№5 (176) 2014
Выпуск 34
Научный рецензируемый журнал
Основан В 1995 г.

Журнал входит
в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»)

Издатель:

НИУ «БелГУ»
Издательский дом «Белгород».

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охраны культурного наследия.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-21121 от 19 мая 2005 г.

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ
Белгородского государственного университета
Математика Физика

BELGOROD STATE UNIVERSITY
SCIENTIFIC BULLETIN
Mathematics & Physics

Содержание

Статьи представлены в авторской редакции

Компьютерная верстка
Ю.П. Вирченко
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Подписано в печать 21.03.2014
Формат 60×84/8
Гарнитура Courier New
Усл.п.л. 23.25
Тираж 1000 экз.
Заказ 92

Подписные индексы в каталоге агенства «Роспечать» – 81466

Оригинал-макет тиражирован в издательском доме «Белгород»

Адрес: 308015, г.Белгород, ул.Победы, 85

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА,
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ФИЗИКА

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

№5 (176) 2014
Issue 34
Scientific peer-reviewed journal
Founded in 1995

Journal included into the list of leading peer-reviewed journals and publications coming out in Russian Federation that are recommended for publishing key results of theses for Doktor and Kandidat degree-applicants.

Founder:
Federal state autonomous educational establishment of highest professional education "Belgorod National Research University".

Publisher:
Belgorod National Research University National Research University Publishing House "Belgorod".

The journal is registered in Federal service of control over law compliance in the sphere of mass media and protection of cultural heritage.

Mass media registration certificate ПИ №ФС77-21121 May 19, 2005.

Belgorod State University
Scientific Bulletin
Mathematics & Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ
Белгородского государственного университета
Mathematics & Physics

Contents

Proposed articles are given in authors' editing

Dummy layout:
Yu.P. Virchenko
e-mail: virch@bsu.edu.ru

Passed for printing 21.03.2014
Format 60×84/8
Typeface Courier New
Printer's sheets: 23.25
Calculation: 1000 copies
Order 92

Subscription reference in Rospechat' agency catalogue: 81466

Dummy layout is replicated at Belgorod National Research University Publishing House "Belgorod"

Address: 85, Pobedy str., Belgorod, Russia, 308015

MATHEMATICAL PHYSICS, MATHEMATICAL MODELING

PHYSICS

HISTORY OF MATHEMATICS

SHORT COMMUNICATIONS

МАТЕМАТИКА

MSC 35K65

СИЛЬНО ВЫРОЖДЕННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ОСКОЛКОВА

П.Н. Давыдов, В.Е. Федоров

Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия, e-mail: davydov@csu.ru, kar@csu.ru

Аннотация. Рассмотрена система уравнений Осколкова динамики жидкости Кельвина-Фойгта в случае, когда основное уравнение содержит вырожденный дифференциальный по пространственным переменным оператор при производной по времени. Показано, что линейной части такой системы соответствует сильно вырожденная разрешающая группа операторов. Получена теорема о разрешимости начально-краевой задачи для линеаризованной сильно вырожденной системы Осколкова.

Ключевые слова: жидкость Кельвина-Фойгта, система уравнений Осколкова, вырожденная группа операторов.

1. Введение. В цилиндре $\Omega \times J$, где Ω — ограниченная область с гладкой границей в $\mathbb{R}^n$, J — интервал в $\mathbb{R}$, начально-краевая задача

$$\begin{gathered} v(x,t) = 0\,, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times J\,, \\ (1-\chi\Delta)(v(x,t_0) - v_0(x)) = 0\,, \quad x \in \Omega\,, \end{gathered} \tag{1}$$

для моделирующей динамику вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта системы уравнений Осколкова

$$\begin{gathered} (1-\chi\Delta)v_t = \nu\Delta v - (v\cdot\nabla)v - r + f, \\ \nabla\cdot v = 0, \end{gathered}$$

изучена в случае, когда время ретардации χ попадает в спектр соответствующего задаче оператора Лапласа. Такая система уравнений далее называется сильно вырожденной. Уравнение редуцировано к обобщенной задаче Шоуолтера для полулинейного дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + N(t,u(t))\,. \tag{2}$$

Показано, что соответствующая линейной части этого уравнения разрешающая полугруппа операторов вырождается не только на элементах ядра оператора L, но и на соответствующих им M-присоединенных векторах высоты 1 [1]. Поэтому в данном случае система Осколкова не поддается исследованию методами, развитыми для уравнения (2) в работе [2].

Работа поддержана грантом РФФИ ́к 14-01-31125 и грантом Фонда Михаила Прохорова.

Для линеаризованной сильно вырожденной системы уравнений Осколкова методами теории вырожденных полугрупп операторов [1] доказана теорема об однозначной разрешимости начально-краевой задачи (1).

Отметим, что в работах [3–5], в которых исследовалась система уравнений Осколкова, случай ее сильного вырождения не рассматривался.

2. Сильная (L,p)-ограниченность и вырожденное линейное эволюционное уравнение. Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства. Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$. Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве $\mathfrak{U}$, действующих в $\mathfrak{F}$, будем обозначать $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Кроме того, будем использовать обозначения $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}) \equiv \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{U}) \equiv \mathcal{C}l(\mathfrak{U})$.

Рассмотрим уравнение

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + F(t),\ t \in J\,, \tag{3}$$

с операторами $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ с областью определения D_M, J — интервал в $\mathbb{R}$, задана функция $F : J \to \mathfrak{F}$. Предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$, такие эволюционные уравнения будем называть вырожденными.

Обозначим $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F},\mathfrak{U})\}$. Согласно [1, с. 89] оператор M будем называть (L,σ)-ограниченным, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M))\,.$$

Теорема 1 [1, теорема 4.1.1]. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*

(i) *операторы*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=R} (\mu L - M)^{-1} L d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=R} L(\mu L - M)^{-1} d\mu, \quad R > a,$$

являются проекторами на пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно;

(ii) *имеет место действие операторов $L : \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{F}^k$, $M : D_M \cap \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{F}^k, k = 0,1$, где $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im} Q$, $L_k = L|_{\mathfrak{U}^k}$, $M_k = M|_{D_{M_k}}$, $D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{U}^k$, $k = 0,1$*;

(iii) *существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$*;

(iv) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{F}^1)$.

Обозначим $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется (L,p)-*ограниченным*, если он (L,σ)-ограничен, а оператор H нильпотентен степени p.

Замечание 1. Известно, что в случае (L,p)-ограниченности оператора M пространство $\mathfrak{U}^0$, представляющее собой ядро операторов разрешающей группы однородного ($F \equiv 0$) уравнения (3), состоит из векторов ядра $\ker L$ и соответствующих им M-присоединенных векторов оператора L [1].

Для уравнения (3) с (L,p)-ограниченным оператором M рассмотрим обобщенную задачу Шоуолтера

$$Pu(t_0) = u_0 \in \mathfrak{U}^1 . \tag{4}$$

Решением задачи (3), (4) на интервале $J \subset \mathbb{R}$ назовем такую функцию $u \in C^1(J;\mathfrak{U})$, удовлетворяющую условию (4), что при всех $t \in J$ $u(t) \in D_M$ и справедливо равенство (3).

Теорема 2 [1]. *Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M (L,p)-ограничен, $F \in C(J;\mathfrak{F})$, $(I-Q)F \in C^{p+1}(J;\mathfrak{F})$. Тогда для любых $t_0 \in J$, $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ задача (3), (4) имеет единственное решение $u \in C^1(J;\mathfrak{U})$.*

4. Сильно вырожденная система уравнений Осколкова. Рассмотрим начально-краевую задачу для моделирующей динамику вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта системы уравнений Осколкова

$$(1-\chi\Delta)v_t = \nu\Delta v - (v\cdot\nabla)v - r + f(t,x), \quad (x,t) \in \Omega \times J , \tag{5}$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times J , \tag{6}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times J , \tag{7}$$

$$(1-\chi\Delta)(v(x,t_0) - v_0(x)) = 0 , \quad x \in \Omega . \tag{8}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Параметр $\chi \in \mathbb{R}$, как правило, характеризует упругие свойства жидкости, а параметр $\nu \in \mathbb{R}$ — её вязкие свойства. Вектор-функции $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ (вектор скорости жидкости), $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ (градиент давления) неизвестны. Через J обозначен некоторый интервал в $\mathbb{R}$, содержащий точку t_0.

Обозначим $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$. Замыкание линеала $\mathfrak{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla\cdot v = 0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Будем использовать также обозначения $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортопроекторы.

Известно, что оператор $A = \Sigma\Delta$, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет вещественный, отрицательный, дискретный, конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ [6]. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ его собственные значения, занумерованные по невозрастанию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — ортонормированную систему соответствующих собственных функций, которая, как известно, образует базис в $\mathbb{H}_\sigma$.

Учитывая уравнение несжимаемости (6), положим $\mathfrak{U} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi$, $\quad \mathfrak{F} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$. Следовательно, элемент $u \in \mathfrak{U}$ имеет вид $u = (v,r)$, а $f \in \mathfrak{F}$ — вид $f = (\Sigma f, \Pi f)$. Тогда формулами

$$L = \begin{pmatrix} I - \chi A & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu A & \mathbb{O} \\ \nu\Pi\Delta & -I \end{pmatrix} . \tag{9}$$

определяются операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Обозначим через $\mathbb{M}_0$ множество тех индексов k, для которых $\lambda_k = \chi^{-1}$, через $\mathbb{M}_1$ — множество $\mathbb{N} \setminus \mathbb{M}_0$.

Теорема 3. *Пусть $\chi, \nu \neq 0$, $\chi^{-1} \in \sigma(A)$, операторы L и M заданы формулами* (9). *Тогда оператор M $(L,1)$-ограничен, $\rho^L(M) = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\nu\lambda_k}{1-\chi\lambda_k} : \lambda_k \neq \chi^{-1} \right\}$, проекторы имеют вид*

$$P = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ \Pi\Delta \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \dfrac{\nu\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{1-\chi\lambda_k} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \dfrac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{1-\chi\lambda_k} & \mathbb{O} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

□ Имеем

$$\mu L - M = \begin{pmatrix} \mu I - (\mu\chi+\nu)A & \mathbb{O} \\ -(\mu\chi+\nu)\Pi\Delta & I \end{pmatrix}.$$

По условию теоремы $\mathbb{M}_0$ не пусто, а в силу свойств спектра оператора A — конечно. Имеем

$$\mu I - (\mu\chi+\nu)A = \sum_{k\in\mathbb{M}_1} (\mu - (\mu\chi+\nu)\lambda_k)\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k - \frac{\nu}{\chi}\sum_{k\in\mathbb{M}_0} \langle\cdot\,,\varphi_k\rangle\varphi_k\,,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{H}_\sigma$. Числа $\mu_k = \dfrac{\nu\lambda_k}{1-\chi\lambda_k}$, $k \in \mathbb{M}_1$, сгущаются к точке $-\dfrac{\nu}{\chi}$ при $k \to \infty$ в силу свойств спектра оператора A, поэтому образуют ограниченное множество. Следовательно, существует настолько большое $a > 0$, что при $|\mu| > a$ существует непрерывный оператор $\mathbb{H}_\sigma \to \mathbb{H}^2_\sigma$

$$(\mu I - (\mu\chi+\nu)A)^{-1} = \sum_{k\in\mathbb{M}_1} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(1-\chi\lambda_k)\left(\mu - \frac{\nu\lambda_k}{1-\chi\lambda_k}\right)} - \frac{\chi}{\nu}\sum_{k\in\mathbb{M}_0} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k\,.$$

Действительно, из последнего равенства видно, что для $f \in \mathbb{H}_\sigma$

$$\|(\mu I - (\mu\chi+\nu)A)^{-1} f\|^2_{\mathbb{H}^2_\sigma} \leq c\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f,\varphi_k\rangle|^2 = c\|f\|_{\mathbb{H}_\sigma}\,.$$

Отсюда следует, что при $|\mu| > a$ непрерывен оператор

$$\Pi\Delta(\mu I - (\mu\chi+\nu)A)^{-1} : \mathbb{H}_\sigma \to \mathbb{H}_\pi\,,$$

а следовательно, и оператор

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} (\mu I - (\mu\chi+\nu)A)^{-1} & \mathbb{O} \\ (\mu\chi+\nu)\Pi\Delta(\mu I - (\mu\chi+\nu)A)^{-1} & I \end{pmatrix} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{U}\,.$$

Таким образом, оператор M (L,σ)-ограничен.

