)\lambda_k^2\beta^n e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)} \right] - \\
 &\quad - (\Delta(k))^{-1}\psi_k \left[ -E_{1k}(\alpha)\lambda_k^2\beta^n I_k(\beta) + E_{1k}(\alpha) - e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)} + \lambda_k^2\beta^n e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)}F_{1k}(\alpha) \right] + \\
 &\quad + (\Delta(k))^{-1}g_k \left[ E_{1k}(\alpha)F_{2k}(\alpha) - F_{2k}(\alpha)e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)} - E_{2k}(\alpha)F_{1k}(\alpha) + E_{2k}(\alpha)I_k(\beta) \right], \quad (29)
 \end{aligned}$$

если при всех  $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta(k) \neq 0. \quad (30)$$



Таким образом, найден окончательный вид функций  $u_k(t)$ , которые определяются по формуле (17), а коэффициенты  $a_k$ ,  $f_{1k}$  и  $f_{2k}$  находятся по формулам (27), (28) и (29).

Исходя из формул (17), (28) и (29) докажем единственность решения задачи (2)–(8). Пусть  $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$  на  $[0, 1]$  и при всех  $k$  выполнено условие (30). Тогда все  $\varphi_k = \psi_k = g_k \equiv 0$  и из формул (17), (28) и (29) следует, что  $u_k(t) \equiv 0$  на  $[-\alpha, \beta]$  и  $f_{ik} = 0$  ( $i = 1, 2$ ) при всех  $k \in \mathbb{N}$ . Следовательно, из (9) и (13) имеем

$$\int_0^1 u(x, t) \sin \pi k x dx = 0, \quad \int_0^1 f_i(x) \sin \pi k x dx = 0, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда в силу полноты системы синусов в пространстве  $L_2[0, 1]$  следует, что  $u(x, t) = 0$  и  $f_i(x) = 0$  почти всюду на  $[0, 1]$  при любом  $t \in [-\alpha, \beta]$ . Поскольку  $u(x, t) \in C(\overline{D})$  и  $f_i(x) \in C(0, 1)$ , то  $u(x, t) \equiv 0$  в  $\overline{D}$  и  $f_i(x) \equiv 0$  на  $(0, 1)$ .

Предположим, что условие (30) нарушено при некоторых  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $b$ ,  $m$ ,  $n$  и  $k = l$ , т.е.  $\Delta(l) = 0$ . Тогда однородная задача (2)–(8) (где  $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$ ) имеет ненулевое решение

$$u_l(x, t) = u_l(t) \sin \pi l x, \quad (31)$$

где

$$u_l(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_l^2 t^{n+1}/(n+1)} + f_{1l} I_l(t), & t > 0, \\ E_{1l}(t) + f_{1l}(F_{1l}(t) - w_l(t)) + f_{2l} w_l(t), & t < 0, \end{cases}$$

$$f_{1l}(x) = f_{1l} \sin \pi l x, \quad f_{1l} = \frac{\lambda_l^2 \beta^n e^{-\lambda_l^2 \beta^{n+1}/(n+1)}}{-\lambda_l^2 \beta^n I_l(\beta) + 1}. \quad (32)$$

$$f_{2l}(x) = f_{2l} \sin \pi l x, \quad f_{2l} = -\frac{E_{2l}(\alpha) + f_{1l} F_{2l}(\alpha)}{w_l'(-\alpha)}. \quad (33)$$

**Лемма 3.** При любом фиксированном  $\beta > 0$  и больших  $k$  для функции  $I_k(\beta)$  справедлива оценка

$$|I_k(\beta)| \leq \tilde{C}_0 k^{-2}, \quad (34)$$

где  $\tilde{C}_0$  – положительная постоянная, зависящая от  $\beta$  и  $n$ .

□ Перепишем выражение  $I_k(\beta)$  из (15) в следующем виде:

$$I_k(\beta) = \int_0^\beta e^{-\lambda_k^2 \frac{\beta^{n+1} - s^{n+1}}{n+1}} ds.$$

Введем замену  $t = (\beta^{n+1} - s^{n+1})/(n+1)$ , тогда имеем

$$I_k(\beta) = \beta_2 \int_0^{\beta_1} (\beta_1 - t)^{-\frac{n}{n+1}} e^{-\lambda_k^2 t} dt, \quad \beta_1 = \frac{\beta^{n+1}}{n+1}, \quad \beta_2 = (n+1)^{-\frac{n}{n+1}}.$$





Применяя к последнему интегралу формулу [13, с. 324]

$$\int_0^a x^{\alpha-1}(a-x)^{\beta-1}e^{-px} dx = B(\alpha, \beta)a^{\alpha+\beta-1} {}_1F_1(\alpha, \alpha + \beta; -ap),$$

имеем

$$I_k(\beta) = \beta_2 B\left(1, \frac{1}{n+1}\right) \beta_1^{\frac{1}{n+1}} {}_1F_1\left(1, 1 + \frac{1}{n+1}; -\beta_1 \lambda_k^2\right).$$

Используя асимптотику для функции  ${}_1F_1(a, c; z)$  при  $Re(z) \rightarrow -\infty$  [14, с. 266]

$${}_1F_1(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} [1 + O(|z|^{-1})],$$

получаем

$$\begin{aligned} I_k(\beta) &= \beta_2 B\left(1, \frac{1}{n+1}\right) \beta_1^{\frac{1}{n+1}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)} (\beta_1 \lambda_k^2)^{-1} [1 + O(|\beta_1 \lambda_k^2|^{-1})] = \\ &= \beta^{-n} \lambda_k^{-2} [1 + O(k^{-2})] = \beta^{-n} \lambda_k^{-2} + O(k^{-4}). \end{aligned} \tag{35}$$

Отсюда получаем требуемую оценку (34). ■

**Лемма 4.** При любых фиксированных  $\beta > 0, b \geq 0, m > 0, n > 0$  и достаточно больших  $k$  выражение  $\Delta(k)$  имеет счетное множество нулей относительно  $\alpha_q = \alpha^q/q$ .

□ Следуя работам [3, 15], на основании (26) и (35) выражение  $k^{2+\lambda}\Delta(k)$  ( $\lambda = 1/2 - 1/(2q)$ ) представим в следующем виде:

$$k^{2+\lambda}\Delta(k) = B_{1k} + B_{2k}, \tag{36}$$

где

$$\begin{aligned} B_{1k} &= -k^{2+\lambda} O(k^{-4}) \beta^n \lambda_k^2 \gamma_{-1/(2q)}(k) \int_{-\alpha}^0 J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q) \sqrt{-s} ds, \\ B_{2k} &= -k^{2+\lambda} e^{-\lambda_k^2 \beta^{n+1}/(n+1)} \left[ \lambda_k^2 \beta^n \gamma_{-1/(2q)}(k) \int_{-\alpha}^0 J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q) \sqrt{-s} ds - w'_k(-\alpha) \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим соотношение  $B_{1k}$ . На основании первой теоремы о среднем, имеем

$$B_{1k} = k^{2+\lambda} O(k^{-4}) \beta^n \lambda_k^2 \gamma_{-1/(2q)}(k) \frac{1}{q} J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q \theta) \int_0^{\alpha^q} t^{\frac{3}{2q}-1} dt,$$

где  $0 < \theta < 1$ . С учетом асимптотической формулы [16, с. 98] для функции

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-5/2}), \quad z \rightarrow \infty, \tag{37}$$



при  $k > k_1$ , где  $k_1$  – достаточно большое натуральное число, имеем

$$B_{1k} = B_k \sin \left( \lambda_k \alpha_q \theta + \pi \frac{q+1}{4q} \right) + O(k^{-2}) = B_{1k}^{(1)} + B_{1k}^{(2)}. \quad (38)$$

Здесь

$$B_k = \frac{2^{3/2} (\alpha^q)^{\frac{3}{2q} - \frac{1}{2}} \beta^n}{3\sqrt{\pi\theta}} \cdot \frac{k^{2+\lambda} O(k^{-4}) \lambda_k^2 \gamma_{-1/(2q)}(k)}{\sqrt{p_k}}.$$

Отметим, что величина  $B_k$  при  $k > k_1$  ограничена и отделена от нуля  $0 < B < B_k < \sqrt{2}B$ ,  $B = 2^{1/2-1/(2q)} \pi^{-1-1/(2q)} (\alpha^q)^{3/(2q)-1/2} \beta^n \Gamma(1/(2q)) q / (3\sqrt{\theta})$ . Выражение  $B_{1k}^{(1)}$  имеет счетное множество положительных нулей относительно  $\alpha_q = \alpha^q/q$ . Выражения  $B_{1k}^{(2)}$  и  $B_{2k}$  являются бесконечно малыми при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда  $\Delta(k)$  имеет счетное множество положительных нулей относительно  $\alpha_q$ . ■

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

**Теорема 1.** *Если существует решение  $u(x, t)$  и  $f_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) задачи (2)–(8), то оно единственно только тогда, когда при всех  $k \in \mathbb{N}$  выполнены условия (30).*

**3. Существование решения задачи.** Так как выражение  $\Delta(k)$  находится в знаменателе функций  $u_k(t)$  то при достаточно больших  $k$  оно может стать достаточно малым, т.е. возникает проблема «малых знаменателей» [11, 12, 3]. Покажем, что при достаточно больших  $k$  выражение  $\Delta(k)$  отделено от нуля.

**Лемма 5.** *Если выполнено одно из условий: 1)  $\alpha_q \theta$  – любое натуральное число; 2)  $\alpha_q \theta = p/t$  – любое дробное число, где  $p$  и  $t$  – взаимно-простые натуральные числа и  $r/t \neq (3q-1)/(4q)$ , где  $r = 0, t-1$ , то существуют положительные постоянные  $k_0 \in \mathbb{N}$  и  $C_0$ , такие, что при любых  $k > k_0$  и фиксированных  $b \geq 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $m > 0$  и  $n > 0$  справедлива оценка*

$$|k^{2+\lambda} \Delta(k)| \geq C_0 > 0, \quad \lambda = 1/2 - 1/(2q). \quad (39)$$

□ Пусть  $k_2 \in \mathbb{N}$  такое, что при  $k > k_2$

$$0 < \frac{b}{\pi k} < 1.$$

Тогда в силу работы [3], имеем представление

$$\lambda_k = \sqrt{b^2 + (\pi k)^2} = \pi k + \theta_k, \quad (40)$$

где для  $\theta_k$  справедлива оценка

$$\frac{b^2}{4\pi k} < \theta_k < \frac{b^2}{2\pi k}. \quad (41)$$

Рассмотрим  $B_{1k}^{(1)}$  из (38). С учетом (40), перепишем его в следующем виде

$$B_{1k}^{(1)} = B_k \sin \left( \pi k \alpha_q \theta + \theta_k \alpha_q \theta + \pi \frac{q+1}{4q} \right). \quad (42)$$



Пусть  $\alpha_q\theta = p/t$  – дробное число. Разделим  $kp$  на  $t$  с остатком:  $kp = st + r$ ,  $0 \leq r < t$ ,  $s, r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Тогда выражение (42) оценим следующим образом:

$$|B_{1k}^{(1)}| = B_k \left| \sin \left( \pi s + \pi \frac{r}{t} + \theta_k \frac{p}{t} + \pi \frac{q+1}{4q} \right) \right| \geq \frac{B}{2} \left| \sin \left( \pi \frac{r}{t} + \pi \frac{q+1}{4q} \right) \right| = C_1 \geq 0,$$

так как в силу оценки (41) существует конечный предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |B_{1k}^{(1)}| = C_1.$$

Теперь потребуем, чтобы постоянная  $C_1$  была больше нуля. Это возможно только тогда, когда

$$\pi \frac{r}{t} + \pi \frac{q+1}{4q} \neq \pi d \text{ или } \frac{r}{t} + \frac{q+1}{4q} \neq d, \quad d \in \mathbb{N},$$

или

$$\frac{1}{q} \neq -1 + 4d - 4\frac{r}{t}. \quad (43)$$

Если число  $q$  – иррациональное, то неравенство (43) при всех  $r$  и  $t$  имеет место. Пусть  $q$  – рациональное число и  $t = 1$ , т.е. в этом случае  $\alpha_q\theta = p$  – натуральное число, поэтому,  $r = 0$ , тогда неравенство (43) выполняется при всех  $q > 1$  и  $d \in \mathbb{N}$ . Если  $t \geq 2$ , то в силу оценки

$$\frac{1}{4} < \frac{r}{t} + \frac{q+1}{4q} < 1 + \frac{1}{2},$$

неравенство (43) имеет место при всех  $d \geq 2$ . Если  $d = 1$ , то можно подобрать число  $r/t$ , такое, что нарушается условие (43), т.е. выполняется равенство

$$\frac{r}{t} = \frac{3q-1}{4q},$$

но этот случай по условию исключается.

Поскольку выражения  $B_{1k}^{(2)}$  из (38),  $B_{2k}$  и  $B_{3k}$  из (36) являются бесконечно малыми при  $k \rightarrow \infty$ , то существует  $k_3 \in \mathbb{N}$ , такое, что при указанных  $\alpha_q\theta$  и всех  $k > k_3$  справедливы неравенства

$$|B_{1k}^{(1)}| > \frac{1}{2}C_1 = C_2, \quad |B_{1k}^{(2)}| < \frac{C_2}{4}, \quad |B_{2k}| < \frac{C_2}{4}, \quad |B_{3k}| < \frac{C_2}{4}. \quad (44)$$

Здесь и далее  $C_i$  – положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от  $\alpha, \beta, b, n$  и  $m$ . Тогда из представления (36) на основании оценок (44), получим

$$|k^{-2+\lambda}\Delta(k)| \geq |B_{1k}^{(1)}| - |B_{1k}^{(2)}| - |B_{2k}| - |B_{3k}| > \frac{C_2}{4} = C_0 > 0$$

при  $k > k_0 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$ . ■

**Замечание.** Отметим, что условие

$$\frac{r}{t} \neq \frac{3q-1}{4q} \quad (45)$$



в лемме 4 существенно, так как в противном случае оценка (39) не имеет место.

Действительно, пусть нарушается условие (45). Тогда последовательность  $B_{1k}^{(11)}$  является бесконечно малой:

$$|B_{1k}^{(1)}| = B_k \left| \sin \left( \theta_k \frac{p}{t} \right) \right| \leq C_3 |\theta_k| \leq \frac{C_4}{k},$$

с другой стороны, при больших  $k$  в силу неравенства  $\sin x \geq 2x/\pi$ ,  $0 \leq x \leq \pi/2$ , и оценки (41) имеем

$$|B_{1k}^{(1)}| = B_k \left| \sin \left( \theta_k \frac{p}{t} \right) \right| \geq C_5 |\theta_k| \geq \frac{C_6}{k}.$$

В этом случае вместо оценки (39) можно получить другую более худшую оценку.

При выполнении оценки (39) при всех  $k > k_0$  и неравенства (30) при  $k = 1, 2, \dots, k_0$  решение задачи (2)–(8) будем искать в виде сумм рядов

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \sin \pi k x, \quad (46)$$

$$f_i(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} f_{ik} \sin \pi k x, \quad i = 1, 2, \quad (47)$$

где  $u_k(t)$  и  $f_{ik}$  – определены соответственно по формулам (17), (28) и (29).

**Лемма 6.** При любом фиксированном  $t \in [-\alpha, 0)$  и больших  $k$  для функции  ${}_1F_2(a; b, c; z)$  справедлива оценка

$$\left| {}_1F_2 \left( a; b, c; -\frac{(p_k t^q)^2}{4} \right) \right| \leq C_7 k^{2\eta}, \quad \eta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}(b+c). \quad (48)$$

□ Доказательство оценки (48) следует из асимптотического представления для функции  ${}_1F_2(a; b, c; z)$  [17, с. 221]. ■

**Лемма 7.** При любых  $t \in [-\alpha, 0]$  и  $k \in \mathbb{N}$  справедливы оценки:

$$|w_k(t)| \leq C_8, \quad |w'_k(t)| \leq C_9 k^2, \quad |w''_k(t)| \leq C_{10} k^2. \quad (49)$$

□ Доказательство проводится на основании равенства (16), леммы 6 и формулы [18, с. 37]

$$\int_0^x t^\lambda J_\nu(t) dt = \frac{x^{\lambda+\nu+1}}{2^\nu(\lambda+\nu+1)\Gamma(\nu+1)} \times {}_1F_2 \left( \frac{\lambda+\nu+1}{2}; \frac{\lambda+\nu+3}{2}; \nu+1, -\frac{x^2}{4} \right), \quad (50)$$

где  $\operatorname{Re}(\lambda+\nu) > -1$ . ■



**Следствие.** При  $t = -\alpha$  справедливы следующие оценки:

$$|w_k(-\alpha)| \leq C_{11}k^{-2}, \quad |w'_k(-\alpha)| \leq C_{12}k^{-1}.$$

**Лемма 8.** Если выполнена оценка (39) при  $k > k_0$ , тогда для таких  $k$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} |u_k(t)| &\leq M_1(k^{1+\lambda}|\varphi_k| + k^\lambda|\psi_k| + k|g_k|), \\ |u'_k(t)| &\leq M_2(k^{3+\lambda}|\varphi_k| + k^{2+\lambda}|\psi_k| + k^3|g_k|), \quad t \in [0, \beta]; \\ |u_k(t)| &\leq M_3(k^3|\varphi_k| + k^2|\psi_k| + k^{2+\lambda}|g_k|), \\ |u'_k(t)| &\leq M_4(k^5|\varphi_k| + k^4|\psi_k| + k^{4+\lambda}|g_k|), \\ |u''_k(t)| &\leq M_5(k^5|\varphi_k| + k^4|\psi_k| + k^{4+\lambda}|g_k|), \quad t \in [-\alpha, 0], \\ |f_{1k}| &\leq M_6(k^{1+\lambda}|\varphi_k| + k^\lambda|\psi_k| + k|g_k|), \\ |f_{2k}| &\leq M_7(k^3|\varphi_k| + k^2|\psi_k| + k^{2+\lambda}|g_k|). \end{aligned}$$

Здесь и далее  $M_i$  – положительные постоянные.

□ С учетом следствия и асимптотической формулы (37) оценим выражения (22)-(25).

$$|E_{1k}(\alpha)| \leq C_{13}k^{-\lambda} + e^{-\lambda_k^2 \beta^{n+1}/(n+1)} \leq C_{14}k^{-\lambda}, \quad |E_{2k}(\alpha)| \leq C_{15}k^{1-\lambda}, \quad (51)$$

$$|F_{1k}(\alpha)| \leq C_{16}k^{-1+\lambda} + C_{17} \leq C_{18}, \quad |F_{2k}(\alpha)| \leq C_{19}k^\lambda. \quad (52)$$

С помощью оценок (34), (51), (52) и следствия получим оценки для выражений (27)-(25).

$$|a_k| \leq C_{20}(k^{1+\lambda}|\varphi_k| + k^\lambda|\psi_k| + k^{2\lambda}|g_k|), \quad (53)$$

$$|f_{1k}| \leq M_6(k^{1+\lambda}|\varphi_k| + k^\lambda|\psi_k| + k|g_k|), \quad (54)$$

$$|f_{2k}| \leq M_7(k^3|\varphi_k| + k^2|\psi_k| + k^{2+\lambda}|g_k|). \quad (55)$$

При любом  $t \in [0, \beta]$  из (15) имеем

$$|I_k(t)| \leq C_{21}, \quad |I'_k(t)| \leq k^2 C_{22}. \quad (56)$$

Заметим также, что при любом  $t \in [-\alpha, 0]$  справедливы неравенства:

$$|\gamma_{\pm 1/(2q)} \sqrt{-t} J_{\pm 1/(2q)}(p_k(-t)^q)| \leq C_{23}, \quad (57)$$

$$|\gamma_{-1/(2q)} (-t)^{q-1/2} J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q)| \leq C_{24}k, \quad (58)$$

$$|\gamma_{1/(2q)} (-t)^{q-1/2} J_{1/(2q)-1}(p_k(-t)^q)| \leq C_{25}k^{-1+\lambda}. \quad (59)$$

На основании (17), с учетом оценок (53)–(59), получаем требуемые оценки. ■



В силу леммы 8, ряд (46) и его производные первого порядка в замкнутой области  $\overline{D}$  и производные второго порядка соответственно в областях  $\overline{D}_+$  и  $\overline{D}_-$  и ряды (47) на  $[0,1]$  мажорируются рядом

$$M_8 \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} (k^5|\varphi_k| + k^4|\psi_k| + k^{4+\lambda}|g_k|). \quad (60)$$

**Лемма 9.** Пусть  $\varphi(x) \in C^6[0,1]$ ,  $\psi(x) \in C^5[0,1]$ ,  $g(x) \in C^{5+\mu}[0,1]$ ,  $\lambda < \mu < 1$ ,  $\varphi^i(0) = \varphi^i(1) = \psi^i(0) = \psi^i(1) = g^i(0) = g^i(1) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда справедливы представления:

$$\varphi_k = -\frac{1}{\pi^6 k^6} \varphi_k^{(6)}, \quad \psi_k = \frac{1}{\pi^5 k^5} \psi_k^{(5)}, \quad |g_k| \leq \frac{M_9}{k^{5+\mu}},$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(6)} &= \sqrt{2} \int_0^1 \varphi^{VI}(x) \sin \pi k x dx, \quad \psi_k^{(5)} = \sqrt{2} \int_0^1 \psi^V(x) \cos \pi k x dx, \\ \sum_{k=0}^{+\infty} |\varphi_k^{(6)}|^2 &\leq \|\varphi^{VI}\|_{L_2}^2, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} |\psi_k^{(5)}|^2 \leq \|\psi^V\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

При выполнении условий леммы 8 ряд (60) оценивается числовым рядом

$$M_{10} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left( |\varphi_k^{(6)}| + |\psi_k^{(5)}| + \frac{1}{k^{\mu-\lambda}} \right). \quad (61)$$

В силу сходимости ряда (61), следует равномерная сходимость ряда (46), рядов из производных первого порядка членов этого ряда в  $\overline{D}$  и возможность его почленного дифференцирования по  $x$  и  $t$  дважды при  $t \leq 0$  и любое число раз при  $t > 0$ , и рядов (47) на  $[0,1]$ .

Если при некоторых  $k = l = k_1, k_2, \dots, k_m$ , где  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq k_0$ , где  $k_n$ ,  $n = \overline{1, m}$ ,  $m$  – заданные натуральные числа,  $\Delta(l) = 0$ , то для разрешимости задачи (2)–(8) достаточно, чтобы

$$\int_0^1 \varphi(x) \sin \pi l x dx = \int_0^1 \psi(x) \sin \pi l x dx = \int_0^1 g(x) \sin \pi l x dx = 0, \quad l = k_1, \dots, k_m. \quad (62)$$

Тогда решение задачи (2)–(8) определяется в виде сумм рядов

$$u(x, t) = \left( \sum_{k=1}^{k_1-1} + \dots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{\infty} \right) u_k(t) \sin \pi k x + \sum_l A_l u_l(x, t), \quad (63)$$

$$f_{ik}(x) = \left( \sum_{k=1}^{k_1-1} + \dots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{\infty} \right) f_{ik} \sin \pi k x + \sum_l A_{il} f_{il}(x), \quad i = 1, 2, \quad (64)$$



где функции  $u_k(t)$ ,  $f_{ik}$ ,  $u_l(x, t)$  и  $f_{il}(x)$  определяются соответственно по формулам (17), (28), (29), (31)–(33),  $A_{il}$  – произвольная постоянная, в суммах  $\sum_l$  индекс  $l$  принимает значения  $k_1, k_2, \dots, k_l$ , конечные суммы выражений (63), (64) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Таким образом, справедлива

**Теорема 2.** Пусть функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  и  $g(x)$  удовлетворяют условиям леммы 9 и выполнена оценка (39) при  $k > k_0$ . Тогда если  $\Delta(k) \neq 0$  при всех  $k = \overline{1, k_0}$ , то существует единственное решение задачи (2)–(8) и это решение определяется рядами (46), (47); если  $\Delta(k) = 0$  при некоторых  $k = k_1, \dots, k_m \leq k_0$ , то задача (2)–(8) разрешима тогда, когда выполняются условия ортогональности (62) и решение в этом случае определяется рядами (63), (64).

**4. Устойчивость решения задачи.** Введем следующие известные нормы:

$$\|u(x, t)\|_{L_2[0,1]} = \|u(x, t)\|_{L_2} = \left( \int_0^1 |u(x, t)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\|f(x)\|_{L_2} = \left( \int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|u(x, t)\|_{C(\overline{D})} = \max_{\overline{D}} |u(x, t)|.$$

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2 и  $\Delta(k) \neq 0$  при всех  $k \leq k_0$ . Тогда для решения (46), (47) задачи (2)–(8) имеют место оценки:

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\|_{L_2} &\leq M_{11} (\|\varphi'''(x)\|_{L_2[0,1]} + \|\psi''(x)\|_{L_2[0,1]} + \|g'''(x)\|_{L_2[0,1]}), \\ \|f_1(x)\|_{L_2} &\leq M_{12} (\|\varphi''(x)\|_{L_2[0,1]} + \|\psi'(x)\|_{L_2[0,1]} + \|g'(x)\|_{L_2[0,1]}), \\ \|f_2(x)\|_{L_2} &\leq M_{13} (\|\varphi'''(x)\|_{L_2[0,1]} + \|\psi''(x)\|_{L_2[0,1]} + \|g'''(x)\|_{L_2[0,1]}), \\ \|u(x, t)\|_{C(\overline{D})} &\leq M_{14} (\|\varphi^{IV}(x)\|_{C[0,1]} + \|\psi'''(x)\|_{C[0,1]} + \|g^{IV}(x)\|_{C[0,1]}), \\ \|f_1(x)\|_{C(\overline{D})} &\leq M_{15} (\|\varphi'''(x)\|_{C[0,1]} + \|\psi''(x)\|_{C[0,1]} + \|g''(x)\|_{C[0,1]}), \\ \|f_2(x)\|_{C(\overline{D})} &\leq M_{16} (\|\varphi^{IV}(x)\|_{C[0,1]} + \|\psi'''(x)\|_{C[0,1]} + \|g^{IV}(x)\|_{C[0,1]}), \end{aligned}$$

где постоянные  $M_i$  не зависят от функций  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  и  $g(x)$ .

□ Доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы работы [3]. ■

### Литература

1. Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии // Дифференц. уравнения. – 2011. – 47, № 1. – С.1-8.
2. Сабитов К.Б. Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. – 2011. – 89, №4. – С.596-602.
3. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2014. – 50, №3. – С.356-365.



4. Капустин Н.Ю. Задача Трикоми для парабола-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью. I. // Дифференц. уравнения. – 1987. – 23, №1. – С.72-78.
5. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // ДАН. – 2009. – 429, №4. – С.451-454.
6. Иванов В.К., Васин В.В., Танан В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / М.: Наука, 1978.
7. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.: Наука, 1980.
8. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач / М.: МГУ, 1994.
9. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / New-York: Marcel Dekker, 2000.
10. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи / Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
11. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. – 1963. – 18, №6. – С.91-192.
12. Ломов И.С. Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1993. – 29, №12. – С.2079-2089.
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды / М.: Наука, 1981. – 800 с.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. 2-е изд. / М.: Наука, 1973.
15. Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. – 2013. – 49, №1. – С.68-78.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. 2-е изд. / М.: Наука, 1974.
17. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / М.: Мир, 1980.
18. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции / М.: Наука, 1983.

## NONLOCAL INVERSE PROBLEM OF RIGHT PARTS DETERMINING OF THE MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE DEGENERATE EQUATION

S.N. Sidorov

Sterlitamak department of Bashkir State University,  
Lenin Av., 37, Sterlitamak, 453103, Russia, e-mail: [stsid@mail.ru](mailto:stsid@mail.ru)

**Abstract.** The inverse boundary problem in rectangular region is studied for equation of mixed parabolic-hyperbolic type. It consists of finding the unknown right-hand parts with a nonlocal boundary condition, connecting values of the derived solution on opposite sides normals of the rectangular domain which belong to different types of the equation under study. Solutions are built in the form of sums over eigenfunctions system that corresponds to one-dimensional spectral problem. It is set the criterion of solution uniqueness and it is proved the solution stability of inverse problems on boundary data.

**Key words:** equation of mixed type, inverse problem, spectral method, existence, uniqueness, stability.





MSC 32C99

**О СТАБИЛЬНЫХ 2-РАССЛОЕНИЯХ  
С КЛАССАМИ ЧЕРНА  $c_1 = 0, c_2 = 12$  И  $c_2 = 13$   
НА КОМПЛЕКСНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

\*С.А. Тихомиров, \*\*А.П. Ляпин

\*Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д.Ушинского,  
ул. Республиканская, 108, Ярославль, 150 000, Россия, e-mail: satikhomirov@mail.ru

\*\*Сибирский федеральный университет,  
пр. Свободный, 79/10, Красноярск, 660 041, Россия, e-mail: lyarinap@yandex.ru

**Аннотация.** Находится число компонент Эйна в многообразиях модулей стабильных 2-расслоений с классами Черна  $c_1 = 0, c_2 = 12$  и  $13$ , вычисляются их размерности и устанавливается соответствие этих компонент спектрам стабильных 2-расслоений.

**Ключевые слова:** векторное расслоение, классы Черна, многообразие модулей.

**1. Введение.** В статье [1] Хартсхорном был опубликован перечень приоритетных проблем, связанных с векторными расслоениями на комплексных проективных пространствах. В частности, проблема 7 из данного перечня — изучение многообразий модулей стабильных векторных расслоений ранга 2 (называемых иногда для краткости «2-расслоениями») на комплексном проективном пространстве, в наши дни остается далекой от полного решения.

Всевозможные вопросы, относящиеся к поиску компонент в таких многообразиях модулей, а также установлению различных качественных и количественных характеристик этих компонент являются одними из самых главных в исследовании указанных многообразий.

Настоящая работа посвящена нахождению точного числа компонент Эйна в многообразиях модулей  $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 12)$  и  $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 13)$  стабильных 2-расслоений с классами Черна  $c_1 = 0, c_2 = 12$  и  $c_2 = 13$  на  $\mathbb{P}^3$  над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ , вычислению их размерностей и установлению соответствия этих компонент конкретным спектрам стабильных 2-расслоений. По поводу известных в этом направлении результатов см., например, [2].

**2. Компоненты Эйна в многообразиях  $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 12)$  и  $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 13)$  и их характеристики.**

Напомним некоторые основные определения. Пусть  $\mathcal{E}_2$  — стабильное расслоение ранга 2 с классом Черна  $c_1 = 0$  на  $\mathbb{P}^3$ ,  $l$  — общая прямая в  $\mathbb{P}^3$ ,  $\sigma := bl_l : \tilde{\mathbb{P}}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  — раздутие вдоль  $l$  и  $\pi : \tilde{\mathbb{P}}^3 \rightarrow \mathbb{P}^1$  — морфизм, определенный пучком плоскостей, проходящих через  $l$ . Тогда расслоение  $V := R^1\pi_*\sigma^*\mathcal{E}_2(-1)$  есть расслоение ранга  $n$  на  $\mathbb{P}^1$ . По теореме

---

Работа выполнена в рамках проекта Минобрнауки РФ на 2014-2016 гг. (госзадание — научная лаборатория ЯГПУ «Векторные расслоения на алгебраических многообразиях» (первый автор) и подержана грантом РФФИ №14-01-00283-а (второй автор)



Гротендика (см., например, [3]) такое расслоение единственным образом расщепляется в прямую сумму линейных:  $V = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ , где  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Тогда спектр  $\text{Срес}(\mathcal{E}_2) := \{a_1, \dots, a_n\}$ .

Понятие спектра в случае произвольной характеристики было введено Хартсхорном в [4].

В реальности спектр такого расслоения представляет собой неубывающую последовательность  $n$  целых чисел, обладающую рядом важных свойств ([4], [5]). А именно, пусть  $\text{Срес}(\mathcal{E}_2) := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $a_i \in \mathbb{Z}$ , – спектр  $E_2$ . Тогда  $\text{Срес}(\mathcal{E}_2)$  удовлетворяет свойствам:

(1) симметричность  $\{-a_i\} = \{a_i\}$ ,

(2) связность: для любых двух чисел в  $\text{Срес}(\mathcal{E}_2)$ , каждое число, лежащее между ними, также лежит в  $\text{Срес}(\mathcal{E}_2)$ ,

(3) если число  $l_0$ , такое, что  $l \leq l_0 \leq \max\{a_i\}$  появляется только один раз в  $\text{Срес}(\mathcal{E}_2)$ , то каждое число  $l$ , такое, что  $l \leq l_0 \leq \max\{a_i\}$  появляется только один раз в  $\text{Срес}(\mathcal{E}_2)$ .

Согласно результату Хартсхорна и Рао [5] для 2-расслоений с  $c_1 = 0$  и  $1 \leq c_2 \leq 19$  все спектры, удовлетворяющие свойствам (1)–(3) выше, являются реализуемыми, то есть в действительности существуют расслоения, имеющие такой спектр.

В свою очередь Л. Эйн [6] рассмотрел специальный класс стабильных векторных расслоений ранга 2 на  $\mathbb{P}^3$  – класс так называемых обобщенных нуль-корреляционных расслоений  $\mathcal{E}_2$ , являющихся кохомологическими пучками монад вида

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-c) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(b) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c) \rightarrow 0, \quad (1)$$

где  $c > b \geq a \geq 0$ . В этом случае, как нетрудно вычислить,  $c_1(\mathcal{E}_2) = 0$ ,  $c_2(\mathcal{E}_2) = c^2 - a^2 - b^2$ . Более того, Л. Эйн показал, что такие расслоения стабильны тогда и только тогда, когда  $c > a + b$ , и что пространство модулей  $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, c^2 - a^2 - b^2)$  имеет неприводимую компоненту  $N(a, b, c)$ , общая точка которой соответствует классу расслоений, являющихся кохомологическими пучками монад из (1). Такие компоненты и будем называть *компонентами Эйна*. Всестороннее изучение расслоений, составляющих компоненты Эйна, по-прежнему сохраняет свою важность в связи с многочисленными применениями (данные расслоения иногда называются «обобщенными инстантонами» – см., например, [7]). Основным результатом настоящей работы является следующая

**Теорема. 1.** *В пространстве  $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 12)$  имеется единственная компонента Эйна: компонента размерности 104, содержащая плотное открытое подмножество классов расслоений, имеющих спектр  $(-3, -2, -2, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3)$  и задаваемых монадой типа  $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4) \rightarrow 0$ .*

**2.** *В пространстве  $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 13)$  имеется единственная компонента Эйна: компонента размерности 176, содержащая классы расслоений, имеющих спектр*

$$(-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

*и задаваемых монадой типа  $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-7) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(7) \rightarrow 0$ .*



□ Положим  $r = b - a, q = c - 2a - r - 1$ . Здесь  $r, q \geq 0$  в силу неравенств из (1). Тогда  $c_2(\mathcal{E}_2) = (2a + r + 1 + q)^2 - (a + r)^2 - a^2 = (2a + r)^2 + (1 + q)^2 + 2(2a + r)(1 + q) - 2a^2 - 2ar - r^2 = 4a^2 + 4ar + r^2 + 1 + 2q + q^2 + 4a + 4aq + 2r + 2rq - 2a^2 - 2ar - r^2 = 2a^2 + 2ar + 4a + 4aq + 2r + 2rq + 1 + 2q + q^2$ .

Поскольку  $a, r$  и  $q$  — неотрицательные целые числа, а  $c_2(\mathcal{E}_2)$  представляет собой сумму единицы и произведений этих трех переменных в неотрицательных степенях, то, фиксируя любые две из трех переменных  $a, r$  и  $q$ , легко проверяем, что  $c_2(\mathcal{E}_2)$  становится тогда возрастающей функцией от оставшегося переменного. Анализируя данную функцию, мы элементарными вычислениями получаем, что равенство  $c_2(\mathcal{E}_2) = 12$  возможно лишь при  $a = 0, r = 2, q = 1$ . Тем самым,  $b = 2$  и  $c = 4$ . Аналогично, равенство  $c_2(\mathcal{E}_2) = 13$  возможно лишь при  $a = 0, r = 6, q = 0$ . Тем самым,  $b = 6$  и  $c = 7$ . Разберем теперь подробно два этих случая.