Обозначим $R = (\mu I - (\mu\chi+\nu)A)^{-1}$. Тогда

$$R^L_\mu(M) = \begin{pmatrix} R(I-\chi A) & \mathbb{O} \\ (\mu\chi+\nu)\Pi\Delta R(I-\chi A) - \chi\Pi\Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{M}_1} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\left(\mu - \dfrac{\nu\lambda_k}{1-\chi\lambda_k}\right)} & \mathbb{O} \\ \Pi\Delta\left(\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{M}_1} \frac{\nu\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(1-\chi\lambda_k)\left(\mu - \dfrac{\nu\lambda_k}{1-\chi\lambda_k}\right)} - \chi\sum_{k\in\mathbb{M}_0}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k\right) & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$$L^L_\mu(M) = \begin{pmatrix} (I-\chi A)R & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta R & \mathbb{O} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{M}_1} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\left(\mu - \dfrac{\nu\lambda_k}{1-\chi\lambda_k}\right)} & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta\left(\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{M}_1} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(1-\chi\lambda_k)\left(\mu - \dfrac{\nu\lambda_k}{1-\chi\lambda_k}\right)} - \frac{\chi}{\nu}\sum_{k\in\mathbb{M}_0}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k\right) & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Отсюда по формулам из теоремы 1 (i) с помощью интегральной формулы Коши нетрудно найти проекторы (10). Таким образом,

$$\mathfrak{U}^0 = \ker P = \{(v,r)\in\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{H}_\pi : \langle v,\varphi_k\rangle = 0, k\in\mathbb{M}_1\},$$

$$\mathfrak{F}^0 = \ker Q = \{(v,r)\in\mathbb{H}_\sigma\times\mathbb{H}_\pi : \langle v,\varphi_k\rangle = 0, k\in\mathbb{M}_1\},$$

подпространство

$$\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im}P = \left\{(v,r)\in\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{H}_\pi : \langle v,\varphi_k\rangle = 0, k\in\mathbb{M}_0, r = \nu\Pi\Delta\sum_{k\in\mathbb{M}_1}\frac{\langle v,\varphi_k\rangle\varphi_k}{1-\chi\lambda_k}\right\}$$

изоморфно $\{v\in\mathbb{H}^2_\sigma : \langle v,\varphi_k\rangle = 0, k\in\mathbb{M}_0\}$, а

$$\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im}Q = \left\{(v,r)\in\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{H}_\pi : \langle v,\varphi_k\rangle = 0, k\in\mathbb{M}_0, r = -\chi\Pi\Delta\sum_{k\in\mathbb{M}_1}\frac{\langle v,\varphi_k\rangle\varphi_k}{1-\chi\lambda_k}\right\}$$

изоморфно подпространству $\{v\in\mathbb{H}_\sigma : \langle v,\varphi_k\rangle = 0, k\in\mathbb{M}_0\}$.

Непосредственно вычислим операторы

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} \nu^{-1}A^{-1} & \mathbb{O} \\ \Pi\Delta A^{-1} & -I \end{pmatrix}, \quad L_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta\sum\limits_{k\in\mathbb{M}_0}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \chi\Pi\Delta\sum\limits_{k\in\mathbb{M}_0}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что $H^2 = \mathbb{O}$. Поэтому оператор M является $(L,1)$-ограниченным. ■

Замечание 2. Если $\nu = 0$, то $\ker L \cap \ker M = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$, поэтому множество $\rho^L(M)$ пусто.

Замечание 3. Из вида полученного в доказательстве теоремы 3 проектора P следует, что условие (8) эквивалентно условию Шоуолтера (4). Действительно, (8) означает лишь начальное условие для проекций вектора скорости на собственные функции φ_k, не соответствующие собственному значению χ^{-1}. По ним определятся начальные значения для соответсвующих компонент r согласно выражениям для элементов пространства $\mathfrak{U}^1$.

Таким образом, ядро $\mathfrak{U}^0$ разрешающей группы операторов системы (5)-(7) при $\chi^{-1} \in \sigma(A)$ оказывается шире, чем в случае $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, рассмотренном в работе [2]. Это не позволяет получить результат, аналогичный теореме 7 о разрешимости начально-краевой задачи для обобщенной гидродинамической системы из работы [2], поскольку для использования теоремы 3 из [2] нужно, чтобы нелинейный оператор в уравнении (5) не зависел не только от r, как в [2], но и от проекций вектора скорости на собственные функции φ_k, соответствующие собственному значению χ^{-1}.

Рассмотрим линеаризованную в окрестности решения $(v,r) = (0,f)$ систему уравнений Осколкова в случае $\chi^{-1} \in \sigma(A)$

$$(1 - \chi\Delta)v_t = \nu\Delta v - r + f(t,x), \quad (x,t) \in \Omega \times J\,, \tag{11}$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times J\,, \tag{12}$$

снабженную начальным и краевым условиями (7), (8).

Теоремы 2 и 3 сразу влекут следующий результат.

Теорема 4. *Пусть $\chi, \nu \neq 0$, $\chi^{-1} \in \sigma(A)$, $t_0 \in J$, $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$. Тогда при некотором $t_1 \in J$, $t_1 > t_0$, существует единственное решение $v \in C^1(J;\mathbb{H}^2_\sigma)$, $r \in C^1(J;\mathbb{H}_\pi)$ задачи* (7), (8), (11), (12).

4. Заключение. В работе исследована структура разрешающей полугруппы линейной части сильно вырожденной системы уравнений Осколкова. Исследование показало, что нелинейная сильно вырожденная система не поддается методам исследования, использованным для изучения ее обычного варианта авторами в [2]. Получены условия однозначной разрешимости линеаризованной сильно вырожденной системы Осколкова.

Литература

1. Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. Линейные уравнения соболевского типа / Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2003. — 180 с.
2. Фёдоров В.Е., Давыдов П.Н. Полулинейные вырожденные эволюционные уравнения и нелинейные системы гидродинамического типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – 19, № 4. – С.267-278.
3. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 179. – С.126-164.
4. Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г. О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости // Мат. заметки. – 1998. – 63, № 3. – С.442-450.
5. Звягин В.Г., Турбин М.В. Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина-Фойгта // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2009. – 31. – С.3-144.

6. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. – 204 с.

STRONGLY DEGENERATE OSKOLKOV SYSTEM OF EQUATIONS

P.N. Davydov, V.E. Fedorov

Chelyabinsk State University,
Bratyev Kashirinyh St., 129, Chelyabinsk, 454001, Russia, e-mail: davyduv@csu.ru, kar@csu.ru

Abstract. The Oskolkol system of equations for the dynamics of Kelvin–Voight fluid is considered in the case of the degenerate differential operator with respect to the spatial variables at the time derivative. It is shown that strongly degenerate resolving operator group corresponds to the linear part of the system. Unique solvability theorem to initial boundary value problem for the linearized strongly degenerate Oskolkov system.

Key words: Kelvin-Voight's fluid, Oskolkov's system of equations, degenerate operator group.

MSC 39A70

МАТРИЦЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ИССЛЕДОВАНИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Ю. Дуплищева

Воронежский Государственный Университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: dup_ayu@mail.ru

Аннотация. Вводится понятие состояний линейных операторов. Получена теорема об эквивалентности состояний разностного оператора и матричного оператора специального типа.

Ключевые слова: множество состояний обратимости, ядро, образ, дополняемое подпространство, разностные операторы.

1. Введение. Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, End $\mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в $\mathcal{X}$ с нормой $||A|| = \sup\limits_{||x||\le 1} ||Ax||$, $x \in \mathcal{X}$, $A \in \mathrm{End}\ \mathcal{X}$. Отметим, что оператор A называется обратимым, если его ядро $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{A}x = 0\}$ нулевое и образ $\mathrm{Im}\mathcal{A} = \{\mathcal{A}x, x \in \mathcal{X}\}$ оператора $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством $\mathcal{X}$. Далее, символом $\mathbb{J}$ обозначим одно из множеств $\mathbb{J}_d$ или $\mathbb{J}_c$, где $\mathbb{J}_d \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+\}$ и $\mathbb{J}_c \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$ соответственно, причем $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Символом $l_p = l_p(\mathbb{J}_d, \mathcal{X})$, где $p \in [1, \infty)$, обозначим банахово пространство последовательностей векторов из комплексного банахова пространства $\mathcal{X}$, суммируемых со степенью p для $p \in [1, \infty)$ и ограниченных при $p = \infty$, с нормой

$$||x||_p = \Big(\sum_{k\in\mathbb{J}_d} ||x(k)||^p\Big)^{1/p}, \quad x \in l_p, \quad p \in [1, \infty), \quad ||x||_\infty = \sup_{k\in\mathbb{J}_d} ||x(k)||, \quad x \in l_\infty.$$

Символом $c_0 = c_0(\mathbb{J}_d, \mathcal{X})$ обозначим замкнутое подпространство последовательностей $x \in l_\infty$ со свойством $\lim\limits_{k\to\infty} ||x(k)|| = 0$.

Далее, символом $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}_c, \mathcal{X})$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных функций, определенных на $\mathbb{J}_c$, со значениями в $\mathcal{X}$ и нормой $||x|| = \sup\limits_{t\in\mathbb{J}_c} ||x(t)||$, символом $C_0 = C_0(\mathbb{J}_c, X)$ — замкнутое подпространство функций $x \in C_{b,u}$ со свойством $\lim\limits_{|t|\to\infty} ||x(t)|| = 0$ (исчезающих на бесконечности).

Наконец, договоримся обозначать сиволом $\mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ любое из введенных в рассмотрение банаховых пространств (используется запись $\mathfrak{F} \in \{l_p, l_\infty, c_0, C_{b,u}, C_0\}$).

Кроме того, в пространстве $\mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ рассмотрим изометрический оператор сдвига вида:

$$(Sx)(t) = x(t + 1), \quad t \in \mathbb{J}, \quad x \in \mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathcal{X}), \quad S \in \mathrm{End}\,\mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathcal{X}).$$

Замечание 1. Пространство $\mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ инвариантно относительно сдвига.

2. Основные результаты. Рассмотрим в пространстве $\mathfrak{F}(\mathbb{J},\mathcal{X})$ разностное уравнение вида:

$$x(t+2)+B_1(t)x(t+1)+B_2(t)x(t)=f(t),\quad t\in\mathbb{J},\quad x,f\in\mathfrak{F}(\mathbb{J},\mathcal{X}), \tag{1}$$

где

$$B_i\in l_\infty(\mathbb{J},\mathrm{End}\mathcal{X}),\quad i=1,2,\quad \text{если } \mathbb{J}=\mathbb{J}_d\,,$$
$$B_i\in C_b(\mathbb{J},\mathrm{End}\mathcal{X}),\quad i=1,2,\quad \text{если } \mathbb{J}=\mathbb{J}_c\,.$$

Путем замены

$$\begin{aligned} x_1(t)&=x(t),\\ x_2(t)&=x(t+1). \end{aligned} \tag{2}$$

разностное уравнение вида (1) сводится к уравнению вида:

$$y(t+1)+\mathbb{B}(t)y(t)=\tilde{f}(t),\quad t\in\mathbb{J},\quad x,\tilde{f}\in\mathfrak{F}(\mathbb{J},\mathcal{X}\times\mathcal{X})\,, \tag{3}$$

где функция

$$\mathbb{B}\in l_\infty(\mathbb{J},\mathrm{End}(\mathcal{X}\times\mathcal{X})),\quad \text{если } \mathbb{J}=\mathbb{J}_d,$$
$$\mathbb{B}\in C_b(\mathbb{J},\mathrm{End}(\mathcal{X}\times\mathcal{X})),\quad \text{если } \mathbb{J}=\mathbb{J}_c,$$

имеет вид:

$$\mathbb{B}(t)y(t)=\begin{pmatrix} S(1) & -I\\ B_2(t) & S(1)+B_1(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix},$$

$$y(t)=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix},\qquad \tilde{f}(t)=\begin{pmatrix} 0\\ f(t)\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{J}\,.$$

Теорема 1. *Функция $x\in\mathfrak{F}(\mathbb{J},X)$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда $y\in\mathfrak{F}(\mathbb{J},X\times X)$, построенный по правилу (2), является решением уравнения (3).*

Запишем уравнение (1) в операторной форме:

$$\mathcal{D}x=f\,,$$

где оператор $\mathcal{D}\in\mathrm{End}\mathfrak{F}(\mathbb{J},\mathcal{X})$ определяется формулой:

$$\mathcal{D}=S^2+B_1S+B_2\,,$$

Точно также запишем в операторной форме уравнение (3):

$$\mathbb{D}x=\tilde{f}\,,$$

где оператор $\mathbb{D}\in\mathrm{End}(\mathbb{J},\,\mathrm{End}\mathcal{X}\times\mathcal{X})$ определяется в виде:

$$\mathbb{D}=\mathbb{S}+\mathbb{B}\,.$$

Отметим, что операторная матрица $\mathbb{S}$ имеет вид:

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Возникает естественным образом вопрос: насколько операторы $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$ обладают одинаковыми свойствами в вопросах строения ядра, образа и свойств обратимости.

В дальнейшем используется следующее важное понятие (см. также [1], [2]).

Определение 1. *Пусть* $\mathcal{A} \in \mathrm{End}\mathcal{X}$. *Рассмотрим следующие условия:*

1). $\mathrm{Ker}\ \mathcal{A} = 0$ (*т.е. оператор* $\mathcal{A}$ *инъективен*);

2). $1 \leq n = \dim\ \mathrm{Ker}\ \mathcal{A} < \infty$;

3). $\mathrm{Ker}\ \mathcal{A}$ — *бесконечномерное подпространство из* $\mathcal{X}$ ($\dim\ \mathrm{Ker}\mathcal{A} = \infty$);

4). $\mathrm{Ker}\ \mathcal{A}$ — *дополняемое подпространство в* $\mathcal{X}$;

5). $\overline{\mathrm{Im}\,\mathcal{A}} = \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ (*образ оператора* $\mathcal{A}$ *замкнут*), *что эквивалентно положительности величины* (*минимального модуля оператора* $\mathcal{A}$)

$$\gamma(\mathcal{A}) = \inf_{x \in D(\mathcal{A}) \setminus \mathrm{Ker}\mathcal{A}} \frac{||\mathcal{A}x||}{\mathrm{dist}(x, \mathrm{Ker}\mathcal{A})},$$

где $\mathrm{dist}(x, \mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \inf\limits_{x_0 \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}} ||x - x_0||$ — *расстояние от вектора* x *до подпространства* $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$.

6). *Оператор* $\mathcal{A}$ *корректен* (*равномерно инъективен*), *т.е.* $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = 0$ *и* $\gamma(\mathcal{A}) > 0$;

7). $\mathrm{Im}\ \mathcal{A}$ — *замкнутое подпространство из* $\mathcal{X}$ *конечной коразмерности* $\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = m \geq 1$;

8). $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ — *замкнутое подпространство из* $\mathcal{X}$ *бесконечной коразмерности* ($\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \infty$);

9). $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ — *замкнутое дополняемое в* $\mathcal{X}$ *подпространство;*

10). $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \mathcal{X}$ ($\mathcal{A}$ — *сюръективный оператор*);

11). *Оператор* $\mathcal{A}$ *обратим.*

Если для оператора $\mathcal{A}$ *выполнены все условия из совокупности условий* $S = i_1, \ldots, i_k$, *где* $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 11$, *то будем говорить, что оператор* $\mathcal{A}$ *находится в состоянии обратимости* S. *Множество состояний обратимости оператора* $\mathcal{A}$ *обозначим символом* $\mathrm{St}_{inv}(\mathcal{A})$.

Теорема 2. *Множество состояний обратимости операторов* $\mathcal{D} \in End(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ *и* $\mathbb{D} \in End\mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathcal{X} \times \mathcal{X})$ *совпадает, т.е.*

$$\mathrm{St}_{inv}\mathcal{D} = \mathrm{St}_{inv}\mathbb{D}.$$

Рассмотрим теперь более общую задачу. Пусть A, B_1, B_2 — операторы из $\mathrm{End}\mathcal{X}$. По ним построим оператор вида:

$$\mathcal{A} = A^2 + B_1 A + B_2. \tag{4}$$

Наряду с оператором $\mathcal{A}$, рассмотрим оператор, заданный матрицей

$$\begin{pmatrix} A & -I \\ B_2 & A + B_1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

т.е. $\mathbb{A}x = (Ax_1 - x_2, B_2x_1 + Ax_2 + B_1x_2)$, где $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

В дальнейшем, как правило, для задания оператора $\mathbb{A}$ будем использовать запись:

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ B_2 & A + B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 - x_2 \\ B_2x_1 + Ax_2 + B_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемые операторы $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ принадлежат алгебре операторов вида $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$ соответственно. Поэтому, справедлива

Теорема 3. *Множество состояний обратимости операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ совпадает:*

$$\mathrm{St}_{inv}\mathcal{A} = \mathrm{St}_{inv}\mathbb{A}.$$

Для доказательства теоремы используются следующие вспомогательные утверждения:

Лемма 1. *Ядра операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ изоморфны, причем изоморфизм осуществляет оператор:*

$$x \mapsto (x, Ax) : X \to X \times X\,.$$

Непосредственно из леммы 1 следует

Следствие 1. dim Ker$\mathcal{A}$ =dim Ker$\mathbb{A}$.

Из следствия 1 немедленно получаем

Замечание 2. Условия 1-3 из совокупности условий S выполнены для оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда они выполнены для оператора $\mathbb{A}$.

Отметим также, что ядра операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ являются замкнутыми подпространствами.

Лемма 2. *Ядро оператора $\mathcal{A}$ дополняемое тогда и только тогда. когда ядро оператора $\mathbb{A}$ дополняемое, причем проектор на ядро оператора $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ имеет вид*

$$\mathcal{P} = P_{11} + P_{22}A\,,$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P} & 0 \\ A\mathcal{P} & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно.

Из леммы 2 немедленно следует выполнение свойства 4 из совокупности условий S.

Лемма 3. *Произвольный элемент $z \in \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда пара $(0, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$.*

Лемма 4. *Пара $(y_1, y_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда вектор $y_2 + (A + B_1)y_1$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$.*

Выполнение свойства 5 немедленно следует из следующих утверждений:

Лемма 5. *Образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут тогда и только тогда, когда замкнут образ оператора $\mathbb{A}$.*

Справедливость свойства 9 немедленно следует из леммы

Лемма 6. *Образ оператора $\mathcal{A}$ дополняемое подпространство тогда и только тогда, когда образ оператора $\mathbb{A}$ дополняемое подпространство, причем проектор на образ оператора $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ имеет вид*

$$\mathcal{P} = P_{22} + (A + B_1)P_{12}\,,$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -(I-\mathcal{P})(A+B_1) & \mathcal{P} \end{pmatrix},$$

соответственно.

Литература

1. Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Успехи Математических Наук. – 2013. – 68, №1(409).; – С.77-128.
2. Баскаков А.Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Известия РАН. Серия математика. – 2009. – 73, №2. – С.3-68.
3. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / Воронеж.: ВГУ, 1987.

SECOND ORDER MATRICES AT THE RESEARCHING OF OPERATOR EQUATIONS

A.Yu. Duplishcheva

Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia. e-mail: dupl_ayu@mail.ru

Abstract. The concept of linear operators states is introduced. The theorem about the state equivalence of the definite difference operator and the matrix operator of special type is obtained.

Key words: set of invertibility states, kernel, image, complemented space, difference operators.

MSC 31B10

КРИТЕРИЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ НА $C(D)$ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

А.И. Иноземцев

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, РФ, e-mail: inozemcev.a.i@gmail.com

Аннотация. Получен критерий определенности линейных операторов с многомерными частными интегралами на пространстве непрерывных функций определенных на параллелепипедах $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Ключевые слова: многомерный интеграл Стильтьеса, теорема Радона, оператор с частными интегралами, непрерывность операторов.

1. Введение. Статья содержит условия определенности линейных операторов с многомерными частными интегралами на пространстве $C(D)$, где $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Свойства операторов с частными интегралами в различных функциональных пространствах изучались в работах Ю. Аппелля, П. П. Забрейко, А. С. Калитвина, В.А. Калитвина, Е.В. Фроловой и других авторов. Достаточные условия действия в $C(T \times S)$ операторов содержатся в работах [1, 2-4], где T и S — компактные множества в R^m и R^n. Критерии действия линейных операторов с частными интегралами в $C([a, b] \times [c, d])$ приведены в [1, 2, 4], а в общем случае пространства $C(T \times S)$ неизвестны. Неизвестны они и в случае $C(D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n)$, где D_i — компактные множества. Тем не менее, в настоящей статье критерий действия операторов установлен в случае $D_i = [a_i, b_i]$, а при его получении существенную роль играет теорема Радона о представлении линейного непрерывного оператора, действующего в пространстве $C(D)$ в виде многомерного интеграла Стильтьеса.

2. Многомерный интеграл Стильтьеса. Теоремы Рисса и Радона. Пусть в n-мерном пространстве задан параллелепипед $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Определим вершину v данного параллелепипеда как точку τ, для которой каждая координата равна либо a_i, либо b_i. Параллелепипед $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ можно задать по двум точкам $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ с наименьшими и наибольшими координатами соответственно, поэтому обозначим его $D_{ab} = D$. Пусть на D заданы две ограниченные функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$, где $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_i \in [a_i, b_i]$, $\forall i = \overline{1, n}$. Разобьем параллелепипед произвольным образом на части D_k гиперплоскостями $y_i = \tau_{ik_i}$, проходящими через точки $a_i = \tau_{i0} < \tau_{i1} < \ldots < \tau_{im_i} = b_i$, $i = 1 \div n$, где $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ — мультииндекс, k_i — номер точки разбиения τ_{ik_i} i-го отрезка, $k_i = 1, 2, \ldots, m_i$, число всех параллелепипедов D_k равно $\prod\limits_i m_i$. Положим $\lambda = \max \lambda_k$, где λ_k — диаметр параллелепипеда $D_k = \prod\limits_{i=1}^{n} [\tau_{i(k_i-1)}, \tau_{ik_i}] = D_{\tau_{i(k_i-1)}\tau_{ik_i}}$, $k_i = 1, 2, \ldots, m_i$. λ назовем диаметром разбиения. Обозначим $N_k(v)$ количество координат вида $\tau_{i(k_i-1)}$ (левые концы отрезков $[\tau_{i(k_i-1)}, \tau_{ik_i}]$) среди компонент вектора v. Величина $\Delta_k g(\tau) = \sum\limits_v (-1)^{N_k(v)} g(v)$ — приращение функции $g(\tau)$ на прямоугольном параллелепипеде D_k. Сумма берется по всем 2^n вершинам.