1. В случае  $c_2 = 12$  имеется 20 реализуемых спектров. Перечислим эти спектры:

- 1)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$
- 2)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1);$
- 3)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1);$
- 4)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2);$
- 5)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1);$
- 6)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2);$
- 7)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-3, -2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3);$
- 8)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1);$
- 9)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2);$
- 10)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -2, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2);$
- 11)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-3, -2, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3);$
- 12)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-4, -3, -2, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4);$
- 13)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1);$
- 14)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2);$
- 15)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -2, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2);$
- 16)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-3, -2, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3);$
- 17)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-3, -2, -2, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3);$
- 18)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-4, -3, -2, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4);$
- 19)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-5, -4, -3, -2, -1, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5);$
- 20)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -2, -2, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2).$

В этом случае монада (1) имеет вид:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4) \rightarrow 0. \quad (2)$$

Согласно теореме статьи [8]

$$h^1\mathcal{E}_2(-1) = 16 \text{ и } h^1\mathcal{E}_2(-2) = 9. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим спектр под номером 17 из указанного списка. Следуя технике Барта (см. работу [9]), имеем

$$h^1\mathcal{E}_2(-1) = h^0K, h^1\mathcal{E}_2(-2) = h^0K(-1),$$



где  $K = \bigoplus_{\mathbb{P}^1}(k)$ , а числа  $k$  пробегают вышеуказанные спектры. Отсюда элементарным вычислением получаем, что равенства (3) верны для спектра  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-3, -2, -2, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3)$ , входящего под номером 17 в наш список. Тем самым, в силу единственности спектра  $\text{Spec } \mathcal{E}_2$  расслоения  $\mathcal{E}_2$  получаем, что наша компонента Эйна соответствует именно спектру с порядковым номером 17. Применяя формулу Барта (см. также формулу (4) статьи [2]) к монаде (2), находим размерность  $d$  этой компоненты Эйна:

$$d = d_1 - d_2 - d_3 - d_4,$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= \dim \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)) = \\ &= h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6) + h^0 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6) + h^0 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4) + h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) = 84 + 70 + 10 = 164; \\ d_2 &= \dim \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)) = h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} = 1; \\ d_3 &= h^0(\Lambda^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4))) = 0; \\ d_4 &= h^0(S^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))) = \\ &= h^0(S^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})) + h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4) + h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} + h^0 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) = \\ &= h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) + h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) + h^0 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} + h^0 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) + 35 + 1 + 20 = \\ &= 0 + 3 + 0 + 56 = 59. \end{aligned}$$

Таким образом,  $d = 164 - 1 - 0 - 59 = 104$ .

2. В случае  $c_2 = 13$  имеется 33 реализуемых спектра. Перечислим эти спектры:

- 1)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$
- 2)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1);$
- 3)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1);$
- 4)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2);$
- 5)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1);$
- 6)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2);$
- 7)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-3, -2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3);$
- 8)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1);$
- 9)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2);$
- 10)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -2, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2);$
- 11)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-3, -2, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3);$
- 12)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-4, -3, -2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4);$
- 13)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1);$
- 14)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2);$
- 15)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -2, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2);$
- 16)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-3, -2, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3);$
- 17)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -2, -2, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2);$
- 18)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-3, -2, -2, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3);$
- 19)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-4, -3, -2, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4);$
- 20)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-5, -4, -3, -2, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5);$



- 21)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1);$
- 22)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2);$
- 23)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -2, -1, -1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2);$
- 24)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-3, -2, -1, -1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 3);$
- 25)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -2, -2, -1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2);$
- 26)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-3, -2, -2, -1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3);$
- 27)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-4, -3, -2, -1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4);$
- 28)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-2, -2, -2, -2, -1, -1, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2);$
- 29)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-3, -2, -2, -2, -1, -1, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3);$
- 30)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-3, -3, -2, -2, -1, -1, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3);$
- 31)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-4, -3, -2, -2, -1, -1, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 4);$
- 32)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-5, -4, -3, -2, -1, -1, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 5);$
- 33)  $\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).$

В данном случае монада (1) имеет вид:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-7) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(7) \rightarrow 0. \quad (4)$$

Согласно теореме статьи [8]

$$h^1 \mathcal{E}_2(-1) = 28, h^1 \mathcal{E}_2(-2) = 21. \quad (5)$$

Теперь рассмотрим спектр под номером 33 из вышеуказанного списка. Снова следуя технике Барта [9], элементарным вычислением получаем, что равенства (5) верны для спектра

$$\text{Spec } \mathcal{E}_2 = (-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

входящего под номером 33 в наш список. Тем самым, в силу единственности спектра  $\text{Spec } \mathcal{E}_2$  расслоения  $\mathcal{E}_2$  получаем, что наша компонента Эйна соответствует в точности спектру с порядковым номером 33 и, ввиду утверждения (а) теоремы 3.3 статьи [6], содержит именно классы расслоений, имеющих такой спектр. Применяя упомянутую выше формулу Барта к монаде (4), находим размерность  $d$  этой компоненты Эйна:  $d = d_1 - d_2 - d_3 - d_4$ , где

$$\begin{aligned} d_1 &= \dim \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(7)) = \\ &= h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(13) + h^0 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(7) + h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) = 560 + 240 + 4 = 804; \\ d_2 &= \dim \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(7), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(7)) = h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} = 1; \\ d_3 &= h^0(\Lambda^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(7))) = 0; \\ d_4 &= h^0(S^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6))) = \\ &= h^0(S^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})) + h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(12) + h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(12) + h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} + h^0 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6) = \\ &= h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-12) + h^0 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} + h^0 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6) + 455 + 1 + 168 = \\ &= 0 + 3 + 0 + 624 = 627. \end{aligned}$$

В итоге  $d = 804 - 1 - 0 - 627 = 176$ .



### Литература

1. Hartshorne R. Algebraic vector bundles on projective spaces: a problem list // Topology. – 1979. – № 18. – С.117-128.
2. Тихомиров С.А., Ляпин А.П., Рузанов Е.А. О многообразиях модулей  $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 10)$  и  $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 11)$  стабильных 2-расслоений с классами Черна  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 10$  и 11 на комплексном проективном пространстве // Ярославский педагогический вестник. Т. III (Естественные науки). – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2012. – № 4. – С.13–18.
3. Оконе К., Шнейдер, М., Шпиндлер, Х. Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах / М: Мир, 1984. – 308 с.
4. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves // Math. Ann. – 1980. – 254. – P.121–176.
5. Hartshorne R., Rao A.P. Spectra and monads of stable bundles // J. Math. Kyoto Univ.. – 1991. – 31, № 3. – С.789–806.
6. Ein L. Generalized null correlation bundles // Nagoya Math. J. – 1988. – 111. – С.13–24.
7. Jardim M., Marchesi S. Instantons, generalized instantons and Buchbaum bundles // arXiv:1309.0447v1, [math.AG], 2 Sept. 2013, 11 p. (режим доступа: <http://arxiv.org/pdf/1309.0447.pdf>).
8. Тихомиров С.А., Ляпин А.П., Войлокова О.А. Инварианты стабильных 2-расслоений на комплексном проективном пространстве и адаптация вычислительной технологии Барта // Ярославский педагогический вестник. Т. III (Естественные науки). – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2013. – №2. – С.33–38.
9. Barth W. Some experimental data // In: les equations de Yang-Mills. A. Douady, J.-L. Verdier, eds, seminaire E.N.S. 1977–1978, Asterisque, 71–72 (1980), 205–218.

### ON STABLE 2-BUNDLES WITH CHERN CLASSES $c_1 = 0$ , $c_1 = 12$ AND $c_2 = 13$ ON COMPLEX PROJECTIVE SPACE

\*S.A. Tikhomirov, \*\*A.P. Lyapin

\*Yaroslavl State Pedagogical University named after Konstantin D.Ushinskiy,  
Respublikanskaya Str., 108, Yaroslavl, 150 000, Russia, e-mail: satikhomirov@mail.ru

\*\*Siberian Federal University,  
Svobodny Av., 79/10, Krasnoyarsk, 660 041, Russia, e-mail: LyapinAP@yandex.ru

**Abstract.** The number of Ein's components in varieties of moduli of stable 2-bundles with Chern classes  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 12$  и  $c_2 = 13$  is found, their dimensions are calculated and it is established the correspondence of this components to spectra of stable 2-bundles.

**Key words:** vector bundle, Chern classes, variety of moduli.



MSC 35G10

## О РАЗРЕШИМОСТИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ

В.Е. Фёдоров, О.А. Стахеева

Челябинский государственный университет,

ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия, e-mail: kar@csu.ru, osta@csu.ru.

**Аннотация.** Методами теории полугрупп операторов найдены условия однозначной разрешимости задачи Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения с памятью в банаховом пространстве в смысле классических решений на полуоси, а также в смысле более гладких решений на отрезке. С помощью этих результатов доказано существование единственного решения на полуоси задач Коши и Шоултера для вырожденного линейного эволюционного уравнения с памятью в банаховом пространстве. Общие результаты использованы для установления однозначной разрешимости в неограниченном по времени цилиндре начально-краевой задачи для линеаризованной интегро-дифференциальной системы уравнений Осколкова, описывающей динамику вязкоупругой жидкости.

**Ключевые слова:** эволюционное уравнение, полугруппа операторов, уравнение с памятью, интегро-дифференциальное уравнение, начально-краевая задача, система уравнений Осколкова.

**1. Введение.** В работе исследуется разрешимость задачи Коши для невырожденного линейного интегро-дифференциального уравнения

$$\dot{v}(t) = Av(t) + \int_0^t \mathcal{K}(s)v(t-s)ds + f(t) \quad (1)$$

с оператором  $A$ , порождающим в банаховом пространстве  $(C_0)$ -непрерывную полугруппу, а также разрешимость начальных задач Коши и Шоултера для вырожденного интегро-дифференциального уравнения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int_0^t \mathcal{K}(s)u(t-s)ds + f(t) \quad (2)$$

с линейными операторами  $L, M, \mathcal{K}(s)$ ,  $s \geq 0$ , действующими из банахова пространства  $\mathfrak{U}$  в банахово пространство  $\mathfrak{B}$ ,  $\ker L \neq \{0\}$ . При этом предполагается, что пара операторов  $L, M$  порождает вырожденную сильно непрерывную полугруппу операторов (т.е. выполняется условие сильной  $(L, p)$ -радиальности оператора  $M$  [1, 2]). К таким задачам редуцируются начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений в

---

Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).



частных производных, описывающих динамику некоторых процессов с эффектами памяти, например, термомеханическое поведение полимеров [4, 4], вязкоупругих жидкостей [5] и других процессов [6–9]. Вырожденность оператора  $L$  означает, что система не разрешима относительно производной по выделенной переменной, как правило, по времени.

По сравнению с работами [10, 11], в которых рассмотрено невырожденное уравнение с оператором  $A$ , порождающим аналитическую полугруппу, здесь рассмотрен более широкий класс операторов  $A$  и более общая постановка задачи, когда заданная история системы с памятью учитывается функцией  $f$  в правой части уравнения. При этом в большинстве ситуаций доказана глобальная разрешимость задачи Коши для уравнения (1), в отличие от работ [10, 11]. В [12] рассмотрены те же начальные задачи для уравнений (1), (2), что и в настоящей работе, но при более жестких условиях на оператор  $A$  (порождение аналитической полугруппы) в случае уравнения (1) или на операторы  $L, M$  (порождение вырожденной аналитической полугруппы) в случае уравнения (2). Кроме того, в работе удалось отказаться от условий на ограниченность справа спектра оператора  $A$  или  $L$ -спектра оператора  $M$ , а также от условия ограниченности оператор-функции  $\mathcal{K}$  при доказательстве существования решения на всей полуоси.

Отметим серию работ М.В. Фалалеева и С.С. Орлова [13–17], в которых исследованы интегро-дифференциальные уравнения с эффектами памяти, вообще говоря, высокого порядка, имеющие вырожденный оператор при старшей производной. В предположении фредгольмовости оператора при производной и существования полного  $M$ -жорданова набора у оператора  $L$ , либо при условии  $(L, p)$ -ограниченности оператора  $M$  (в работе [14]) доказана разрешимость задачи Коши для уравнения (2) как в смысле классических, так и в смысле обобщенных решений. Аналогичные результаты получены для уравнений высокого порядка.

Основная цель данной работы — исследовать разрешимость начальных задач для уравнения (2). Для этого в §2 сначала найдены условия однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (1), глобальной для классических решений и локальной в случае решений большей гладкости. Рассмотрен также случай, когда гладкость по выделенной переменной  $t$  заданных в уравнении функций  $\mathcal{K}, f$  заменяется условием их непрерывности в смысле нормы графика неограниченного оператора  $A$ , что в приложениях, как правило, соответствует их большей гладкости по пространственным переменным.

Далее, в §3 формулируются условия на операторы  $L$  и  $M$  в уравнении (2) и вытекающие из этих условий и используемые в дальнейшем утверждения о порождении парой этих операторов вырожденной сильно непрерывной полугруппы, о представлении пространств, в которых эти операторы действуют, в виде прямых сумм и расщеплении действий операторов вдоль этих сумм. Это позволяет перейти в §4 к рассмотрению задач Коши и Шоуолтера для вырожденного эволюционного уравнения с памятью (2). Оно сводится к системе двух уравнений на взаимно дополняющих друг друга подпространствах. При наложении некоторых дополнительных условий на образ или ядро оператор-функции из интегральной части уравнения эту систему удастся решить. При этом в одном из случаев требуется существование решения уравнения (1) повышенной





гладкости, доказанное в §2.

Наконец, в §5 результаты из предыдущего раздела используются для получения условий однозначной глобальной по времени разрешимости начально-краевой задачи для интегро-дифференциальной системы уравнений Осколкова, описывающей динамику жидкости Кельвина-Фойгта. В отличие от работы [18] рассмотрен более простой случай ядра интегрального оператора, соответствующий, тем не менее, исходной модели предложенной Осколковым [5]. При этом решение найдено не в классе слабых решений, как в работе [18], а в классическом по времени смысле.

**2. Невырожденное эволюционное уравнение с памятью.** Обозначим через  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$  банахову алгебру линейных непрерывных операторов на банаховом пространстве  $\mathfrak{X}$ , через  $\mathcal{C}l(\mathfrak{X})$  — множество линейных замкнутых операторов с плотной областью определения в  $\mathfrak{X}$ . Кроме того, через  $\rho(A)$  обозначим резольвентное множество оператора  $A$ , а через  $D_A$  — область определения оператора  $A$ , снабженную нормой его графика  $\|\cdot\|_{D_A} = \|\cdot\|_{\mathfrak{X}} + \|A \cdot\|_{\mathfrak{X}}$ .  $D_A$  является банаховым пространством в случае замкнутого оператора  $A$ .

Рассмотрим эволюционное уравнение с эффектом памяти

$$\dot{v}(t) = Av(t) + (Jv)(t).$$

Здесь интегральный оператор памяти имеет вид

$$(Jv)(t) = \int_0^\infty \mathcal{K}(s)v(t-s)ds = \int_0^t \mathcal{K}(s)v(t-s)ds + \int_0^\infty \mathcal{K}(t+s)v_-(-s)ds, \quad t \geq 0,$$

при заданных оператор-функции  $\mathcal{K} : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{X})$  и вектор-функции  $v_- : (-\infty, 0] \rightarrow \mathfrak{X}$ , описывающей «историю» системы. Обозначим

$$\int_0^\infty \mathcal{K}(t+s)v_-(-s)ds = f(t), \quad t \geq 0,$$

тогда уравнение примет вид

$$\dot{v}(t) = Av(t) + \int_0^t \mathcal{K}(s)v(t-s)ds + f(t), \quad t \geq 0. \tag{3}$$

Решением задачи для уравнения (3) на отрезке  $[0, T]$ , где  $T > 0$  с условием

$$v(0) = v_0 \tag{4}$$

назовем функцию  $v \in C^r([0, T]; \mathfrak{X}) \cap C^{r-1}([0, T]; D_A)$  при некотором  $r \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющую уравнению (3) на  $[0, T]$  и условию (4). Аналогично определяется решение задачи (3), (4) на полуоси  $[0, +\infty)$ .



**Замечание 1.** Решения, более гладкие, чем из класса  $C^1([0, T]; \mathfrak{X}) \cap C([0, T]; D_A)$ , понадобятся в следующем параграфе при рассмотрении вырожденного уравнения.

Обозначим при  $m = 0, 1$   $C_0^m([0, T]; \mathfrak{X}) = C^m([0, T]; \mathfrak{X})$ , при  $r = 2, 3, \dots$ ,

$$C_0^r([0, T]; \mathfrak{X}) = \{g \in C^r([0, T]; \mathfrak{X}) : g^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots, r-2\}.$$

Понятно, что в таком случае  $C_0^1([0, T]; \mathfrak{X}) = C^1([0, T]; \mathfrak{X})$ .

**Теорема 1.** Пусть оператор  $A$  порождает  $(C_0)$ -непрерывную полугруппу операторов,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $v_0 \in D_{A^r}$ ,  $\mathcal{K} \in C_0^{r-1}([0, T_1]; \mathcal{L}(\mathfrak{X}))$ ,  $f \in C_0^r([0, T_1]; \mathfrak{X})$ . Тогда при некотором  $T \in (0, T_1]$  существует единственное решение  $v \in C^r([0, T]; \mathfrak{X}) \cap C^{r-1}([0, T]; D_A)$  задачи (3), (4).

□ Для операторов  $V(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$  полугруппы, порождаемой оператором  $A$ , при некоторых  $C \geq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$  выполняются неравенства [19]

$$\|V(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leq Ce^{at}, \quad t \geq 0.$$

Поэтому

$$\max_{t \in [0, T]} \|V(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leq C(T) \equiv \begin{cases} Ce^{aT}, & a > 0; \\ C, & a \leq 0. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$K_k(T) = \sum_{l=0}^k \sup_{s \in [0, T]} \|\mathcal{K}^{(l)}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}, \quad \|g\|_k = \sum_{l=0}^k \sup_{t \in [0, T]} \|g^{(l)}(t)\|_{\mathfrak{X}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

для  $\mathcal{K} \in C^k([0, T]; \mathcal{L}(\mathfrak{X}))$ ,  $g \in C^k([0, T]; \mathfrak{X})$ . На полуоси  $[0, +\infty)$  рассмотрим числовую функцию  $F(T) = T(1+T/2)C(T)K_0(T)$ . Она непрерывна, неотрицательна, строго монотонно возрастает, неограничена (кроме тривиального случая  $\mathcal{K} \equiv 0$ , который исключается из дальнейших рассмотрений) и  $F(0) = 0$ . Следовательно, найдется единственное число  $T_0 > 0$ , такое, что  $F(T_0) = 1$ ,  $F(T) < 1$  при любом  $T \in (0, T_0)$ .

Выберем  $T \in (0, T_0)$ ,  $T \leq T_1$ , и рассмотрим уравнение

$$\dot{v}(t) = Av(t) + g(t). \quad (5)$$

При  $v_0 \in D_{A^r}$ ,  $g \in C_0^r([0, T]; \mathfrak{X})$  решение  $v \in C^r([0, T]; \mathfrak{X}) \cap C^{r-1}([0, T]; D_A)$  задачи (4) для уравнения (5) существует, единственно и имеет вид

$$v(t) = V(t)v_0 + \int_0^t V(t-s)g(s)ds, \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

где  $\{V(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) : t \geq 0\}$  — порождаемая оператором  $A$  полугруппа операторов (см. [19]). Действительно,

$$v^{(r)}(t) = V(t)A^r v_0 + V(t)g^{(r-1)}(0) + \int_0^t V(t-s)g^{(r)}(s)ds.$$



Определим на  $C_0^r([0, T]; \mathfrak{X})$  оператор

$$\begin{aligned}
 [\Phi g](t) &= \int_0^t \mathcal{K}(s)v(t-s)ds + f(t) = \\
 &= \int_0^t \mathcal{K}(s)V(t-s)v_0ds + \int_0^t \mathcal{K}(s) \int_0^{t-s} V(t-s-\tau)g(\tau)d\tau ds + f(t),
 \end{aligned} \tag{7}$$

где функция  $v$  является решением задачи (4) для уравнения (5) с данной функцией  $g$  в правой части. Имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_0^t \mathcal{K}(s)V(t-s)v_0ds &= \mathcal{K}(t)v_0 + \int_0^t \mathcal{K}(s)V(t-s)Av_0ds, \\
 \frac{d}{dt} \int_0^t \mathcal{K}(s) \int_0^{t-s} V(t-s-\tau)g(\tau)d\tau ds &= \\
 &= \int_0^t \mathcal{K}(s)g(t-s)ds - \int_0^t \mathcal{K}(s) \int_0^{t-s} \frac{d}{d\tau} V(t-s-\tau)g(\tau)d\tau ds = \\
 &= \int_0^t \mathcal{K}(s)V(t-s)g(0)ds + \int_0^t \mathcal{K}(s) \int_0^{t-s} V(t-s-\tau)\dot{g}(\tau)d\tau ds = \\
 &= \int_0^t \mathcal{K}(s) \int_0^{t-s} V(t-s-\tau)\dot{g}(\tau)d\tau ds.
 \end{aligned}$$

Докажем при  $n < r$  равенство

$$\begin{aligned}
 [\Phi g]^{(n)}(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{K}^{(k)}(t)A^{n-1-k}v_0 + \int_0^t \mathcal{K}(s)V(t-s)A^n v_0 ds + \\
 &+ \int_0^t \mathcal{K}(s) \int_0^{t-s} V(t-s-\tau)g^{(n)}(\tau)d\tau ds + f^{(n)}(t).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Продифференцируем при  $n < r - 1$  правую часть этого равенства и получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{K}^{(k+1)}(t)A^{n-1-k}v_0 + \mathcal{K}(t)A^n v_0 + \int_0^t \mathcal{K}(s)V(t-s)A^{n+1}v_0 ds +$$



$$\begin{aligned}
 & + \int_0^t \mathcal{K}(s) \int_0^{t-s} V(t-s-\tau) g^{(n+1)}(\tau) d\tau ds + f^{(n+1)}(t) = \\
 & = \sum_{k=0}^n \mathcal{K}^{(k)}(t) A^{n-k} v_0 + \int_0^t \mathcal{K}(s) V(t-s) A^{n+1} v_0 ds + \\
 & + \int_0^t \mathcal{K}(s) \int_0^{t-s} V(t-s-\tau) g^{(n+1)}(\tau) d\tau ds + f^{(n+1)}(t).
 \end{aligned}$$

Тем самым, формула (8) доказана. В случае  $n = r$  в правой части формулы (8) добавится еще выражение  $\int_0^t \mathcal{K}(s) V(t-s) g^{(r-1)}(0) ds$ . Следовательно,

$$\|\Phi g\|_r \leq (rK_{r-1}(T) + TC(T)K_0(T)) \sum_{k=0}^n \|A^k v_0\|_{\mathfrak{X}} + T(1 + T/2)C(T)K_0(T)\|g\|_r + \|f\|_r.$$

Поэтому имеет место действие оператора  $\Phi : C_0^r([0, T]; \mathfrak{X}) \rightarrow C_0^r([0, T]; \mathfrak{X})$  в силу условий теоремы на  $\mathcal{K}$  и  $f$ .

Для произвольных функций  $g_1, g_2 \in C_0^r([0, T]; \mathfrak{X})$

$$\|\Phi g_1 - \Phi g_2\|_{\mathfrak{X}} \leq T(1 + T/2)C(T)K_0(T)\|g_1 - g_2\|_r = F(T)\|g_1 - g_2\|_r,$$

где  $F(T) < 1$  при выбранном  $T > 0$ . Таким образом, на полном метрическом пространстве  $C_0^r([0, T]; \mathfrak{X})$  оператор  $\Phi$  является сжимающим. По теореме о сжимающем отображении найдется единственный элемент  $g_1 \in C_0^r([0, T]; \mathfrak{X})$ , такой, что  $g_1 = \Phi g_1$ . В этом случае функция

$$v(t) = V(t)v_0 + \int_0^t V(t-s)g_1(s)ds$$

из класса  $C^r([0, T]; \mathfrak{X}) \cap C^{r-1}([0, T]; D_A)$  является одновременно решением задач (3), (4) и (4), (5), так как  $\dot{v}(t) - Av(t) = g_1(t) = [\Phi g_1](t)$ .

Если  $v_1, v_2$  — два решения задачи (3), (4) на некотором отрезке  $[0, T]$ ,  $T < T_0$ , то функции

$$g_i(t) = \int_0^t \mathcal{K}(s)v_i(t-s)ds + f(t), \quad i = 1, 2,$$

являются неподвижными точками оператора  $\Phi$ , лежащими в  $C_0^r([0, T]; \mathfrak{X})$ . Поэтому  $g_1 \equiv g_2$  и при каждом  $t \in [0, T]$

$$\dot{w}(t) - Aw(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad w(0) = 0,$$

где  $w(s) = v_1(s) - v_2(s)$ . Отсюда следует совпадение  $v_1$  и  $v_2$  на  $[0, T]$  и единственность решения задачи (3), (4). ■



В случае  $r = 1$  можно доказать однозначную разрешимость задачи (3), (4) на всей полуоси  $[0, +\infty)$ .

**Теорема 2.** Пусть оператор  $A$  порождает  $(C_0)$ -непрерывную полугруппу операторов,  $v_0 \in D_A$ ,  $\mathcal{K} \in C([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathfrak{X}))$ ,  $f \in C^1([0, +\infty); \mathfrak{X})$ . Тогда существует единственное решение  $v \in C^1([0, +\infty); \mathfrak{X}) \cap C([0, +\infty); D_A)$  задачи (3), (4).

□ При  $r = 1$  из прежней теоремы получаем решение  $v \in C^1([0, T]; \mathfrak{X}) \cap C([0, T]; D_A)$  задачи (3), (4). Нетрудно заметить, что в проведенном доказательстве теоремы 1 ограничения на  $T_0$  определяются только оператором  $A$  и оператор-функцией  $\mathcal{K}$  и не зависят от  $v_0 \in D_A$ . Рассмотрим уравнение

$$\dot{v}(T+t) = Av(T+t) + \int_0^{T+t} \mathcal{K}(s)v(T+t-s)ds + f(T+t),$$

при фиксированном ранее  $T \in (0, T_0)$  и  $t \geq 0$ . Сделаем замену  $v_1(t) = v(T+t)$  и получим задачу Коши

$$\dot{v}_1(t) = Av_1(t) + \int_0^t \mathcal{K}(s)v_1(t-s)ds + f_1(t), \quad v_1(0) = v(T), \quad (9)$$

где функция

$$f_1(t) = f(T+t) + \int_t^{T+t} K(s)v(T+t-s)ds,$$

как нетрудно заметить, уже определена и принадлежит пространству  $C^1([0, T]; \mathfrak{X})$ . Повторив рассуждения, докажем существование единственного решения задачи (9) на отрезке  $[0, T]$ , а значит, и решения исходной задачи на отрезке  $[0, 2T]$ . Повторяя процесс, получим решение этой задачи в любой момент времени  $t \geq 0$ . ■

Докажем в некотором смысле смежное к теореме 2 утверждение.

**Теорема 3.** Пусть оператор  $A$  порождает  $(C_0)$ -непрерывную полугруппу операторов,  $v_0 \in D_A$ ,  $\text{im } \mathcal{K}(s) \subset D_A$  при  $s \geq 0$ ,  $\mathcal{K} \in C([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathfrak{X}; D_A))$ ,  $f \in C([0, +\infty); D_A)$ . Тогда существует единственное решение задачи (3), (4) на полуоси  $[0, +\infty)$ .

□ Обозначим

$$\sup_{s \in [0, T]} \|\mathcal{K}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}; D_A)} \equiv \sup_{s \in [0, T]} (\|\mathcal{K}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} + \|A\mathcal{K}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}) \equiv K_A(T),$$

$F_A(T) = C(T)K_A(T)T^2/2$ . Как и при доказательстве теоремы 1, определим  $T_0 = F_A^{-1}(1)$ , тогда  $F(T) < 1$  при  $T \in (0, T_0)$ .

Зафиксируем  $T \in (0, T_0)$ . Для  $g \in C([0, T]; D_A)$ , решение  $v \in C^1([0, T]; \mathfrak{X}) \cap C([0, T]; D_A)$  задачи (4), (5) существует, единственно и имеет вид (6). Зададим на  $C([0, T]; D_A)$  оператор (7). Тогда

$$[A\Phi g](t) = \int_0^t A\mathcal{K}(s)V(t-s)v_0 ds + \int_0^t A\mathcal{K}(s) \int_0^{t-s} V(t-s-\tau)g(\tau)d\tau ds + Af(t),$$



$$\|\Phi g\|_{C([0,T];D_A)} \leq TC(T)K_A(T)\|v_0\|_{\mathfrak{X}} + \frac{T^2}{2}C(T)K_A(T)\|g\|_0 + \|f\|_{C([0,T];D_A)},$$

поэтому  $\Phi : C([0, T]; D_A) \rightarrow C([0, T]; D_A)$ .

Для  $g_1, g_2 \in C([0, T]; D_A)$  имеем

$$\|\Phi g_1 - \Phi g_2\|_{C([0,T];D_A)} \leq \frac{T^2}{2}C(T)K_A(T)\|g_1 - g_2\|_{C([0,T];D_A)} = F_A(T)\|g_1 - g_2\|_{C([0,T];D_A)}.$$

Поскольку  $F_A(T) < 1$  при выбранном  $T$ , то на полном метрическом пространстве  $C([0, T]; D_A)$  оператор  $\Phi$  является сжимающим. По теореме о сжимающем отображении существует единственная неподвижная точка  $g_1 \in C([0, T]; D_A)$  оператора  $\Phi$ . Следовательно, функция

$$v(t) = V(t)v_0 + \int_0^t V(t-s)g_1(s)ds$$

является решением задач (3), (4) и (4), (5). Единственность решения и его продолжительность на всю полуось  $[0, +\infty)$  доказываются так же, как в теоремах 1 и 2 соответственно. ■

**3. Условия на операторы в вырожденном уравнении.** Сформулируем условия на операторы, которые будут использованы в дальнейшем, и соответствующие им утверждения, которые доказаны ранее в [1, 2].

Пусть  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{V}$  — банаховы пространства, оператор  $L : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$  линеен и непрерывен (для краткости обозначим  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ ), а оператор  $M : D_M \rightarrow \mathfrak{V}$  линеен, замкнут и плотно определен в  $\mathfrak{U}$  (коротко,  $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ ). Введем обозначения

$$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad \rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})\},$$

$$\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M), \quad R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L_\mu^L = L(\mu L - M)^{-1}.$$

Пусть  $p \in \mathbb{N}_0$ . Оператор  $M$  называется *сильно  $(L, p)$ -радиальным*, если

- (i)  $\exists a \in \mathbb{R} (a, +\infty) \subset \rho^L(M)$ ;
- (ii)  $\exists K \in \mathbb{R}_+ \forall \mu \in (a, +\infty) \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R_\mu^L(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L_\mu^L(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})}\} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

- (iii) существует плотный в  $\mathfrak{V}$  линейал  $\mathfrak{V}^\circ$ , такой, что при любом  $\mu \in (a, +\infty)$

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L_\mu^L(M))^{p+1}f\|_{\mathfrak{V}} \leq \frac{c(f)}{(\mu - a)^{p+2}} \quad \forall f \in \mathfrak{V}^\circ;$$

$$\|(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}.$$

Здесь  $c(f)$  — константа, зависящая от выбора элемента  $f$ .



**Замечание 2.** Эквивалентность условий данного определения аналогичным более сложным условиям, использованным в [1, 2], доказана в [20].

Положим  $\mathfrak{U}^0 = \ker(R_\mu^L(M))^{p+1}$ ,  $\mathfrak{V}^0 = \ker(L_\mu^L(M))^{p+1}$ ;  $\mathfrak{U}^1$  – замыкание образа оператора  $\text{im}(R_\mu^L(M))^{p+1}$  в пространстве  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{V}^1$  – замыкание образа  $\text{im}(L_\mu^L(M))^{p+1}$  в пространстве  $\mathfrak{V}$ . Обозначим через  $L_k$  ( $M_k$ ) сужение оператора  $L$  ( $M$ ) на  $\mathfrak{U}^k$  ( $D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{U}^k$ ),  $k = 0, 1$ .

**Теорема 4** [1, 2]. Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален. Тогда

- (i)  $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ ,  $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$ ;
- (ii)  $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{V}^k)$ ,  $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{V}^k)$ ,  $k = 0, 1$ ;
- (iii) существуют операторы  $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0; \mathfrak{U}^0)$  и  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$ ;
- (iv) оператор  $H = M_0^{-1}L_0$  нильпотентен степени не больше  $p$ ;
- (v) существует сильно непрерывная полугруппа  $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \geq 0\}$ , разрешающая уравнение  $L\dot{u}(t) = Mu(t)$ ;
- (vi) оператор  $L_1^{-1}M_1$  порождает  $(C_0)$ -непрерывную полугруппу операторов  $\{U_1(t) \equiv U(t)|_{\mathfrak{U}^1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1) : t \geq 0\}$ .

**Замечание 3.** В случае  $\ker L \neq \{0\}$  единицей  $U(0)$  разрешающей полугруппы уравнения  $L\dot{u}(t) = Mu(t)$  является нетривиальный проектор, при этом  $\ker L \subset \ker U(0) = \mathfrak{U}^0$ ,  $\text{im } U(0) = \mathfrak{U}^1$ .

Обозначим  $P = U(0)$ ,  $Q$  – проектор на подпространство  $\mathfrak{V}^1$  вдоль подпространства  $\mathfrak{V}^0$ ,  $P_0 = I - P$ ,  $Q_0 = I - Q$ .

**Замечание 4.** При доказательстве утверждения (ii) теоремы 4 существенную роль играют равенства  $MPu = QMu$ ,  $u \in D_M$ , и  $LP = QL$ . Они в дальнейшем также потребуются в явном виде.

**4. Вырожденное эволюционное уравнение с памятью.** Рассмотрим начальные задачи Коши

$$u(0) - u_0 = 0 \tag{10}$$

и Шоултера

$$P(u(0) - u_0) = 0 \tag{11}$$

для вырожденного эволюционного уравнения с памятью

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int_0^t \mathcal{K}(s)u(t-s)ds + f(t), \tag{12}$$

где  $\{\mathcal{K}(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V}) : t \geq 0\}$  – заданное семейство оператор-функций.

Решением задачи (10), (12) (задачи (11), (12)) на отрезке  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , называется функция  $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; D_M)$ , удовлетворяющая условию (10) (условию (11)) и уравнению (12) на  $[0, T]$ . Аналогично определяется решение на полуоси.

Здесь подразумевается, что область определения  $D_M$  снабжена нормой графика  $\|\cdot\|_{D_M} = \|\cdot\|_{\mathfrak{U}} + \|M \cdot\|_{\mathfrak{V}}$  замкнутого оператора  $M$  и поэтому является банаховым пространством.



Пусть  $\ker L \neq \{0\}$ , оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален. Подействуем на обе части уравнения (12) непрерывным оператором  $L_1^{-1}Q$  и получим в силу теоремы 4 и замечания 4 уравнение

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1v(t) + \int_0^t L_1^{-1}Q\mathcal{K}(s)v(t-s)ds + \int_0^t L_1^{-1}Q\mathcal{K}(s)w(t-s)ds + L_1^{-1}Qf(t), \quad (13)$$

где  $Pu(t) = v(t)$ ,  $P_0u(t) = w(t)$ ,  $u(t) = v(t) + w(t)$ . Если же на уравнение (12) подействовать непрерывным оператором  $M_0^{-1}Q_0$ , то получим

$$H\dot{w}(t) = w(t) + \int_0^t M_0^{-1}Q_0\mathcal{K}(s)w(t-s)ds + \int_0^t M_0^{-1}Q_0\mathcal{K}(s)v(t-s)ds + M_0^{-1}Q_0f(t). \quad (14)$$

Таким образом, уравнение (12) сводится к системе уравнений (13) и (14).