Работа поддержана Минобрнауки России (проект №1.4407.2011).

Выберем в каждом параллелепипеде D_k точку $\xi_k = (\xi_{1k_1}, \xi_{2k_2}, \ldots, \xi_{nk_n})$, где $\xi_{ik_i} \in [\tau_{i(k_i-1)}, \tau_{ik_i}]$, и составим n- мерную интегральную сумму Стильтьеса

$$\Sigma = \sum_{k_1=1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} \ldots \sum_{k_n=1}^{m_n} f(\xi_k)\, \Delta_k g(\tau).$$

Конечный предел интегральных сумм Σ при $\lambda \to 0$ называется интегралом Стильтьеса функции $f(\tau)$ по функции $g(\tau)$ и обозначается

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} \int\limits_{a_2}^{b_2} \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(\tau)\, dg(\tau) = \lim_{\lambda \to 0} \Sigma = J. \tag{1}$$

Функция $f(\tau)$ в прямоугольном параллелепипеде D интегрируема по функции $g(\tau)$, если интеграл (1) существует.

Пусть функция $g(\tau)$ определена на некотором n-мерном параллелепипеде D. Разобьем прямоугольный параллелепипед произвольным образом на части плоскостями, проходящими через точки $a_i = \tau_{i0} < \tau_{i1} < \ldots < \tau_{i(k_i-1)} < \tau_{ik_i} < \ldots < \tau_{im_i} = b_i$, $i = 1 \div n$. Из абсолютных величин приращений функции $g(\tau)$, отвечающих отдельным частям, образуем сумму

$$\upsilon = \sum_{k_1=1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} \ldots \sum_{k_n=1}^{m_n} |\Delta_k g(\tau)|\,, \tag{2}$$

где $\Delta_k g(\tau) = \sum\limits_{\upsilon} (-1)^{N_k(\upsilon)} g(\upsilon)$. Если множество сумм (2) ограничено сверху, то функция $g(\tau)$ в прямоугольном параллелепипеде D имеет ограниченное изменение. При этом верхнюю грань этого множества называют полным изменением функции в указанном прямоугольном параллелепипеде и обозначают $V_D g = \sup\{\upsilon\}$.

Функции n переменных с ограниченным изменением обладают свойствами, аналогичными свойствам функций одной и двух переменных с ограниченным изменением.

Для n-мерного интеграла Стильтьеса справедливы свойства, аналогичные известным фактам для одномерного и двумерного интеграла Стильтьеса: теоремы о среднем, оценки, теоремы о предельном переходе под знаком интеграла и другие.

Следующие две теоремы доказываются так же как в [5, 6] при $n = 1$. При $n = 2$ доказательства теоремы Радона приведено в [2, 4].

Пусть $D_{a\xi} = [a_1, \xi_1] \times [a_2, \xi_2] \times \cdots \times [a_n, \xi_n]$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in D$, а $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Теорема 1. *Всякий линейный функционал $f(x)$, определенный на $C(D)$, может быть определен для разрывных функций*

$$\theta_\xi(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in D_{a\xi}\,, \\ 0, & \tau \in D \backslash D_{a\xi} \end{cases}$$

и для всех линейных комбинаций из них,

$$\sum_{l=1}^{p} a_l \theta_{\xi_l}(\tau) \qquad (a_l \text{ – постоянные}),$$

так, что будут соблюдены условия:

1. *Функционал сохраняет свойство дистрибутивности для линейных комбинаций из $\theta_\xi(\tau)$.*

2. *Функционал сохраняет свойство непрерывности в следующей форме: если линейные комбинации из $\theta_\xi(\tau)$ равномерно сходятся к непрерывной функции $x(\tau)$, то и значения функционала для этих линейных комбинаций стремятся к $f(x)$.*

Теорема 2 (Рисс). *Общая форма линейного непрерывного функционала $f(x)$ в пространстве $C(D)$ дается формулой*

$$f(x) = \int\limits_D x(\tau)\, dg(\tau) \tag{3}$$

в виде интеграла Стильтьеса, где $g(\tau)$ – функция с ограниченным изменением, причем $\|f\| \leqslant V_D g$.

Функцию $g(\tau)$, для которой $\|f\| = V_D g(\tau)$, можно определить равенством

$$g(\xi) = \begin{cases} f(x_\xi) & \text{при } \xi \in \prod\limits_{i=1}^{n} (a_i, b_i], \\ 0 & \text{при } \xi \in D \setminus \prod\limits_{i=1}^{n} (a_i, b_i], \end{cases}$$

где

$$x_\xi(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau \in D_{a\xi}, \\ 0 & \text{при } \tau \in D \setminus D_{a\xi}, \end{cases} \quad ; \qquad \xi \in \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i]\,.$$

Определение. *Функцию $g(t,\tau)$, имеющую ограниченную вариацию по τ при каждом $t \in D$, назовем слабо непрерывной по t, если для любой последовательности t_p точек из D, сходящейся к t, и любой непрерывной функции $x(\tau)$, выполняется равенство*

$$\lim_{p\to\infty} \int\limits_D x(\tau)\, d_\tau g(t_p, \tau) = \int\limits_D x(\tau)\, d_\tau g(t, \tau)\,. \tag{4}$$

Теорема 3 (Радон). *Линейный непрерывный оператор A, действующий в пространстве $C(D)$, допускает представление в виде многомерного интеграла Стильтьеса*

$$(Ax)\,(t) = \int\limits_D x(\tau)\, dg(t, \tau), \tag{5}$$

где $g(t,\tau)$ — функция с ограниченным изменением по τ и слабо непрерывная по t.

□ Необходимость. Если A — линейный непрерывный оператор на $C(D)$ и $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in D$ — произвольным образом фиксированная точка, то $A(t)x \equiv (Ax)(t)$ — линейный непрерывный функционал на $C(D)$, для которого по теореме Рисса существует функция $g(t,\tau)$ ограниченной вариации по τ такая, что

$$A(t)x \equiv (Ax)(t) = \int\limits_D x(\tau)\, d_\tau g(t, \tau)\,.$$

При изменении t в D значение непрерывной функции $A(t)x$ определится последним равенством, т.е. линейный непрерывный оператор A допускает представление в виде интеграла Стильтьеса от функции $x(\tau)$ с интегрирующей функцией $g(t,\tau)$ ограниченной вариации по τ. Осталось показать слабую непрерывность функции $g(t,\tau)$ по t. Так как $(Ax)(t)$ — непрерывная на D функция, то $\forall t, t_p \in D$, где t_p, $p \in \mathbb{N}$ — последовательность сходящаяся к t, имеем $\lim\limits_{p\to\infty}(Ax)(t_p) = (Ax)(t)$, или

$$\lim_{p\to\infty}\int\limits_D x(\tau)\,d_\tau g(t_p,\tau) = \int\limits_D x(\tau)\,d_\tau g(t,\tau),$$

то есть, $g(t,\tau)$ слабо непрерывна по t.

Достаточность. Пусть в равенстве (5) функция $g(t,\tau)$ имеет ограниченную вариацию по τ и слабо непрерывна по t. Покажем, что A — линейный непрерывный оператор на $C(D)$. Пусть $x(\tau)$ — непрерывная на D функция. При каждом $t \in D$ интеграл в правой части (5) конечен, так как функция $g(t,\tau)$ имеет ограниченное изменение по τ при фиксированном t. Тогда равенством (5) определен оператор A на $C(D)$. Из слабой непрерывности $g(t,\tau)$ по t, получаем $(Ax)(t_p) \to (Ax)(t)$ при $t_p \to t$, где $t_p \in D$, $t \in D$. Следовательно, оператор A непрерывные функции переводит в непрерывные, т.е. оператор A действует в $C(D)$. Из свойств интеграла Стильтьеса вытекает линейность оператора A. Покажем, что оператор A ограничен. Пусть снова $t \in D$ — произвольным образом фиксированная точка. Тогда, по теореме Рисса, функционал

$$A(t)x \equiv (Ax)(t) = \int\limits_D x(\tau)\,d_\tau g(t,\tau)$$

непрерывен на $C(D)$ и найдется функция $\hat{g}(t,\tau)$ ограниченной вариации по τ такая, что

$$A(t)x \equiv (Ax)(t) = \int\limits_D x(\tau)\,d_\tau \hat{g}(t,\tau)$$

и $\|A(t)\| = V_D\hat{g}(t,\cdot) = V(t)$. Из равномерной ограниченности функции $V(t)$ по t на D, вытекает неравенство $V(t) \le V$ при $\forall t \in D$. В предположении противного, в прямоугольнике D существует последовательность точек $t_p \to t_0 \in D$, в которой $V(t_p) \to \infty$. Так как при каждом p

$$A(t_p)x \equiv (Ax)(t_p) = \int\limits_D x(\tau)\,d_\tau \hat{g}(t_p,\tau)$$

— непрерывный линейный функционал с нормой $\|A(t_p)\| = V(t_p) \to \infty$ при $p \to \infty$, то, по принципу сгущения особенностей [7], существует непрерывная на D функция $\phi(\tau)$, для которой

$$|A(t_p)\phi| = \left|\int\limits_D \phi(\tau)\,d_\tau \hat{g}(t_p,\tau)\right| \to \infty\,.$$

Тогда

$$\left|\int\limits_D \phi(\tau)\,d_\tau g(t_p,\tau)\right| = \left|\int\limits_D \phi(\tau)\,d_\tau \hat{g}(t_p,\tau)\right| \to \infty\,,$$

что противоречит слабой непрерывности по t в точке t_0 функции $g(t,\tau)$.

Учитывая, что $V(t) \leq V$ для любой точки $t \in D$, и используя свойства интеграла Стильтьеса, получим

$$|(Ax)(t)| = \left| \int\limits_D x(\tau)\, d_\tau g(t,\tau) \right| = \left| \int\limits_D x(\tau)\, d_\tau \hat{g}(t,\tau) \right| \leq$$

$$\leq V_D \hat{g}(t,\cdot)\|x\| = V(t)\|x\| \leq V\|x\|.$$

Тогда $\|Ax\| = \max\limits_D |(Ax)(t)| \leq V\|x\|$ и ограниченность оператора A доказана. ■

3. Линейные операторы с многомерными частными интегралами.

Определение 3. *Линейным оператором с многомерными частными интегралами называется оператор*

$$(Kx)(t) = k_1(t)x(t) + \sum_{i=2}^{2^n} \int_{D_i} k_i(t,S_i)x(s_i)\, dS_i\,, \tag{6}$$

где $k_i\colon D \times D_i \to R$ — измеримые функции, интегралы понимаются в смысле Лебега ($n \geqslant 2$), $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^n$, $T_1, T_2, \ldots, T_{2^n}$ — подмножества множества $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, где $T_1 = \varnothing$, $T_2 = \{\tau_1\}, \ldots, T_{2^n} = \tau$. S_i и dS_i — набор переменных τ_j из T_i и их дифференциалов $d\tau_j$ соответственно. Вектор s_i получается заменой компонент вектора t соответствующими элементами T_i. D_i — декартово произведение множеств $[a_j, b_j]$, на которых определены $\tau_j \in T_i$.