Рассмотрим случаи, когда второе слагаемое в правой части равенства (14) тождественно равно нулю. Например, используя условие  $\text{im } \mathcal{K}(t) \subset \mathfrak{Y}^1$  при  $t \geq 0$ , нетрудно получить следующий результат.

**Теорема 5.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален,  $\text{im } \mathcal{K}(t) \subset \mathfrak{Y}^1$  для всех  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{K} \in C([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y}))$ ,  $f \in C^1([0, +\infty); \mathfrak{Y})$ ,  $Q_0f \in C^{p+1}([0, +\infty); \mathfrak{Y})$ ,  $u_0 \in D_M$ . Тогда решение задачи (11), (12) существует и единственно на всей полуоси  $[0, +\infty)$ . Если к тому же выполняется условие

$$P_0u_0 = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(Q_0f)^{(k)}(0), \quad (15)$$

то существует единственное на полуоси  $[0, +\infty)$  решение задачи (10), (12).

□ Если  $\text{im } \mathcal{K}(t) \subset \mathfrak{Y}^1$ , то  $Q_0\mathcal{K}(t) \equiv 0$ . В этом случае уравнение (14) принимает вид  $H\dot{w}(t) = w(t) + M_0^{-1}Q_0f(t)$  и, следовательно, имеет единственное решение

$$w = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(Q_0f)^{(k)} \in C^1([0, +\infty); \mathfrak{U}) \cap C([0, +\infty); D_M)$$

в силу нильпотентности оператора  $H$ . При этом задача  $w(0) = P_0u_0$  для уравнения (14), а значит, и задача (10) для уравнения (12), имеет решение только в случае выполнения условия (15).

Таким образом, задача (10), (12) (или (11), (12)) сведена к задаче Коши для уравнения

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1v(t) + \int_0^t L_1^{-1}Q\mathcal{K}(s)v(t-s)ds + h(t),$$

где  $h(t) = \int_0^t L_1^{-1}Q\mathcal{K}(s)w(t-s)ds + L_1^{-1}Qf(t)$  принадлежит пространству  $C^1([0, +\infty); \mathfrak{U}^1)$ .

Используя теорему 4, нетрудно убедиться, что выполняются все условия теоремы 2 о разрешимости такой задачи. ■





**Замечание 5.** Таким образом, задача Коши для вырожденного эволюционного уравнения (12) является переопределенной в том смысле, что для ее разрешимости требуется выполнение условия (15) согласования данных задачи.

Аналогичный результат нетрудно получить с использованием теоремы 3 вместо теоремы 2 на последнем этапе доказательства.

**Теорема 6.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален, для всех  $t \geq 0$   $\text{im } \mathcal{K}(t) \subset D_{M_1 L_1^{-1}}$ ,  $\mathcal{K} \in C([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathfrak{U}; D_{M_1 L_1^{-1}}))$ ,  $Qf \in C([0, +\infty); D_{M_1 L_1^{-1}})$ ,  $Q_0 f \in C^{p+1}([0, +\infty); \mathfrak{Y})$ ,  $u_0 \in D_M$ . Тогда решение задачи (11), (12) существует и единственно на всей полуоси  $[0, +\infty)$ . Если к тому же выполняется условие (15), то существует единственное на полуоси  $[0, +\infty)$  решение задачи (10), (12).

Рассмотрим теперь случай  $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(t)$  при  $t \geq 0$ .

**Теорема 7.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, 0)$ -радиален,  $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(t)$  для всех  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{K} \in C([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y}))$ ,  $f \in C^1([0, +\infty); \mathfrak{Y})$ ,  $u_0 \in D_M$ . Тогда решение задачи (11), (12) существует и единственно на всей полуоси  $[0, +\infty)$ . Если к тому же выполняется условие

$$P_0 u_0 = -M_0^{-1} Q_0 f(0), \tag{16}$$

то существует единственное на полуоси  $[0, +\infty)$  решение задачи (10), (12).

□ В случае, когда  $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(t)$ , система (13), (14) принимает вид

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1} M_1 v(t) + \int_0^t L_1^{-1} Q \mathcal{K}(s) v(t-s) ds + L_1^{-1} Q f(t), \tag{17}$$

$$H \dot{w}(t) = w(t) + \int_0^t M_0^{-1} Q_0 \mathcal{K}(s) v(t-s) ds + M_0^{-1} Q_0 f(t). \tag{18}$$

Однозначная разрешимость задачи Коши  $v(0) = P u_0$  для уравнения (17) следует из теорем 2 и 4. Подставим найденную функцию  $v$  в уравнение (18). При  $p = 0$  оператор  $H = 0$  по теореме 4 (iv), поэтому функция

$$w(t) = - \int_0^t M_0^{-1} Q_0 \mathcal{K}(s) v(t-s) ds - M_0^{-1} Q_0 f(t)$$

является решением уравнения (18). Условие (16), тогда является необходимым для разрешимости задачи Коши  $w(0) = P_0 u_0$  для уравнения (18). ■

С помощью теоремы 3 аналогичным образом получим утверждение.

**Теорема 8.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, 0)$ -радиален,  $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(t)$  для всех  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{K} \in C([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y}))$ ,  $Q \mathcal{K} \in C([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathfrak{U}; D_{M_1 L_1^{-1}}))$ ,  $Q_0 f \in C^1([0, +\infty); \mathfrak{Y})$ ,  $Q f \in C([0, +\infty); D_{M_1 L_1^{-1}})$ ,  $u_0 \in D_M$ . Тогда решение задачи (11), (12) существует и единственно на всей полуоси  $[0, +\infty)$ . Если к тому же выполняется условие (16), то существует единственное на полуоси  $[0, +\infty)$  решение задачи (10), (12).



При произвольном  $p \in \mathbb{N}$ , используя теорему 1, докажем лишь локальную разрешимость рассматриваемых задач.

**Теорема 9.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален,  $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(t)$  для всех  $t \in [0, T_1]$ ,  $\mathcal{K} \in C([0, T_1]; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V}))$ ,  $Q\mathcal{K} \in C_0^p([0, T_1]; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V}))$ ,  $f \in C^1([0, T_1]; \mathfrak{V})$ ,  $Qf \in C_0^{p+1}([0, T_1]; \mathfrak{V})$ ,  $u_0 \in D_M$ ,  $Pu_0 \in D_{(L_1^{-1}M_1)^{p+1}}$ . Тогда при некотором  $T \in (0, T_1]$  решение задачи (11), (12) существует и единственно на отрезке  $[0, T]$ . Если к тому же выполняется условие (15), то существует единственное на полуоси  $[0, +\infty)$  решение задачи (10), (12).

□ По теореме 1 получим существование единственного решения  $v \in C^{p+1}([0, T]; \mathfrak{U}^1) \cap C^p([0, T]; D_{M_1})$  задачи Коши  $v(0) = Pu_0$  для уравнения (17). Подставив его в уравнение (18), найдем решение  $w(t) = -\sum_{k=0}^p H^k h^{(k)}(t)$  класса  $C^1([0, T]; \mathfrak{U}^0)$ , где функция  $h(t) = \int_0^t M_0^{-1} Q_0 \mathcal{K}(s) v(t-s) ds + M_0^{-1} Q_0 f(t)$  имеет необходимую гладкость. ■

**5. Линеаризованная интегро-дифференциальная модель Осколкова.** Рассмотрим начально-краевую задачу для интегро-дифференциальной системы уравнений Осколкова

$$(1 - \chi \Delta) v_t(x, t) = \nu \Delta v(x, t) - (\tilde{v} \cdot \nabla) v(x, t) - (v \cdot \nabla) \tilde{v}(x, t) - r(x, t) + \int_0^t K(s) \Delta v(x, t-s) ds + h(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, +\infty), \quad (19)$$

$$\nabla \cdot v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, +\infty), \quad (20)$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, +\infty), \quad (21)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (22)$$

Здесь  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ ,  $T > 0$ . Параметр  $\chi > 0$  характеризует упругие свойства жидкости, а параметр  $\nu > 0$  — её вязкие свойства. Вектор-функции  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  (вектор скорости жидкости) и  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  (градиент давления) неизвестны. Вектор-функция  $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n)$ ,  $\tilde{v}_k = \tilde{v}_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , задана и означает стационарное решение исходной системы. Также заданы функции  $N : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \Omega \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Эта система моделирует в линейном приближении динамику вязкоупругой несжимаемой жидкости [5] в окрестности стационарного решения  $\tilde{v}$ .

Редуцируем задачу (19)–(22) к задаче Шоултера (11) для уравнения (12). Для этого введем обозначения  $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$ ,  $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^n$ ,  $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$ . Замыкание множества  $\mathcal{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot v = 0\}$  по норме  $\mathbb{L}_2$  обозначим через  $\mathbb{H}_\sigma$ , а по норме  $\mathbb{H}^1$  — через  $\mathbb{H}_\sigma^1$ . Будем использовать также обозначение  $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$ . Обозначим через  $\mathbb{H}_\pi$  ортогональное дополнение к  $\mathbb{H}_\sigma$  в  $\mathbb{L}_2$ , через  $\Sigma : \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{H}_\sigma$ ,  $\Pi = I - \Sigma$  — соответствующие ортопроекторы.



В пространстве  $\mathcal{L}$  рассмотрим оператор  $A = \Sigma\Delta$ , который, будучи продолженным до замкнутого оператора в пространстве  $\mathbb{H}_\sigma$  с областью определения  $\mathbb{H}_\sigma^2$ , имеет вещественный, отрицательный, дискретный, конечнократный спектр, сгущающийся только на  $-\infty$  [21]. Обозначим через  $\{\lambda_k\}$  его собственные значения, занумерованные по невозрастанию с учетом кратности, а через  $\{\varphi_k\}$  — ортонормированную систему соответствующих собственных функций, образующую базис в  $\mathbb{H}_\sigma$ .

Пусть  $\tilde{v} \in \mathbb{H}^1$ . Тогда формулой  $Dw = \nu\Delta w - (\tilde{v} \cdot \nabla)w - (w \cdot \nabla)\tilde{v}$  зададим оператор  $D \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^2; \mathbb{L}_2)$ .

Учитывая уравнение несжимаемости (20), положим

$$\mathfrak{U} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathfrak{V} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi. \quad (23)$$

Таким образом, элемент  $u \in \mathfrak{U}$  имеет вид  $u = (v, r)$ , а элемент  $w \in \mathfrak{V}$  — вид  $w = (y, z)$ , где  $y = \Sigma w$ ,  $z = \Pi w$ . Формулой

$$L = \begin{pmatrix} I - \chi A & \mathbb{O} \\ -\chi \Pi \Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix} \quad (24)$$

определяется оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ . Учитывая отрицательность спектра  $\sigma(A)$ , имеем  $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$ , поэтому  $\ker L = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$ . При заданном  $\tilde{v} \in \mathbb{H}^1$  формулой

$$M = \begin{pmatrix} \Sigma D & \mathbb{O} \\ \Pi D & -I \end{pmatrix} \quad (25)$$

определяется оператор  $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ .

**Теорема 10** [22]. Пусть пространства  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{V}$  определены равенствами (23), а операторы  $L$  и  $M$  — равенствами (24) и (25) соответственно,  $\chi \neq 0$ ,  $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$ . Тогда оператор  $M$  сильно  $(L, 0)$ -радиален, при этом

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \chi \Pi \Delta (I - \chi A)^{-1} \Sigma D + \Pi D & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ -\chi \Pi \Delta (I - \chi A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 10 следует, что  $\mathfrak{U}^0 = \ker P = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$ . При  $s \geq 0$  определим операторы  $\mathcal{K}(s) : \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi \rightarrow \mathbb{L}_2$ ,  $\mathcal{K}(s)(v, r) = N(s)\Delta v$ . Очевидно, что  $\mathfrak{U}^0 \subset \mathcal{K}(s)$  при всех  $s \geq 0$ , поэтому с помощью теорем 10 и 7 получим следующее утверждение.

**Теорема 11.** Пусть  $N \in C([0, +\infty); \mathbb{R})$ ,  $h \in C^1([0, +\infty); \mathbb{L}_2)$ ,  $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma^2$ . Тогда решение задачи (19)–(22) существует и единственно.

□ Из условий на функцию  $N$  и построения операторов  $\mathcal{K}(s)$  следует, что  $\mathcal{K} \in C([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V}))$ . Из вида полученного в теореме 10 проектора  $P$  следует, что условие (22) эквивалентно условию Шоултера (11). ■

**6. Заключение.** В работе получены теоремы существования и единственности решения начальных задач для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с эффектами памяти. Для невырожденных уравнений такого рода получены условия глобальной однозначной разрешимости задачи Коши в смысле классических решений и



локальной ее разрешимости в классах решений повышенной гладкости. Для эволюционных уравнений с вырожденным оператором при производной исследована однозначная разрешимость начальных задач Коши и Шоултера. Полученные абстрактные результаты использованы для исследования глобальной по времени разрешимости начально-краевой задачи для системы уравнений Осколкова, описывающей динамику вязкоупругой жидкости. Аналогичным образом можно использовать полученные результаты при рассмотрении других начально-краевых задач для интегро-дифференциальных систем уравнений в частных производных

### Литература

1. Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12, вып. 3. – С. 173-200.
2. Свиридчук Г.А., Федоров В.Е. Линейные уравнения соболевского типа / Челябинск: Челябин. гос. ун-т, 2003. – 179 с.
3. Coleman B.D., Gurtin M. E., Angew. Z. Equipresence and constitutive equations for rigid heat conductors // Math. Phys. – 1967. – Vol. 18. – P. 199-208.
4. Gurtin M.E., Pipkin A.C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. Rational Mech. Anal. – 1968. – Vol. 31. – P. 113-126.
5. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – Т. 179. – С. 126-164.
6. Giorgi C., Marzocchi A. Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory // Nonlinear Differ. Equ. Appl. – 1998. – Vol. 5. – P. 333-354.
7. Grasselli M., Pata V. Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory. In the book: Progress in nonlinear differential equations and their applications / Basel: Birkhäuser Verlag, 2002. – Vol. 50. – P. 155-178.
8. Gatti S., Grasselli M., Pata V., Squassina M. Robust exponential attractors for a family of nonconserved phase-field systems with memory // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2005. – 12, №5. – P. 1019-1029.
9. Grasselli M., Squassina M. Exponential stability and singular limit for a linear thermoelastic plate with memory effects // Advances in Mathematical Sciences and Applications. – 2006. – 16, №1. – P. 15-31.
10. Федоров В.Е., Стахеева О.А. О локальной разрешимости линейных эволюционных уравнений с памятью // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2008. – 27 (127); 2. – С. 104-109.
11. Стахеева О.А. Локальная разрешимость одного класса линейных уравнений с памятью // Вестник Челябинского гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – 20 (158); 11. – С. 70-76.
12. Федоров В.Е., Стахеева А.В. О разрешимости линейных уравнений соболевского типа с эффектом памяти // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ / Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2010. – С.245-261.
13. Орлов С.С. Вырожденное интегро-дифференциальное уравнение в банаховых пространствах и его приложения // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – 3, №1. – С. 54-60.
14. Фалалеев М.В., Орлов С.С. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2011. – 4 (211); 7. – С. 100-110.
15. Фалалеев М.В., Орлов С.С. Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложения в математической теории упругости // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – 4, №1. – С. 118-134.



16. Фалалеев М.В., Орлов С.С. Вырожденные интегро-дифференциальные операторы в банаховых пространствах и их приложения // Изв. вузов. – 2011. – №10. – С. 68-79.
17. Фалалеев М. В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – 5, №1. – С. 90-102.
18. Звягин В.Г., Турбин М.В. Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина-Фойгта // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2009. – 31. – С. 3-144.
19. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы / М.: Иностр. лит., 1962. – 830 с.
20. Федоров В.Е. Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов // Вестник. Челябин. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – 20 (158); 11. – С. 12-19.
21. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / М.: Физматлит, 1961. – 204 с.
22. Иванова Н.Д., Федоров В.Е., Комарова К.М. Нелинейная обратная задача для системы Осколкова, линеаризованной в окрестности стационарного решения // Вестник Челябин. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – 26 (280); 15. – С.49-70.

## ON SOLVABILITY OF EVOLUTION EQUATIONS WITH MEMORY

V.E. Fedorov, O.A. Stakheeva

Chelyabinsk State University,

Kashirin Brothers St., 129, Chelyabinsk, 454001, Russia, e-mail: kar@csu.ru, osta@csu.ru.

**Abstract.** Conditions of unique solvability of the Cauchy problem to a linear integro-differential equation with memory in a Banach space are found by methods of the operator semigroup theory. Solutions are supposed in the classical sense. They are defined on the temporal semiaxis and in the sense of smoother solutions on a segment. These results are used at the proof of unique solution existence both the Cauchy problem on semiaxis and the Showalter problem to a degenerate linear evolution equation with memory in a Banach space. General results are applied to research of unique solvability of an initial-boundary value problem in an cylinder unbounded with respect to time for the linearized integro-differential Oskolkov system of equations describing dynamics of viscoelastic fluid.

**Ключевые слова:** evolution equation, operator semigroup, equation with memory, integro-differential equation, initial boundary value problem, Oskolkov's equations system.



MSC 37J05

## О ЧИСЛЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ТИПОВ ОБРАТИМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин

Белгородский государственный университет,  
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: [virch@bsu.edu.ru](mailto:virch@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Вводится понятие спектрального типа для обратимых динамических систем четной размерности, изучение которых начато в предыдущих работах авторов. Задача о перечислении этих спектральных типов сводится к перечислению спектральных типов матриц четной размерности, которые обладают «симметричным» спектральным разложением. Ставится комбинаторная задача о вычислении числа  $\bar{N}_{2n}$  спектральных типов таких матриц размерности  $2n$  и дается ее решение в терминах производящей функции.

**Ключевые слова:** обратимые динамические системы, касательная динамическая система, спектральный тип матрицы, производящая функция.

**1. Введение.** Пусть  $\mathfrak{M}_n$  линейное многообразие  $\mathfrak{M}_n$  квадратных матриц фиксированного порядка  $n \in \mathbb{N}$ . Каждая матрица  $A \in \mathfrak{M}_n$  характеризуется набором  $\mathbf{n} = \langle n_1, n_2, n_3, \dots \rangle$ , в котором  $n_j \in \mathbb{N}_+$ ,  $j \in \mathbb{N}$  и  $n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots = n \equiv |\mathbf{n}|$ . Этот набор определяет структуру ее спектрального (канонического треугольного жорданова) представления (см., например, [1])

$$A = \bigoplus_{j=1}^s \bigoplus_{k=1}^{n_j} (\lambda_{j,k} J_j + N_j), \quad (1)$$

где  $J_j$  – единичные матрицы порядка  $j$ ,  $\lambda_{j,k}$  – собственные числа (возможно, среди них есть совпадающие) матрицы  $A$  и  $N_j$  – стандартные нильпотентные матрицы порядка  $j$  с тем же порядком нильпотентности,  $N_j^j = 0$  и  $N_j^{j-1} \neq 0$ ,  $j = 1 \div s$ , где  $s$  – число клеток Жордана в каноническом разложении матрицы (число ненулевых компонент в наборе  $\mathbf{n}$ ). Таким образом, каждая нильпотентная матрица порядка  $m \in \mathbb{N}$  в жордановом представлении любой матрицы  $A \in \mathfrak{M}_n$  имеет вид

$$(N)_{kl} = \delta_{k+1,l}, \quad k, l = 1 \div m.$$

Введенную характеристику  $\mathbf{n}$  назовем *типом спектрального разложения* (1) матрицы  $A$ . Квадратные матрицы  $A$  и  $B$  одинакового порядка  $n \in \mathbb{N}$  эквивалентны друг другу, если имеется связывающая их неособенная матрица  $U$ ,  $\det U \neq 0$  такая, что  $UAU^{-1} = B$ . Очевидно, что необходимым условием для того, чтобы матрицы  $A$  и  $B$  из  $\mathfrak{M}_n$  были эквивалентны друг другу, является совпадение их типа спектрального разложения. Поэтому линейное многообразие  $\mathfrak{M}_n$  представляется в виде дизъюнктивного объединения классов  $\mathfrak{K}_{\mathbf{n}}$  матриц фиксированного спектрального типа  $\mathbf{n}$ . Это является



следствием классической теоремы Жордана (см., например, [1]) о приведении матриц к жорданову представлению. Будем, далее, обозначать посредством  $N_n$  число классов  $\mathfrak{K}_n$ , составляющих это объединение. Представляет интерес оценка (вычисление) этого числа для каждого значения  $n \in \mathbb{N}$ .

Наряду с поставленной задачей об оценке числа  $N_n$  для нас в этом сообщении основную роль будет играть другая комбинаторная задача. Обобщим теперь понятие эквивалентности матриц следующим образом. Будем говорить, что квадратные матрицы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  одинакового порядка  $n \in \mathbb{N}$  *спектрально эквивалентны* друг другу, если имеются две неособенные матрицы  $\mathcal{U}_1$  и  $\mathcal{U}_2$ ,  $\det \mathcal{U}_k \neq 0$ ,  $k = 1, 2$  такие, что  $\mathcal{U}_1 \mathcal{A} \mathcal{U}_2^{-1} = \mathcal{B}$ . Введем теперь, в дополнение к типу спектрального разложения, характеристику, которая представляется набором  $\mathbf{k} = \langle k_1, k_2, \dots \rangle$ , где каждое число  $k_j$ ,  $j = 1 \div s$  равно числу тех клеток Жордана в  $j$ -й компоненте разложения (1), для которых  $\lambda_{j,k} = 0$ . Тогда  $k_j \leq n_j$ ,  $j = 1 \div s$ . Набор  $\mathbf{k}$  будем называть *спектральной характеристикой нулевого инвариантного пространства* матрицы  $\mathcal{A}$ . Нетрудно доказать, что матрицы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  одинакового порядка  $n \in \mathbb{N}$  *спектрально эквивалентны* друг другу в том и только в том случае, когда у них совпадают: спектральный тип и спектральный тип нулевого пространства. Аналогично указанному выше распределению матриц линейного многообразия  $\mathfrak{M}_n$  по классам  $\mathfrak{K}_n$ , каждый из этих классов разлагается дизъюнктивно на классы  $\mathfrak{K}_{n,\mathbf{k}}$  спектрально эквивалентных матриц. В связи с этим, возникает комбинаторная задача об оценке числа  $N_{n,\mathbf{k}}$  всех классов  $\mathfrak{K}_{n,\mathbf{k}}$ , матриц с фиксированными значениями  $|\mathbf{n}|$  и  $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \dots + k_s$ . Ясно, что, вследствие принципа умножения, эта задача имеет простое решение в терминах введенной выше функции  $N_m$ , а именно,  $N_{n,\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}} N_{n-\mathbf{k}}$  (см. по этому поводу доказательство теоремы 3).

Значение числа  $N_{n,\mathbf{k}}$  тесно связано с числом  $\bar{N}_{n,\mathbf{k}}$  спектральных типов линейных обратимых динамических систем. Линейную динамическую систему четной размерности  $2n$ , то есть систему обыкновенных дифференциальных уравнений для вектор-функции  $X(t)$ ,  $\in \mathbb{R}$  вида

$$\dot{X} = \mathcal{G}X$$

с постоянной матрицей  $\mathcal{G} \in \mathfrak{M}_{2n}$  будем называть обратимой (см., [2-6]), если в спектральном разложении (1) для каждого значения  $j \in \mathbb{N}$  с ненулевой компонентой  $n_j$  в наборе  $\mathbf{n}$  выполняется: 1) число  $m_j$  всех составляющих спектрального разложения (1) с  $\lambda_{j,k} \neq 0$  четно; 2) множество всех таких составляющих представимо в виде дизъюнктивного объединения двух множеств с числом  $m_j/2$  элементов в каждом таким образом, что их элементы  $(\lambda_{j,k'} \mathcal{J}_j + \mathcal{N}_j)$  и  $(\lambda_{j,k''} \mathcal{J}_j + \mathcal{N}_j)$  находятся в таком биективном соответствии, что  $\lambda_{j,k'} = -\lambda_{j,k''}$ . Характеристика  $\bar{N}_{n,\mathbf{k}}$  линейных обратимых систем, введенная выше, равна числу спектральных типов матриц  $\mathcal{G}$  порядка  $2n$ , у которых суммарный порядок клеток Жордана  $(\lambda_{j,k} \mathcal{J}_j + \mathcal{N}_j)$  с  $\lambda_{j,k} = 0$ , равна  $2k$ .

**2. Число спектральных типов  $N_n$ .** Для решения задачи о вычислении (оценке) числа  $N_n$  введем в рассмотрение производящую функцию

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n N_n, \quad N_0 = 1 \quad (2)$$



для  $z \in \mathbb{C}$  так, что

$$N_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n F(z)}{dz^n} \right)_{z=0}$$

**Теорема 1.** Производящая функция является аналитической внутри единичного круга, в котором она представляется формулой

$$F(z) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - z^j)^{-1} \quad (3)$$

□ Спектральный тип  $\mathfrak{n} = \langle n_1, n_2, \dots \rangle$  матрицы  $\mathcal{A}$  порядка  $n$  определяется ее каноническим жордановым представлением, к которому она приводится некоторым преобразованием  $\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1}$  с некоторой неособенной матрицей  $\mathcal{U}$  так, что  $n_j$  – числа клеток Жордана порядка  $j$  в этом представлении. Тогда для каждого фиксированного  $n \in \mathbb{N}$  число  $N_n$  является числом решений уравнения  $n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots = n$  так, что оно представляется следующей суммой

$$N_n = \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots: \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots = n}} 1.$$

Подставим это выражение и представление

$$z^n = \prod_{j=1}^{\infty} z^{jn_j}$$

в определение (2) производящей функции  $F(z)$ ,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots: \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots = n}} \prod_{j=1}^{\infty} z^{jn_j}$$

Переставим суммирования в этом разложении по правилу:

$$\sum_{n=0}^N \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots = n} g(n_1, n_2, n_3, \dots) = \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots: \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots \leq N}} g(n_1, n_2, n_3, \dots),$$

выполняющемуся для любой функции  $g(n_1, n_2, \dots)$ , с последующим переходом к пределу  $N \rightarrow \infty$ . Перестановка суммирований возможна в области сходимости степенного ряда (1). В результате, получаем

$$F(z) = \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} z^{jn_j}.$$





Выражение в правой части факторизуется в бесконечное произведение рядов, что, опять же, допустимо в области сходимости степенного ряда

$$\sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} z^{jn_j} = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - z^j)^{-1}. \blacksquare$$

Число  $N_n$  при малых значениях  $n$  легко вычисляется. В частности,  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 2$ ,  $N_3 = 3$  и  $N_4 = 5$ , где в последнем случае возможные спектральные типы даются следующими наборами  $\langle 4, 0, 0, 0 \rangle$ ,  $\langle 2, 1, 0, 0 \rangle$ ,  $\langle 1, 0, 1, 0 \rangle$ ,  $\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$ ,  $\langle 0, 0, 0, 1 \rangle$ . Однако, комбинаторная функция  $N_n$  очень быстро возрастает и возникает задача о ее асимптотическом вычислении при  $n \rightarrow \infty$ , в простейшем случае, о получении для нее хорошей верхней оценки. Ниже мы даем подход к решению такой задачи, использующий формулу (3), и получении, в рамках этого метода, простой верхней оценки числа  $N_n$ .

Обозначим

$$G_n = \left[ \frac{d^n}{dz^n} F(z) \right]_{z=0}.$$

Тогда справедливы следующие алгебраические преобразования

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= \left[ \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{d}{dz} F(z) \right) \right]_{z=0} = \left[ \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{d}{dz} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - z^j)^{-1} \right) \right]_{z=0} = \\ &= \left[ \frac{d^n}{dz^n} \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{d}{dz} (1 - z^l)^{-1} \right) \prod_{j \neq l}^{\infty} (1 - z^j)^{-1} \right]_{z=0} = \left[ \frac{d^n}{dz^n} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{lz^{l-1}}{(1 - z^l)^2} \prod_{j \neq l}^{\infty} (1 - z^j)^{-1} \right]_{z=0} = \\ &= \left[ \frac{d^n}{dz^n} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{lz^{l-1}}{(1 - z^l)} F(z) \right]_{z=0} = \sum_{l=1}^{\infty} l \left[ \frac{d^n}{dz^n} \frac{z^{l-1}}{(1 - z^l)} F(z) \right]_{z=0} = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} l \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left[ \frac{d^m}{dz^m} \frac{z^{l-1}}{(1 - z^l)} \right]_{z=0} \cdot \left[ \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} F(z) \right]_{z=0} = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} l \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} G_{n-m} \left[ \frac{d^m}{dz^m} \frac{z^{l-1}}{(1 - z^l)} \right]_{z=0} \end{aligned}$$

Вычисляя производную в правой части

$$\left[ \frac{d^m}{dz^m} \frac{z^{l-1}}{(1 - z^l)} \right]_{z=0} = \left[ \frac{d^m}{dz^m} \sum_{k=1}^{\infty} z^{lk-1} \right]_{z=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(lk - 1)!}{(lk - m - 1)!} \cdot \theta(lk - m - 1) \cdot \delta_{m, lk-1},$$

где  $\theta(m) = \{1, m \in N_{+0}; 0, m < 0\}$  при  $m \in \mathbb{Z}$ . В результате, получаем рекуррентное соотношение для величин  $G_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$G_{n+1} = \sum_{l=1}^{\infty} l \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} G_{n-m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(lk - 1)!}{(lk - m - 1)!} \cdot \theta(lk - m - 1) \cdot \delta_{m, lk-1}.$$



Так как  $G_n/n! = N_n$ , то из этой рекуррентной связи следует связь между числами  $N_n$ ,

$$\begin{aligned} N_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{\infty} l \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} N_{n-m} \sum_{k=1}^{\infty} \cdot \theta(lk-m-1) \cdot \delta_{m,lk-1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k,l=1}^{\infty} l N_{n-lk+1} \theta(n-lk+1) = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{k,l: \\ 1 \leq lk \leq n+1}} l N_{n-lk+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{p=1}^{n+1} N_{n-p+1} \sum_{\substack{l:p/l, \\ p \geq l \geq 1}} l = \frac{1}{n+1} \sum_{p=1}^{n+1} N_{n-p+1} L_p. \end{aligned}$$

Комбинаторная функция  $L_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  в правой части представима в виде

$$L_p = \sum_{\substack{l:p/l \\ 1 \leq l \leq p}} l = \prod_{\substack{q\text{-простые:} \\ p = \prod q}} (1+q). \quad (4)$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

**Теорема 2.** Числа  $N_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  удовлетворяют системе рекуррентных соотношений

$$N_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{p=1}^{n+1} N_{n-p+1} L_p, \quad (5)$$

где комбинаторная функция  $L_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  определяется равенством (4).

На основе полученного рекуррентного соотношения имеется возможность вычисления комбинаторной функции  $N_n$ , не прибегая к перебору возможных спектральных типов матрицы для каждого фиксированного значения  $n$ . В частности, на основе легко получается верхняя оценка числа  $N_n$  для больших значений  $n$ .

**Следствие.** Имеет место следующая верхняя оценка

$$N_n \leq \frac{2n!}{n+2} (1 + \ln(1+n))^{n+1}. \quad (5)$$

□ Заметим, что для значений  $p = 1, 2, \dots, n+1$  выполняется  $N_{n-p+1}$ , ввиду монотонного возрастания  $N_n$ . Тогда из (5) следует, что  $N_{n+1} \leq N_n \max\{L_p; p = 1 \div n+1\}$ .

Получим эффективную верхнюю оценку для комбинаторной функции  $L_p$ . Пусть  $\langle 1, n_1, \dots, n_s = p \rangle$  – упорядоченный по возрастанию набор частных от деления числа  $p$ , на его делители. При этом  $s \leq p$  и  $n_j \geq j$ ,  $j = 1 \div s$ . Тогда

$$L_p = p \sum_{j=1}^s \frac{1}{n_j} \leq p \sum_{j=1}^p \frac{1}{j}.$$

Следовательно,  $N_{n+1} \leq N_n S_{n+1}$ , где

$$S_n = \sum_{l=1}^n \frac{1}{l}.$$



Итерация последнего неравенства приводит к оценке

$$N_n \leq n! \prod_{l=1}^n S_l$$

так, что для получения нужного неравенства нужно оценить сверху произведение сумм  $S_l$ . Ввиду монотонного убывания функции  $x^{-1}$ , имеем

$$\sum_{l=1}^n \frac{1}{l} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \ln n.$$

Тогда справедлива оценка сверху произведения

$$\prod_{l=1}^n S_l \leq \exp \sum_{l=1}^n \ln(1 + \ln l),$$

где сумма в показателе экспоненты, ввиду монотонного возрастания функции  $\ln(1 + \ln x)$  оценивается сверху интегралом

$$\sum_{l=1}^n \ln(1 + \ln l) \leq \int_1^{n+1} \ln(1 + \ln x) dx = (n + 1) \ln(1 + \ln(n + 1)) - \int_1^{n+1} \frac{dx}{1 + \ln x},$$

и, так как  $\ln x < x$  при  $x \geq 1$ , то последний интеграл оценивается снизу величиной  $\ln(n + 1)/2$ . Следовательно,

$$\prod_{l=1}^n S_l \leq \frac{2}{n + 2} (1 + \ln(1 + n))^{n+1}. \blacksquare$$

**Теорема 3.** Пусть  $\bar{N}_{n,k}$  – число спектральных типов матриц  $\mathcal{G}$  порядка  $2n$  с суммарного порядка  $2k$  клеток Жордана в каноническом представлении, имеющих нулевые собственные числа, с симметричным спектральным разложением. Тогда имеет место равенство

$$\bar{N}_{n,k} = N_{2k} N_{n-k}.$$

□ Так как матрица  $\mathcal{G}$  имеет симметричное спектральное разложение, то клетки Жордана с ненулевыми собственными числами в ее каноническом представлении, число которых равно  $2(n - k)$ , разбиваются на пары так, что матрицы в каждой паре имеют одинаковый порядок. Поэтому спектральный тип матрицы, составленной из клеток, которые являются первыми в каждой паре, полностью определяет спектральный тип всей матрицы, составленной из клеток с ненулевыми собственными числами. Число спектральных типов таких матриц равна  $N_{n-k}$ .



Далее, при фиксации спектрального типа матрицы, составленной из таких клеток Жордана с ненулевыми собственными числами, спектральный тип всей матрицы  $\mathcal{G}$  определяется выбором спектрального типа матрицы, составленной из клеток Жордана с нулевыми собственными числами. Число возможностей выбрать спектральный тип этой части матрицы  $\mathcal{G}$  равно  $N_{2k}$ . Тогда, в силу принципа умножения, имеем  $\bar{N}_{n,k} = N_{n-k}N_{2k}$ . ■

### Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / М.: Наука, 1966. – 576 с.
2. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Свойство локальной обратимости гамильтоновых динамических систем // Материалы Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел» Белгород, 17-21 октября 2011 / С.37-38.
3. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Симметричность спектра линейных гамильтоновых систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2011. – 17(112);24. – С.179-180.
4. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Полностью вырожденные линейные гамильтоновы системы // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2012. – 23(142);29. – С.215-218.
5. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Характеризация линейных гамильтоновых систем // Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» 26-31 мая 2013, Белгород / Белгород: Политерра, 2013. – С.180-181.
6. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. О спектральном разложении генераторов гамильтоновых систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2013. – 5(148);30. – С.135-141.

### ABOUT CLASS OF HAMILTONIAN MATRICES

Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin

Belgorod State University,  
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: [virch@bsu.edu.ru](mailto:virch@bsu.edu.ru)

**Abstract.** The concept of spectral type of reversible dynamic systems having even dimension is introduced. The study of such a type systems has began by authors in previous papers. The problem of the number  $\bar{N}_{2n}$  enumeration of dynamic systems spectral types is reduced to the enumeration of spectral types of matrices with even degrees which have the "symmetric"spectral decomposition. The combinatorial problem of evaluation the number  $\bar{N}_{2n}$  is set. The solution of this problem is proposed in terms of the generation function of the spectral types number which may be realized when matrices have  $2n$  degrees.

**Key words:** hamiltonian systems, reversible dynamic systems, tangential dynamic system, spectral type of matrix, generation function.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА,  
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MSC 60G50

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВРЕМЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ  
ЗАДАННОГО УРОВНЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ ФУНКЦИОНАЛОМ  
ДЛЯ ДИХОТОМИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

М.И. Абрамова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,

e-mail: abramova\_m@bsu.edu.ru

**Аннотация.** В работе рассматривается задача о распределении вероятностей  $Q(t, E)$  для времени достижения  $\tilde{\tau}(E)$  заданного уровня  $E$  энергетическим функционалом  $\tilde{\varepsilon}(t; \xi)$  в случае, когда «интенсивность»  $\tilde{\xi}(t) = d\tilde{\varepsilon}(t; \xi)/dt$  является дихотомическим случайным процессом. Для плотности  $q(t, E) = dQ(x, t)/dt$  находится интегральное представление, выражаемое в терминах специальных функций.

**Ключевые слова:** время достижения, дихотомический процесс, марковский процесс, плотность распределения, энергетический функционал.

1. Дихотомический случайный процесс.

Математическая модель процесса накопления энергии

**Определение 1.** Дихотомическим процессом  $\langle \tilde{\xi}(t); t \geq 0 \rangle$  с неотрицательными значениями будем называть марковский, стационарный случайный процесс, траектории  $\tilde{\xi}(t)$  которого принимают, с вероятностью единица, два значения  $\{0, \alpha\}$ ,  $\alpha > 0$ .

Рассмотрим стандартный дихотомический процесс  $\langle \tilde{\zeta}(t); t \in \mathbb{R} \rangle$ , траектории которого принимают значения  $\{0, 1\}$  и вероятность каждого из них равна  $1/2$ . Такой процесс называется *телеграфным* [1]. Тогда траектории  $\tilde{\xi}(t) = \alpha \tilde{\zeta}(t)$ , а функционал  $\tilde{\varepsilon}(t; \xi)$  от случайных траекторий  $\tilde{\zeta}(t)$ , представляющий математическую модель процесса накопления энергии, определяется формулой

$$\tilde{\varepsilon}(t; \alpha \tilde{\zeta}) = \alpha \int_0^t \tilde{\zeta}(s) ds \tag{1.1}$$

и вероятностью входа в процесс [2]  $\Pr\{\tilde{\zeta}(0) = j\}$ ,  $j \in \{0, 1\}$ . Так как процесс  $\langle \tilde{\zeta}(t); t \geq 0 \rangle$  – марковский, то он полностью определяется соответствующим ему уравнением Колмогорова для условных вероятностей перехода

$$p_{ij}(t) = \Pr\{\tilde{\zeta}(t) = j | \tilde{\zeta}(s) = i\}, \quad i, j \in \{0, 1\}. \tag{1.2}$$

Эти вероятности представляются  $2 \times 2$ -матрицей, зависящей от параметра  $t$ . Следовательно, это уравнение является дифференциальным уравнением для матриц-функции,

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \nu(\mathcal{P}p - p)_{ij}(t), \quad \nu > 0, \tag{1.3}$$



где  $\mathcal{P}$  – стохастическая 0, 1-матрица,

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Так как, по определению вероятностей  $p_{ij}(t)$ , имеет место

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad (1.5)$$

то, на основании (1.4), получаем

$$p_{ij}(t) = (\exp(\nu t[\mathcal{P} - \mathcal{J}]))_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{-2\nu t} & 1 - e^{-2\nu t} \\ 1 - e^{-2\nu t} & 1 + e^{-2\nu t} \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из формулы (1.6), используя условие стационарности процесса  $\langle \tilde{\zeta}(t); t \in \mathbb{R} \rangle$ , получаем одноточечное распределение вероятностей  $p_i(t) = \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}(t) = i\}$ ,  $i = 0, 1$  процесса  $\langle \tilde{\zeta}(t); t \in \mathbb{R} \rangle$ ,

$$p_i(t) = \lim_{s \rightarrow -\infty} p_{ij}(t - s) = \frac{1}{2}. \quad (1.7)$$

Телеграфный процесс  $\langle \tilde{\zeta}(t); t \geq 0 \rangle$  является частным случаем т.н. *однородной марковской цепи с непрерывным временем*. Точки изменения траекторий таких случайных процессов образуют пуассоновский поток [4]. В рассматриваемом случае, этот пуассоновский поток имеет плотность  $\nu$ .

Поставим задачу о вычислении распределения вероятностей для единственного с вероятностью единица случайного момента времени  $\tilde{\tau}(E)$  достижения заданного уровня  $E$  функционалом  $\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi})$ , который рассматривается как случайный процесс на  $\mathbb{R}_+$  с траекториями (1.1). Это время определяется интегралом

$$\tilde{\tau}(E) = \int_0^\infty \theta \left( E - \alpha \int_0^t \tilde{\zeta}(s) ds \right) dt,$$

где  $\theta(x) = \{1, x \geq 0; 0, x < 0\}$  – функция Хевисайда.

Решение задачи основывается на методе Каца-Фейнмана-Дынкина вычисления математических ожиданий, связанных с однородными аддитивными функционалами от траекторий марковских процессов [4], [5]. Возможность применения этого метода, для решения поставленной задачи, вытекает из следующего утверждения.

**Теорема 1.** *Двухкомпонентный случайный процесс  $\langle \langle \tilde{\zeta}(t), \tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) \rangle; t \geq 0 \rangle$  является марковским.*

□ Действительно, для любого фиксированного момента  $t_0$  условное распределение вероятностей  $\Pr\{\tilde{\zeta}(t) = i, \tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) < x \mid \tilde{\zeta}(s), \tilde{\varepsilon}(s; \tilde{\xi}); s \leq t_0\}$  значений двухкомпонентного



процесса  $\langle \langle \tilde{\zeta}(t), \tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) \rangle; t \geq 0 \rangle$  при  $t > t_0$  при условии фиксации его траектории до момента  $t_0$ , совпадает с условной вероятностью  $\Pr\{\tilde{\zeta}(t) = i, \tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) < x \mid \tilde{\zeta}(t_0) = i_0, \tilde{\varepsilon}(t_0; \tilde{\xi}) = \varepsilon_0\}$ . Это следует, во-первых, из того, что марковским является процесс  $\langle \tilde{\zeta}(t); t \in \mathbb{R} \rangle$ , и, следовательно, он обладает указанным свойством,

$$\Pr\{\tilde{\zeta}(t) = i \mid \tilde{\zeta}(s), s \leq t_0\} = \Pr\{\tilde{\zeta}(t) = i \mid \tilde{\zeta}(t_0) = i_0\}.$$

Во-вторых, ввиду формулы связи значений процесса  $\langle \tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}); t \geq 0 \rangle$  при  $t \geq t_0$  с его значениями до момента  $t = t_0$ , выполняется

$$\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) = \alpha \int_{t_0}^t \tilde{\zeta}(s) ds + \varepsilon_0, \quad \tilde{\varepsilon}(t_0; \tilde{\xi}) = \varepsilon_0.$$

Тогда, на основании этих формул, имеем

$$\begin{aligned} & \Pr\{\tilde{\zeta}(t) = i, \tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) < x \mid \tilde{\zeta}(s), \tilde{\varepsilon}(s; \tilde{\xi}); s \leq t_0\} = \\ & = \Pr\left\{\tilde{\zeta}(t) = i, \alpha \int_{t_0}^t \tilde{\zeta}(s; \tilde{\xi}) ds + \varepsilon_0 < x \mid \tilde{\zeta}(s), \tilde{\varepsilon}(s; \tilde{\xi}); s \leq t_0\right\} = \\ & = \Pr\left\{\tilde{\zeta}(t) = i, \alpha \int_{t_0}^t \tilde{\zeta}(s) ds + \varepsilon_0 < x \mid \tilde{\zeta}(t_0) = i_0, \tilde{\varepsilon}(t_0; \tilde{\xi}) = \varepsilon_0\right\} = \\ & = \Pr\left\{\tilde{\zeta}(t) = i, \alpha \int_{t_0}^t \tilde{\zeta}(s) ds + \tilde{\varepsilon}(t_0; \tilde{\xi}) < x \mid \tilde{\zeta}(t_0) = i_0, \tilde{\varepsilon}(t_0; \tilde{\xi}) = \varepsilon_0\right\} = \\ & = \Pr\left\{\tilde{\zeta}(t) = i, \tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) < x \mid \tilde{\zeta}(t_0) = i_0, \tilde{\varepsilon}(t_0; \tilde{\xi}) = \varepsilon_0\right\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Марковость процесса  $\langle \langle \tilde{\zeta}(t), \tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) \rangle; t \geq 0 \rangle$  даёт возможность построить эволюционное уравнение для его частного распределения первого порядка

$$P_i(x, t) \equiv \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) < x, \tilde{\zeta}(t) = i\}. \quad (1.8)$$

В свою очередь, определив функции  $P_i(x, t)$ ,  $i = 0, 1$ , посредством решения системы уравнений можно найти распределение вероятностей для случайной величины  $\tilde{\tau}(E)$ , так как, очевидно, что

$$Q(t, E) = \Pr\{\tilde{\tau}(E) < t\} = \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) \geq E\} = 1 - \sum_{i \in \{0,1\}} P_i(t, E),$$

и, следовательно,

$$q(t, E) = -\frac{d}{dt} \sum_{i \in \{0,1\}} P_i(t, E). \quad (1.9)$$



Введём вероятности

$$Q_i(x, t) \equiv \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t) = i\}. \quad (1.10)$$

Эти вероятности определены при всех  $x \in \mathbb{R}_+$ . Так как  $\tilde{\varepsilon}(0; \tilde{\xi}) = 0$  с вероятностью единица, то, ввиду (1.7),  $Q_i(0, t) = p_i(t) = 1/2$  при  $t \in \mathbb{R}_+$ . Принимая во внимание то, что функция  $Q_i(x, t)$ , согласно определению (1.10), является невозрастающей, получим

$$Q_i(x, t) = \frac{1}{2} - \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) < x, \tilde{\zeta}(t) = i\} = \frac{1}{2} - P_i(x, t), \quad i = 0, 1, \quad (1.11)$$

$$Q(t, x) = \sum_{i=0,1} Q_i(x, t) = 1 - \sum_{i=0,1} P_i(x, t). \quad (1.12)$$

Следовательно,

$$q(t, x) = \frac{d}{dt} \sum_{i=0,1} Q_i(x, t). \quad (1.13)$$

Вывод уравнения для функции  $Q_i(x, t)$  основан на стандартном рассуждении, применимом к процессам, построенным на основе пуассоновского потока [6]. Пусть  $\Gamma_n$  – событие, состоящее в том, что на интервале  $[t, t + \Delta)$  находится ровно  $n$  точек изменения процесса  $\langle \tilde{\zeta}(t); t \in \mathbb{R} \rangle$ . Тогда, так как эти точки составляют пуассоновский поток, то

$$\Pr\{\Gamma_n\} = \frac{(\nu\Delta)^n}{n!} e^{-\nu\Delta}.$$

По формуле полной вероятности, на основе исчерпывающей совокупности несовместимых событий  $\Gamma_n$ , имеем разложение

$$\begin{aligned} \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t + \Delta; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t + \Delta) = j\} &= e^{-\nu\Delta} \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t) = j | \Gamma_0\} + \\ &+ \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t + \Delta; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t + \Delta) = j, \Gamma_1\} + o(\nu\Delta), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где при записи первого слагаемого мы воспользовались тождеством

$$\Pr\{\tilde{\varepsilon}(t + \Delta; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t + \Delta) = j, \Gamma_0\} = \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t + \Delta; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t + \Delta) = j | \Gamma_0\} \Pr\{\Gamma_0\}.$$

Заметим, что

$$\Pr\{\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t) = j | \Gamma_0\} = Q_j(x - \alpha j \Delta, t). \quad (1.15)$$

Рассмотрим второе слагаемое. Введём случайную величину  $\tilde{s} \in [t, t + \Delta)$ , значением которой является та единственная точка изменения процесса  $\langle \tilde{\zeta}(s); s \in \mathbb{R} \rangle$ , которая находится на полуинтервале  $[t, t + \Delta)$  при реализации события  $\Gamma_1$ . Пусть  $N \in \mathbb{N}$ . Согласно формуле полной вероятности относительно полного набора попарно несовместимых случайных событий  $\{\tilde{s} \in [t + (k - 1)\Delta/N, t + k\Delta/N), \Gamma_1\}$ ,  $k = 1, \dots, N^\ddagger$  таких, что имеет место

$$\Gamma_1 = \bigcup_{k=1}^N \{\tilde{s} \in [t + (k - 1)\Delta/N, t + k\Delta/N), \Gamma_1\},$$

<sup>‡</sup>Понятие случайной величины  $\tilde{s}$  имеет смысл только при реализации события  $\Gamma_1$





справедливо разложение

$$\Pr\{\tilde{\varepsilon}(t + \Delta; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t + \Delta) = j, \Gamma_1\} = \sum_{k=1}^N \Pr\{\tilde{s} \in [t + (k - 1)\Delta/N, t + k\Delta/N), \Gamma_1\} \times \\ \times \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t + \Delta; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t + \Delta) = j | \tilde{s} \in [t + (k - 1)\Delta/N, t + k\Delta/N), \Gamma_1\}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу  $N \rightarrow \infty$ , получаем

$$\Pr\{\tilde{\varepsilon}(t + \Delta; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t + \Delta) = j, \Gamma_1\} = \\ = \int_t^{t+\Delta} \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t + \Delta; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t + \Delta) = j | \tilde{s} = s, \Gamma_1\} d\Pr\{\tilde{s} < s, \Gamma_1\}. \quad (1.16)$$

Так как условная плотность распределения единственной точки пуассоновского потока, находящейся в  $(t, t + \Delta]$ , имеет вид  $1/\Delta$  [7] и  $\Pr\{\Gamma_1\} = \nu\Delta e^{-\nu\Delta}$ , то

$$\Pr\{\tilde{s} < s, \Gamma_1\} = \Pr\{\tilde{s} < s | \Gamma_1\} \Pr\{\Gamma_1\} = \frac{s - t}{\Delta} (\nu\Delta e^{-\nu\Delta}).$$

Тогда, из (1.16) следует

$$\Pr\{\tilde{\varepsilon}(t + \Delta; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t + \Delta) = j, \Gamma_1\} = \\ = \nu e^{-\nu\Delta} \int_t^{t+\Delta} \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t + \Delta; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t + \Delta) = j | \tilde{s} = s, \Gamma_1\} ds. \quad (1.17)$$

Условная вероятность в подынтегральном выражении, ввиду того, что  $\tilde{\zeta}(t) = 1 - j$  при  $\tilde{\zeta}(t + \Delta) = j$  и

$$\tilde{\varepsilon}(t + \Delta; \tilde{\xi}) = \tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) + \alpha \begin{cases} \tilde{s} - t & , j = 0, \\ \Delta - (\tilde{s} - t) & , j = 1; \end{cases} = \tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) + \alpha[j\Delta + (1 - 2j)(\tilde{s} - t)],$$

преобразуется следующим образом

$$\Pr\{\tilde{\varepsilon}(t + \Delta; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t + \Delta) = j | \tilde{s} = s, \Gamma_1\} = \\ = \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) \geq x - \alpha[j\Delta + (1 - 2j)(s - t)], \tilde{\zeta}(t) = 1 - j | \tilde{s} = s, \Gamma_1\} = \\ = \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) \geq x - \alpha[j\Delta + (1 - 2j)(s - t)], \tilde{\zeta}(t) = 1 - j\} = \\ = Q_{1-j}(x - \alpha[j\Delta + (1 - 2j)(s - t)], s) \quad (1.18)$$

Мы учли, что, при  $\tilde{s} > t$  с вероятностью единица, условная вероятность становится безусловной. Таким образом, согласно (1.14), (1.15), (1.17), (1.18), вероятность  $Q_j(x, t + \Delta)$  с точностью до членов  $o(\nu\Delta)$  может быть представлена в виде

$$Q_j(x, t + \Delta) = e^{-\nu\Delta} Q_j(x - \alpha j\Delta, t) +$$



$$+ \nu e^{-\nu\Delta} \int_0^{\Delta} Q_{1-j}(x - \alpha[j\Delta + (1 - 2j)s], t + s) ds + o(\nu\Delta). \quad (1.19)$$

Заметим, что вероятность  $Q_j(x, t)$ , в силу своего определения, является невозрастающей функцией от  $x$ , непрерывной слева ( $P_j(x, t)$  – непрерывна справа). Следовательно, эта функция наверняка является почти всюду дифференцируемой по  $x$ . Представим равенство (1.19) в виде

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} [Q_j(x, t + \Delta) - Q_j(x, t)] &= \Delta^{-1} [Q_j(x - \alpha j\Delta, t) - Q_j(x, t)] + \\ &+ \Delta^{-1} (e^{-\nu\Delta} - 1) Q_j(x - \alpha j\Delta, t) + \nu \Delta^{-1} e^{-\nu\Delta} \int_0^{\Delta} Q_{1-j}(x - \alpha[j\Delta + (1 - 2j)s], s + t) ds + o(1) \end{aligned}$$

и, в точках дифференцируемости по  $x$  функции  $Q_j(x, t)$ , перейдем к пределу  $\Delta \rightarrow 0$ . Так как

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1} \int_0^{\Delta} Q_{1-j}(x - \alpha[j\Delta + (1 - 2j)s], s + t) ds = Q_{1-j}(x, t),$$

то предел левой части существует при почти всех  $x$ . Тогда, мы получаем эволюционное уравнение для вероятности  $Q_j(x, t)$ , справедливое для почти всех  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\dot{Q}_j(x, t) = -\alpha j Q'_j(x, t) + \nu [Q_{1-j}(x, t) - Q_j(x, t)], \quad j \in \{0, 1\}, \quad (1.20)$$

где точкой обозначена производная по  $t$ , штрихом – производная по  $x$ . Следовательно, вероятности  $Q_j(x, t)$ ,  $j = 0, 1$  являются его слабым решением.

Для того чтобы вычислить вероятности  $Q_j(x, t)$ , на основе уравнения (1.20), необходимо найти его решение, удовлетворяющее дополнительным условиям, которые выделяют эти вероятности из всей совокупности решений. Так как мы будем решать уравнение (1.19) на полуоси  $\mathbb{R}_+$  по переменной  $x$ , то в качестве таких условий выберем граничные значения вероятностей при  $x = 0$  и их начальные значения при  $t = 0$ . Во-первых, согласно (1.10),

$$Q_i(0, t) = 1/2, \quad i = 0, 1, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (1.21)$$

Во-вторых, так как  $\tilde{\varepsilon}(0; \tilde{\xi}) = 0$ , то

$$Q_i(x, 0) = \Pr\{\tilde{\varepsilon}(0; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(0) = i\} = 0, \quad i = 0, 1, \quad x > 0. \quad (1.22)$$

Таким образом, мы убеждаемся, что справедлива

**Теорема 2.** Частное распределение вероятностей первого порядка  $P_i(x, t)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$  случайного процесса  $\langle\langle \tilde{\zeta}(t), \tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) \rangle\rangle; t \geq 0$  определяется вероятностями  $Q_i(x, t)$  так, что  $P_i(x, t) = 1/2 - Q_i(x, t)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$ , где функции  $Q_i(x, t) = \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t) = i\}$ ,  $i = 0, 1$  удовлетворяют уравнению (1.20) и условиям (1.21), (1.22).



## 2. Решение эволюционного уравнения

Уравнение (1.20) является двухкомпонентным, т.е. представляет систему двух уравнений при значениях  $j = 0, 1$ . С целью решения задачи Коши для уравнения (1.20) с начальными условиями (1.21), введём Лаплас-образы функций  $Q_j(x, t)$ ,  $j \in \{0, 1\}$  по переменной  $x$ ,

$$\bar{Q}_j(k, t) = \int_0^{\infty} e^{-kx} Q_j(x, t) dx, \quad j \in \{0, 1\}, \quad \operatorname{Re} k > 0. \quad (2.1)$$

Так как, согласно (1.21),

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} Q'_j(x, t) dx = -1/2 + k\bar{Q}_j(k, t), \quad j \in \{0, 1\}, \quad \operatorname{Re} k > 0, \quad (2.2)$$

то из (1.20) следует

$$\dot{\bar{Q}}_j(k, t) = -\alpha j [k\bar{Q}_j(k, t) - 1/2] + \nu [\bar{Q}_{1-j}(k, t) - \bar{Q}_j(k, t)], \quad j \in \{0, 1\}. \quad (2.3)$$

Представим это уравнение в векторно-матричной форме

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{Q}_0 \\ \bar{Q}_1 \end{pmatrix} (k, t) = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \bar{Q}_0 \\ \bar{Q}_1 \end{pmatrix} (k, t) + \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где матрица  $\mathcal{A}$  имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\nu & \nu \\ \nu & -(\nu + \alpha k) \end{pmatrix} = -(\nu + \alpha k/2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha k}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Необходимое решение этого уравнения должно удовлетворять, согласно (1.21), нулевому начальному условию.

Матриц-функция  $\mathcal{U}(t) = \exp(t\mathcal{A})$ , удовлетворяющая дифференциальному уравнению  $\dot{\mathcal{U}}(t) = \mathcal{A} \mathcal{U}(t)$  и начальному условию  $\mathcal{U}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{1}$ , имеет вид

$$\mathcal{U}(t) = \exp(-t(\nu + \alpha k/2)) \left[ \mathbf{1} \operatorname{ch} \omega(k)t + \frac{\operatorname{sh} \omega(k)t}{\omega(k)} \begin{pmatrix} \alpha k/2 & \nu \\ \nu & -\alpha k/2 \end{pmatrix} \right], \quad (2.6)$$

где

$$\omega(k) = (\nu^2 + (\alpha k/2)^2)^{1/2}. \quad (2.7)$$

Это легко устанавливается дифференцированием по  $t$  с учётом тождества

$$\begin{pmatrix} \alpha k/2 & \nu \\ \nu & -\alpha k/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha k/2 & \nu \\ \nu & -\alpha k/2 \end{pmatrix} = \omega^2(k) \mathbf{1}.$$



Решение двухкомпонентного дифференциального уравнения (2.4), удовлетворяющее нулевому начальному условию, представляется в форме

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}_0 \\ \bar{Q}_1 \end{pmatrix} (k, t) = \left[ \frac{\alpha}{2} (e^{t\mathcal{A}} - \mathbf{1}) \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] (k, t). \quad (2.8)$$

Легко проверить, что  $\mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -(\alpha k)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , поэтому, на основании (2.8) и (2.6),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{Q}_0 \\ \bar{Q}_1 \end{pmatrix} (k, t) &= - \left[ (2k)^{-1} (\mathcal{U}(t) - \mathbf{1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] (k, t) = \\ &= (2k)^{-1} \begin{pmatrix} 1 - e^{-t(\nu + \alpha k/2)} \left[ \operatorname{ch} \omega(k)t + (\nu + \alpha k/2) \frac{\operatorname{sh} \omega(k)t}{\omega(k)} \right] \\ 1 - e^{-t(\nu + \alpha k/2)} \left[ \operatorname{ch} \omega(k)t + (\nu - \alpha k/2) \frac{\operatorname{sh} \omega(k)t}{\omega(k)} \right] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В результате, находим, что

$$\bar{Q}(t, k) = \bar{Q}_0(k, t) + \bar{Q}_1(k, t) = k^{-1} \left( 1 - e^{-t(\nu + \alpha k/2)} \left[ \operatorname{ch} \omega(k)t + \frac{\nu}{\omega(k)} \operatorname{sh} \omega(k)t \right] \right). \quad (2.10)$$

С другой стороны, из определения (2.1), следует, что  $\bar{Q}(t, k) = \int_0^\infty e^{-kx} Q(t, x) dx$ ,  $\operatorname{Re} k > 0$  и, поэтому, на основании формулы Меллина для восстановления прообраза преобразования Лапласа, имеем

$$\begin{aligned} Q(t, x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} \bar{Q}(t, k) e^{kx} dk = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} \left( 1 - e^{-t(\nu + \alpha k/2)} \left[ \operatorname{ch} \omega(k)t + \frac{\nu}{\omega(k)} \operatorname{sh} \omega(k)t \right] \right) \frac{e^{kx}}{k} dk \end{aligned} \quad (2.11)$$

при сколь угодно малом  $\delta > 0$ . В подинтегральном выражении нет точек ветвления по  $k$ , так как эта функция чётна по  $\omega(k)$ , т.е. зависит от  $\omega^2(k) = \nu^2 + (\alpha k/2)^2$ . Ввиду интегрального представления  $\theta$ -функции Хевисайда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} \frac{e^{kx}}{k} dk = \theta(x),$$

формула (2.10) записывается в виде

$$Q(t, x) = \theta(x) - \frac{e^{-\nu t}}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} \exp [k(x - \alpha t/2)] \left[ \operatorname{ch} \omega(k)t + \frac{\nu}{\omega(k)} \operatorname{sh} \omega(k)t \right] \frac{dk}{k}. \quad (2.12)$$



Таким образом, доказана

**Теорема 3.** Вероятность  $Q(t, x) = \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) \geq x\}$  достижения за время  $t$  уровня  $x$  функционалом  $\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi})$  от траекторий дихотомического процесса  $\langle \tilde{\xi}(t); t \in \mathbb{R} \rangle$  определяется формулой (2.11), где  $\omega(k) = (\nu^2 + (\alpha k/2)^2)^{1/2}$ .

**Замечание 1.** Согласно (2.9), имеет место

$$\bar{Q}_1(k, t) = (2k)^{-1} \left( 1 - e^{-t(\nu + \alpha k/2)} \left[ \operatorname{ch} \omega(k)t + (\nu - \alpha k/2) \frac{\operatorname{sh} \omega(k)t}{\omega(k)} \right] \right)$$

и, поэтому,

$$Q_1(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-\nu t}}{4\pi i} \int_{-i\infty + \delta}^{i\infty + \delta} e^{-t\alpha k/2} \left[ \operatorname{ch} \omega(k)t + (\nu - \alpha k/2) \frac{\operatorname{sh} \omega(k)t}{\omega(k)} \right] \frac{dk}{k}. \quad (2.13)$$

### 3. Вычисление плотности распределения

Найдём, используя формулу (2.12), интегральное представление для плотности распределения  $q(t, E)$ . Эта плотность, согласно введённым обозначениям, определяется производной

$$q(t, E) = \frac{d}{dt} Q(t, E) = \frac{d}{dt} \sum_j Q_j(t, E). \quad (3.1)$$

Для получения искомого интегрального представления, изменим выражение в правой части формулы (3.1) так, чтобы она содержала только вероятность  $Q_1(x, t)$ . Это достигается сложением обоих уравнений (1.20) при  $j = 0, 1$ ,

$$\dot{Q}_1(x, t) + \dot{Q}_0(x, t) = -\alpha Q'_1(x, t),$$

$$q(t, x) = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} Q_1(x, t). \quad (3.2)$$

Подставляя в правую часть этого равенства интегральное представление (2.13) при  $x = E$ , находим требуемое интегральное представление для плотности распределения

$$q(t, E) = \alpha \frac{e^{-\nu t}}{4\pi i} \frac{\partial}{\partial E} \int_{-i\infty + \delta}^{i\infty + \delta} e^{k(E - t\alpha/2)} \left[ \operatorname{ch} \omega(k)t + (\nu - \alpha k/2) \frac{\operatorname{sh} \omega(k)t}{\omega(k)} \right] \frac{dk}{k}. \quad (3.3)$$

Так как интеграл сходится условно, то в этой формуле, после вычисления производной по  $E$  под интегралом, получающийся при этом интеграл имеет смысл только как обобщённая функция.

Таким образом, доказана

**Лемма 1.** Плотность распределения  $q(t, E)$  случайного времени достижения уровня  $E$  функционалом  $\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi})$ , от траекторий дихотомического процесса  $\langle \tilde{\xi}(t); t \in \mathbb{R} \rangle$  определяется формулой (3.3).



Очевидно, что время  $E/\alpha$  является минимальным временем, за которое может быть достигнут уровень  $E$  функционалом  $\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi})$ . Для этого нужно, чтобы в момент времени  $t = 0$  имело место  $\tilde{\zeta}(0) = 1$  и у траекторий процесса  $\langle \tilde{\zeta}(t); t \in \mathbb{R} \rangle$  на отрезке  $[0, E/\alpha]$  не имелось точек изменения. Вероятность такого события равна  $[\exp(-\nu E/\alpha)]/2$ . Поэтому, вероятность  $Q(t, E)$  должна содержать слагаемое  $\theta(t - E/\alpha)[\exp(-\nu E/\alpha)]/2$ . Тогда, плотность  $q(t, E)$  распределения случайного времени  $\tilde{\tau}(E)$  содержит  $\delta$ -функциональную особенность  $\delta(t - E/\alpha)[\exp(-\nu E/\alpha)]/2$ . Наличие этой особенности осложняет вычисление плотности  $q(t, E)$ , так как, в этом случае, интеграл, который получается при формальном выполнении операции дифференцирования в формуле (3.3), не существует, а его зависимость от параметра  $t$  должна пониматься как обобщённая функция. Таким образом, при вычислении этого интеграла, возникает задача выделения указанной  $\delta$ -функциональной особенности. Следующие леммы решают эту задачу.

Введём в рассмотрение модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков

$$I_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}; \quad (3.5)$$

$$I_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.6)$$

Очевидно, что  $I_0'(z) = I_1(z)$ , что следует непосредственно из рядов (3.5) и (3.6), определяющих эти функции. Кроме того, функции  $I_0(z)$  и  $I_1(z)$  связаны тождеством [8]

$$I_1'(z) + z^{-1}I_1(z) = I_0(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.7)$$

### Лемма 2. Обобщённая функция

$$q_*(u, s) = \frac{1}{2}e^{-u/2} \left( \delta(s) + \theta(s)e^{-s} \left( I_0(\sqrt{2us}) + \sqrt{\frac{u}{2s}} I_1(\sqrt{2us}) \right) \right) \quad (3.8)$$

по  $s \in \mathbb{R}$  над основным пространством ограниченных непрерывных функций на  $\mathbb{R}$  ( $\delta(s)$  – обобщённая функция Дирака) является плотностью распределения вероятностей при любом значении параметра  $u > 0$ .

□ Функции  $I_0(z)$ ,  $I_1(z)$  положительны при  $z > 0$ , то

$$\frac{1}{2}e^{-u/2} \left( I_0(\sqrt{2us}) + \sqrt{\frac{u}{2s}} I_1(\sqrt{2us}) \right) > 0$$

при  $u, s > 0$ . Коэффициент  $e^{-u/2} > 0$  при  $\delta(s)$  также положителен. Следовательно, обобщённая функция  $q_*(u, s)$  неотрицательна (неотрицательным является интеграл от произведения её на любую неотрицательную ограниченную непрерывную функцию). Проверим, что она нормирована на единицу. Проинтегрируем функцию  $q_*(u, s)$  по  $s$  от 0 до  $\infty$ . Используя (3.5), имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-s} I_0(\sqrt{2us}) ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \int_0^{\infty} e^{-s} \left( \sqrt{\frac{us}{2}} \right)^{2n} ds =$$



$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{u}{2}\right)^n \int_0^{\infty} e^{-s} s^n ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{u}{2}\right)^n = e^{u/2}.$$

Точно также получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-s} \sqrt{\frac{u}{2s}} I_1(\sqrt{2us}) ds &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \int_0^{\infty} e^{-s} \sqrt{\frac{u}{2s}} \left(\sqrt{\frac{us}{2}}\right)^{2n+1} ds = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{u}{2}\right)^{n+1} \int_0^{\infty} e^{-s} s^n ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{u}{2}\right)^{n+1} = e^{u/2} - 1. \end{aligned}$$

Интегрируя плотность (3.8) от 0 до  $\infty$ , с использованием полученных формул, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} q_*(u, s) ds &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \int_0^{\infty} e^{-s} \left( I_0\left(\sqrt{\frac{us}{2}}\right) + \sqrt{\frac{u}{2s}} I_1\left(\sqrt{\frac{us}{2}}\right) \right) ds \right] = \\ &= \frac{1}{2} e^{-u/2} [1 + e^{u/2} + e^{u/2} - 1] = 1, \end{aligned}$$

что указывает на нормированность плотности  $q_*(u, s)$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_*(u, s) ds = 1. \quad \blacksquare \tag{3.9}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$D_*(u, s) = \operatorname{Re} \int_{-i, z \in C_+}^i \exp\left[i\left(\frac{u}{z} - sz\right)\right] dz, \tag{3.10}$$

где  $C_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ . Тогда справедлива

**Лемма 3.** *Имеет место формула*

$$D_*(u, s) = -\pi \sqrt{\frac{u}{s}} I_1(2\sqrt{us}). \tag{3.11}$$

□ Дважды дифференцируя функцию  $D_*(u, s)$  по  $u$  получим

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} D_*(u, s) = -\operatorname{Re} \int_{-i, z \in C_+}^i z^{-2} \exp[-isz] \exp[iuz^{-1}] dz.$$



Выполняя интегрирование по частям, находим, согласно (3.10),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2} D_*(u, s) &= \operatorname{Re}(iu)^{-1} \int_{-i, z \in \mathbb{C}_+}^i \exp[-isz] d(\exp[iuz^{-1}]) = \\ &= \operatorname{Re}(iu)^{-1} (e^{s-u} - e^{u-s}) + \frac{s}{u} \operatorname{Re} \int_{-i, z \in \mathbb{C}_+}^i \exp[-isz] \exp[iuz^{-1}] dz = \frac{s}{u} D_*(u, s). \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $D_*(u, s)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} D_*(u, s) - \frac{s}{u} D_*(u, s) = 0. \quad (3.12)$$

Кроме того,

$$D_*(0, s) = \operatorname{Re} \int_{-i, z \in \mathbb{C}_+}^i \exp[-isz] dz = \operatorname{Re} \frac{i}{s} (e^s - e^{-s}) = 0, \quad (3.13)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial u} D_*(u, s) \right)_{u=0} = -\operatorname{Im} \int_{-i, z \in \mathbb{C}_+}^i z^{-1} \exp[-isz] dz = -\operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(-ise^{i\varphi}) d\varphi = -\pi. \quad (3.14)$$

В справедливости последнего равенства можно убедиться следующим образом. Дифференцирование  $(\partial D_*(u, s)/\partial u)_{u=0}$  по параметру  $s$  даёт

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial}{\partial u} D_*(u, s) \right)_{u=0} = \operatorname{Re} i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\varphi} \exp(-ise^{i\varphi}) d\varphi = \operatorname{Re} \int_{-i}^i \exp(-isz) dz = 0.$$

Тогда, ввиду независимости  $(\partial D_*(u, s)/\partial u)_{u=0}$  от  $s$ , вычисление этой постоянной сводится к нахождению значения интеграла в (3.14) при  $s = 0$ .