Будем использовать и другую форму записи оператора K

$$(Kx)(t) = k_1(t)x(t) + \sum_{\alpha} \int_{D_\alpha} k_\alpha(t,S_\alpha)x(s_\alpha)\, dS_\alpha\,, \tag{6*}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, причем α_j принимает значение 0 или 1 при $j = 1, \ldots, n$, $D_\alpha = \prod\limits_{j=1}^{n} [a_j, b_j]^{\alpha_j}$. В случае $[a_k, b_k]^0$ отрезок $[a_k, b_k]$ исключен из декартова произведения. Если в формуле (6) порядок множеств D_i, $(i = \overline{1, 2^n})$ условный, то в (6*) порядок определяется мультииндексом α по элементам α_j.

Теорема 4 [1-4]. *Если оператор K действует в $C(D)$, то он непрерывен.*

Будем говорить,что измеримая функция $k_i(t,S_i)$ принадлежит $C(L^1(D_i))$, если

$$\sup_D \int\limits_{D_i} |k_i(t,S_i)|\, dS_i = L_i < \infty$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|t - t^0\| < \delta$ следует

$$\int\limits_{D_i} |k_i(t,S_i) - k_i(t^0,S_i)|\, dS_i < \varepsilon\,.$$

Теорема 5 [1-4]. *Пусть функция $k_1(t)$ непрерывна на D и $k_i(t,S_i) \in C(L^1(D_i))$ при $i = 2, 3, \ldots, 2^n$. Тогда K является непрерывным линейным оператором на $C(D)$.*

Теорема 5 справедлива в случае непрерывности функций $k_i(t, S_i)$, ее частным случаем является

Теорема 6 [1, 4]. *Пусть* $\|k_i(t,\cdot)\|_{L^{p_i}} \le A_i < \infty$ $(1 < i \le 2^n)$, *где* $t \in D$, $1 < p_i < \infty$, A_i — *некоторые постоянные, и пусть ядра* $k_i(t, S_i)$ *имеют разрывы только вдоль конечного числа поверхностей* $\tau_{S_i} = \varphi_{S_i}(t)$, *где* τ_{S_i} — *набор* τ_j *из подмножества* T_i *множества* $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, $\varphi_{S_i}(t)$ — *набор непрерывных функций* $\varphi^j_{S_i}(t)$ *таких, что* $T_i \ni \tau_j = \varphi^j_{S_i}(t)$. *Тогда ядра* $k_i(t, S_i)$ *принадлежат* $C(L^1(D_i))$.

4. Критерий действия линейных операторов с многомерными частными интегралами. Теоремы 5 и 6 содержат достаточные условия действия в $C(D)$ оператора K. Приведем необходимые и достаточные условия возможности его действия в $C(D)$. При получении таких условий существенную роль играет теорема Радона.

Рассмотрим всюду плотное в $C(D)$ множество линейных комбинаций функций

$$x_\alpha = \prod_{j=1}^{n} x^{\alpha_j}_{\xi_j}(\tau_j)\,, \qquad x_{\xi_j}(\tau_j) = \begin{cases} \xi_j - \tau_j & \text{при } \tau_j \le \xi_j\,, \\ 0 & \text{при } \tau_j > \xi_j\,. \end{cases}$$

и формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_D f(\tau)\,dg(\tau) = \sum_{i=1}^{2^n} (-1)^{\dim D_i} \left\{ \int\limits_{D_i} g(\tau)\,df(\tau) \Big|_{\overline{D}_i} \right\},$$

где $D_i = \prod[a_j, b_j]$, $1 \le j \le n$, $D_1 = \varnothing$, $D_2 = [a_1, b_1]$, $D_3 = [a_2, b_2]$, $\ldots$, $D_{n+1} = [a_n, b_n]$, $D_{n+2} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = D_2 \times D_3$ и т.д., $D_i \times \overline{D}_i = D$, причем первое слагаемое в равенстве (при $i = 1$) имеет вид $(g(\tau)f(\tau))|_D = \{(g(\tau)f(\tau))|_{a_1}^{b_1} \cdots\}\Big|_{a_n}^{b_n} = \Delta_D(gf)$. В дальнейших рассуждениях будем использовать приведенную формулу в виде

$$\int_D f(\tau)\,dg(\tau) = \sum_\alpha (-1)^{\dim D_\alpha} \left\{ \int_{D_\alpha} g(\tau)\,df(\tau) \Big|_{\overline{D}_\alpha} \right\},$$

где $D_\alpha \times \overline{D}_\alpha = D$. Применение формулы интегрирования по частям дает следующие равенства:

$$\int\limits_D 1\,dg(\tau) = \Delta_D g(\tau) = B,$$

$$\int\limits_D x_\alpha\,dg(\tau) = \sum_\alpha (-1)^{\dim D_{\alpha_{a\xi}}} \left\{ \int\limits_{D_{\alpha_{a\xi}}} g(\tau)\,dx_\alpha \Bigg|_{\bar{D}_{\alpha_{a\xi}}} \right\} = B_\alpha\,, \tag{7}$$

где $D_{\alpha_{a\xi}} = \prod\limits_{j=1}^{n} [a_j, \xi_j]^{\alpha_j}$, $D_{\alpha_{a\xi}} \times \bar{D}_{\alpha_{a\xi}} = D_{a\xi}$. $D_{a\xi}$ — параллелепипед, вершинами с наименьшими и наибольшими координатами которого являются соответственно точки a и ξ, координаты остальных $2^n - 2$ вершин получаются комбинацией координат точек a и ξ.

Пусть

$$g(t,\tau) = k_1(t)\chi(t,\tau) + \sum_{\alpha} \int\limits_{D_{\alpha a\tau}} k_\alpha(t,\bar{S}_\alpha)\, d\bar{S}_\alpha\, \chi(s_\alpha \setminus S_\alpha, \tau \setminus S_\alpha), \tag{8}$$

где $D_{\alpha_{a\tau}} = \prod\limits_{j=1}^{n} [a_j, \tau_j]^{\alpha_j}$, $\alpha_j = 0$ или 1; $\bar{S}_\alpha$ — набор переменных интегрирования $\bar{\tau}_j$,

$$\chi(s_\alpha \setminus S_\alpha, \tau \setminus S_\alpha) = \begin{cases} 1, & \forall j\ \tau_j \geq t_j > a_j \text{ или } \tau_j > t_j = a_j, \\ 0, & \exists j\ \tau_j < t_j \text{ или } \tau_j = t_j = a_j. \end{cases}$$

Очевидно, что $g(t, v_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, 2^n - 1)$, где v_k — вершины параллелепипеда $D = \prod\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, при $k = 2^n$ $v_{2^n} = b$,

$$g(t,b) = k_1(t) + \sum_{\alpha} \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(t, S_\alpha)\, dS_\alpha\,.$$

Подставляя функцию (8) в формулы (7), получим

$$B(t) = k_1(t) + \sum_{\alpha} \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(t, S_\alpha)\, dS_\alpha\,,$$

$$B_\alpha(t) = \int\limits_{D} x_\alpha\, dg(\tau) = \sum_{\alpha} (-1)^{\dim D_{\alpha_{a\xi}}} \left\{ \int\limits_{D_{\alpha_{a\xi}}} g(t,\tau)\, dx_\alpha \Bigg|_{\bar{D}_{\alpha_{a\xi}}} \right\}. \tag{9}$$

Пусть

$$\gamma(t) = |k_1(t)| + \sum_{\alpha} \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(t, S_\alpha)|\, dS_\alpha\,. \tag{10}$$

Теорема 7. *Линейный оператор K действует в пространстве $C(D)$ тогда и только тогда, когда при каждом фиксированном τ функции $B(t)$ и $B_\alpha(t)$ непрерывны, а функция $\gamma(t)$ ограничена. При выполнении этих условий оператор K непрерывен и его норма определяется равенством*

$$\|K\| = \sup_{D} \gamma(t)\,. \tag{11}$$

□ Пусть оператор K действует в $C(D)$. Тогда по теореме 4 он непрерывен в $C(D)$, а по теореме 3 допускает представление в виде многомерного интеграла Стильтьеса

$$(Kx)(t) = \int\limits_{D} x(\tau)\, dg(t,\tau)\,,$$

где функции $g(t,\tau)$ определяется равенством (8), имеет ограниченную вариацию по τ и слабо непрерывна по t. Так как функция $g(t,\tau)$ слабо непрерывна по t, то функция (9) непрерывна, а ограниченность ее вариации по τ и равенства $V_D g(t,\tau) = \gamma(t)$ влечет ограниченность

функции γ. Для доказательства равенства $V_D g(t,\tau)=\gamma(t)$ выберем точки $p=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ и $q=(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ такие, что $p_i<t_i<q_i$, где $t=(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ — фиксированная внутренняя точка из D, т.е. $D_{ap}\subset D_{at}\subset D_{aq}$, тогда параллелепипед D точками p и q разбивается на 3^n параллелепипедов: D_1, D_2, $\ldots$, D_{3^n}. Полная вариация функции g на D будет равна сумме полных ее вариаций на полученных параллелепипедах разбиения $V_D g=\sum\limits_{k=1}^{3^n} V_{D_k} g$. Учитывая формулу [8]

$$V_D F=\int\limits_D |f(\tau)|\,d\tau,\quad \text{где } F(t)=\int\limits_a^t f(\tau)\,d\tau\,,$$

где $f(\tau)$ — суммируемая функция на D, и вычисляя $V_{D_k} g$ $(k=1,2,\ldots,3^n)$ при условии, что $p_i\to t_i$, $q_i\to t_i$ $(p\to t,\ q\to t)$, получим равенство

$$V_D g=\lim_{p,\,q\to t}\sum_{k=1}^{3^n} V_{D_k} g=|k_1(t)|+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha_j=0}^{1}\sum_{\beta_j=0}^{1}\int\limits_{D_{(\alpha,\beta)}} |k_{(\alpha,\beta)}(t,S_{(\alpha,\beta)})|\,dS_{(\alpha,\beta)}\,, \tag{12}$$

где $D_{(\alpha,\beta)}=\prod\limits_{j=1}^{n}\left\{[a_j,t_j]^{\alpha_j}\times[t_j,b_j]^{\beta_j}\right\}$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$. При этом исключается случай $\alpha_j=\beta_j=1$, а также случай $\forall j\ \alpha_j=\beta_k=0$, т.е. существует α_j или β_k равное 1, т.к. при всех нулевых значениях α_j и β_k получим функцию $|k_1(t)|$.