Итак, вычисление функции  $D_*(u, s)$  сводится к решению дифференциального уравнения (3.12) второго порядка с начальным условием (3.14) при учёте её ограниченности по  $u$ . Замена аргумента  $z = \sqrt{4us}$  в дифференциальном уравнении и введение новой функции  $X(z)$  по формуле  $D_*(u, s) = zX(z)$  сводит это уравнение к модифицированному уравнению Бесселя,

$$\frac{d^2}{dz^2} X(z) + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} X(z) - \left( 1 + \frac{1}{z^2} \right) X(z) = 0, \quad (3.15)$$

общее решение которого представимо в виде линейной комбинации модифицированных функций Бесселя первого и второго рода, имеющих порядок единица. Эти функции





обозначаются соответственно  $I_1(z)$  и  $K_1(z)$  (функция Макдональда), где функция  $I_1(z)$  определяется формулой (3.5). Тогда,

$$X(z) = AI_1(z) + BK_1(z), \quad (3.16)$$

где  $A, B$  – произвольные постоянные. Для нахождения нужного решения уравнения (3.12), существенно только то, что для функции  $K_1(z)$  справедлива асимптотическая формула

$$K_1(z) = I_1(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{z} + O(z), \quad z \rightarrow 0. \quad (3.17)$$

Функция  $D_*(u, s)$ , на основании (3.16), может быть представлена в виде

$$D_*(u, s) = z(AI_1(z) + BK_1(z)).$$

Из условия (3.13) и свойства (3.17) заключаем, что  $B = 0$ , так как  $z = 0$  при  $u = 0$  и  $I_1(0) = 0$ ,

$$D_*(0, s) = B \lim_{z \rightarrow 0} zK_1(z) = B.$$

В связи с тем, что  $\partial z^2 / \partial u = 4s$  и  $I_1(z) = z/2 + o(z^2)$  при  $z \rightarrow 0$ , из (3.14) следует

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} D_*(u, s)\right)_{u=0} = \frac{A}{2} \left(\frac{\partial z^2}{\partial u}\right)_{u=0} = 2As,$$

и, поэтому,  $A = -\pi/2s$ . Тогда

$$D_*(u, s) = -\left(\frac{\pi}{2s}\right) zI_1(z) = -\pi \sqrt{\frac{u}{s}} I_1(2\sqrt{us}). \quad \blacksquare$$

**Следствие.** Имеет место следующее представление для плотности  $q_*(u, s)$ ,

$$q_*(u, s) = \frac{1}{2} e^{-u/2} \left( \delta(s) - \frac{\theta(s)}{\pi} e^{-s} \left( 1 + 2 \frac{\partial}{\partial u} \right) D_*(u/2, s) \right). \quad (3.18)$$

□ Для вычисления действия оператора

$$QD_*(u, s) = \left( 1 + 2 \frac{\partial}{\partial u} \right) D_*(u/2, s)$$

положим  $z = \sqrt{2us}$  и представим, на основании (3.11),

$$D_*(u/2, s) = -\frac{\pi}{2s} zI_1(z).$$

Так как  $\partial/\partial u = (s/z)\partial/\partial z$ , то

$$2 \frac{\partial D_*(u/2, s)}{\partial u} = -\frac{\pi}{z} \frac{\partial}{\partial z} [zI_1(z)] = -\pi I_0(z),$$



где мы воспользовались тождеством (3.7). Следовательно,

$$QD_*(u, s) = -\pi \left[ \sqrt{\frac{u}{2s}} I_1(\sqrt{2us}) + I_0(\sqrt{2us}) \right].$$

Подстановка этого выражения в определение (3.8) плотности  $q_*(u, s)$  даёт нам формулу (3.18). ■

Определим функцию

$$U_{\lambda, \mu}(u, s, z) = z^{-1} (i\mu + z^\lambda) \exp[-is\mu z^\lambda] \exp[i\mu(u/2)z^{-\lambda}], \quad (3.19)$$

Следующая лемма является ключевой при выделении  $\delta$ -особенности из плотности  $q(t, x)$ .

#### Лемма 4. Функция

$$D_{**}(u, s) = \lim_{M \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda \int_{iM, z \in C_+(M)}^M U_{\lambda, -\lambda}(u, s, z) dz, \quad u > 0, \quad (3.20)$$

$C_+(M) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = M\}$ , является обобщённой функцией над основным пространством, состоящим из непрерывных ограниченных функций на  $\mathbb{R}$ . Она равна

$$D_{**}(u, s) = \pi \delta(s), \quad (3.21)$$

где  $\delta(s)$  – обобщённая функция Дирака.

□ Выражение (3.20) состоит из предельных значений интегралов

$$D_{m, \lambda}(u, s) = \int_{iM, z \in C_+(M)}^M z^{-m} \exp[is\lambda z^\lambda] \exp[-i\lambda u z^{-\lambda}/2] dz$$

четырёх типов, представляемых значениями  $m = 0, \lambda = 1; m = 1, \lambda = \pm 1; m = 2, \lambda = -1$ . Рассмотрим вклады каждого из них при  $M \rightarrow \infty$ . Для интеграла при  $m = 2$  при переходе к интегрированию в полярных координатах  $z = Me^{i\varphi}$ , где  $\varphi$  изменяется от  $\pi/2$  до 0, получаем оценку

$$\left| \int_{iM, z \in C_+(M)}^M z^{-2} \exp[-is/z] \exp[iuz/2] dz \right| \leq M^{-1} \int_0^{\pi/2} \exp[(s/M - uM/2) \sin \varphi] d\varphi < \frac{\pi}{2M}, \quad (3.22)$$

и, следовательно, этот интеграл не даёт вклад в  $D_{**}(u, s)$  при  $M \rightarrow \infty$ , так как  $u > 0$ .

Для оценки вклада интегралов  $D_{1, \lambda}(u, s)$ ,  $\lambda = \pm 1$  при  $M \rightarrow \infty$ , выделим произвольный сектор с  $\arg z \in [0, \epsilon]$ ,  $0 < \epsilon < \pi/2$ . Интеграл по дуге  $C_+(M)$  вне этого сектора



равномерно стремится к нулю при  $\lambda = \pm 1$ , ввиду оценки, аналогичной той, что приведена выше,

$$\left| \int_{iM, z \in C_+(M)}^{Me^{i\epsilon}} z^{-1} \exp[is\lambda z^\lambda] \exp[-i\lambda u/2z^\lambda] dz \right| \leq \int_{\epsilon}^{\pi/2} \exp[-\lambda(sM^\lambda - u/2M^\lambda) \sin \varphi] d\varphi < \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) \exp[-\lambda(sM^\lambda - u/2M^\lambda)]$$

при  $\lambda = \pm 1$ . Последнее выражение стремится к нулю при  $M \rightarrow \infty$ , так как  $u, s \geq 0$ . Оставшийся интеграл по дуге с  $\arg z \in [0, \epsilon]$  оценивается следующим образом

$$\left| \int_{Me^{i\epsilon}, z \in C_+(M)}^M z^{-1} \exp[is\lambda z^\lambda] \exp[-i\lambda u/2z^\lambda] dz \right| \leq \int_0^{\epsilon} \exp[-\lambda(sM^\lambda - u/2M^\lambda) \sin \varphi] d\varphi < \epsilon \exp[\epsilon \max\{s, u/2\}/M],$$

и, ввиду произвольности  $\epsilon > 0$ , получаем, что, действительно, интегралы с  $m = 1$  не дают вклада в  $D_{**}(u, s)$  при  $M \rightarrow \infty$  и обоих значениях  $\lambda = \pm 1$ .

Рассмотрим, наконец, интеграл с  $m = 0$ , который преобразуем следующим образом

$$\begin{aligned} \int_{iM, z \in C_+(M)}^M \exp[i(sz - u/2z)] dz &= \int_{iM}^M \exp[isz] dz + \int_{iM, z \in C_+(M)}^M \exp[isz] (\exp[-iu/2z] - 1) dz = \\ &= (is)^{-1} (e^{isM} - e^{-sM}) + (is)^{-1} (e^{isM} [\exp(-iu/2M) - 1] - e^{-sM} [\exp(-u/2M) - 1]) - \\ &\quad - (iu/2) \int_{iM, z \in C_+(M)}^M \exp[i(sz - u/2z)] \frac{dz}{z^2}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

где в первой строке, ввиду аналитичности подинтегральной функции, мы не указываем путь интегрирования в первом интеграле справа, а второй интеграл, стоящий справа, преобразуется по частям. Так как последний интеграл в правой части формулы (3.23), согласно (3.22), оценивается сверху числом  $\pi/2M$ , то формула (3.23) приводит к следующему асимптотическому при  $M \rightarrow \infty$  значению рассматриваемого интеграла

$$\int_{iM, z \in C_+(M)}^M \exp[i(sz - u/2z)] dz \sim (is)^{-1} e^{isM}, \quad M \rightarrow \infty. \tag{3.24}$$



Заметим, что в терминах обобщённых функций над основным пространством, которое состоит из непрерывных ограниченных на  $\mathbb{R}$  функций, имеют место равенства

$$\frac{1}{\pi s} \lim_{M \rightarrow \infty} \sin sM = \frac{1}{\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \cos sy \, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos sy \, dy = \delta(s).$$

Поэтому, из определения (3.20) и (3.24) следует (3.21), так как

$$D_{**}(u, s) = 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(is)^{-1} e^{isM} = 2 \lim_{M \rightarrow \infty} s^{-1} \sin sM = 2\pi\delta(s). \quad \blacksquare$$

Введём функцию

$$D(u, s; M) = \sum_{\lambda, \mu = \pm 1} \lambda \int_{C(M)} (i\mu + z^\lambda) \exp[-is\mu z^\lambda] \exp[iu\mu z^{-\lambda}/2] \frac{dz}{z}, \quad (3.25)$$

где  $C(M)$  – контур в комплексной плоскости  $z$ , состоящий из дуги единичной окружности при изменении угла от  $\pi/2$  до 0 и луча  $[1, M]$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 0$ .

**Лемма 5.** Для функции  $D(u, s) = \lim_{M \rightarrow \infty} \operatorname{Re} D(u, s; M)$  справедлива формула

$$D(u, s) = 2(\pi\delta(s) - \operatorname{QD}_*(u, s)). \quad (3.26)$$

□ Выполним следующее преобразование входящих в (3.25) интегралов, используя независимость их значений от таких деформаций контура  $C(M)$ , при которых путь интегрирования не пересекает точку  $z = 0$ , в которой подынтегральные выражения имеют существенную особенность. При  $\lambda\mu = -1$  интегрирование по контуру  $C(M)$  заменим на интегрирование по отрезку на оси  $\operatorname{Re}(z) = 0$ ,  $M > 0$  от точки  $i$  до точки  $iM$  и, далее, по дуге окружности радиуса  $M$  с изменением  $\arg z$  от  $\pi/2$  до 0. Для интегралов в (3.24) с  $\lambda\mu = 1$  аналогичное преобразование состоит в деформации контура интегрирования  $C(M)$  в контур, состоящий из дуги единичной окружности с изменением  $\arg z$  от  $\pi/2$  до  $-\pi/2$ , затем, из отрезка на оси  $\operatorname{Re}(z) = 0$  от точки  $-i$  до точки  $-iM$  и, наконец, из дуги окружности радиуса  $M$  с изменением  $\arg z$  от  $-\pi/2$  до 0.<sup>§</sup> Описанное преобразование интегралов в формуле (3.25) выражается следующим образом,

$$D(u, s; M) = \sum_{\lambda = \pm 1} \lambda \left( \int_{i, z \in C_+}^{-i} + \int_{-i, \operatorname{Re}(z)=0}^{-iM} + \int_{-iM, z \in C_+(M)}^M \right) U_{\lambda, \lambda}(u, s, z) dz +$$

<sup>§</sup>Такой выбор деформации контура  $C(M)$  продиктован тем, что подынтегральное выражение, при  $|z| \rightarrow \infty$ , экспоненциально стремится к нулю в нижней полуплоскости при совпадающих значениях  $\lambda, \mu$ , а при несовпадающих их значениях стремится к нулю в верхней полуплоскости комплексного  $z$ . Это обеспечивает выполнение, для этих интегралов условия Жордана и, поэтому, интегралы по дугам полукружности  $C_+(M)$  исчезают при  $M \rightarrow \infty$ .



$$+ \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda \left( \int_{i, \operatorname{Re}(z)=0}^{iM} + \int_{iM, z \in C_+(M)}^M \right) U_{\lambda, -\lambda}(u, s, z) dz, \quad (3.27)$$

Сгруппируем интегралы в формуле (3.27) иным образом

$$\begin{aligned} D(u, s; M) &= \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda \int_{i, z \in C_+}^{-i} U_{\lambda, \lambda}(u, s, z) dz + \\ &+ \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda \left( \int_{iM, z \in C_+(M)}^M U_{\lambda, -\lambda}(u, s, z) dz + \int_{-iM, z \in C_+(M)}^M U_{\lambda, \lambda}(u, s, z) dz \right) + \\ &+ \left( \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda \int_{i, \operatorname{Re}(z)=0}^{iM} U_{\lambda, -\lambda}(u, s, z) dz + \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda \int_{-i, \operatorname{Re}(z)=0}^{-iM} U_{\lambda, \lambda}(u, s, z) dz \right) \equiv \\ &\equiv D^{(1)}(u, s) + D^{(2)}(u, s; M) + D^{(3)}(u, s; M), \end{aligned} \quad (3.28)$$

где в последней строке введены обозначения для выражений в соответствующих строках, согласно порядку их записи. Рассмотрим вклады этих групп слагаемых по отдельности.

Начнём с последней группы. Сделаем замену переменной  $z \rightarrow -z$  в интегралах второй суммы этой группы. Ввиду  $(-z)^\lambda = -z^\lambda$  при  $\lambda = \pm 1$ , выполняется

$$\begin{aligned} U_{\lambda, -\lambda}(u, s, -z) &= -z^{-1} (-i\lambda + (-z)^\lambda) \exp[is\lambda(-z)^\lambda] \exp[-i\lambda(u/2)(-z)^{-\lambda}] = \\ &= -z^{-1} (-i\lambda - z^\lambda) \exp[-is\lambda z^\lambda] \exp[i\lambda(u/2)z^{-\lambda}] = \\ &= z^{-1} (i\lambda + z^\lambda) \exp[-is\lambda z^\lambda] \exp[i\lambda(u/2)z^{-\lambda}] = U_{\lambda, \lambda}(u, s, z). \end{aligned}$$

Следовательно, при таком преобразовании, вторая сумма преобразуется в первую сумму выражения  $D^{(3)}(u, s; M)$ , взятую с обратным знаком. Поэтому последняя группа интегралов в (3.28) даёт нулевой вклад,  $D^{(3)}(u, s; M) = 0$ .

Рассмотрим далее интегралы второй группы. Пары интегралов при каждом фиксированном  $\lambda$  в этой группе представляют комплексно сопряжённые друг к другу значения. В самом деле, в этом убеждаемся, сделав замену переменной интегрирования  $z \Rightarrow z' = z^*$  во втором интеграле, заключённом в скобки и приняв во внимание, что

$$\begin{aligned} U_{\lambda, -\lambda}(u, s, z^*) &= (z^*)^{-1} (-i\lambda + (z^*)^\lambda) \exp[is\lambda(z^*)^\lambda] \exp[-i\lambda u(z^*)^{-\lambda}/2] = \\ &= (z^{-1} (i\lambda + z^\lambda) \exp[-is\lambda z^\lambda] \exp[i\lambda u z^{-\lambda}/2])^* = [U_{\lambda, \lambda}(u, s, z)]^*, \end{aligned}$$

и, поэтому,

$$\int_{iM, z \in C_+(M)}^M U_{\lambda, -\lambda}(u, s, z) dz = \int_{-iM, z \in C_+(M)}^M U_{\lambda, -\lambda}(u, s, (z')^*) (dz')^* =$$



$$= \int_{-iM, z \in C_+(M)}^M [U_{\lambda, \lambda}(u, s, z')]^* (dz')^* = \left[ \int_{-iM, z \in C_+(M)}^M U_{\lambda, \lambda}(u, s, z') dz' \right]^*.$$

Следовательно, группу интегралов  $D^{(2)}(u, s; M)$  можно представить в виде

$$D^{(2)}(u, s; M) = 2 \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda \operatorname{Re} \int_{iM, z \in C_+(M)}^M U_{\lambda, -\lambda}(u, s, z) dz.$$

Переходя к пределу  $M \rightarrow \infty$ , получаем

$$D^{(2)}(u, s) = \lim_{M \rightarrow \infty} D_2(u, s; M) = 2D_{**}(u, s). \quad (3.29)$$

Тогда, на основании Леммы 4,

$$D^{(2)}(u, s) = 2\pi\delta(s). \quad (3.30)$$

Первая группа интегралов в (3.28) преобразуется следующим образом. Введём функцию

$$D_\lambda(u, s) = \int_{-i, z \in C_+}^i z^\lambda \exp[-is\lambda z^\lambda] \exp[iu\lambda z^{-\lambda}/2] \frac{dz}{z}. \quad (3.31)$$

Выразим рассматриваемую группу интегралов в терминах этой функции

$$\begin{aligned} D^{(1)}(u, s) &= \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda \int_{i, z \in C_+}^{-i} U_{\lambda, \lambda}(u, s, z) dz = \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda \int_{i, z \in C_+}^{-i} (i\lambda + z^\lambda) \exp(-is\lambda z^\lambda + i\lambda u z^{-\lambda}/2) \frac{dz}{z} = \\ &= - \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda \left( D_\lambda(u, s) + 2 \frac{\partial}{\partial u} D_\lambda(u, s) \right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Интеграл  $D_\lambda(u, s)$  обладает свойством

$$D_{-\lambda}^*(u, s) = -D_\lambda(u, s),$$

в котором легко убедиться, переходя к интегрированию по  $\varphi = \arg z, z = e^{i\varphi}$ ,

$$D_\lambda(u, s) = i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\lambda\varphi} \exp[-is\lambda e^{i\lambda\varphi}] \exp[iu\lambda e^{-i\lambda\varphi}/2] d\varphi.$$

Указанное свойство позволяет избавиться от суммирования по  $\lambda$  в (3.31) и написать

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \lambda D_\lambda(u, s) = 2\operatorname{Re} D_1(u, s),$$



$$D^{(1)}(u, s) = -2\operatorname{Re} \left( D_1(u, s) + 2\frac{\partial}{\partial u} D_1(u, s) \right) =$$

$$= -2 \left( D_*(u/2, s) + 2\frac{\partial}{\partial u} D_*(u/2, s) \right) = -2QD_*(u, s).$$

где мы воспользовались определением (3.10). Отсюда и из формул (3.28),(3.30) вместе с равенством  $D^{(3)}(u, s) = 0$ , мы приходим к выводу о справедливости формулы (3.26). ■

**Теорема 4.** *Плотность распределения  $q(x, t)$  определяется формулой*

$$q(t + x/\alpha, x) = \frac{1}{2}e^{-\nu x/\alpha} \left[ \delta(t) + \right.$$

$$\left. + e^{-\nu t}\theta(t) \left( I_0 \left( 2\nu\sqrt{xt/\alpha} \right) + \sqrt{x/\alpha t} I_1 \left( 2\nu\sqrt{xt/\alpha} \right) \right) \right]. \quad (3.33)$$

□ Заметим, что вероятность  $Q(t, x) = \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) \geq x\}$  равна нулю при  $t < x/\alpha$ , так как не существует траекторий случайного процесса  $\langle \tilde{\zeta}(t); t \in \mathbb{R} \rangle$ , для которых реализуется случайное время  $\tilde{\tau}(x) < x/\alpha$ . Кроме того, для  $t > x/\alpha$ , вероятность  $Q(t, x) \geq e^{-\nu x/\alpha}/2 > 0$ . Поэтому, функция распределения  $Q(t, x)$  и, следовательно, её плотность  $q(t, x)$  пропорциональны  $\theta(t - x/\alpha)$ .

На основании Леммы 5 и Следствия Леммы 3, используя формулы (3.18) и (3.26), находим, что справедлива формула

$$q_*(u, s) = \frac{1}{4\pi} e^{-(s+u/2)} D(u, s) \quad (3.34)$$

для любого  $\delta > 0$ , где функция  $D(u, s)$  определяется (3.25). Рассмотрим сумму интегралов

$$\sum_{\lambda, \mu = \pm 1} \lambda \int_0^M \left( \lambda + \frac{i\mu + v}{\sqrt{v^2 - 1 + i0}} \right) \exp \left[ -is\mu \left( v + \lambda\sqrt{v^2 - 1 + i0} \right) \right] \times$$

$$\times \exp \left[ i\mu(u/2) \left( v - \lambda\sqrt{v^2 - 1 + i0} \right) \right] dv. \quad (3.35)$$

Малые смещения  $+i0$  переменной интегрирования  $v$  в подкоренных выражениях в комплексной плоскости производятся с целью однозначного выбора ветви квадратного корня в подинтегральном выражении. Эта ветвь выбирается таким образом, чтобы значения квадратного корня  $\sqrt{v^2 - 1}$  было положительным при  $v^2 > 1$ . При этом разрез на комплексной плоскости  $v$  проходит по отрезку  $[-1, 1]$  действительной оси.

Произведём замену переменной интегрирования  $z = v + \sqrt{v^2 - 1 + i0}$ , для которой  $z^{-1} = v - \sqrt{v^2 - 1 + i0}$ ,  $v = (z^2 + 1)/2z$ ,  $dv = [(z^2 - 1)/2z^2] dz$  в интегралах этой суммы так, что интегралы по  $v$  от точки 1 до  $M$  перейдут в интегралы по  $z$  по тому же отрезку, а интегралы по  $v$  от 0 до 1, когда  $z = v + \sqrt{-|1 - v^2| + i0} = v + i\sqrt{|v^2 - 1|}$ ,  $|z|^2 = 1$ , перейдут в интегралы по  $z$  по дуге  $C_+$  от точки  $i$  до точки 1. В результате такой замены, рассматриваемая сумма интегралов превращается в сумму интегралов, стоящую в



правой части формулы (3.25), которая определяет функцию  $D(u, s; M)$ . Поэтому, сумма (3.35) равна указанной функции,

$$D(u, s; M) = \sum_{\lambda, \mu=\pm 1} \int_0^M \left( 1 + \frac{\lambda(i\mu + v)}{\sqrt{v^2 - 1 + i0}} \right) \exp \left[ -is\mu \left( v + \lambda\sqrt{v^2 - 1 + i0} \right) \right] \times \\ \times \exp \left[ i\mu(u/2) \left( v - \lambda\sqrt{v^2 - 1 + i0} \right) \right] dv. \quad (3.36)$$

Заменим переменные суммирования в правой части равенства  $\lambda\mu \Rightarrow \lambda$ ,

$$D(u, s; M) = \sum_{\lambda, \mu=\pm 1} \int_0^M \left( 1 + \frac{\lambda(i + \mu v)}{\sqrt{v^2 - 1 + i0}} \right) \exp \left[ -is \left( \mu v + \lambda\sqrt{v^2 - 1 + i0} \right) \right] \times \\ \times \exp \left[ i(u/2) \left( \mu v - \lambda\sqrt{v^2 - 1 + i0} \right) \right] dv \quad (3.37)$$

и выполним суммирование по  $\mu$ . Это достигается заменой переменной интегрирования  $v \Rightarrow -v$  в интеграле со значением  $\mu = -1$ .<sup>¶</sup> При этом интеграл с указанным значением  $\mu$  переходит в интеграл со значением  $\mu = 1$ , но по полюсы  $v \in (-\infty, 0]$ . Сумма по  $\mu$  получается сложением обоих интегралов и, поэтому,<sup>||</sup>

$$D(u, s; M) = \sum_{\lambda=\pm 1} \int_{-M}^M \left( 1 + \frac{\lambda(i + v)}{\sqrt{v^2 - 1 + i0}} \right) \exp \left[ -is \left( v + \lambda\sqrt{v^2 - 1 + i0} \right) \right] \times \\ \times \exp \left[ i(u/2) \left( v - \lambda\sqrt{v^2 - 1 + i0} \right) \right] dv \quad (3.38)$$

или, после преобразования подынтегрального выражения,

$$D(u, s; M) = \sum_{\lambda=\pm 1} \int_{-M}^M \exp[iv(u/2 - s)] \left( 1 + \frac{\lambda(i + v)}{\sqrt{v^2 - 1 + i0}} \right) \times \\ \times \exp \left[ -i\lambda(u/2 + s)\sqrt{v^2 - 1 + i0} \right] dv =$$

<sup>¶</sup>Заметим, что в интеграле по отрезку  $[1, M]$  смещение пути интегрирования на  $i0$  можно опустить, так как разрез нами проведен по положительной полуоси и на отрицательной оси квадратный корень определен однозначно.

<sup>||</sup>Заметим, что каждое из слагаемых в подынтегральном выражении в (3.38) ведёт себя различным образом при  $v \rightarrow \infty$  и  $v \rightarrow -\infty$ . В одном случае стремится к нулю и, тем самым, даёт сходящееся выражение на соответствующем пределе интегрирования, а в другом случае – приводит к расходимости интеграла. Поэтому, при исследовании характера этой расходимости, удобно представить его в виде

суммы  $\int_{-M}^M = \int_0^M + \int_{-M}^0$ .





$$= 2 \int_{-M}^M \exp[iv(u/2 - s)] \left( \cos \left[ (u/2 + s) \sqrt{v^2 - 1 + i0} \right] - \frac{iv - 1}{\sqrt{v^2 - 1 + i0}} \sin \left[ (u/2 + s) \sqrt{v^2 - 1 + i0} \right] \right) dv,$$

Используя это интегральное представление, на основании формулы (3.34), получаем

$$q_*(u, s - u/2) = \frac{e^{-s}}{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \exp[iv(u - s)] \left( \cos \left[ s \sqrt{v^2 - 1 + i0} \right] + \frac{1 - iv}{\sqrt{v^2 - 1 + i0}} \sin \left[ s \sqrt{v^2 - 1 + i0} \right] \right) dv \quad (3.39)$$

для  $s \in (-\delta, \infty)$ . Здесь предел понимается в слабом смысле. Он определяет обобщённую функцию над пространством ограниченных непрерывных функций, которая содержит  $\delta$ -функционную особенность. Заметим, что в этой формуле смещение  $i0$  можно опустить, так как оба слагаемых в подынтегральном представлении являются чётными функциями относительно  $\sqrt{v^2 - 1 + i0}$  и, поэтому, на самом деле, точки ветвления в подынтегральном выражении отсутствуют. Опустив эти смещения, перейдём в интегральном представлении (3.39) к интегрированию по оси  $\{y = iv + 0; v \in \mathbb{R}\}$ ,

$$\begin{aligned} q_*(u, s - u/2) &= \frac{e^{-s}}{2\pi i} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-iM+0}^{iM+0} \exp[y(u-s)] \left( \operatorname{ch} \left[ s \sqrt{y^2 + 1} \right] + \frac{1 - y}{\sqrt{y^2 + 1}} \operatorname{sh} \left[ s \sqrt{y^2 + 1} \right] \right) dy = \\ &= \frac{e^{-s}}{2\pi i} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial u} \int_{-iM+0}^{iM+0} \exp[y(u-s)] \left( \operatorname{ch} \left[ s \sqrt{y^2 + 1} \right] + \frac{1 - y}{\sqrt{y^2 + 1}} \operatorname{sh} \left[ s \sqrt{y^2 + 1} \right] \right) \frac{dy}{y} = \\ &= \frac{e^{-s}}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial u} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \exp[y(u-s)] \left( \operatorname{ch} \left[ s \sqrt{y^2 + 1} \right] + \frac{1 - y}{\sqrt{y^2 + 1}} \operatorname{sh} \left[ s \sqrt{y^2 + 1} \right] \right) \frac{dy}{y}, \quad (3.40) \end{aligned}$$

где производная от интеграла в бесконечных пределах, понимаемого как слабый предел при  $M \rightarrow \infty$ , является производной от обобщённой функции, которая определяется этим пределом. Выразим плотность распределения в переменных  $s = \nu t$  и  $u = 2x\nu/\alpha$ ,  $\partial(\cdot)/\partial u = (\alpha/2\nu)\partial(\cdot)/\partial x$ . В результате, после замены переменной интегрирования  $2\nu y/\alpha \Rightarrow y$ , представим плотность  $q(x, t)$  в следующем виде

$$\begin{aligned} \nu q_*(2\nu x/\alpha, \nu(t - x/\alpha)) &= \alpha \frac{e^{-\nu t}}{4\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \exp[y(x - \alpha t/2)] \left( \operatorname{ch} [t \omega(y)] + \frac{\nu - \alpha y/2}{\omega(y)} \operatorname{sh} [t \omega(y)] \right) \frac{dy}{y}, \quad (3.41) \end{aligned}$$



где мы воспользовались формулой (2.7),

$$\omega(y) = (\nu^2 + (\alpha y/2)^2)^{1/2}.$$

Сравнивая правую часть формулы (3.41) с правой частью формулы (3.3) при  $x = E$  и  $t > -0$ , где плотность  $q(x, t)$  отлична от нуля, находим, что

$$q(t, x) = \nu q_*(2\nu x/\alpha, \nu(t - x/\alpha)).$$

Подставив явное выражение (3.8) плотности  $q_*(u, s)$  и учитывая  $\nu\delta(\nu t) = \delta(t)$ , получаем, при указанных выражениях  $u$  и  $s$ , формулу (3.33). ■

### Литература

1. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах / М.: Наука, 1980.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т.1 / М.: Наука, 1971.– 664 с.
3. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьёв А.Д. Математические методы в теории надёжности / М.: Наука, 1965.
4. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике / М.: Мир, 1965.
5. Дынкин Е.Б. Функционалы от траекторий марковских случайных процессов // Докл.АН СССР. –1955. – Вып.104, №5. – С.691-694.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т.2 / М.: Мир, 1984. – 715 с.
7. Гнеденко Б.В., Курс теории вероятностей / М.: Наука, 1969.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений / М.: Наука, 1971.

### PROBABILITY DISTRIBUTION OF FIRST PASSAGE TIME OF ENERGY FUNCTIONAL ON DICHOTOMIC RANDOM PROCESS TRAJECTORIES

M.I. Abramova, Yu.P. Virchenko

Belgorod National Research University,  
e-mail: [abramova\\_m@bsu.edu.ru](mailto:abramova_m@bsu.edu.ru)

**Abstract.** Probability distribution  $Q(t, E)$  of random first passage time  $\tilde{\tau}(E)$  of level  $E$  attainment of energy functional  $\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi})$  is studied. Specified problem is investigated when the intensity  $\tilde{\xi}(t) = d\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi})/dt$  is the dichotomic random process. For the density  $q(t, E) = dQ(x, t)/dt$ , the integral representation is found in terms of special functions.

**Key words:** instant of level attainment, dichotomic process, first passage time problem, integral approximation, markovian process, probability distribution density, energy functional.



MSC 74S05

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОЙСТВ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ ЧАСТИЦАМИ

\*М.М. Ошхунов, \*\*З.В. Нагоев

\*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,  
ул. Чернышевского, 173, Нальчик, 360004, Россия, e-mail: muaed@inbox.ru

\*\*Кабардино-Балкарский научный центр РАН,  
ул. И.Арманд, 37а, Нальчик, 360000, Россия, e-mail: zaliman@mail.ru

**Аннотация.** В работе предлагается альтернативный подход к проблемам моделирования в области механики деформируемого твердого тела. Суть подхода состоит в замене сплошной деформируемой среды эквивалентной по физико-механическим свойствам системой взаимодействующих частиц. Решение для этих частиц системы обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом фактора затухания приводит в предельном случае к статическим задачам механики деформируемого твердого тела, в частности, задачам классической теории упругости. Такой подход позволяет, меняя потенциал взаимодействия между частицами, имитировать такие свойства деформируемых сред, как упругость, пластичность, вязко-упругость и т.д. Кроме того, появляется возможность смоделировать такой фактор как большие деформации, когда физическая и геометрическая нелинейность среды весьма существенны. Приводятся расчеты и сравнения с точным решением некоторых задач теории упругости (задача о деформации подвешенной упругой балки под действием гравитации, задача о прогибе балки при различных условиях опирания и т.д.). Результаты численных экспериментов по предлагаемому алгоритму показали его эффективность, т.к. появляется возможность учесть в рамках единого подхода такие факторы, как физическая и геометрическая нелинейность, большие перемещения и деформации, динамические эффекты и т.д.

**Ключевые слова:** метод динамических частиц, упругость, пластичность, геометрическая и физическая нелинейность, итерационные методы, метод конечных элементов.

Как известно [1], основные уравнения теории упругости в перемещениях имеют вид

$$G\Delta u_i + (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + X_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \lambda = K - \frac{2}{3}G > 0, \quad (1)$$

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

Математическая модель для динамических задач теории упругости, согласно вто-



рому закону Ньютона, очевидно, запишется в виде:

$$\begin{aligned}
 G\Delta u_i + (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + X_i &= \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3, \\
 \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \lambda = K - \frac{2}{3}G, \\
 \theta &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Естественно, для решения системы уравнений (??) наряду с краевыми условиями необходимо задать начальные условия вида:

$$\begin{aligned}
 u_i(x_1, x_2, x_3, t)_{(t=0)} &= u_i^0(x_1, x_2, x_3), \\
 \dot{u}_i(x_1, x_2, x_3, t)_{(t=0)} &= v_i^0(x_1, x_2, x_3).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $v_i^0$  – скорость частиц сплошной среды в момент времени  $t = 0$ ,  $u_i^0$  – начальное перемещение точки области в тот же момент времени,  $\dot{u}_i(x_1, x_2, x_3, t)$  означает производную по времени от перемещения точки в трех направлениях.

Отметим отдельно постановку тепловых задач теории упругости. Если справедлив экспериментальный закон Дюгамеля-Неймана о линейном расширении объема сплошной среды в результате действия температуры, то закон Гука в этих условиях запишется в виде:

$$\sigma_{ij} - K(\theta - 3\alpha T) \delta_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} - \frac{\theta}{3} \delta_{ij} \right). \tag{4}$$

Здесь  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения упругой сплошной среды под действием температурного поля  $T = T(x_1, x_2, x_3)$ . Подстановка выражения (4) в основные уравнения вида (1) приводит к системе дифференциальных уравнений в частных производных с правой частью, зависящей от градиента температурного поля  $T$  и коэффициента линейного расширения  $\alpha$ .

Геометрически нелинейными моделями теории упругости традиционно называют модели, учитывающие большие деформации, которые могут достигать до 100 процентов и больше. При этом определяющие законы также становятся нелинейными, т.е. нельзя считать их удовлетворяющими закону Гука. В классической теории упругости при малых деформациях не различаются системы координат до и после деформации. Кроме того, в формулах Коши, связывающих компоненты тензора деформации с перемещениями, учитывается только линейные члены. В случае геометрически нелинейной модели механики деформируемого твердого тела формулы для вычисления деформации через перемещения учитывают также квадратичные слагаемые. Формула Коши в этом случае запишется в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3. \tag{5}$$

В отличие от классической модели теории упругости геометрически нелинейные модели обладают свойством неединственности решения в состоянии равновесия. Для



определения положения сплошной среды после приложения значительных нагрузок поступают следующим образом. Прикладывают к деформируемой конструкции внешнюю нагрузку малыми дозами, определяя каждый раз новое положение ее равновесия. Такой процесс завершается, когда будет достигнута заданная нагрузка и при этом будет найдено положение конструкции после приложения внешних сил. Такой подход позволяет линеаризовать задачу для каждого шага нагружения. Однако, математическое исследование существования и единственности решения, полученного таким способом, является трудной проблемой. Следует отметить, что геометрически нелинейные задачи являются также и физически нелинейными и их решение даже с применением математических и компьютерных методов является весьма сложной задачей.

Для описания свойств деформируемых сплошных сред под действием нагрузок можно использовать дискретно-динамическую модель частиц аналогично тому, как это делается в классической теории упругости. Основная идея метода динамических частиц [2] состоит в замене упругой сплошной среды системой взаимодействующих между собой частиц, жесткостные свойства которых эквивалентны физико-механическим характеристикам изучаемой реальной среды. При таком подходе необходимо рассредоточить общую массу сплошной среды по дискретным точкам. Сопротивление на растяжение и сжатие образца, выполненного из таких дискретных частиц, должно быть эквивалентно по физико-механическим свойствам реальному сопротивлению сплошного прототипа. Кроме того, дискретный образец должен обладать свойством поперечного сокращения при растяжении, т.е. иметь определенный коэффициент Пуассона. После такой замены реальной сплошной среды можно изучить динамические свойства дискретной системы на основе уравнений второго закона Ньютона с учетом затухания колебательного процесса. Тогда стационарное, не зависящее от времени, состояние дискретной системы под действием различных нагрузок будет соответствовать реальному статическому состоянию деформируемой среды под действием тех же нагрузок. В этом состоит основная идея метода дискретных динамических частиц.

В связи с предлагаемой моделью, следует изучить следующие вопросы. Так как сплошная упругая среда заменяется системой взаимодействующих частиц, необходимо найти эквиваленты таким упругим константам как модуль Юнга, коэффициент Пуассона, модуль сдвига и модуль объемного расширения для изотропной сплошной среды. В рамках этой модели также необходимо проанализировать вопросы деформирования неупругих сплошных сред при малых и больших деформациях. Известно, что эти задачи (физически и геометрически нелинейные проблемы теории упругости) являются математически весьма сложными ввиду их существенной нелинейности. Нам представляется, что эти задачи могут быть решены по единому алгоритму, если будут должным образом выбраны силы взаимодействия между дискретными частицами, имитирующими физическую нелинейность, т.е. отклонение от закона Гука. Кроме того, на наш взгляд, не потребуются дополнительных усилий, чтобы учесть большие перемещения сплошной среды под действием внешних нагрузок. Наконец, динамические задачи теории упругости, которые являются весьма сложными, могут быть решены без дополнительных усилий, так как метод дискретных динамических частиц позволяет находить состояния ансамбля частиц в любой момент времени.

Перечисленные выше преимущества метода делают его весьма актуальным и общим для решения любых задач механики деформируемого твердого тела, включая задачи классической теории упругости, когда выполняется закон Гука, физически нелинейные задачи при малых деформациях, когда не имеет место закон Гука, геометрически нелинейные задачи, когда деформации сплошной среды могут быть большими, а физико-механические свойства - нелинейными, а также динамические задачи теории упругости.

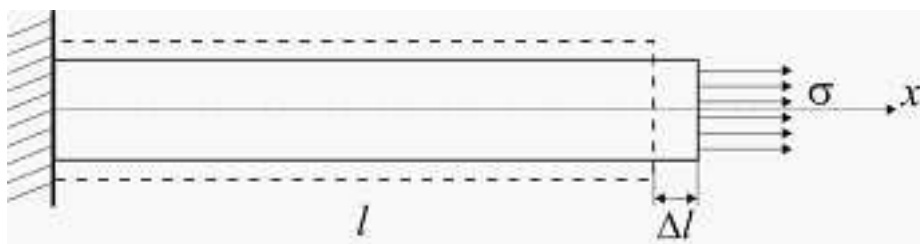


Рис. 1. Растяжение образца:  $\sigma = F/S$ ,  $F$  – растягивающая сила,  $S$  – сечение (после растяжения),  $\varepsilon = \Delta l/l$  – деформация образца.

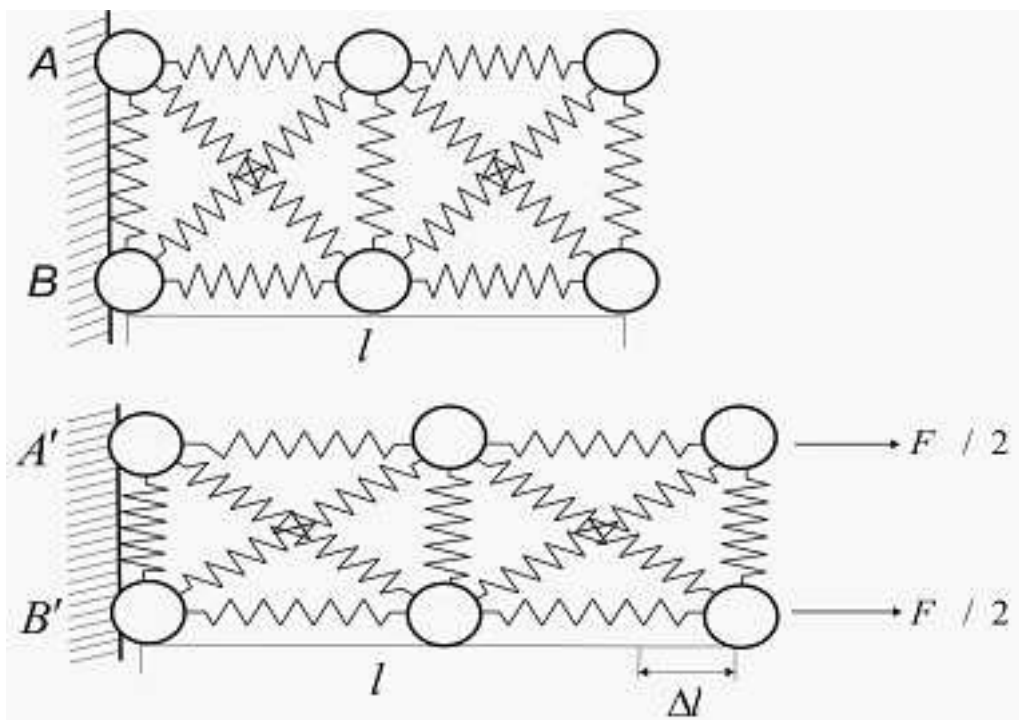


Рис. 2. Схема плоского деформирования сплошной среды, представленной прямоугольной системой дискретных частиц до- и после приложения нагрузки.

Требует отдельного исследования вопрос интерпретации модуля Юнга, коэффициента Пуассона, модуля сдвига, коэффициента объемного расширения, которые играют ключевую роль в математической модели классической теории упругости. Вначале рассмотрим вопрос об определении дискретно-динамических аналогов наиболее часто ис-



пользуемых в теории упругости физико-механических коэффициентов – модуля Юнга и коэффициента Пуассона.

Обычно, в теории упругости определяют модуль Юнга упругой сплошной среды как коэффициент жесткости между напряжением (силой, приходящейся на единицу площади) и деформацией (относительным удлинением) образца (рис. 1).

Таким образом, модуль Юнга определяется согласно закону Гука по формуле:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} . \quad (6)$$

В соответствии с вышеизложенным, аналогом модуля Юнга в двумерных задачах теории упругости, когда дискретизации среды осуществляется по одной из прямоугольных схем, может служить жесткость взаимодействия материальных частиц при их растяжении или сжатии (рис. 2).

Как следует из рис. 2, образец при растяжении несколько сокращается в поперечном направлении из-за растяжения диагональных пружин, что говорит о наличии аналога коэффициента Пуассона для данной модели. Предполагается, что точки закрепления А и В свободно перемещаются по вертикальной оси (в реальных экспериментах для определения модуля Юнга образец берут достаточно длинным и, в соответствии с принципом Сен-Венана. Способ закрепления образца не влияет на его деформацию при достаточном удалении. Таким образом, в предлагаемой модели:

$$\sigma = F/S , \quad \varepsilon = \Delta l/l , \quad \sigma = \tilde{E}\varepsilon . \quad (7)$$

Здесь  $\tilde{E}$  – суммарный модуль Юнга с учетом растягиваемых, в том числе и диагональных, пружин.

В качестве примера рассмотрим задачу о деформации подвешенной балки под действием гравитации. Для простоты в качестве задачи теории упругости, имеющей точное решение, выбрана задача о деформации упругой балки прямоугольного сечения под действием вертикальной гравитационной силы. Балка может быть подвешена или опираться на основании в единственной точке. Согласно принципу Сен-Венана и принципу суперпозиции упругих решений локальные вариации граничных условий не влияют на перемещение точек сплошной среды в достаточном отдалении от точки закрепления при условии, что главный суммарный вектор сил по вертикали не меняется. Это означает, что при дискретно-динамическом моделировании граничных условий имеется некоторая свобода: можно подвесить балку, состоящую из частиц, в районе торца за одну точку (частицу) или закрепить все частицы, моделирующие торцевую область балки. Согласно принципу Сен-Венана вне зависимости от способа закрепления упругие перемещения вдали от границы не должны существенно меняться (рис. 3).

Точное решение задачи о перемещениях упругой балки, подвешенной в одной центральной точке торца (рис. 4) имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= \frac{v}{E}\rho g(z-l)x, \\ v &= \frac{v}{E}\rho g(z-l)y, \\ w &= -\frac{\rho g}{2E}\{z^2 + v(x^2 + y^2) - 2lz\}. \end{aligned} \quad (8)$$



Здесь  $l$  – длина балки,  $\rho$  – ее массовая плотность,  $g$  – ускорение свободного падения,  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, ось  $Oz$  направлена вниз по центру балки,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – перемещения точек сплошной среды в направлениях  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

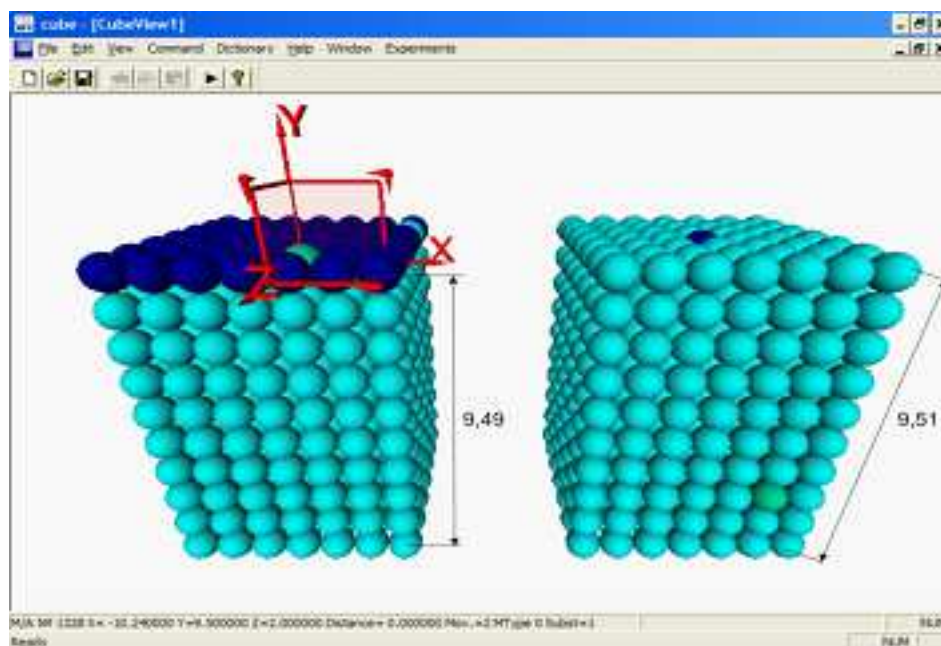


Рис. 3. Два варианта закрепления торца упругой призматической балки: (а) – закреплены все точки верхнего торца, (б) – закреплена единственная центральная точка.

Как следует из формул (8), наибольшее вертикальное перемещение оси упругой балки имеет место при  $z = l$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  и равно

$$w = \frac{\rho g l^2}{2E}. \quad (9)$$

Заметим, что решение задачи об опирании балки прямоугольного сечения в нижней точке может быть легко получено видоизменением формул (8). Формула (9) позволяет вычислить один из параметров дискретно-динамической модели, а именно, модуль Юнга, если известно смещение нижнего торца балки длины  $l$  и плотности  $\rho$  с заданными жесткостными характеристиками. Считается, что модулю Юнга в классической теории упругости соответствует тангенсу угла наклона кривой, описывающей связь «напряжение-деформация» между макрочастицами.

В рассмотренной нами дискретно-динамической модели упругая балка аппроксимировалась 490 пространственными частицами, т.е. решалась система  $N = 490 \times 3 \times 2 = 2940$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге-Кутты. Так как данным методом решается задача о трехмерном движении системы из 490 частиц с учетом затухания, статическое состояние балки определялось как предельное по времени. Очевидно, что такое предельное состояние частиц будет соответствовать статическому решению задачи теории упругости о деформации балки под действием силы тяжести или собственного веса. Кроме того сравнивались перемещения



поверхности балки после приложения гравитации по классической теории упругости и на основе численных решений уравнений динамики дискретных частиц.

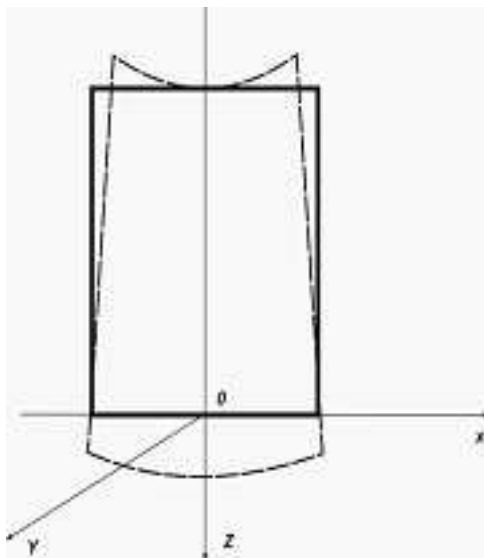


Рис. 4. Деформация подвешенной упругой балки под действием гравитационных сил, направленных по оси  $OZ$ .

На рис. 4 пунктирной линией показана качественная картина перемещения поверхности упругой балки в поле тяжести в соответствии с точным решением классической задачи теории упругости. Расчет перемещений граничных частиц балки дискретно-динамическим методом дает приблизительно такую же картину (рис. 5). Как видно из рисунка, верхний торец балки под действием сил гравитации сужается, а нижний – расширяется.

В рамках дискретно-динамической модели осуществлялась также проверка справедливости принципа Сен-Венана для данной задачи. Расчеты показали, что локальное изменение граничных условий, например, закрепление только единственной частицы, или закрепление целого слоя частиц в верхнем торце призматического бруса не отражается существенно на перемещениях точек вдали от верхней плоскости.

В заключении отметим, что дискретно-динамическое представление сплошной среды требует дальнейшего глубокого изучения и анализа. В частности, следует разработать алгоритм нахождения аналога модуля Юнга и коэффициента Пуассона – коэффициента поперечного сокращения для изотропной упругой сплошной среды при различных дискретных решетках. Подчеркнем, что основной идеей метода динамических частиц является замена сплошной среды эквивалентной по жесткостным характеристикам дискретной структурой. Изучение динамических свойств такой структуры позволит с единых позиций ответить на многие вопросы, которые являются весьма сложными и специфическими в рамках классической модели упругости.

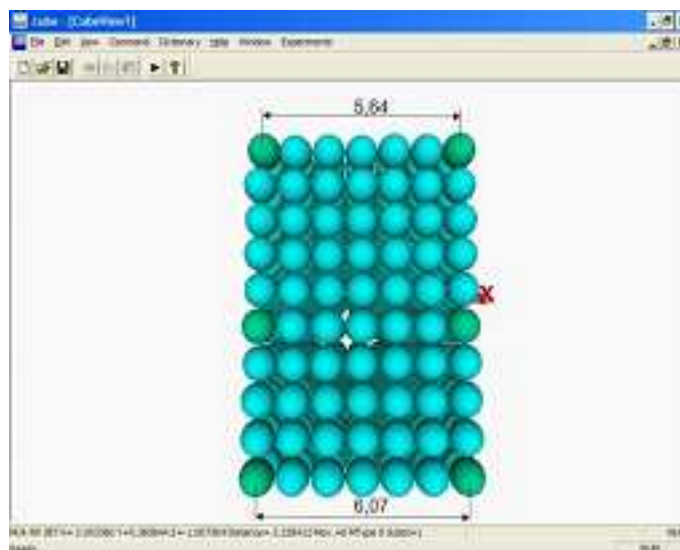


Рис. 5. Перемещения граничных частиц балки под действием сил гравитации.

### Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.Н. Теория упругости. – М.: Наука, 1965. – 231 с.
2. Нагоев З.В., Ошхуннов М.М. Метод дискретно-динамических частиц в задачах механики деформируемого твердого тела // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2011. – №4. – С.155-169.

### MODELING THE DEFORMABLE MEDIUM PROPERTIES BY INTERACTING PARTICLES

\*М.М. Oshkhunov, \*\*Z.V. Nagoev

\*Kabardino-Balkarian State University of H.M. Berbekov,  
Chernishevskogo St., 173, Nal'chik, 360004, Russia, e-mail: muaed@inbox.ru

\*\*Kabardino- Balkarian Scientific Center of Russian Academy of Sciences,  
I.Armand St., 37a, Nalchik, 360000, Russia, e-mail: zaliman@mail.ru

**Abstract.** Alternative approach to modeling to solve of solid mechanics problem is proposed. The approach consists of change of continuous deformable medium by corresponding system of interacting particles having equivalent physical and mechanical properties. The solution of corresponding ordinary differential equations system with the damping factor results in the limiting case of static problems of solid mechanics, in particular, the problems of classical elasticity theory. Changing of interaction potential between particles, this approach allows the to mimic the properties of deformable media such as elasticity, plasticity, visco-elasticity, etc. In addition, it is possible to model such a factor as large deformations when the physical and geometric nonlinearity of the medium is very important. Some calculations and comparisons with the exact solution of some problems of the theory of elasticity (the problem of deformation of a suspended elastic beam under the influence of gravity, the problem of deflection of the beam under different support conditions etc.) are given. The results of numerical experiments according to the proposed algorithm has shown its effectiveness since it is possible to consider in frames of unique approach such factors as physical and geometric nonlinearities, large displacements and deformations and dynamic effects etc.

**Key words:** dynamic particles method, elasticity, plasticity, geometric and physical nonlinearity, iterative methods, finite element method.



MSC 74F15

## МЕТОД ОТРАЖЕНИЙ В ОПИСАНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРЕ

В.В. Сыщенко, Э.А. Ларикова

Белгородский государственный университет,  
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия

**Аннотация.** Рассмотрено излучение, возникающее при падении равномерно движущейся нерелятивистской заряженной частицы на идеально проводящую сферу. С помощью метода электростатических изображений получены формулы, описывающие характеристики переходного излучения.

**Ключевые слова:** переходное излучение, метод изображений.

**Введение.** При пересечении заряженной частицей границы раздела двух сред с различными электромагнитными свойствами возникает так называемое переходное излучение. С математической точки зрения, причина его возникновения заключается в том, что удовлетворить граничным условиям для создаваемых частицей в этих двух средах полей возможно лишь, добавив к общему решению уравнений Максвелла решение свободных уравнений (уравнений без зарядов и токов), представляющее собой электромагнитные волны, составляющие поле излучения (см., например, [1]).

В некоторых простейших случаях найти решение уравнений Максвелла, удовлетворяющее граничным условиям, можно с помощью так называемого метода изображений, основанного на теореме единственности (см., например, [2]). В частности, излучение, возникающее при падении заряженной частицы на идеально проводящую плоскость, может трактоваться как излучение, возникающее при мгновенном исчезновении заряда и его «отражения», движущихся навстречу друг другу. Именно такой подход к описанию переходного излучения был использован в пионерской работе В.Л. Гинзбурга и И.М. Франка [3].

В настоящей статье мы используем метод изображений для нахождения спектра переходного излучения, возникающего при пролете нерелятивистской заряженной частицы сквозь идеально проводящую сферу. Ранее данный подход был использован в [4] для исследования дифракционного излучения, возникающего при пролете частицы мимо такой сферы.

**Метод исследования.** Спектрально-угловая плотность излучения заряженной частицы описывается формулой [5]

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{4\pi^2 c} |[\mathbf{k}, \mathbf{I}]|^2, \quad (1)$$



где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор излученной волны,  $c$  — скорость света в вакууме

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{\infty} e \mathbf{v}(t) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t))} dt, \quad (2)$$

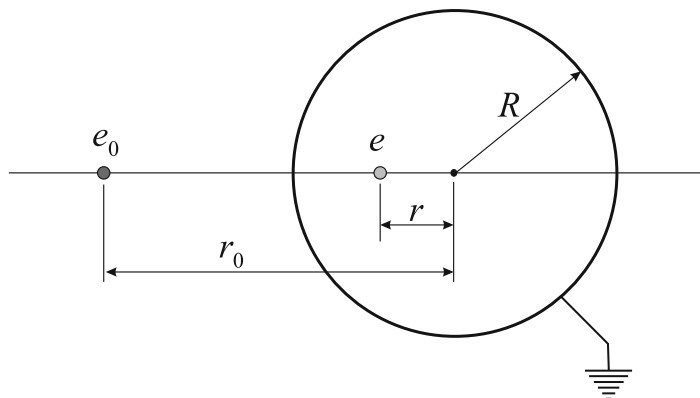


Рис. 1. К методу отражений: положения реального заряда  $e_0$  и его «отражения»  $e$  относительно заземленной проводящей сферы радиуса  $R$ .

$e$  — заряд частицы,  $\mathbf{r}(t)$  — её траектория,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Рассмотрим излучение, возникающее при падении прямолинейно равномерно движущейся нерелятивистской заряженной частицы на идеально проводящую сферу. Причиной возникновения переходного излучения является неоднородность среды, сквозь которую движется частица, в данном случае — наличие проводящей сферы. Найти решение уравнений поля, удовлетворяющее граничным условиям на сфере, можно с помощью следующего формального приёма, основанного на теореме единственности [2].

Электрическое поле, создаваемое точечным зарядом  $e_0$ , помещенным на расстоянии  $r_0$  от центра идеально проводящей заземленной сферы радиуса  $R$  оказывается (в наружной области сферы) эквивалентным суперпозиции кулоновских полей заряда  $e_0$  и фиктивного заряда  $e$ , помещенного на прямой, соединяющей реальный заряд  $e_0$  и центр сферы, на расстоянии  $r$  от центра сферы (рис. 1), причем

$$r = \frac{R^2}{r_0}, \quad e = -e_0 \sqrt{\frac{r}{r_0}} = -e_0 \frac{R}{r_0}. \quad (3)$$

Легко проверить, что в этом случае потенциал, создаваемый двумя зарядами на поверхности сферы, будет равен нулю. В случае не заземленной, а изолированной сферы следует добавить еще фиктивный заряд величиной  $-e$  в центр сферы.

Введем систему координат, в которой начало координат совпадает с центром сферы, ось  $z$  направлена вдоль скорости налетающей частицы  $\mathbf{v}_0$ , а ось  $x$  лежит в плоскости, содержащей траекторию налетающей частицы и центр сферы (рис. 2), так что расстояние между пролетающей частицей и центром сферы будет равно

$$r = \sqrt{b^2 + v_0^2 t^2},$$

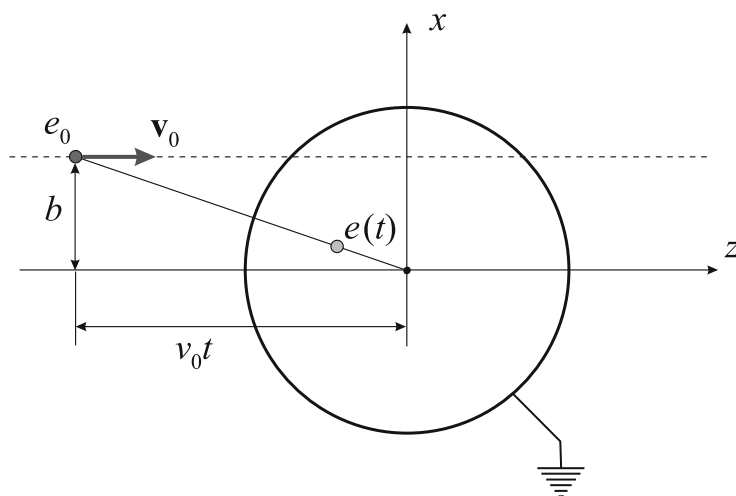


Рис. 2. Заряд  $e_0$ , проникающий сквозь сферу под прицельным параметром  $b$ , и его «отражение».

где момент времени  $t = 0$  соответствует наибольшему сближению частицы с центром сферы. Тогда, согласно (3), величина и координаты фиктивного заряда будут определяться соотношениями

$$e(t) = -e_0 \frac{R}{\sqrt{b^2 + v_0^2 t^2}}, \quad x(t) = \frac{R^2 b}{b^2 + v_0^2 t^2}, \quad z(t) = \frac{R^2 v_0 t}{b^2 + v_0^2 t^2}. \quad (4)$$

Компоненты скорости фиктивного заряда, согласно (4), будут равны

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{2R^2 b v_0^2 t}{(b^2 + v_0^2 t^2)^2}, \quad v_z(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{R^2 v_0 (b^2 - v_0^2 t^2)}{(b^2 + v_0^2 t^2)^2}. \quad (5)$$

Излучение, возникающее при прохождении равномерно движущегося заряда сквозь сферу, будет описываться формулами (1) и (2) с учетом вклада обоих зарядов — реального и фиктивного (легко показать, что описывающие излучение формулы (1) и (2) остаются справедливыми и для заряда переменной величины):

$$\begin{aligned} \mathbf{I} = & \int_{-\infty}^{-t_0} e_0 \mathbf{v}_0 e^{i(\omega t - k_z v_0 t)} dt + \int_{t_0}^{\infty} e_0 \mathbf{v}_0 e^{i(\omega t - k_z v_0 t)} dt + \\ & + \int_{-\infty}^{-t_0} e(t) \mathbf{v}(t) e^{i(\omega t - \mathbf{kr}(t))} dt + \int_{t_0}^{\infty} e(t) \mathbf{v}(t) e^{i(\omega t - \mathbf{kr}(t))} dt, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $t_0 = \sqrt{R^2 - b^2}/v_0$  — момент времени пересечения частицей поверхности сферы.

Подстановка формул (4) и (5) в (6) дает следующие выражения для компонент вектора  $\mathbf{I}$ :

$$I_x = 2e_0 b R^3 v_0^2 \int_{-\infty}^{-t_0} \frac{t}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \left\{ i \left[ \omega t - \frac{k_x R^2 b}{b^2 + v_0^2 t^2} - \frac{k_z R^2 v_0 t}{b^2 + v_0^2 t^2} \right] \right\} dt +$$



$$+ 2e_0 b R^3 v_0^2 \int_{t_0}^{\infty} \frac{t}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \left\{ i \left[ \omega t - \frac{k_x R^2 b}{b^2 + v_0^2 t^2} - \frac{k_z R^2 v_0 t}{b^2 + v_0^2 t^2} \right] \right\} dt, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} I_z = & e_0 v_0 \int_{-\infty}^{-t_0} e^{i(\omega t - k_z v_0 t)} dt + e_0 v_0 \int_{t_0}^{\infty} e^{i(\omega t - k_z v_0 t)} dt - \\ & - e_0 R^3 v_0 \int_{-\infty}^{-t_0} \frac{b^2 - v_0^2 t^2}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \left\{ i \left[ \omega t - \frac{k_x R^2 b}{b^2 + v_0^2 t^2} - \frac{k_z R^2 v_0 t}{b^2 + v_0^2 t^2} \right] \right\} dt - \\ & - e_0 R^3 v_0 \int_{t_0}^{\infty} \frac{b^2 - v_0^2 t^2}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \left\{ i \left[ \omega t - \frac{k_x R^2 b}{b^2 + v_0^2 t^2} - \frac{k_z R^2 v_0 t}{b^2 + v_0^2 t^2} \right] \right\} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая, что  $|\mathbf{k}| = \omega/c$ , для нерелятивистского заряда и длинноволнового предела ( $\lambda \gg R$ ) мы можем пренебречь всеми слагаемыми в показателях экспонент по сравнению с первым. В этом случае

$$I_x = 2e_0 b R^3 v_0^2 \int_{-\infty}^{-t_0} \frac{t}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \{i\omega t\} dt + 2e_0 b R^3 v_0^2 \int_{t_0}^{\infty} \frac{t}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \{i\omega t\} dt, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} I_z = & e_0 v_0 \int_{-\infty}^{-t_0} e^{i\omega t} dt + e_0 v_0 \int_{t_0}^{\infty} e^{i\omega t} dt - \\ & - e_0 R^3 v_0 \int_{-\infty}^{-t_0} \frac{b^2 - v_0^2 t^2}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \{i\omega t\} dt - e_0 R^3 v_0 \int_{t_0}^{\infty} \frac{b^2 - v_0^2 t^2}{(b^2 + v_0^2 t^2)^{5/2}} \exp \{i\omega t\} dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Легко видеть, что величина  $I_x$  является чисто мнимой, а величина  $I_z$  — вещественной. С учетом этого, подстановка в (1) дает

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} &= \frac{1}{4\pi^2 c} \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \left( |I_x|^2 + |I_z|^2 \right) - |k_x I_x + k_z I_z|^2 \right\} = \\ &= \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left\{ |I_x|^2 + |I_z|^2 - |\varkappa_x I_x + \varkappa_z I_z|^2 \right\} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left\{ (1 - \varkappa_x^2) |I_x|^2 + \varkappa_{\perp}^2 |I_z|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\varkappa = \mathbf{k}/k$ ,  $\varkappa_{\perp}^2 = \varkappa_x^2 + \varkappa_y^2$ . Интегрируя (11) по углам с учетом того, что

$$\int (1 - \varkappa_x^2) d\Omega = 4\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi,$$

$$\int \varkappa_{\perp}^2 d\Omega = \frac{8}{3}\pi,$$

получим выражение для спектральной плотности излучения:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{2\omega^2}{3\pi c^3} \left\{ |I_x|^2 + |I_z|^2 \right\}. \quad (12)$$



**Результаты исследования.** Точное вычисление входящих в (9), (10) интегралов возможно только в случае  $b = 0$  (прохождение частицы через центр сферы). В остальных случаях оказывается возможным лишь приближенное их вычисление после разложения по малому параметру. При малых  $b$  таким малым параметром оказывается величина  $b/v_0t$ . В этом случае

$$\frac{b}{v_0t_0} \ll 1 \quad (13)$$

вычисления дают

$$I_x/e_0 = iP \cos(\omega t_0) - iQ \sin(\omega t_0) + iSci(\omega t_0), \quad (14)$$

$$I_z/e_0 = -2\frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t_0) + F \cos(\omega t_0) - G \sin(\omega t_0) + Hci(\omega t_0), \quad (15)$$

где

$$P = R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \tilde{P}, \quad \tilde{P} = \frac{2}{3} \frac{b/v_0\omega}{t_0^2} \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{b^2}{v_0^2 t_0^2} + \frac{1}{8} b^2 \frac{\omega^2}{v_0^2} \right],$$

$$Q = R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \tilde{Q}, \quad \tilde{Q} = \frac{2}{3} \frac{b/v_0}{t_0} \left[ 1 - \frac{2}{t_0^2 \omega^2} + 3 \frac{b^2}{v_0^2 \omega^2 t_0^4} - \frac{1}{4} \frac{b^2}{v_0^2 t_0^2} + \frac{1}{8} b^2 \frac{\omega^2}{v_0^2} \right],$$

$$S = R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \tilde{S}, \quad \tilde{S} = \frac{2}{3} \frac{b\omega}{v_0} \left[ 1 + \frac{1}{8} b^2 \frac{\omega^2}{v_0^2} \right],$$

$$F = R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \tilde{F}, \quad \tilde{F} = \frac{1}{\omega^2 t_0^2} \left[ 1 - \frac{7}{4} \frac{b^2}{v_0^2 t_0^2} + \frac{7}{24} b^2 \frac{\omega^2}{v_0^2} \right],$$

$$G = R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \tilde{G}, \quad \tilde{G} = \frac{1}{\omega t_0} \left[ 1 - \frac{7}{12} \frac{b^2}{v_0^2 t_0^2} + \frac{7}{24} b^2 \frac{\omega^2}{v_0^2} \right],$$

$$H = R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \tilde{H}, \quad \tilde{H} = \left[ 1 + \frac{7}{24} b^2 \frac{\omega^2}{v_0^2} \right],$$

Специальная функция – интегральный косинус в этих формулах определяется как

$$ci(\omega x) = - \int_x^\infty \frac{\cos(\omega t)}{t} dt.$$

В области больших частот, таких, что  $\omega t_0 \gg 1$ , выражения (14), (15) можно существенно упростить, воспользовавшись асимптотикой интегрального косинуса [6]

$$ci(x) \approx \frac{\sin x}{x} \left( 1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \dots \right) - \frac{\cos x}{x} \left( \frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \dots \right) \quad \text{при } x \gg 1.$$

В этом случае

$$I_x/e_0 \approx 4i \frac{R^3 b}{\omega v_0^3 t_0^4} \cos(\omega t_0) \left( 1 - \frac{5}{2} \frac{b^2}{v_0^2 t_0^2} \right),$$

$$I_z/e_0 \approx -2 \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t_0) - 2 \frac{R^3}{v_0^2 \omega t_0^3} \sin(\omega t_0) \left( 1 - \frac{7}{2} \frac{b^2}{v_0^2 t_0^2} \right).$$



При значениях  $b$ , близких к  $R$ , в роли малого параметра выступает величина  $v_0 t_0 / b$ . В случае

$$\frac{v_0 t_0}{b} \ll 1 \quad (16)$$

приближенные вычисления интегралов в (9), (10) приводят к следующему результату:

$$I_x / e_0 = iQ_1 - iA \sin(\omega t_0) + iB \cos(\omega t_0),$$

$$I_z / e_0 = -2 \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t_0) - Q_2 + D \sin(\omega t_0) - C \cos(\omega t_0),$$

где

$$Q_1 = \frac{4}{3} R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right),$$

$$Q_2 = \frac{2}{3} R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \left[ 2K_0 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) + \frac{v_0}{\omega b} K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) \right],$$

$$A = \frac{4R^3}{b^2} \frac{v_0^2}{\omega^2 b^2} \left[ 1 - \frac{15}{2} \left( \frac{R^2}{b^2} - 1 \right) + 15 \frac{v_0^2}{\omega^2 b^2} \right],$$

$$B = \frac{4R^3}{b^2} \frac{v_0}{\omega b} \sqrt{\frac{R^2}{b^2} - 1} \left[ 1 - \frac{5}{2} \left( \frac{R^2}{b^2} - 1 \right) + 15 \frac{v_0^2}{\omega^2 b^2} \right],$$

$$D = \frac{2R^3}{b^2} \frac{v_0}{\omega b} \left[ 1 - \frac{7}{2} \left( \frac{R^2}{b^2} - 1 \right) + 7 \frac{v_0^2}{\omega^2 b^2} \right],$$

$$C = \frac{14R^3}{b^2} \frac{v_0^2}{\omega^2 b^2} \sqrt{\frac{R^2}{b^2} - 1},$$

$K_0(x)$  и  $K_1(x)$  — модифицированные функции Бесселя третьего рода (функции Макдональда).

Спектры излучения, рассчитанные по данным формулам, представлены на рис. 3. Подчеркнем, что условие (13) выполняется для гораздо более широкого интервала значений прицельного параметра, чем условие (16).

Угловое распределение интенсивности излучения, согласно (11), будет определяться балансом вкладов  $|I_x|^2$  и  $|I_z|^2$ . В области малых прицельных параметров определяющим будет вклад  $|I_z|^2$ , поэтому угловое распределение будет описываться функцией  $\chi_{\perp}^2 = \sin^2 \theta$ , где угол  $\theta$  отсчитывается от направления движения налетающей частицы (направления оси  $z$ , рис. 3, слева), с небольшими искажениями за счет вклада  $|I_x|^2$ . Вклад  $|I_x|^2$  в угловое распределение излучения описывается функцией  $1 - \chi_x^2$ , имеющей такую же геометрическую форму, но с осью симметрии, параллельной оси  $x$ . Соотношение величин  $|I_x|^2$  и  $|I_z|^2$  может быть различным в зависимости от значений параметров  $b$ ,  $R$ ,  $v_0$  и  $\omega$ . Вид углового распределения излучения при «скользящем» падении частицы на сферу при одном конкретном значении этих параметров показан на рис. 3, справа.