Из равенства (12) следует, что $V_D g=\gamma(t)$. Для доказательства равенства (12) достаточно проверить, что

$$\lim_{p,\,q\to t} V_{D_k} g=\int\limits_{D_{(\alpha,\beta)}} |k_{(\alpha,\beta)}(t,S_{(\alpha,\beta)})|\,dS_{(\alpha,\beta)}. \tag{13}$$

Например, рассмотрим параллелепипед $D_{pq}=\prod\limits_{i=1}^{n}[p_i,q_i]$. Здесь $g(t,\tau)$ определяется равенством (8). Для $\forall\varepsilon>0$ выберем такое разбиение параллелепипеда D_{pq} на части, что $|\upsilon-V_{D_{pq}} g|<\varepsilon/2$, где $\upsilon=\sum\limits_{k_1=1}^{m_1}\sum\limits_{k_2=1}^{m_2}\ldots\sum\limits_{k_n=1}^{m_n}|\Delta_k g(\tau)|$. Из абсолютной непрерывности интегралов и определения функций χ при $p,q\to t$ получим $|\upsilon-|k_1(t)||<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|V_{D_{pq}} g-|k_1(t)||<\varepsilon$. Таким образом показано, что при $\alpha=(0,0,\ldots,0)$ и $\beta=(0,0,\ldots,0)$ имеет место

$$\lim_{p,\,q\to t} V_{D_{(\alpha,\beta)}} g=\int\limits_{D_{(\alpha,\beta)}} |k_{(\alpha,\beta)}(t,S_{(\alpha,\beta)})|\,dS_{(\alpha,\beta)}=|k_1(t)|\,.$$

Равенство (13) для оставшихся параллелепипедов $D_{(\alpha,\beta)}$ доказывается аналогично. Пусть при каждом фиксированном τ функции (9) непрерывны, а функция (10) ограничена. Тогда функция $g(t,\tau)$ слабо непрерывна по t и имеет ограниченную вариацию по τ, что по теореме Радона влечет непрерывность действия оператора K в $C(D)$. Докажем равенство (11). При фиксированном t $(Kx)(t)$ — функционал на $C(D)$. По теореме Радона, значение

$$\|K\|=\sup_D\|(Kx)(t)\|\,.$$

Покажем, что при фиксированном t имеет место $V_D g(t,\tau) = \|(Kx)(t)\|$. Пусть

$$x_\tau(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } u \in D_{a\tau}\,, \\ 0 & \text{при } u \in D \setminus D_{a\tau}\,, \end{cases}$$

f — непрерывный линейный функционал на $C(D)$ и

$$g(\tau) = \begin{cases} f(x_\tau) & \text{при } a_j < \tau_j \le b_j \ (j = \overline{1,n})\,, \\ 0 & \text{при других значениях } \tau\,. \end{cases}$$

По теореме Рисса о представлении линейного непрерывного функционала на $C(D)$,

$$f(x) = \int\limits_D x(\tau)\, dg(\tau)\,, \text{ причем } \ \|f\| = V_D g\,.$$

При подстановке выше определенных функций x_τ и $g(\tau)$ в $f(x)$ непосредственно проверяется, что при фиксированном t функция $g(\tau)$, порождающая функционал $(Kx)(t)$, принимает вид

$$g(\tau) = k_1(t)\chi_1(t,\tau) + \sum_\alpha \int\limits_{D_{\alpha a\tau}} k_\alpha(t,\bar{S}_\alpha)\, d\bar{S}_\alpha\, \chi_1(s_\alpha \setminus S_\alpha, \tau \setminus S_\alpha)\,,$$

где

$$\chi_1(s_\alpha \setminus S_\alpha, \tau \setminus S_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in D_{a\tau}, \\ 0, & \text{при } t \in D \setminus D_{a\tau}. \end{cases}$$

Сравнивая $g(t,\tau)$ и $g(\tau)$ получим, $g(t,\tau) = g(\tau) - \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(\tau_j)$. Тогда $V_D g(t,\tau) = V_D g(\tau)$. Следовательно, $\|(Kx)(t)\| = V_D g(t,\tau)$ и, в силу равенства $V_D g(t,\tau) = \gamma(t)$, $\|K\| = \sup\limits_D V_D g(t,\tau) = \sup\limits_D \gamma(t)$. ■

Представление Радона линейного непрерывного оператора на $C(D)$ не единственно, однако представление оператора K с частными интегралами в виде (6), как следует из доказанной теоремы, единственно.

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.
2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.
3. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / Липецк: ЛГПУ, 2006. – 178 с.
4. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. C-теория / Липецк: ЛГПУ, 2004. – 196 с.
5. Гливенко В.И. Интеграл Стильтьеса / М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 216 с.
6. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу / М.: Мир, 1979. – 588 с.
7. Иосида К. Функциональный анализ / М.: Мир, 1967. – 624 с.

8. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / М.: Наука, 1974. – 480 с.

CRITERION OF ACTION ON $C(D)$ OF LINEAR OPERATORS WITH MULTIDIMENSIONAL PARTIAL INTEGRALS

A.I. Inozemtsev

Lipetsk State Pedagogical University,
Lenin St., 42, Lipetsk, 398020, Russia, e-mail: inozemcev.a.i@gmail.com

Abstract. Criterion of definiteness of linear integral operators with multidimensional partial integrals on the space of continuous functions is found on the space $C(D)$ where D are parallelepipeds $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Key words: multidimensional Stieltjes integral, operator with partial integrals, continuity of operators.

MSC 65R20

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

В.А. Калитвин

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, Россия, e-mail: kalitvin@gmail.com

Аннотация. Построены алгоритмы численного решения линейных и нелинейных интегральных уравнений с частными интегралами, содержащими постоянные и переменные пределы интегрирования. Алгоритмы основаны на применении метода механических квадратур. Приведены теоремы о сходимости этого метода для рассматриваемых классов уравнений.

Ключевые слова: интегральные уравнения, уравнения с частными интегралами, интегро-дифференциальные уравнения Барбашина, метод механических квадратур.

1. Введение. К линейным интегральным уравнениям с частными интегралами

$$x(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \\ + \int_a^t\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s) \tag{1}$$

и их частным случаям приводятся задачи интегро-дифференциальных уравнений Барбашина, механики сплошных сред и ряда других прикладных задач [1–5].

К нелинейным интегральным уравнениям с частными интегралами вида

$$x(t,s) = \int_a^t c(\tau,s)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t\int_c^d k(\tau,s,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma + f(t,s) \tag{2}$$

приводится задача Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Барбашина [2].

В общем случае найти явное решение интегральных уравнений (1) и (2) не представляется возможным. Поэтому важное значение имеет разработка приближенных и численных методов решения этих уравнений.

Применение хорошо известных численных методов решения линейных интегральных уравнений второго рода к интегральным уравнениям (1) требует осторожности, так как известные обоснования этих методов часто связаны с предположением о компактности интегральных операторов, содержашихся в таких уравнениях, которой не обладают частично интегральные операторы, определяемые первым и вторым слагаемыми в правой части уравнения (1), даже в случае ненулевых непрерывных ядер $l(t,s,\tau)$

Работа поддержана Минобрнауки России (проект №1.4407.2011)

и $m(t,s,\sigma)$. В частности, при обосновании метода механических квадратур для решения линейных интегральных уравнений второго рода [6-8] используется компактность линейных интегральных операторов, содержащихся в этих уравнениях.

Аналогичные проблемы возникают при обосновании численных методов решения нелинейного интегрального уравнения (2).

В связи с этими обстоятельствами в работе строятся алгоритмы численного решения линейных и нелинейных интегральных уравнений с частными интегралами, основанные на применении метода механических квадратур, и приводятся теоремы о сходимости этого метода для уравнений рассматриваемых классов.

2. Численное решение линейного интегрального уравнения с частными интегралами. Будем рассматривать интегральное уравнение

$$x(t,s) = \int_a^t c(\tau,s)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t \int_c^d k(\tau,s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s) \tag{3}$$

с частными интегралами, где $t \in [a,b], s \in [c,d]$, заданные функции $c(\tau,s), k(\tau,s,\sigma)$, $f(t,s)$ и $f'_t(t,s)$ непрерывны по совокупности переменных, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Уравнение (3) есть частный случай линейного уравнения (1) с частными интегралами.

Пусть $D = \{(\tau,s) : a \le \tau \le t \le b, s \in [c,d]\}$. Через $C(D)$ обозначим множество непрерывных на треугольнике D функций с супремум нормой, а через X — множество функций из $C(D)$, имеющих непрерывную частную производную по t. $C(D)$ и X — банаховы пространства относительно норм $\|x\|_{C(D)} = \max_D |x(t,s)|$ и $\|x\|_X = \max_D(|x(t,s)| + |x'_t(t,s)|)$ соответственно.

Под решением уравнения (3) будем понимать непрерывную функцию $x(t,s)$, подстановка которой в уравнение (3) обращает это уравнение в тождество.

В силу [4,5] уравнение (3) имеет единственное решение $x \in C(D)$. Тогда справедливо тождество

$$x(t,s) \equiv \int_a^t c(\tau,s)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t \int_c^d k(\tau,s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s). \tag{4}$$

Так как подынтегральные функции в правой части тождества (4) непрерывны, то она дифференцируема по t. Дифференцируя по t тождество (4), получим тождество

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} \equiv c(t,s)x(t,s) + \int_c^d k(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f'_t(t,s)\,. \tag{5}$$

Следовательно, решение интегрального уравнения (3) является решением интегро-дифференциального уравнения Барбашина (ИДУБ)

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(t,s)x(t,s) + \int_c^d k(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f'_t(t,s)\,. \tag{6}$$

с начальным условием

$$x(a,s) = f(a,s)\,. \tag{7}$$

Как и выше, под решением ИДУБ (6) здесь и далее понимается функция $x \in X$, подстановка которой в уравнение (6) обращает его в тождество.

Если функция x является решением задачи Коши (6)/(7), то имеют место тождество (5) и равенство (7). Интегрируя обе части тождества (5) по отрезку $[a, t]$ и учитывая условие (7), получим тождество (4), которое показывает, что решение задачи Коши (6)/(7) является решением интегрального уравнения (3). Таким образом, интегральное уравнение (3) и задача Коши (6)/(7) эквивалентны.

Задача Коши (6)/(7), очевидно, эквивалентна следующему двумерному интегральному уравнению:

$$x(t,s) = \int_a^t \int_c^d r(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + g(t,s) \equiv (Rx)(t,s) + g(t,s)\,, \tag{8}$$

где

$$r(t,s,\tau,\sigma) = k(\tau,s,\sigma)\exp\Big\{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi\Big\}\,,$$

$$g(t,s) = \int\limits_a^t f'_t(\tau,s)\exp\Big\{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi\Big\}d\tau + f(a,s)\exp\Big\{\int_a^t c(\xi,s)d\xi\Big\}\,.$$

Уравнение (8) является линейным интегральным уравнением с непрерывным ядром $r(t,s,\tau,\sigma)$ и непрерывной функцией $g(t,s)$. Оно имеет единственное решение в $C(D)$, так как спектральный радиус компактного в $C(D)$ интегрального оператора R равен нулю [1,4,5], и это решение можно найти методом последовательных приближений.

Для численного решения уравнения (8) могут быть использованы многочисленные методы решения линейных интегральных уравнений, в частности, метод механических квадратур.

При применении метода механических квадратур к уравнению (8) отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ разбиваются на части точками

$$t_p = a + ph(p = 0, 1, \ldots, P, a + Ph \le b < (P+1)h)\,,$$

$$s_q = c + qg(q = 0, 1, \ldots, Q, c + Qg \le d < (Q+1)g)\,,$$

в уравнении (8) заменим t и s на t_p и s_q соответственно, а интеграл вычислим по формуле

$$\int_a^{t_p}\int_c^d r(t_p,s_q,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma = hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q}\gamma_{pqij}r_{pqij}x(t_i,s_j) + r_{pq}\,, \tag{9}$$

где $r_{pqij} = r(t_p, s_q, t_i, s_j)$, а r_{pq} — остаток в формуле (9). В результате, интегральное уравнение (8) заменяется системой уравнений относительно неизвестных

$$x(t_i, s_j) \quad (i = 0, 1, \ldots, P; j = 0, 1, \ldots, Q)\,.$$

Отбрасывая в этой системе уравнений остатки, получим систему уравнений для приближенных значений x_{pq} функции x в точках (t_p, s_q)

$$x_{pq} = hg \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{Q} \gamma_{pqij} r_{pqij} x_{ij} + g_{pq} + \delta_{pq} \quad (p = 0, 1, \ldots, P; q = 0, 1, \ldots, Q)\,, \tag{10}$$

где $g_{pq} = g(t_p, s_q)$, а δ_{pq} — погрешности вычислений для уравнений системы (9) с x_{pq}.