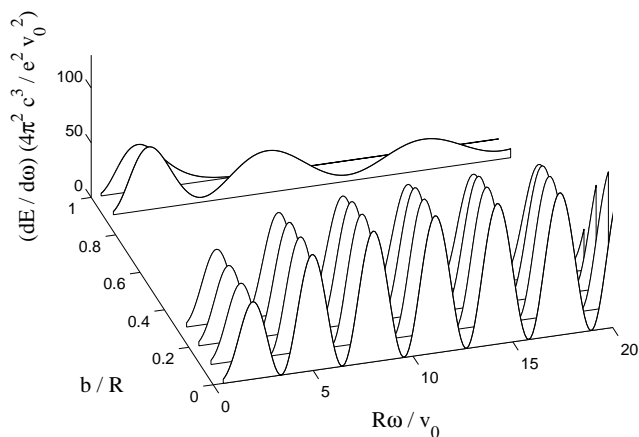


Рис. 3. Спектральная плотность переходного излучения при различных значениях прицельного параметра.

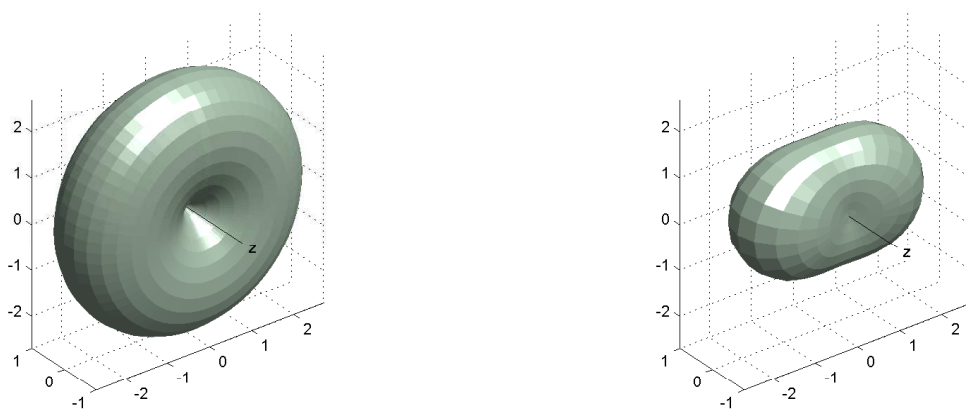


Рис. 4. Диаграмма направленности переходного излучения (безразмерная величина  $(d\mathcal{E}/d\omega d\Omega)(4\pi^2 c^3/e_0^2 R^2 \omega^2)$ ) для случаев  $b = 0$  (слева) и  $b = 0.9R$  (справа),  $R\omega/v_0 = 1$  в обоих случаях.

**Заключение.** В статье рассмотрено излучение, возникающее при прохождении равномерно и прямолинейно движущейся нерелятивистской заряженной частицы через идеально проводящую сферу. Найдены формулы, описывающие спектрально-угловую и спектральную плотности переходного излучения в области малых частот излучения (или больших длин волн, намного превышающих радиус сферы). Полученные результаты могут быть использованы при разработке новых методов мониторинга пучков заряженных частиц.



### Литература

1. Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное рассеяние (некоторые вопросы теории) / М.: Наука, 1984. – 360 с.
2. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т.1 / М.: Наука, 1969. – 912 с.
3. Гинзбург В.Л., Франк И.М. // ЖЭТФ. – 1946. – 16. – С.15.
4. Сыщенко В.В., Ларикова Э.А. Диффракционное излучение нерелятивистской заряженной частицы на идеально проводящей сфере // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 26 (169); 33. – С.51-56.
5. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе / М.: Наука, 1993. – 344 с.
6. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции (Формулы, графики, таблицы) / М.: Наука, 1968. – 344 с.

### DESCRIPTION OF CHARGED PARTICLE RADIATION ON IDEALLY CONDUCTING SPHERE BY THE METHOD OF IMAGES

V.V. Syshchenko, E.A. Larikova

Belgorod State National Research University,  
Studencheskya St., 14, Belgorod, 308007, Russia

**Abstract.** Radiation generated uniformly moving non-relativistic particle on ideally conducting sphere is under consideration. Formulae of transition radiation characteristics are obtained using the electrostatic images method.

**Key words:** transition radiation, method of images.



MSC 01A55

**РЕАЛЬНЫЕ ФАКТЫ ИСТОРИИ ВГУ.  
ПРОФЕССОР ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ В.Г. АЛЕКСЕЕВ  
И ЕГО ВКЛАД В СТАНОВЛЕНИЕ ВГУ**

**В.А. Костин, Ю.И. Сапронов, Н.И. Удоденко**

Воронежский государственный университет,  
Университетская пл. 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: [vlkostin@mail.ru](mailto:vlkostin@mail.ru)

**Аннотация.** Работа посвящена истории возникновения Воронежского государственного университета и роли, которую сыграл при этом первый ректор университета — математик В.Г. Алексеев.

**1. О предмете обсуждения.** В трех номерах газеты «Воронежский университет» (7.03.13, 29.03.13, 19.04.13), а также в газете «Воронежский курьер», в статьях под общим названием «Об одной мнимой сенсации из истории основания Воронежского университета», опубликована точка зрения историка М.Д. Карпачева на проблему связанную с историей основания нашего университета. Как известно, эта его точка зрения не нова, и она сформулирована в работах [5,6]. На этот раз предлогом для очередного ее высказывания явилась публикация нашего исследования о жизни, научной и административной деятельности русского ученого, представителя московской математической школы конца девятнадцатого и начала двадцатого века, профессора чистой математики Виссариона Григорьевича Алексеева, трижды избиравшегося ректором Юрьевского университета (1909-1912, 1912-1914, 1917-1918 гг.), а кроме того в разные годы бывшим и деканом физико-математического факультета и проректором этого университета. Под его руководством Юрьевский, а с 18 мая 1918 года уже Воронежский университет в Юрьеве, был переведен в г. Воронеж летом 1918 года. Странно, но публикация почтенного историка, очевидно претендующая на некую научность, почему-то носит назидательно-фельетонный характер. Используя этот жанр, автор с позиций этакого «мэтра», владеющего абсолютной истиной, в покровительственно-снисходительном тоне вводит в суть проблемы, поднятой в нашей публикации, сдабривая текст комплиментами вроде: «Почин трех математиков бесспорно благороден». По-видимому, этой похвалы мы удостоились за «очередную попытку обогатить историографию Воронежского университета». И тем самым «авторы довольно неожиданно решили вмешаться в деликатный вопрос об истории основания Воронежского университета». И далее, «будучи специалистами в области точных наук, решили поправить утвердившееся в работах историков положения», и т.д. И, наконец, после поднятия нами бровей с вопросом «в чем же заключается несостоявшаяся сенсация?», объявляется:

А). «Сенсационный характер носит, в частности, их утверждение о том, что первым ректором Воронежского университета был именно В.Г. Алексеев, удостоенный даже титула основателя нашего ВУЗа».



Б). «Наши математики решили прямо высказаться в поддержку весьма амбициозного положения о том, что Воронежский университет является правопреемником Юрьевского».

Удивительно, почему же это — сенсация, и почему она не состоялась? Оказывается, что «< ... если перевести анализ событий прошлого в плоскость научного и строго выверенного знания ... >», то именно этот вывод «почтенных математиков» и является той самой сенсацией. Но как же тогда быть с такими положениями, надо думать утвердившихся историками:

1). «В 1918 году на базе эвакуированного Юрьевского (Дерптского) университета был открыт университет в Воронеже. Главной задачей физико-математического факультета университета являлась подготовка педагогических кадров для средней школы. Математику читали В.Г. Алексеев, первый ректор университета, и П.П. Граве» [1], с. 30.

2). «Физико-математический факультет ставил главной своей задачей подготовку преподавателей средней школы. Лекции по математике начал читать В.Г. Алексеев, исследования которого по применению теории инвариантов в химии высоко оценивались многими крупными химиками. Он же был первым ректором университета» ([2], Черпаков В.В.). 3). Б.С.Э., т. 5, статья «Воронежский университет» 1976 г. «... основан в 1918 году, на базе Юрьевского университета, который был эвакуирован в том же году в Воронеж» (П.М. Гапонов).

4). Б.С.Э., т. 25, 1976 г., статья «Тартуский университет»: «... в 1918 году, на базе эвакуированного в Воронеж части Тартуского университета (тогда Юрьевского) создан Воронежский университет».

5). Загоровский В.П. «Весной 1918 года партийные и советские органы Воронежа обратились в Наркомпрос с предложением о переводе в Воронеж Юрьевского университета, поскольку город Юрьев был оккупирован немецкими войсками... Было принято решение о переезде профессоров и студентов Юрьевского университета в Воронеж и создание на базе Юрьевского университета нового Воронежского государственного университета» (см. [9], с. 148).

6). Лаптева Л.П. (проф. МГУ) «С началом Первой мировой войны положение Юрьевского университета осложнилось, и в 1918 году он эвакуировался в Воронеж» (см. [10], с. 96).

Более того, версия образования ВГУ в результате перевода Юрьевского университета в 1918 году, и как следствие его правопреемственности считалась традиционной. Причем датой его основания считалось 18 мая 1918 г. Что и отражено на гербе университета. Но появилась и другая точка зрения, которая принадлежит проф. М.Д. Карпачеву. По его версии Воронежский университет является самостоятельно созданным вузом, а не результатом перевода Юрьевского университета в Воронеж. В [6], с. 65 он пишет: «Следует подчеркнуть немаловажную юридическую деталь: народный комисариат принял решение не о переводе Юрьевского университета, а об основании нового в Воронеже». После такого рода положений, как мы поняли, «утвердившихся» в работах историков, у нас определились вопросы, без ответа на которые терялись полностью описания жизни В.Г. Алексеева и как ученого, и как администратора. Вопросы эти бы-



ли заданы М.Д. Карпачеву в нашей брошюре [8], с. 6. Ответы на них, приведенные в газете «ВГУ» от 29.03.13, мы попытаемся обсудить, а заодно и проследим за методикой доказательства уважаемого историка «в плоскости научного и строго выверенного знания (? -авт.)».

2. Когда был упразднен Юрьевский университет, и было ли по этому поводу специальное постановление Советского правительства?

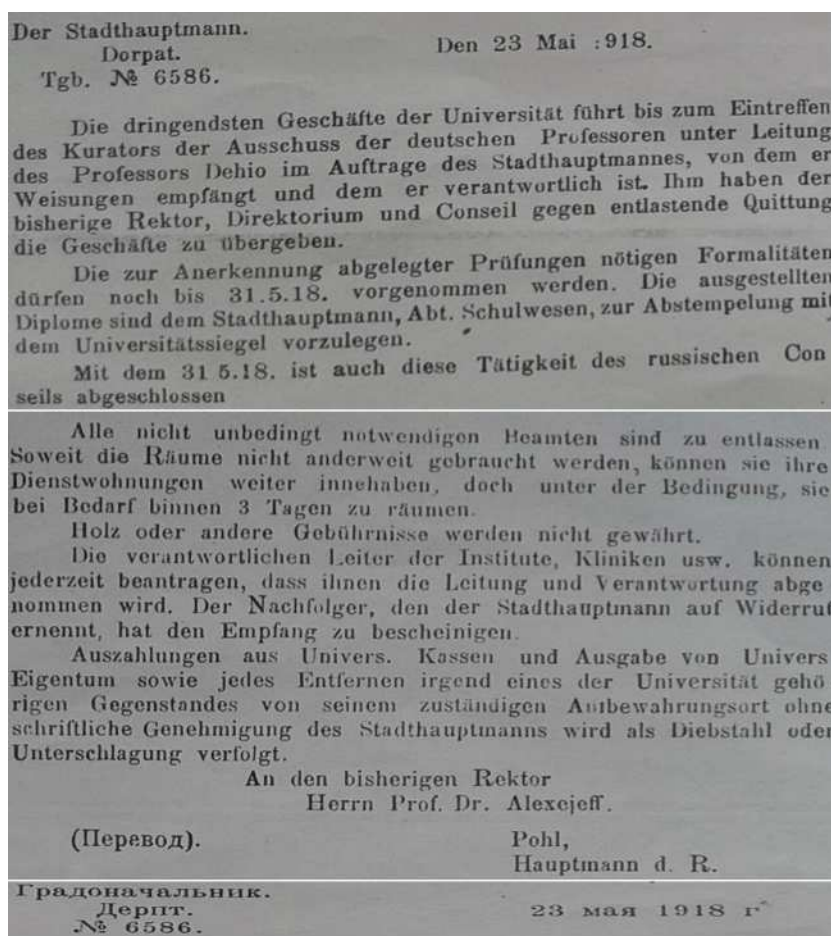


Рис. 1. Распоряжение градоначальника Поля о неприкосновенности имущества Университета.

М.Д. Карпачев (в «ВГУ» от 29.04.13): «Юрьевский университет как русское учебное заведение закрывался по решению немецких и эстонских властей, поскольку Юрьев (Тарту) с весны 1918 г. был занят немецкими войсками и находился вне советской юрисдикции. Советской власти закрывать в Эстонии университет не было никакой нужды, за нее это сделали другие». Позвольте! Как же так: « ... находился вне советской юрисдикции»? Но когда Комиссариат народного просвещения принял решение по переводу университета, единственным аргументом Комиссариата по иностранным делам не то роиться с переводом в г. Воронеж было утверждение, что Лифляндия (Эстонии тогда не было -авт.) по Брестскому миру оставалась в пределах России ([4], с. 24). И, таким



образом, обсуждался только вопрос о переводе Юрьевского университета в г. Воронеж, а о закрытии не было и речи, хотя Советское правительство имело на это право.

А теперь посмотрим, на основании какой же «юрисдикции» русский университет закрывают эти самые «другие». Оказывается (см. газету «ВГУ» от 29.04.13), «Вполне добросовестно и в целом объективно об истории закрытия русского университета написано в трудах эстонских коллег по истории Тартуского университета, где сообщается, что 23 мая 1918 года комендант Тарту Поль потребовал (см. рис. 1), чтобы правление и Совет Юрьевского университета закончили свою деятельность к 31 мая. Последнее собрание Совета состоялось 31 мая, тогда была создана специальная ликвидационная комиссия».

Спасибо за информацию (или за дезинформацию). Но зачем же так далеко ходить? Ведь это распоряжение нам известно из документов председателя означенной комиссии профессора К.К. Сент-Илера, приведенных в его статье, которой как раз и посвящен наш анализ, составляющий по выражению проф. Карпачева «основу коллективного труда трех ученых» (надо понимать нас) и которой так пренебрегает историк. Мы помещаем фотокопию этого письма в Приложении. Как мы видим, там нет города Тарту, а есть Дерпт. И откуда взяться городу Тарту 23 мая 1918 года, если Дерпт был переименован в Тарту лишь 14 января 1919 года? А откуда в распоряжениях о судьбе Юрьевского университета вдруг появляются эстонские власти? Ведь в распоряжении генерала Адамса от 7 марта 1918 г. ясно сказано: «1. Я определяю: университет в Дерпте есть немецкий университет» (см. [11], с. 26). И эстонских властей как-то здесь не видно. Об этом же говорит и телеграмма императора и короля Вильгельма II от 10 марта 1918 г., напечатанная в газете от 16.09.18, по случаю открытия немецкого Дерптского университета, в которой, в частности, говорится: «... ныне, благодаря победе нашего оружия, духовно свободная *alma mater Dorpatensis* может снова взять на себя свое историческое призвание — быть очагом немецкой духовной жизни». И где же здесь эстонские интересы? Более того, в ответ на незаконное распоряжение Адамса (как потом доказал Ученый Совет университета во главе с В.Г. Алексеевым), профессора эстонской и латышской национальностей А.К. Пальдрок, Г. Коппель, Я. Озе, Э. Фельсберг выразили несогласие с организацией немецкого университета и подали прошение к немецким властям с просьбой разрешить университету продолжать в прежнем виде свою работу до того времени, «когда будет созвано представительское собрание всех народностей области, которое будет компетентно в решении вопроса о судьбе высшей школы». И здесь важно то, что это послание согласовывалось с действиями Ученого совета университета, направленными на доказательство незаконности распоряжения генерала Адамса, с точки зрения международного права, в соответствии с международным законом, закрепленным в ст. 43 IV Гаагской конференции 1907 года, с учетом того, что университет, как научное учреждение, находится под особым покровительством права. В результате таких действий В.Г. Алексеева и Ученого совета никакого закрытия университета не произошло и он продолжал работу в прежнем виде (т.е. не в соответствии с распоряжением ген. Адамса) до окончания учебного года. Таким образом, до лета 1918 г. русский университет в Юрьеве-Дерпте ни фактически, ни юридически не закрывался. То есть, наше утверждение в [8] верно.



**3.** Когда официально был открыт Воронежский университет, и было ли по этому поводу специально постановление Советского правительства?

Ответ М.Д. Карпачева («ВГУ» 29.03.13): «На это отвечу, что такое постановление действительно не обнаружено. По-видимому, его и не было». То есть, наше утверждение верно и в этом случае. В дополнение скажем, что такого постановления не могло быть в принципе, так как во всех сохранившихся документах речь идет только о переводе Юрьевского университета в г. Воронеж (см. [4], [11], с. 24). Совершенно очевидно, что в период весеннего семестра мы имеем политическую бифуркацию: немцы, на правах (как оказалось не соответствующим международным) оккупантов пытались сделать университет немецким, то есть Дерптским. Россия, на правах учредителя, и как теперь говорят «инвестора» в 1893 (1802) г., совершенно законно считала его русским, Дерптским и Юрьевским. В результате, получился компромисс, реализованный в разделении на русскую и немецкую части. Причем, право выбора, в каком соотношении должно произойти это разделение, было дано коллективу университета. О результатах этого выбора можно судить по следующему документу ([4], с. 23).

Выписка из протокола №21 заседания Государственной комиссии по просвещению О переводе Юрьевского университета в г. Воронеж от 18 мая 1918 г. Слушали VIII. О переводе Юрьевского университета в г. Воронеж. Докладчик тов. Штернберг: 4/5 имущества Юрьевского университета, превращенного в немецкий, находится в Перми, Воронеже и Нижнем Новгороде. 4/5 студентов стремятся вернуться в Россию. Из профессорского состава желают остаться в Юрьеве профессора, главным образом, богословского факультета.

Как известно, это подтвердилось и при реализации раздела университета. В Воронеж переехало четыре из пяти факультетов Юрьевского университета. В это время, Ученый Совет университета интересовали лишь проблемы деятельности университета в осеннем семестре 1918 года [11], и место его дальнейшей деятельности, если окажется невозможным университету оставаться в Юрьеве. К этому моменту, 20 (7) февраля 1918 года, за три дня до оккупации немцами Юрьева уже было принято решение остановиться на г. Воронеже, как месте, где в случае необходимости продолжится деятельность университета.

**4. Воронежский университет в Дерпте.** Можно сказать, что правовое положение русской части университета, выбравшей для продолжения своей деятельности Воронеж, изменилось с середины мая 1918 года, когда в Риге собрался прибалтийский Земский Совет из избранных представителей Эстляндии, Лифляндии, Риги и острова Эзеля. Одним из принятых решений которого был пункт « ... просить германского императора, чтобы он образованное из балтийских провинций государство объединил с Германией». В результате, на этом собрании, без участия представителей университета, был решен вопрос в желательном для немцев смысле, т.е. он должен стать университетом будущего балтийского государства [11] под властью Германии. По словам Сент-Илера «это и было, по-видимому, то решение «конституционно-правомочных учреждений», о котором говорит ген. Котч в своем ответе на докладную записку Совета». И уже 16 мая 1918 г. выходит распоряжение главнокомандующего графа Кирбаха



об окончательном прекращении деятельности Юрьевского университета, как русского университета (т.е. 4/5 его части):

1. Русский ректор университета должен воздержаться от всяких должностных действий.
2. Сношение ректора с русскими властями не допускается.

И как раз в это время по существу меняется статус русского университета в Юрьеве. Так как 18 мая 1918 г. (см. выше приведенную выписку) вопрос о переводе Юрьевского университета был окончательно решен постановлением Наркома по Просвещению. А самое главное! Начинается финансирование университета Советским Правительством! Так, уже 28 мая 1918 г. на счет Университета малая государственная комиссия переводит 150 тысяч рублей ([6], с. 74). А 8 июля возвратившийся после трехмесячной командировки в Москву проф. В.Э. Регель привез, по словам Сент-Илера, «значительную сумму денег на уплату жалования служащим». Таким образом, русская часть Юрьевского университета становится Воронежским университетом в Дерпте. И теперь возникла проблема о переправке (можно сказать эвакуации) университета в г. Воронеж, место его теперь уже законного функционирования. Для решения этой проблемы ректор В.Г. Алексеев, исходя из постановления совещания профессоров, обратился к немецкому командованию с просьбой снести с русским правительством о предоставлении персоналу университета двух маршрутных поездов до Воронежа, одного в середине июня, другого в конце августа. На это был дан ответ: «Что касается ходатайства о предоставлении прямых вагонов из Дерпта до Воронежа, то высшее германское командование готово передать его русскому Правительству». Вот именно к этому времени (23.05.18) и относится приведенное выше распоряжение коменданта Поля, цитируя которое, проф. М.Д. Карпачев явно подыгрывает мифическим эстонским властям, которых в том момент не было. А были только немецкие власти и их интересы, которые, разумеется, не совпадали с русскими.

**5. В.Г. Алексеев, первый ректор Воронежского университета.** Итак, что мы имеем в итоге? В марте 1918 г. немцы, пользуясь оккупацией Прибалтики, попытались Юрьевский университет сделать немецким. Но Ученый совет университета во главе с ректором В.Г. Алексеевым, при участии известного специалиста в области международного права В.Э. Грабаря, доказали неправомочность соответствующего распоряжения. Далее, пользуясь свободой волеизъявления большинства персонала университета (4 ф-та из 5 и 4/5 имущества), выразившемся в желании продолжить работу русского университета в г. Воронеже, Совет обратился к правительству России с просьбой о переводе в Воронеж. Власти г. Воронежа также поддержали эту просьбу. И 18 мая 1918 года Советское правительство решило вопрос в положительном смысле. А с 28 мая 1918 г. Советское правительство начало финансирование русского (Воронежского) университета, но теперь уже в Дерпте, т.е. на оккупированной немцами территории. Таким образом, фактически и юридически Юрьевский университет стал Воронежским университетом в Дерпте. При этом отметим, что проблема ректорства на протяжении всего спора между немецкими и русскими интересами не возникала. Отсюда следует, что независимо от места пребывания университета ректором оставался профессор





В.Г. Алексеев, который с 18 мая 1918 года начал нести ответственность за имущество и персонал русского университета уже как Воронежского, хотя и в Дерпте, получая за это заработную плату как Советский служащий. Таким образом, В.Г. Алексеев был последним ректором Юрьевского университета и первым ректором Воронежского университета.

**Послесловие.** Не скроем, желание опубликовать данную заметку у нас возникло после выхода в свет статьи профессора М.Д. Карпачева, посвященной опубликованной нами брошюре с замечаниями по истории ВГУ. В своей брошюре мы не обмолвились ни одним словом о какой-либо сенсационности и совсем не претендовали на похищение научной славы уважаемого нашего университетского историка — профессора М.Д. Карпачева. Мы просто выразили озабоченность тем, что современными историками в нашем университете незаслуженно принижена роль такого крупного математика и университетского организатора, как В.Г. Алексеев. Мы всего лишь читатели, имеющие свой «внутренний взгляд» (как профессиональные математики, как сотрудники ВГУ, как жители Воронежа) на события тех лет и на роль в них некоторых ученых-математиков.

Один из аргументов уважаемого историка, объясняющего его позицию по отношению к В.Г. Алексею, состоит в том, что В.Г. Алексеев слишком мало работал в ВГУ и не оставил свой след в нашем университете. Его фраза «Уверенно можно говорить о том, что в становление математического университетского образования в Воронеже решающую роль сыграл юрьевский ученый Н.П. Самбикин. При этом более заметную, чем проф. Алексеев, уже хотя бы потому, что он остался в Воронеже и после завершения гражданской войны» вызывает у нас, мягко говоря, несогласие. Он даже ставит в вину В.Г. Алексею его отъезд из Воронежа, считая, что он бросил свое детище — новый университет на произвол судьбы. Почему-то наш оппонент не хочет или не может понять, что важнейшей причиной отъезда Алексея является его происхождение. Родовые линии В.Г. Алексея уходят в казачество, в Войско Донское. Отношение к казакам в 1919 году в молодой советской республике было отрицательное и, более того, росло гонение на казаков. В.Г. Алексеев не мог не сознавать того, что его дальнейшее пребывание в ВГУ не сулит, мягко говоря, ничего позитивного. Это во-первых. Во-вторых, за более чем годовое пребывание в Воронеже он успел прочитать не менее трех раз свой уникальный курс аналитической геометрии. Даже в наше время этот курс сделал бы честь любому университету. Записки его лекций по данному курсу хранятся в отделе рукописей библиотеки им. И.С. Никитина.

Мы полностью согласны с замечанием о том, что «Научные и педагогические традиции Юрьевского университета, перенесенные на воронежскую землю, сыграли самую благоприятную роль в судьбе воронежского университета». Только слово «благоприятную» нужно было заменить на «основополагающую». Далее в статье приведен список выдающихся ученых ВГУ, внесших бесценный вклад в становление ВГУ. Математиков среди них нет. Нет там ни проф. В.Г. Алексея, ни проф. П.П. Граве. Смеем вас уверить в том, что если бы не энергия и вера В.Г. Алексея в будущее, то вряд ли столько профессоров приехало бы в Воронеж из Юрьева. Доцент Н.П. Самбикин по инициативе В.Г. Алексея был приглашен на работу в Воронежский университет, о чем написала в своих воспоминаниях в 1968 г. М.В. Самбикина (жена Н.П. Самбикина). Являясь



последователем В.Г. Алексеева, он развивал впоследствии геометрическое образование в ВГУ, заложенное В.Г. Алексеевым. В своих лекциях по аналитической геометрии он пользовался конспектами курса лекций В.Г. Алексеева. Особую актуальность и значимость этому курсу придавало то, что через него «красной нитью» проходила теория инвариантов — предмет активного исследования В.Г. Алексеева. Его достижения по теории инвариантов принесли ему международную известность. Открытия В.Г. Алексеева по данному предмету отмечали даже крупные европейские физики и химики (это подробно описано в нашей брошюре). Почему-то этих важных исторических фактов не хочет замечать наш уважаемый оппонент. С непонятным упорством он обходит в своем изложении и «Большую математическую энциклопедию» (изданную еще в 60-тые годы), в которой указано, что основы математического образования в ВГУ были заложены первым ректором ВГУ В.Г. Алексеевым. Есть и другие странные особенности в критической заметке М.Д. Карпачева, о которых, возможно, следовало бы поговорить. Но не хочется заниматься «кухонными дрызгами». И так все ясно!

### Литература

1. История отечественной математики, т.3 / (отв. Редактор И.З.Штокало) / К.:Наукова думка, 1968. – 728 с.
2. Черпаков П.В. Физико-математический факультет // Воронежский государственный университет к сорокалетию Великой октябрьской социалистической революции / Воронеж: изд-во ВГУ, 1957. – С.58-69.
3. Костин В.А., Сапронов Ю.И., Удоденко Н.Н. Виссарион Григорьевич Алексеев – забытое имя в математике (1866-1943) // Вестник ВГУ, серия физика, математика. – 2003. – №1. – С.132-151.
4. Воронежский университет. Страницы истории. Хронология / ред. И.И. Борисов, С.А. Запрягаев / Воронеж: Издательство ВГУ, 2003. – 168 с.
5. Карпачев М.Д. Воронежский университет: Начало пути / Воронеж: Изд-во ВГУ, 1998. – 112 с.
6. Карпачев М.Д. Воронежский университет: Вехи истории, 1918-2003 / Воронеж: Изд-во ВГУ, 2003. – 472 с.
7. Гапонов П.М. Воронежский государственный университет. Справочник / Воронеж: Изд-во ВГУ, 2003. – 156 с.
8. Костин В.А., Сапронов Ю.И., Удоденко Н.Н. Профессор Виссарион Григорьевич Алексеев и Воронежский Университет / Воронеж: типография ОАО «Концерн Созвездие», 2012. – 80 с.
9. Загорский В.П. Воронеж: Историческая хроника / Воронеж: Центрально-черноземное книжное изд., 1989. – 148 с.
10. Лаптева Л.П. В.Э. Регель как исследователь «Хроники» Козьмы Пражского и ее оценка в современной историографии // Исторические записки. Научные труды исторического факультета ВГУ / Изд. ВГУ: Воронеж, 1997. – С.93-105.
11. Сент-Илер К.К. К истории Воронежского университета / Труды Воронежского государственного университета т.1 / Воронеж, 1925. – С.362-397.



**REAL FACTS OF VORONEZH STATE UNIVERSITY HISTORY.  
PROFESSOR OF PURE MATHEMATICS V.G. ALEXEYEV  
AND HIS INCLUSION FOR VGU GENERATION**

**V.A. Kostin, Yu.I. Saprnov, N.I. Udodenko**

Voronezh State University,  
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: [vlkostin@mail.ru](mailto:vlkostin@mail.ru)

**Abstract.** Article is devoted to history of Voronezh State University generation and the role of mathematician V.G. Alexeyev being its first rector.



## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

MSC 70E18, 70E60

УПРОЩЕННЫЙ РАСЧЕТ КИНЕМАТИКИ ДВИЖЕНИЯ  
МОБИЛЬНОГО РОБОТА С ТРЕМЯ ОМНИКОЛЕСАМИ

А.Н. Афонин, А.Ю. Алейников, Е.Н. Бондарева

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: [afonin@bsu.edu.ru](mailto:afonin@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Рассмотрена кинематика движения мобильного робота с тремя омниколесами, расположенными под углом  $120^\circ$ . Предложены упрощенные формулы для расчета скоростей вращения колес, обеспечивающие движение робота в заданном направлении с требуемой скоростью. Эти формулы могут использоваться при создании систем управления подобными роботами.

**Ключевые слова:** мобильный робот, омниколесо, движение, механика, кинематика, скорость, управление.

**Введение.** Среди множества возможных кинематических схем мобильных роботов существенный интерес представляет схема с тремя одинаковыми независимыми ведущими колёсами, расположенными под углом  $120^\circ$ . Важнейшим преимуществом робота с такой кинематической схемой является его маневренность: подобный робот может в любой момент начать движение в любую сторону. Для повышения маневренности такие роботы оснащаются колесами особой конструкции (например, так называемыми омниколесами [4, 5 и др.]), обеспечивающими трение качения с поверхностью по которой движется робот в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Управление роботом с тремя независимыми ведущими колесами осуществляется изменением скорости вращения колес. При этом, определение требуемой для движения робота в заданном направлении с требуемой скоростью частоты вращения каждого колеса представляет определенные трудности. Существующие математические модели кинематики и динамики движения подобных роботов, например [2 – 4], весьма сложны и использование их при разработке реальных систем управления роботами затруднительно.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим схему робота с тремя одинаковыми независимыми ведущими колёсами (рис. 1). Примем допущение, что сила трения между колесом и поверхностью не зависит от положения колеса относительно направления движения робота. Тогда, можно сделать вывод о том, что поступательное движение роботу целесообразно сообщать колесом, ось вращения которого образует наибольший угол с заданным направлением движения. Колесо, ось вращения которого образует наименьший



угол с заданным направлением движения, целесообразно остановить, т.к. вращение этого колеса будет слабо сказываться на поступательном движении робота, но будет приводить к вращению его вокруг собственной оси. Третье колесо, занимающее промежуточное положение, целесообразно использовать для подруливания робота с целью компенсировать составляющую скорости первого колеса, направленную перпендикулярно заданному направлению движения. Исходя из геометрических соображений, направление вращения подруливающего колеса должно быть противоположным направлению вращения ведущего. Скорость вращения подруливающего колеса будет ниже, чем ведущего, за исключением случая движения в направлении оси симметрии между ведущим и подруливающим колесом.

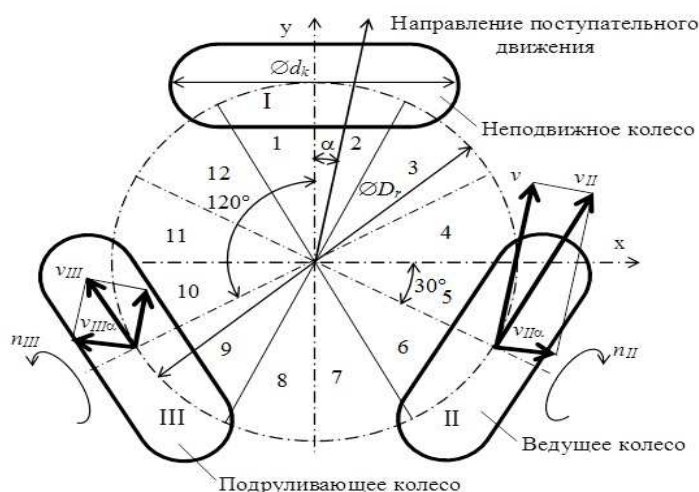


Рис. 1. Схема скоростей колес при движении робота в направлении зоны 2.

В зависимости от того, какие роли будут выполнять конкретные колеса, можно выделить 12 зон направления поступательного движения робота. При движении робота в направлении зон 1 и 7 на рис. 2 ведущим будет являться колесо III, а неподвижным колесо I; в направлении зон 2 и 8 ведущим будет являться колесо II, а неподвижным колесо I; в направлении зон 3 и 9 ведущим будет являться колесо II, а неподвижным колесо III; в направлении зон 4 и 10 ведущим будет являться колесо I, а неподвижным колесо III; в направлении зон 5 и 11 ведущим будет являться колесо I, а неподвижным колесо II; в направлении зон 6 и 12 ведущим будет являться колесо III, а неподвижным колесо II.

**2. Уравнения скоростей движения.** Рассмотрим в качестве примера движение робота в направлении зоны 2. Скорость вращения колеса, направленную по часовой стрелке если смотреть с внешней стороны, примем положительной. Влиянием на скорость поступательного движения робота проскальзывания подруливающего колеса пренебрежем. Тогда, зависимость касательной скорости ведущего колеса  $v_{II}$  от скорости движения робота  $v$  будет иметь вид



$$\nu_{II} = \frac{\nu}{\cos(60 - \alpha)}.$$

Исходя из необходимости обеспечить условие  $\nu_{III\alpha} = -\nu_{III\alpha}$ , касательная скорость подруливающего колеса определится по формуле

$$\nu_{III} = \frac{\nu \cdot \sin(60 - \alpha)}{\cos(60 - \alpha) \cdot \cos(30 - \alpha)}.$$

Скорости вращения ведущего и подруливающего колеса соответственно равны

$$n_{II} = \frac{1000 \cdot \nu_{II}}{\pi \cdot d_k}; n_{III} = \frac{1000 \cdot \nu_{III}}{\pi \cdot d_k},$$

где  $d_k$  – диаметр колес, мм.

Для других зон движения скорости вращения колес определяются аналогично.

**Выводы.** Полученные простейшие зависимости являются базовыми для управления движением робота с тремя одинаковыми независимыми ведущими омниколёсами и могут использоваться при создании систем управления подобными роботами.

У реального робота значительное влияние на скорость и направление движения будет оказывать изменение коэффициента трения с поверхностью в зависимости от положения колес относительно направления движения робота и скорости их вращения [1]. Оценить влияние изменения коэффициента трения нельзя не только с помощью приведенных выше простейших зависимостей, но и при использовании более сложных кинематических моделей, например приведенных в источниках [2-4]. В связи с этим, роботы с тремя независимыми ведущими колёсами должны оснащаться датчиками, определяющими скорость и направление их перемещения в пространстве (акселерометр, магнитный компас, гироскоп, приемник сигналов GPS и т.д.). На основании информации, получаемой от этих датчиков, система управления роботом будет вносить коррективы в определенные по приведенной выше методике скорости вращения ведущего колеса (для обеспечения требуемой скорости поступательного движения) и подруливающего колеса (для обеспечения требуемого направления движения и исключения неконтролируемого вращения робота вокруг своей вертикальной оси).

### Литература

1. Абрамов И.В., Караваев Ю.Л., Шелуха А.В. Оценка точности позиционирования омниколёсного робота // Психофизические и социально-психологические аспекты взаимодействия в системе «человек - машина»: Материалы всеросс. научно-практ. конф. – Ижевск: ИжГТУ, 2014. – С.92-96.
2. Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелинейная динамика. – 2011. – 7, № 4 (Мобильные роботы). – С.785-801.
3. Indiveri G. Swedish Wheeled Omnidirectional Mobile Robots: Kinematics Analysis and Control // IEEE transactions on robotics. – 2009. – 25, №1. – P.164-171.
4. Deepak B.V.V.L., Parhil D.R., Jha A.K. Kinematic Model of Wheeled Mobile Robots // International Journal on Recent Trends in Engineering & Technology. – 2011. – 5, №4. – P.5-10.
5. Patent US 1305535 A. Vehicle wheel / J. Grabowiecki. 1919.



6. Patent US 3789947 A. Omnidirectional wheel / J. Blumrich. 1974.

**SIMPLIFIED CALCULATION OF KINEMATICS  
OF MOBILE ROBOT WITH THREE OMNIDIRECTIONAL WHEELS**

**A.N. Afonin, A.Y. Aleynikov, E.N. Bondareva**

Belgorod National Research University,  
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: [afonin@bsu.edu.ru](mailto:afonin@bsu.edu.ru)

**Abstract.** Kinematics of mobile robot with three omni wheels which are arranged at an angle of  $120^\circ$  is under consideration. Simplified relationships for the calculation of the rotational speeds of the wheels are proposed that provide the robot movement along given direction with a desired speed. These formulas may be used to create control systems like robots.

**Key words:** mobile robot, omnidirectional wheel, motion, kinematics, speed, control.



MSC 17B63

## О СЕРИИ АЛГЕБР ПУАССОНА С ДРОБНЫМИ ЭКСПОНЕНТАМИ

О.И. Череватенко

Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова,  
пл. 100-летия рождения В.И. Ленина, 4, Ульяновск, 432700, Россия, e-mail: chai@pisem.net

**Аннотация.** В работе построена дискретная серия алгебр Пуассона с различными дробными экспонентами на интервале  $(4,5)$ .

**Ключевые слова:** алгебра Пуассона, алгебра Ли, экспонента алгебры, многообразие алгебр.

На протяжении всей работы предполагается, что основное поле имеет нулевую характеристику.

Все необходимые определения и сведения из теории PI-алгебр можно найти, например, в монографии [1]. Обозначим через  $K\{X\}$  (абсолютно) свободную линейную алгебру от счетного множества свободных образующих  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  над полем  $K$ . Пусть  $A$  — некоторая  $K$ -алгебра,  $\text{Id}(A)$  — идеал тождеств алгебры  $A$ . Для произвольного натурального  $n$  обозначим через  $P_n$  пространство в  $K\{X\}$ , состоящее из полилинейных элементов степени  $n$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Обозначим

$$P_n(A) = P_n / (P_n \cap \text{Id}(A)), \quad c_n(A) = \dim P_n(A).$$

Хорошо известно, что в случае основного поля нулевой характеристики идеал тождеств произвольной алгебры  $A$  порождается совокупностью полилинейных тождеств. Поэтому одной из важных числовых характеристик является последовательность  $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$ , которая называется *последовательностью коразмерностей* алгебры  $A$ . Если последовательность  $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$  экспоненциально ограничена, то введем в рассмотрение *нижнюю и верхнюю экспоненты*:

$$\underline{\text{exp}}(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}, \quad \overline{\text{exp}}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

Если  $\underline{\text{exp}}(A) = \overline{\text{exp}}(A)$ , то эту величину обозначим через  $\text{exp}(A)$  и будем называть *экспонентой алгебры  $A$* .

В случае ассоциативных алгебр  $A$  Регевым [2] показано, что рост любой PI-алгебры (алгебры с нетривиальным тождеством) экспоненциально ограничен. Опираясь на результаты А. Регева, С.А. Амицур выдвинул гипотезу о том, что для любой ассоциативной PI-алгебры экспонента существует и является целым числом. Данная гипотеза была подтверждена А. Джамбруно и М.В. Зайцевым [3].

Ничего подобного не наблюдается в неассоциативных алгебрах. В области алгебр Ли хорошо изученным многообразием сверхэкспоненциального роста является многообразие  $\mathbf{AN}_2$ , построенное И.Б. Воличенко [4]. Первый пример алгебр Ли с дробной





экспонентой построен М.В. Зайцевым и С.П. Мищенко [5]. В области алгебр Пуассона примеры многообразий алгебр сверхэкспоненциального роста и алгебры с дробной экспонентой построены С.М. Рацеевым [6].

Пусть  $\mathbf{A}^2$  – многообразие всех метабелевых алгебр Ли, определенное тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0.$$

Обозначим через  $M_{s-1} = F_{s-1}(\mathbf{A}^2)$ ,  $s = 3, 4, \dots$  относительно свободную алгебру этого многообразия с множеством свободных образующих  $\{z_1, z_2, \dots, z_{s-1}\}$ . Рассмотрим линейное преобразование  $d$  векторного пространства  $\langle z_1, z_2, \dots, z_{s-1} \rangle_K$ , действующее по правилу  $z_i d = z_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s-2$ ,  $z_{s-1} d = 0$ . В этом случае  $d$  можно продолжить до дифференцирования алгебры  $M_{s-1}$ , которое обозначим той же буквой. Линейную оболочку этого дифференцирования  $\langle d \rangle$  можно считать одномерной алгеброй Ли с нулевым умножением. Построим полупрямое произведение алгебр  $L_s = M_{s-1} \ltimes \langle d \rangle$ .

В векторном пространстве  $PL_s = L_s \oplus K$  определим операции  $\cdot$  и  $\{, \}$  следующим образом:

$$(a + \alpha) \cdot (b + \beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha \beta,$$

$$\{a + \alpha, b + \beta\} = [a, b], \quad a, b \in L_s, \quad \alpha, \beta \in K.$$

Нетрудно проверить, что  $PL_s$  является алгеброй Пуассона. Данная конструкция получения алгебр Пуассона из любой лиевой алгебры была введена в работе [7].

**Теорема.** Для экспонент алгебр Пуассона  $PL_s$  выполняются строгие неравенства:

$$4 = \exp(PL_3) < \dots < \exp(PL_s) < \exp(PL_{s+1}) < \dots < 5, \quad s = 4, 5, \dots$$

□ В работе [8] показано, что для экспонент алгебр Ли  $L_s$  выполняются такие строгие неравенства:

$$3 = \exp(L_3) < \dots < \exp(L_s) < \exp(L_{s+1}) < \dots < 4, \quad s = 4, 5, \dots$$

А из теоремы 2 работы [6] следует, что если существует экспонента алгебры Ли  $L_s$ , то будет существовать и экспонента алгебры Пуассона  $PL_s$ , причем выполнено равенство  $\exp(PL_s) = \exp(L_s) + 1$ ,  $s = 3, 4, \dots$  ■

### Литература

1. Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли / М.: Наука, 1985.
2. Regev A. Existence of identities in  $A \otimes B$  // Israel J. Math. – 1972. – 11. – P.131-152.
3. Giambruno A., Zaicev M.V. Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate // Adv. Math. – 1999. – 142. – P.221-243.
4. Воличенко И.Б. О многообразиях алгебр Ли  $AN_2$  над полем характеристики нуль // ДАН БССР. – 1981. – 25:12. – С.1063-1066.
5. Mishchenko S.P., Zaicev M.V. An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent // Journal of Mathematical Sciences (New York). – 1999. – 93:6. – P.977-982.
6. Рацеев С.М. Взаимосвязь алгебр Пуассона и алгебр Ли на языке тождеств // Матем. заметки. – 2014. – 96:4. – С.567-577.



7. Рацеев С.М. Алгебры Пуассона полиномиального роста // Сиб. матем. журн. – 2013. – 54:3. – С.700-711.
8. Malyusheva O.A., Mishchenko S.P., Verevkin A.B. Series of varieties of Lie algebras of different fractional exponents // Dokl. Bolg. AN. – 2013. – 66:3. – P.321-330.

## ON SERIES OF POISSON ALGEBRAS OF DIFFERENT FRACTIONAL EXPONENTS

**O.I. Cherevatenko**

Ulyanovsk State I.N. Ulyanov Pedagogical University,  
100th rozhdeniya V.I. Lenina pl., 4, Ulyanovsk, 432700, Russia, e-mail: chai@pisem.net

**Abstract.** Discrete series of Poisson algebras of different fractional exponents in interval  $(4,5)$  is built.

**Key words:** Poisson algebra, Lie algebra, exponent of algebra, variety of algebras.



УДК 539.126.4

## ПОИСК НОВОГО ТЯЖЕЛОГО БОЗОНА $Z^*$ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ ATLAS В МОДЕ РАСПАДА НА ДВА МЮОНА

И.В. Елецких, Коллаборация ATLAS

Объединенный институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри, 6, Дубна, 141980, Россия;  
Институт электрофизики и радиационных технологий, ул. Чернышевского, 28, а/я 8812, Харьков,  
61002, Украина; e-mail: ivaneleckih@jinr.ru

**Аннотация.** В статье приведены результаты поиска нового тяжелого бозона  $Z^*$  в эксперименте ATLAS (LHC) в димюонном канале. На основе сравнения распределений инвариантной массы пары мюонов для данных и моделированных процессов Стандартной модели исследуется статистическая достоверность гипотез существования новых тяжелых резонансов  $Z^*$  различных масс и сечений. В отсутствие статистически значимых отклонений наблюдений от предсказаний Стандартной модели – вычислены верхние пределы массы и сечения  $Z^*$ . В анализе используются данные протон-протонных столкновений с энергией в с.д.м. 8 ТэВ, набранные экспериментом ATLAS в 2012 году.

**Ключевые слова:**  $Z^*$ , резонанс, бозон, мюон, ATLAS, LHC.

**Введение.** Тяжелые бозоны  $Z^*$  массой порядка одного или нескольких ТэВ являются естественными ингредиентами класса теорий, расширяющих Стандартную модель и направленных на преодоление так называемой «проблемы иерархии» [1, 2].

Эти частицы имеют спин 1 и характеризуется взаимодействием с частицами стандартной модели «тензорного типа»:

$$L \sim \bar{\psi}_2 \sigma^{\mu\nu} \psi_1 (\partial_\mu Z_\nu^* - \partial_\nu Z_\mu^*), \quad (1)$$

где  $\psi_{1,2}$  – поля фермионов стандартной модели,  $Z_\mu^*$  – векторное поле нового тяжелого резонанса.

Свойства лагранжиана (1) отражаются в предсказываемых свойствах бозонов  $Z^*$ . К примеру – угловые распределения частиц распада  $Z^*$  имеют уникальную форму, что позволяет отличить процессы с участием нового бозона от процессов с участием других типов частиц [2].

В статье приведены результаты поисков сигнала резонанса  $Z^*$  в данных протон-протонных столкновений на экспериментальной установке ATLAS Большого адронного коллайдера (LHC) [4] в канале с двумя противоположно заряженными мюонами в конечном состоянии.

**Сравнение данных с предсказаниями Стандартной модели.** Основной переменной, используемой в анализе, является инвариантная масса мюона и антимюона, реконструированных детектором. На рис. 1 показаны распределения инвариантной массы пары мюонов для данных и для фоновых процессов Стандартной модели. Основными фоновыми процессами являются процессы Дрелл-Яна, процессы с рождением



нескольких векторных бозонов  $Z, W$ , а также процессы с рождением одного или пары топ-кварков. События, связанные с этими процессами, были смоделированы с помощью Монте-Карло генераторов с последующей полной реконструкцией в программной модели детектора.

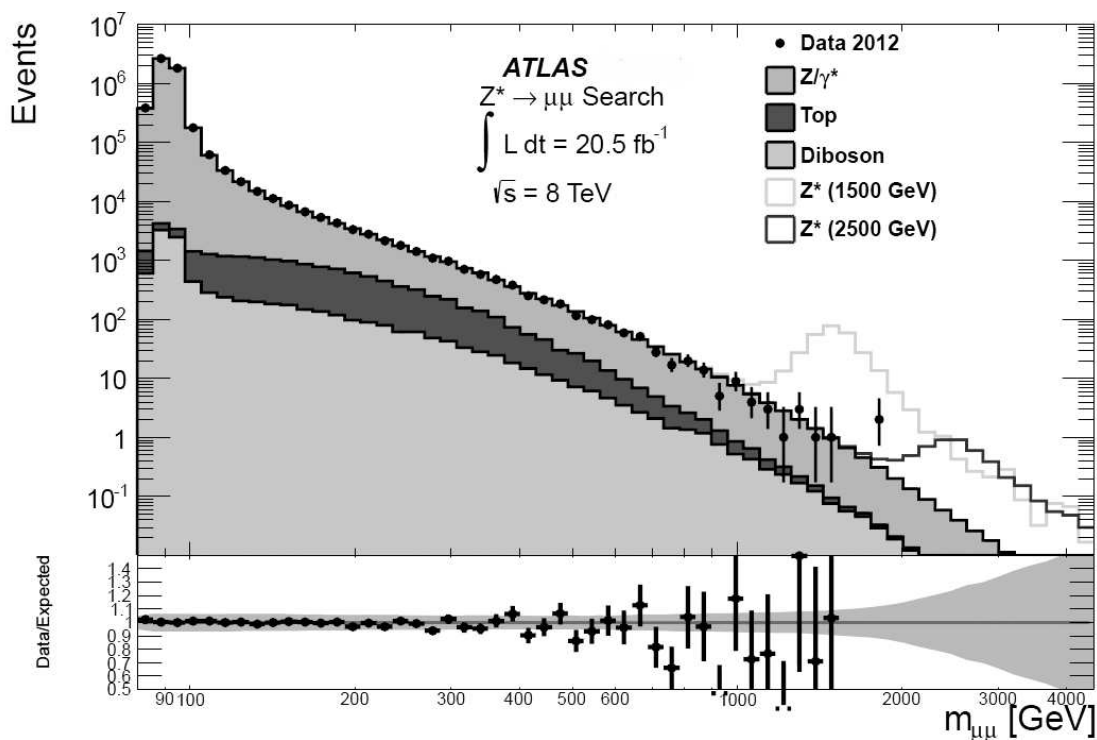


Рис. 1. Инвариантная масса пары мюонов для данных ATLAS 2012 года и моделированных процессов Стандартной модели. Маркерами показаны данные и их статистическая погрешность. Распределения процессов Стандартной модели включают процессы Дрелл-Яна, процессы рождения нескольких бозонов  $Z, W$  и процессы рождения одного или пары топ-кварков. Показаны распределения сигнальных событий  $Z^*$  массой 1500 и 2500 ГэВ. Внизу дано распределение отношения числа событий в данных к числу событий моделированных процессов, а также систематическая погрешность оценки фона (окаймление серого цвета), см. [4].

В табл. 1 показано сравнение числа событий наблюдаемых данных и моделированных процессов Стандартной модели. Числа событий в разных областях инвариантной массы хорошо согласуются в пределах статистических и систематических погрешностей.

**Предел сечения и массы  $Z^*$ .** Для оценки совместимости данных с гипотезами сигналов  $Z^*$  различных масс и сечений используется генерация методами Монте-Карло определенного числа наборов псевдоэкспериментальных данных, учитывающих распределения систематических погрешностей и сечения резонанса  $Z^*$ . После этого для каждого псевдоэксперимента вычисляется функция правдоподобия, которая затем усредняется по всем псевдоэкспериментам. Процедура повторяется для различных возможных



значений массы  $Z^*$ . Сравнение данных детектора с гипотезами существования сигнала  $Z^*$  различных масс дает так называемый «наблюдаемый предел» сечения, сравнение распределения фона с гипотезами  $Z^*$  дает «ожидаемый предел».

Таблица 1

Сравнение количества событий данных и моделированных процессов Стандартной модели в различных диапазонах инвариантной массы. В качестве неопределенности количества событий показана полная (статистическая + систематическая) погрешность (см. [4]). Использовано правило округления PDG.

$m_{\mu\mu}[\text{ТэВ}]$	200-400	400-800	800-1200	1200-3000
$Z/\gamma^*$	$1000 \pm 1000$	$1000 \pm 100$	$49 \pm 5$	$7,3 \pm 1,1$
Топ	$2300 \pm 400$	$160 \pm 80$	$3,0 \pm 1,7$	$0,17 \pm 0,15$
Дибозон	$524,1 \pm 134,4$	$64,02 \pm 15,75$	$4,188 \pm 2,147$	$0,693 \pm 0,3041$
Всего	$13700 \pm 1100$	$1180 \pm 130$	$56 \pm 6$	$8,15 \pm 1,2$
Данные	13479	1122	49	8

Таблица 2

Верхние пределы массы нового резонанса  $Z^*$ , полученные в димюонном канале, в диэлектронном канале, и в комбинации димюонного и диэлектронного каналов (см. [4]).

	$Z^* \rightarrow \mu^+\mu^-$	$Z^* \rightarrow e^+e^-$	$Z^* \rightarrow l^+l^-$
Наблюдаемый предел, ТэВ	2,58	2,74	2,85
Ожидаемый предел, ТэВ	2,58	2,73	2,82

Пересечение кривой наблюдаемого (ожидаемого) предела сечения и кривой теоретического сечения определяет наблюдаемый (ожидаемый) предел массы резонанса  $Z^*$  с уровнем достоверности 95%. В табл. 2 показаны значение верхних пределов массы  $Z^*$  для разных экспериментальных каналов. Помимо димюонного канала, обсуждаемого в этой статье, для полноты картины приведены также ограничения на массу  $Z^*$ , полученные коллаборацией ATLAS из анализа данных в канале с двумя электронами, а также ограничения, полученные в комбинации димюонного и диэлектронного каналов (см. [4]).

**Заключение.** Проанализированы данные эксперимента ATLAS в димюонном канале, набранные в 2012 году в протон-протонных столкновениях на LHC.

Наблюдается хорошее согласие наблюдаемых распределений событий с моделированием процессов Стандартной модели. Найдены верхние пределы сечений резонанса  $Z^*$  для различных возможных масс. Верхний предел на допустимую массу нового резонанса установлен на уровне 2,85 ТэВ.

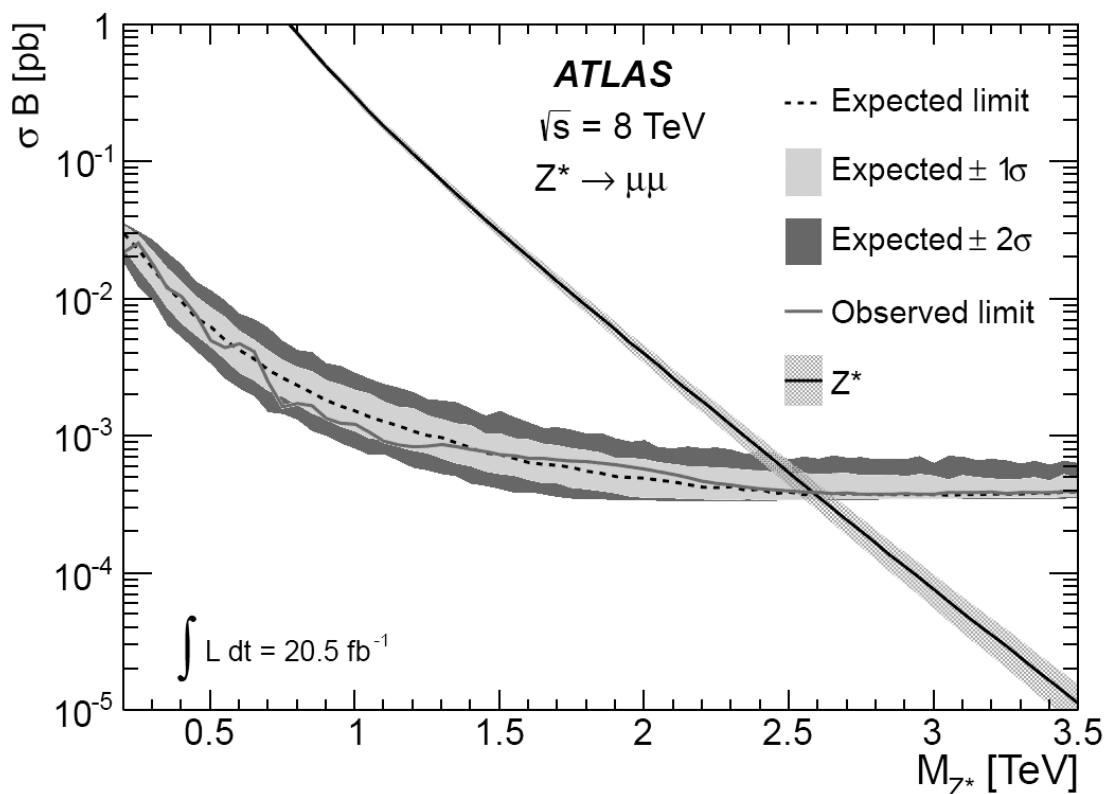


Рис. 2. Предел сечения резонанса  $Z^*$ , полученный на основе анализа распределений димюонных событий по инвариантной массе. Пунктирной линией показан ожидаемый предел сечения (см. пояснения в тексте) с уровнем достоверности 95%. Окаймление кривой ожидаемого предела иллюстрирует погрешности значения предела в одно и два стандартных отклонения, связанные с систематическими погрешностями оценки фона Стандартной модели. Сплошной линией показан наблюдаемый предел сечения  $Z^*$ . Сплошная линия с серым окаймлением соответствует сечению резонанса  $Z^*$ , рассчитанному в теории и его неопределенности, соответственно (рисунок из статьи [4]).

### Литература

1. Chizhov M.V., Dvali G. Origin and phenomenology of weak-doublet spin-1 bosons // Phys. Lett.. – 2008. – В703. – P.593-598.
2. Chizhov M.V., Bednyakov V.A., Budagov Ju.A. Proposal for chiral bosons search at LHC via their unique new signature // Phys. Atom. Nucl. – 2008. – 71. – P.2096-2100.
3. The ATLAS Collaboration // The ATLAS Experiment at the CERN Large Hadron Collider. – 2008. – JINST 3 S08003.
4. The ATLAS Collaboration // Search for high-mass dilepton resonances in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 8 \text{ TeV}$  with the ATLAS detector. – arXiv:1405.4123v.

**SEARCH FOR NEW SPIN-1  $Z^*$  BOSON AT THE ATLAS (LHC) EXPERIMENT  
IN CHANNEL WITH TWO MUONS****I.V. Yeletskikh, The ATLAS Collaboration**

Joint Institute for Nuclear Research, Joliot-Curie St., 6, Dubna, 141980, Russia;  
Institute of Electrophysics and Radiation Technologies, Chernyshevskiy St., 28, Kharkov, 61002,  
Ukraine; e-mail: [ivaneleckih@jinr.ru](mailto:ivaneleckih@jinr.ru)

**Abstract.** Investigations of the new heavy  $Z^*$  resonance at ATLAS (LHC) experiment in channel with two muons are presented. On the basis of comparing of dimuon invariant mass distributions in observed data and simulated by Standard Model processes predictions, the compatibility of data with "background + signal" hypotheses is studied. Due to good agreement between data and Standard Model predictions we have found new limits on  $Z^*$  cross section and mass. Analysis is based on 20  $fb^{-1}$  of  $pp$  collisions with C.M. energy of 8 TeV, recorded by ATLAS in 2012.

**Key words:**  $Z^*$ -resonance, boson, muon, ATLAS, LHC.



MSC 35L05

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ВНЕШНИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Е.А. Канунникова

Белгородский государственный университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: kanunnikova@bsu.edu.ru

**Аннотация.** В работе рассматривается аналитико-численный подход к решению внешних краевых задач для уравнения колебаний, который позволяет сводить внешнюю задачу к внутренней.

**Ключевые слова:** краевая задача, уравнение колебаний.

Задача Коши для неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой  $\mathbf{R}^1$  ставится следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), (x, t) \in \bar{\Omega}^1 = \mathbf{R}^1 \times (0, T], \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), x \in \mathbf{R}^1, \quad (2)$$

где  $a$  – постоянный коэффициент,  $f, \varphi, \psi$  – заданные функции. Следует также задать краевые условия на бесконечности

$$u(x, t) \rightarrow N, x \rightarrow \pm\infty. \quad (3)$$

Преобразовав неограниченное пространство  $\mathbf{R}^1 = D_C \cup C \cup D_\infty$  в ограниченную двусоставную область  $D^1 = D_C \cup C \cup D^*$  согласно аналитико-численному методу инверсии[1], начальная задача (1)-(3) принимает вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), (x, t) \in \bar{Q}^1 = D^1 \times (0, T], \quad (4)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), x \in D^1, \quad (5)$$

$$u(x, t) = N, x \in D^*, t \in [0, T], \quad (6)$$

где область  $D^*$  представляет собой отображение неограниченной области  $D_\infty$ . Если в задаче (4)-(6) при  $f(x, t) \equiv 0$  начальные функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  нечетны, то  $u(0, t) = 0$ ; если же функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  четны, то  $u_x(0, t) = 0$  по методу отражения [2]. Таким образом, применяя метод инверсии и метод отражения, приходим к решению начально-краевых задач на полуограниченной прямой для однородного уравнения колебаний с неоднородными начальными и однородными граничными условиями первого и второго рода. Заметим, что функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , помимо условий гладкости  $\varphi \in C^{(2)}(\mathbf{R}_+^1)$ ,  $\psi \in C^{(1)}(\mathbf{R}_+^1)$ , должны удовлетворять условию согласования начальных и граничного условий [3].





Итак, начально-краевая задача на полупрямой с граничным условием первого рода принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, (x, t) \in \overline{Q}_+^1 = D_+^1 \times (0, T], \\ u(x, 0) &= \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), x \in D_+^1, \\ u(0, t) &= 0, u(x, t) = N, x \in D_+^*, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

В соответствии с методом инверсии начально-краевая задача с граничным условием второго рода имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, (x, t) \in \overline{Q}_+^1, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), x \in D_+^1, \\ u_x(0, t) &= 0, u(x, t) = N, x \in D_+^*, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Таким образом, на основе аналитического преобразования внешняя краевая задача сводится к внутренней, далее строится разностная задача одним из сеточных методов [4] с возможностью использования традиционных приемов и методов численного анализа.

В заключении следует отметить, что использование аналитико-численного метода инверсии позволяет аккуратно учесть граничные условия на бесконечности. Метод применим не только к уравнению колебаний на неограниченной прямой, но и к другим типам уравнений, в том числе и к уравнениям с двумя и тремя пространственными переменными.

### Литература

1. Канунникова Е.А. Аналитико-численный метод решения трехмерных внешних краевых задач для эллиптических уравнений // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. – 2014. – № 1 (189). – С.35-38.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики // М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.
3. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике / М.: Изд-во МГУ, 1993. – 352 с.
4. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений / М.: Наука, 1978. – 312 с.

### AN APPROACH TO SOLUTION OF THE EXTERNAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF WAVE EQUATION

E.A. Kanunnikova

Belgorod State National Research University,  
Pobeda St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: [kanunnikova@bsu.edu.ru](mailto:kanunnikova@bsu.edu.ru)

**Abstract.** Analytical-numerical approach to solution of the external boundary value problems of wave equation is presented. The approach converts each external boundary value problem to the internal one.

**Key words:** Analytical-numerical approach, boundary value problem, wave equation.



## ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика» выходит четыре раза в год. В журнале печатаются статьи по всем направлениям чистой и прикладной математики (за исключением текстов, имеющих чисто компьютерное содержание и вычислительной эмпирики).

Редколлегия журнала принимает от авторов рукописи статей, написанные на русском или на английском языках. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора(ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором(ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности и с таким расчетом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором(ами) направлению исследований, но более широкому кругу математиков. Ни в коем случае рукопись не должна представлять собой краткий отчет о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи. В связи с этим, рукопись должна быть структурирована — разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае, рукопись должна содержать введение и заключение. Разделы должны быть пронумерованы и иметь заголовки.

Во введении должны быть описаны: проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объеме физико-математического знания, представлены краткая история вопроса и полученный автором(ами) результат. В заключении работы должна быть дана характеристика полученного результата с указанием его значения для дальнейшего развития темы исследования.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются и для обзорной статьи, с той лишь разницей, что их содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Возможна также публикация статьи, носящей методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается редколлегией отдельно.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в чисто математических текстах должны быть четко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объем рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата А4. Она должна быть написана шрифтом 12pt через два интервала. Объем обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлегией журнала.

После подготовки одним из членов редколлегии заключения о соответствии рукописи нормам журнала «Научные ведомости» она рассматривается на общем собрании редколлегии. В отдельных случаях редколлегией может быть принято решение о более тщательном изучении рукописи внешним (не входящем в состав редколлегии журнала) рецензентом. Редколлегия оставляет за собой право на мелкие стилистические исправления текста рукописи после принятия решения о её публикации.

### **В редакцию присылается следующая информация:**

1) основная содержательная часть статьи, представляемая на русском или английском языках. При этом название статьи должно состоять не более чем из 20 слов.

2) индекс MSC (см. Mathematical Subject Classification) того научного направления, которому посвящена статья;



- 3) список авторов с указанием порядка их размещения при публикации статьи;
- 4) аннотация на русском языке; её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;
- 5) список ключевых слов (не более 10-12);
- 6) текст перевода заголовка статьи, аннотации и ключевых слов на английском языке;
- 7) список литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;
- 8) данные об авторах статьи с указанием места их работы, точного почтового адреса предприятия. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить также на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;
- 9) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи.

Порядок оформления этой информации в электронном файле указан в приложении в конце настоящих правил (см. п.5) требований к электронному набору).

В редакцию присылается электронный файл работы. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). **Файлы, приготовленные в другом редакторе, рассматриваться редколлегией не будут.** При этом нужно присылать файл работы с расширением «tex» и pdf-копию файла с расширением «dvi» работы, для того, чтобы редакция имела возможность сравнения его с авторским оригиналом при редактировании и верстке журнала. Присылать сам dvi-файл при этом не нужно.

**Особые требования к электронному набору** в редакторе LaTeX (и тому подобным редакторам) следующие.

- 1) Нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды.
- 2) «Выключные» формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерации соответствующих номеров формул в тексте. Допускается применение для меток формул цифр, снабженных штрихами (или цифр совместно с буквами латинского алфавита). Однако этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста.
- 3) В случае, если в статье имеются разделы в виде *приложений* в конце основного текста работы, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть независимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложения. Каждый из разделов-приложений начинается словом ПРИЛОЖЕНИЕ с порядковым номером этого приложения. Это слово должно быть выровнено по правому полю страницы. Затем следует заголовок этого приложения.
- 4) Литературные источники в ссылках на основе команд cite (или непосредственно) в электронном тексте рукописи нужно обозначать цифрами, соответствующими их порядковому номеру появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.
- 5) Ниже прилагается шаблон, согласно которому должен оформляться файл статьи. Для авторов **следование этому шаблону обязательно.**



### Шаблон для приготовления файла с рукописью

```

\setcounter{figure}{0}
\setcounter{equation}{0}
MSC XXX (по индекс научного направления Mathematical Subject Classification)
\vskip 0.3cm

\begin{center}
{\bf НАЗВАНИЕ СТАТЬИ}
\medskip
{\bf И.О. Автор1, И.О. Автор2, ... }
\medskip
{\small {\sf Учреждение, \\
ул. Название улицы (пр. Название проспекта, пл. Название площади и т.д.),
Номер дома, Город, Индекс, Страна, e-mail: \underline{имя@адрес}}}}
\end{center}

{\small {\bf Аннотация.} Текст аннотации.}
\medskip
{\bf Ключевые слова:} слово1, слово2, ... \ .}
\vskip 1 cm

Текст статьи
\vskip 1 cm

\renewcommand\baselinestretch{0.6}

{\small
\centerline{{\bf Литература}}}

\def\sk{\vskip - 0.25cm}

\begin{enumerate}
\bibitem{1}      Источник 1
\bibitem{2} \sk Источник 2
...
\end{enumerate}
\vskip 0.5cm

\begin{center}
{\bf TITLE 1st line \\
\vskip 0.1cm

2d line \\
\vskip 0.1cm and so on }\medskip

```



```
{\bf N.N. Author1, N.N. Author2, ...}
```

```
\medskip
```

```
{\small {\sf Enterprize, \
```

```
Street St. (Avenue Av., Square Sq. and so on), Number, City, Index, Country,
```

```
e-mail: \underline{name@address}}}
```

```
\end{center}
```

```
{\small {\bf Abstract.} Text of abstract. {\bf Key words:} word1, word2, ... \ .}}
```

```
\newpage
```

```
\renewcommand\baselinestretch{1.0}
```

### Рисунки

Особое внимание при подготовке рукописи к печати должно быть уделено рисункам, если они имеются в тексте работы. Они должны быть качественно выполнены и представлены в редакцию в электронной форме в виде отдельных файлов в формате «ps». Файлы рисунков необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам. При этом в название каждого из файлов рисунков, чтобы избежать путаницы при верстке выпуска журнала, должна входить фамилия одного из авторов, записанная латиницей (например, Ivanov1.ps, Petrov2.ps и т.д.).

На представляемых в электронном формате рисунках **не следует** наносить те комментирующие их подписи, которые присылаются в редколлегию отдельным списком.

**Внимание!** В случае присылки в редакцию работы с некачественно выполненными рисунками, она **будет возвращена автору(ам) на доработку**.

### Таблицы

Если в тексте работы есть таблицы, то их следует формировать на основе программы LaTeX и ни в коем случае не оформлять в виде рисунков.

### Список литературных источников

Обращаем внимание авторов на требование к качественному оформлению списка используемых в работе литературных источников. В связи с тем, что требования, предъявляемые ГОСТом, при оформлении такого списка весьма сложны и ориентированы на решение задач, связанных с централизованным поиском и хранением научной информации, которые не специфичны для научно-исследовательской практики, в журнале используется собственная система его оформления. Типы литературных источников качественно довольно разнообразны. Поэтому редакция не предлагает универсальный рецепт их оформления. Единственным общим принципом, которым должен руководствоваться автор, состоит в том, литературная ссылка должна оформляться так, чтобы читатель имел максимально точную информацию о том, как найти и ознакомиться с научным результатом, на который опирается его работа.

Несмотря на отсутствие общего рецепта оформления списка, редакция требует соблюдение строгих правил оформления ссылок на литературные источники двух типов, которые являются наиболее распространенными. Это касается статей в регулярных периодических изданиях



(в журналах) и книг (монографий и учебников). Принятые в журнале правила оформления литературных источников указанных двух типов демонстрируются следующими примерами:

Журнальные статьи –

\item Цегельник В.В. Гамильтонианы, ассоциированные с третьим и пятым уравнениями Пенлеве // Теоретическая и математическая физика. -- 2010. -- 162;1. -- С.69-74.

\item Demidov A.S., Kochurov A.S., Popov A.Yu. To the problem of the recovery of non-linearities in equations of mathematical physics // Journal of Mathematical Sciences. -- 2009. -- 163;1. -- P.46-77.

Книги (в частности, многотомные издания) –

Рытов С.М., Кляцкин Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику / Случайные поля, т.2 / М.: Наука, 1978. -- 464 с.

(если издание однотомное, то позиция между двумя слэш-черточками становится ненужной и, поэтому исчезает).

Обращаем внимание на то, что:

1) должны быть указаны полные названия журнальных статей, а также указаны не только начальные страницы этих статей, но обязательно также и конечные;

2) при указании журнальных статей после года издания стоит номер (обязательно арабскими цифрами) тома журнала (если он имеется) и через точку с запятой стоит дополнительная информация (номер внутри тома, в частности, номер выпуска и т.д.); при этом номер тома может иметь сложное начертание и не выражаться только одним числом;

3) название журнала нужно давать полностью без сокращений;

4) каждая из книг в списке цитируемой литературы обязательно должна быть дана с указанием полного числа страниц.

При несоблюдении описанных правил оформления литературных источников **работа будет возвращена автору(ам) на доработку.**