Аналогично в [9] доказывается

Теорема 1. *Пусть в формуле (9) остатки стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$, $|\gamma_{pqij}| \le A < \infty$ и погрешности вычислений стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$. Тогда при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} $(p = 0, 1, \ldots, P; q = 0, 1, \ldots, Q)$ может быть найдено из системы (10), причем для любого заданного $\varepsilon > 0$ существуют такие h_0 и g_0, что при $h < h_0$ и $g < g_0$ $|x_{pq} - x(t_p, s_q)| < \varepsilon$ $(p = 0, 1, \ldots, P; q = 0, 1, \ldots, Q)$.*

Таким образом, при численном решении линейного интегрального уравнения (3) с частными интегралами целесообразно перейти к эквивалентному линейному двумерному интегральному уравнению (8) и численно решать это уравнение с применением методов численного решения линейных интегральных уравнений, например, с применением метода механических квадратур.

Отметим, что при сделанных выше предположениях описанный процесс численного решения линейного интегрального уравнения (3) непосредственно применяется и к численному решению задачи Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения Барбашина.

3. Численное решение нелинейного интегрального уравнения с частными интегралами. Результаты раздела 1 естественным образом распространяются на нелинейные интегральные уравнения с частными интегралами (2), где $t \in [a, b], s \in [c, d]$, $u \in (-\infty, +\infty)$, заданные функции $c(\tau, s), k(\tau, s, \sigma, u)$, $f(t, s)$ и функция $f'_t(t, s)$ непрерывны по совокупности переменных, функция $k(\tau, s, \sigma, u)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|k(\tau, s, \sigma, u) - k(\tau, s, \sigma, v)| \le N|u - v|\,,$$

а интегралы понимаются в смысле Лебега. Линейное интегральное уравнение (3) с частными интегралами есть частный случай уравнения (2). Оно получается из (2) при $k(\tau, s, \sigma, u) \equiv k(\tau, s, \sigma)u$.

Под решением уравнения (2) будем понимать непрерывную функцию $x(t, s)$, подстановка которой в уравнение (2) обращает это уравнение в тождество.

В силу [4] уравнение (2) имеет единственное решение $x \in C(D)$. Также как в разделе 1 показывается, что уравнение (2) эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению Барбашина

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = c(t, s)x(t, s) + \int_c^d k(t, s, \sigma, x(t, \sigma))d\sigma + f'_t(t, s) \tag{11}$$

с начальным условием (7), где под решением ИДУБ (11) здесь и далее понимается функция $x \in X$, подстановка которой в уравнение (11) обращает это уравнение в тождество.

Задача Коши (11)/(7), очевидно, эквивалентна следующему двумерному интегральному уравнению:

$$x(t,s) = \int_a^t \int_c^d r(t,s,\tau,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma + g(t,s) \equiv (Rx)(t,s) + g(t,s)\,, \tag{12}$$

где

$$r(t,s,\tau,\sigma,u) = \exp\Big\{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi\Big\}k(\tau,s,\sigma,u)\,,$$

$$g(t,s) = \int\limits_a^t f_t'(\tau,s)\exp\Big\{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi\Big\}d\tau + f(a,s)\exp\Big\{\int_a^t c(\xi,s)d\xi\Big\}.$$

Уравнение (12) является интегральным уравнением Урысона с непрерывным ядром $r(t,s,\tau,\sigma,u)$ и непрерывной функцией $g(t,s)$, оно имеет единственное решение в $C(D)$ и это решение можно найти методом последовательных приближений [4].

Для численного решения интегрального уравнения Урысона (12) могут быть использованы различные методы решения интегральных уравнений, в частности, метод механических квадратур [3-7].

При применении метода механических квадратур к уравнению (12) отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ разбиваются на части точками t_p и s_q (см. раздел 2), в уравнении (12) t и s заменяются на t_p и s_q соответственно, а интеграл вычисляется по «квадратурной» формуле

$$\int_a^{t_p}\int_c^d r(t_p,s_q,\tau,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma = hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q}\gamma_{pqij}r_{pqij}(x(t_i,s_j)) + r_{pq}\,, \tag{13}$$

где $r_{pqij}(x(t_i,s_j)) = r(t_p,s_q,t_i,s_j,x(t_i,s_j))$, а r_{pq} — остаток в формуле (13). В результате, интегральное уравнение (12) заменяется системой уравнений относительно неизвестных

$$x(t_i,s_j) \quad (i=0,1,\ldots,P; j=0,1,\ldots,Q)\,.$$

Отбрасывая в этой системе уравнений остатки, получим систему нелинейных уравнений для приближенных значений x_{pq} функции x в точках (t_p,s_q)

$$x_{pq} = hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q}\gamma_{pqij}r_{pqij}(x_{ij}) + g_{pq} + \delta_{pq} \quad (p=0,1,\ldots,P; q=0,1,\ldots,Q)\,, \tag{14}$$

где $g_{pq} = g(t_p,s_q)$, а δ_{pq} — погрешности вычислений для уравнений системы (14) с неизвестными x_{pq}.

Если теперь в «квадратурной» формуле (13) остатки стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g \to 0$, $0 < \gamma_{pqij} \le A < \infty$ и погрешности вычислений стремятся

к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$, то при всех достаточно малых h и g приближенное решение $x_{pq}(p = 0, 1, \ldots, P; q = 0, 1, \ldots, Q)$ может быть найдено из системы (14), причем для любого заданного $\varepsilon > 0$ существуют такие h_0 и g_0, что при $h < h_0$ и $g < g_0$

$$|x_{pq} - x(t_p, s_q)| < \varepsilon \quad (p = 0, 1, \ldots, P; q = 0, 1, \ldots, Q)\,. \tag{15}$$

Таким образом, при численном решении нелинейного интегрального уравнения (2) с частными интегралами целесообразно перейти к эквивалентному нелинейному двумерному интегральному уравнению (12) и численно решать это уравнение с применением методов численного решения нелинейных интегральных уравнений, например, с применением метода механических квадратур. В частности, в силу теоремы 8 (для многомерного случая) из [10], примененной к уравнению (12), справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

а) в «квадратурной» формуле (13) остатки стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$ и $0 < \gamma_{pqij} \le A < \infty$;

б) погрешности вычислений стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$;

в) существует непрерывная частная производная $\partial k(\tau, s, \sigma, u)/\partial u$.

Тогда при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} $(p = 0, 1, \ldots, P; q = 0, 1, \ldots, Q)$ может быть найдено из системы (14), причем для любого заданного $\varepsilon > 0$ существуют такие h_0 и g_0, что при $h < h_0$ и $g < g_0$ справедливы неравенства (15) и следующая оценка скорости сходимости:

$$c_1 \varepsilon_{PQ} \le \max_{0 \le p \le P,\ 0 \le q \le Q} |x_{pq} - x(t_p, s_q)| \le c_2 \varepsilon_{PQ}\,,$$

где c_1 и c_2 – некоторые постоянные,

$$\varepsilon_{PQ} = \max_{0 \le p \le P,\ 0 \le q \le Q} |r_{pq}(z_{pq})|,\ \ z_{pq}(\tau, \sigma) = r(t_p, s_q, \tau, \sigma, x^*(\tau, \sigma))$$

$(p = 0, 1, \ldots, P,\ q = 0, 1, \ldots, Q)$, а $x^*(\tau, \sigma)$ — единственное решение уравнения (12).

В заключение отметим, что, при сделанных выше предположениях, описанный процесс численного решения нелинейного интегрального уравнения (2) непосредственно применяется и к численному решению задачи Коши для нелинейного ИДУБ (11).

Литература

1. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.
2. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / New York-Basel: Marcel Dekker Inc., 2000. – 560 p.
3. Appell J., Kalitvin A.S., Nashed M.Z. On some partial integral equations arising in the mechanics of solids // Zeitschr. Ang. Math. Mech. –1999. – 79; 10. – S.703–713.
4. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / Липецк: ЛГПУ, 2006. – 178 с.

5. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные операторы с частными интегралами. C-теория / Липецк: ЛГПУ, 2004. – 196 с.
6. Положительные решения операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицкий, В.Я. Стеценко / М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 456 с.
7. Михлин С.Г. Некоторые вопросы теории погрешностей / Л.: ЛГУ, 1988. – 336 с.
8. Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения: 2-е изд., перераб. и доп. / СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 288 с.
9. Kalitvin V.A. On the numerical solution of Barbashin's integro-differential equations with Python application // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – 188; 3. – P.250-255.
10. Вайникко Г.М. Возмущенный метод Галеркина и общая теория приближенных методов для нелинейных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – 7; 4. – С.723-751.

ON NUMERICAL SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS WITH PARTIAL INTEGRALS

V.A. Kalitvin

Lipetsk State Pedagogical University,
Lenina St., 42, Lipetsk, 398020, Russia, e-mail: kalitvin@gmail.com

Abstract. The solution schemes of linear and nonlinear integral equations with partial integrals containing fixed and variable bounds of integration are constructed. These schemes based on application of the mechanical quadrature method. The theorems about convergence of this method for classes of equations under consideration are reduced.

Key words: integral equations, equations with partial integrals, Barbashin's integro-differential equations, mechanical quadratures method.

MSC 34L40

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ХИЛЛА-ШРЁДИНГЕРА

А.В. Карпикова

Воронежский Государственный Университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: karpikovaav@mail.ru

Аннотация. Для исследования спектральных свойств оператора Хилла-Шрёдингера используется метод подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра оператора Хилла-Шрёдингера, а также оценки сходимости спектральных разложений.

Ключевые слова: метод подобных операторов, оператор Хилла-Шрёдингера, спектр оператора, асимптотика спектра, спектральные разложения.

1. Введение. Пусть $L_2[0,2\pi]$ –гильбертово пространство комплексных, измеримых на $[0,2\pi]$ и суммируемых с квадратом нормы функций. Скалярное произведение в $L_2[0,2\pi]$ для удобства оценок определим как

$$(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau\,,\qquad x,y\in L_2[0,2\pi]\,.$$

Через $W_2^2[0,2\pi]$ обозначим пространство Соболева $\{y\in L_2[0,2\pi]:y'$ абсолютно непрерывна и $y''\in L_2[0,2\pi]\}$.

Рассматривается одномерный оператор Хилла-Шрёдингера

$$L:D(L)\subset L_2[0,2\pi]\mapsto L_2[0,2\pi]\,,$$

который определяется дифференциальным выражением

$$l(y)=-y''+vy\,,$$

с областью определения

$$D(L)=\left\{y\in W_2^2[0,2\pi]:y(2\pi)=y(0),y'(2\pi)=y'(0)\right\}\,,$$

т.е. задаваемой периодическими краевыми условиями.

Комплекснозначный потенциал v оператора считается принадлежащим $L_2[0,2\pi]$ и имеет ряд Фурье $v(t)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}v_ke^{ikt}$, $t\in[0,2\pi]$. В дальнейшем, делается предположение $v_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}v(t)dt=0$, которое не является ограничительным, так как сдвиг потенциала на постоянную сдвигает спектр на ту же постоянную и не меняет его собственных функций.

Отметим, что не налагаются ограничения на потенциал v, гарантирующие самосопряженность возмущения, и какие-либо дополнительные ограничения (типа гладкости), кроме принадлежности v гильбертову пространству $L_2=L_2[0,2\pi]$.

При изучении спектральных свойств оператора L обычно используются различные методы теории возмущенных линейных операторов [1-6]. В данном случае, в качестве невозмущенного оператора выбирается оператор Хилла-Шрёдингера

$$L_0 y = -y'', \quad y \in D(L_0)\,, \qquad D(L_0) = D(L) \subset L_2[0, 2\pi]\,; \qquad L_0 D(L_0) \mapsto L_2[0, 2\pi]\,.$$

Он является самосопряженным оператором с компактной резольвентой. Спектр $\sigma(L_0)$ и собственные функции имеют вид:

$$\sigma(L_0) = \{n^2, n \in \mathbb{N} \cup 0 = \mathbb{Z}_+\}\,,$$

$e_n(t) = e^{int}, e_{-n}(t) = e^{-int}, t \in [0, 2\pi]$, — собственные функции для собственного значения $\lambda_n = n^2, n \geq 1$, и $e_0(t) = 1, t \in [0, 2\pi]$ – собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda_0 = 0$.

Основные результаты статьи связаны с изучением асимптотики собственных значений и получением оценок равносходимости спектральных разложений для оператора L. А именно, уточняется (наиболее точная из известных) асимптотика собственных значений из монографии В.А.Марченко [2]; соответствующий результат содержится в теореме 1. Результат о равносходимости спектральных разложений содержится в теореме 3.

Здесь впервые при исследовании таких операторов применяется метод подобных операторов, развиваемый в статьях [3-7]. Суть этого метода состоит в преобразовании подобия исследуемого (возмущенного) оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора (в данном случае оператор L_0). Тем самым существенно упрощается изучение оператора L.

2. Основные результаты. Пусть $\mathfrak{X}$ — комплексное банахово пространство, $\mathrm{End}\mathfrak{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{X}$.

Определение 1. *Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in End\mathfrak{X}$ такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1 Ux = UA_2 x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется оператором преобразования оператора A_1 в A_2.*

Методом подобных операторов были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Оператор L является оператором с компактной резольвентой, и его спектр представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)} \cup \left(\bigcup_{|n| \geq m+1} \sigma_n \right)\,, \tag{1}$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$, где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом элементов, не превосходящим $2m+1$, а множества σ_n, $|n| \geq m+1$, не более чем двухточечные и определяются равенством

$$\sigma_n = n^2 - \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}: \\ k \neq 0, k \neq -2n}} \frac{\omega_k}{k(k+2n)} \pm \sqrt{\widetilde{\omega}_n} + \beta_n^{\pm}\,, \qquad |n| \geq m+1, \tag{2}$$

где $\omega_k, \widetilde{\omega}_n$ *выражаются через коэффициенты Фурье потенциала* v*, а остаток ряда представим в виде* $\beta_n^{\pm} = \alpha(n)/\sqrt{n}$, $\sum\limits_{|n|\geq m+1} |\alpha(n)|^{\frac{4}{3}} < \infty$.

В следующей теореме символами $\widetilde{P}_m, \widetilde{P}_n, |n| \geq m+1$, будут обозначаться спектральные проекторы Рисса, построенные по оператору L и множествам $\sigma_{(m)}, \sigma_n, |n| \geq m+1$, соответственно. Далее через $P_{(m)}$ будет обозначаться проектор $\sum\limits_{|k|\leq m} P_k$, который является проектором Рисса, построенным по конечному множеству $\sigma_m^0 = \{-m, ..., m\}$. Для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}_+ \backslash \sigma_m^0$ символом $P(\Omega)$ обозначим спектральный проектор $\sum\limits_{k\in\Omega} P_k$, а через $\widetilde{P}(\Omega)$ — спектральный проектор $\sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k$.

Отметим, что

$$I = \sum_{|k|\geq m+1} P_k + P_{(m)}\,, \qquad I = \sum_{|k|\geq m+1} \widetilde{P}_k + \widetilde{P}_{(m)}\,. \tag{3}$$

Далее, для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, где $\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$ — идеал операторов Гильберта–Шмидта [7], и любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}$ через $\alpha(\Omega, X)$ обозначим величину $\max\limits_{n\in\Omega} \alpha_n(X)$, где $\alpha_n(X)$ — двусторонняя последовательность из метода подобных операторов, рассматриваемая в статье [6].

Лемма 1. *Для любого оператора* $X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$ *и любого подмножества* $\Omega \subset \mathbb{Z}_+ \backslash \sigma_m^0$ *имеет место оценка*

$$\max\{\|P(\Omega)X\|_2, \|XP(\Omega)\|_2\} \leq C(X)\alpha(\Omega, X)\,,$$

где величина $C(X) > 0$ *зависит от оператора* X *и не зависит от выбора* Ω.

Теорема 2. *Система проекторов Рисса* $\widetilde{P}_n, n \in \mathbb{Z}$ *обладает следующим свойством*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq C_1\left(\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, JB) + \alpha(\Omega, B\Gamma B)\right)\frac{1}{m(\Omega)}\,. \tag{4}$$

где $C_1 > 0$ *— постоянная, независящая от* Ω, $m(\Omega) = \max\limits_{k\in\Omega} k, n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 3. *Имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений операторов* L *и* L_0*:*

$$\|\widetilde{P}_m + \sum_{|k|=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} P_k\|_2 \leq C_1(\alpha_{n+1}(\Gamma B) + \alpha_{n+1}(JB) + \\ + \alpha_{n+1}(B\Gamma B))\frac{1}{m+1}\,, \tag{5}$$

где $n \geq m+1, C_1 > 0$ *— постоянная, не зависящая от* n.

Литература

1. Джаков П., Митягин Б.С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // Успехи математических наук. – 2006. – 61:4. – С.77-182.

2. Марченко В.А., Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения / М.: Наука, 1977.
3. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / Воронеж:изд-во Воронежского государственного университета, 1987. – 168 с.
4. Баскаков А.Г. Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – 50:4. – С.435-457.
5. Баскаков А.Г. Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов // Известия РАН. Сер.матем. – 1994. – 58:4. – С.3-32.
6. Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Известия РАН, серия математическая. – 2011. – 75:3. – С.4-28.
7. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию несамосопряженных линейных операторов в гильбертовом пространстве / М.: Наука, 1965.

SPECTRAL ANALYSIS OF HILL-SCHRODINGER's OPERATOR

A.V. Karpikova

Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia. e-mail: karpikovaav@mail.ru

Abstract. The similar operators method is used for spectral analysis of Hill-Schrodinger's operator. Asymptotic of the Hill-Schrodinger operator spectrum and convergence estimates of spectral decompositions are obtained.

Key words: similar operators method, Hill-Schrodinger's operator, operator spectrum, spectrum asymptotic, spectral distribution.

MSC 11D45

ОБ ОДНОМ ДИОФАНТОВОМ УРАВНЕНИИ НАД $\circ$-КОЛЬЦОМ ФИБОНАЧЧИ

Д.В. Кузнецова, А.В. Лаптев, А.В. Шутов

Владимирский государственный университет,
пр. Строителей, 11, Владимир, 600024, Россия, e-mail: WolvShatakeruk@hotmail.ru,
oxoron30189@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматривается уравнение вида $F_n \circ X - F_m \circ Y = C, X \leq N \in \mathbb{N}$, где $\circ$ – круговое умножение Матиясевича-Кнута. Для этого уравнения была получена асимптотическая формула для числа решений.

Ключевые слова: круговое умножение, последовательность Фибоначчи, диофантовы уравнения.

1. Введение. Рассмотрим последовательность Фибоначчи вида

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 2, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{для любых} \quad n > 2\,.$$

Хорошо известно, что любое натуральное число представимо в системе счисления Фибоначчи, то есть может быть записано в виде

$$N = \sum_i \varepsilon_i F_i, \quad \varepsilon_i = 0 \text{ или } 1, \quad \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} = 0.$$

Тогда для двух чисел $N, M \in \mathbb{N}$ вида

$$N = \sum_i \varepsilon_i F_i \quad M = \sum_j \varepsilon'_j F_j$$

операция кругового умножения задается следующим образом

$$N \circ M = \sum_i \sum_j \varepsilon_i \varepsilon'_j F_{i+j}.$$

Относительно этой операции множество натуральных чисел образует $\circ$-кольцо Фибоначчи.

Впервые операцию кругового умножения ввели независимо друг от друга Ю.В. Матиясевич [1] при решении десятой проблемы Гильберта и позднее Д. Кнут [2]. В настоящее время модификацию данного определения предложил В.Г. Журавлев [3]. Им была получена явная формула для кругового умножения [3]

$$N \circ M = NM + [(N+1)\tau][(M+1)\tau],$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №11-01-00578а.

где $[\cdot]$ - целая часть числа, $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ - золотое сечение.

Ранее относительно этой операции были рассмотрены аналоги ряда классических теоретико-числовых задач. В частности, В.Г.Журавлев рассматривал аналог представления натурального числа суммой двух, трех и четырех квадратов, заменяя обычное умножение круговым [4]. А.В. Лаптев рассмотрел аналог задачи о пифагоровых тройках [5], а И.К. Швагирева занималась бинарной аддитивной задачей [6].

Во всех этих случаях были получены результаты, определяющие условия для существования решения, а в некоторых случаях были получены оценки на число решений или же асимптотические формулы для числа решений.

В работе рассматривается уравнение от двух переменных $X, Y \in \mathbb{N}$:

$$F_n \circ X - F_m \circ Y = C, \quad X \leq N \in \mathbb{N}\,. \tag{1}$$

Доказывается

Теорема 1. *Пусть $S_{n,m}(N)$ – число решений уравнения (1). Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$S_{n,m}(N) = \hat{c}_{n,m}(\delta(C))N + O(\ln N),$$

где $\delta(x) = x - [(x+1)\tau]\widetilde{\tau}$, $\widetilde{\tau} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, а $\hat{c}_{n,m}(x)$ – явно определенная в теореме **??** *кусочно-линейная функция от x, называемая функцией плотности.*

2. Вспомогательные результаты. Рассмотрим функцию $\delta(x)$, определенную в теореме 1.

Предложение 1. *Функция $\delta(x)$ представима в виде $\delta(x) = -1 + \widetilde{\tau}\langle(x+1)\tau\rangle$. $\langle\cdot\rangle$ —* дробная часть.

□ Действительно, если переписать определение $\delta-$функции следующим образом

$$\delta(x) = x - (x+1)\tau\widetilde{\tau} + \langle(x+1)\tau\rangle\widetilde{\tau},$$

то после несложных преобразований получим

$$\delta = -1 + \widetilde{\tau}\langle(x+1)\tau\rangle\,. \quad \blacksquare$$

Предложение 2. *Для $\delta-$функции справедливо, что $\delta(n) \in [-1;\tau)$.*

□ Доказательство предложения можно найти в работе [3]. ■

Предложение 3. *Значения $\delta-$функции представимы в виде $\delta(n) = a - b\tau$, причем $a, b \in \mathbb{N}, a + b = n$.*

□ Из предложения 1 следует, что

$$a - b\tau \in [-1;\tau).$$

Пусть

$$k = [(x+1)\tau]\,, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая, что $\widetilde{\tau} = 1 + \tau$, получим $\Rightarrow \quad \delta(x) = x - k(1+\tau) = x - k - k\tau$. Обозначим $x - k = a, k = b$. Тогда

$$\delta(x) = a - b\tau\,, \qquad a, b \in \mathbb{Z}\,. \qquad \blacksquare$$

Предложение 4. *Для любого $c \in \mathbb{Z}[\tau] \cap [-1;\tau)$ найдется такое N, что $\delta(N) = c$.*

$\square$ Пусть $\delta \in [-1;\tau) \cap \mathbb{Z}[\tau]$. Введем число $\delta' = (\delta+1)/\widetilde{\tau}$, причем $\delta' \in [0;1) \cap \mathbb{Z}[\tau]$. Следовательно, δ' представимо в виде $\delta' = a' + b'\tau, \quad a', b' \in \mathbb{Z}$. Тогда $\delta' = \langle b'\tau \rangle$. В качестве N выберем $N = b' - 1$. Получим, что $\delta(N)$, действительно, равна исходному выражению. $\blacksquare$

Предложение 5. *Для функции δ от суммы двух натуральных чисел справедливо равенство*

$$\delta(N_1) + \delta(N_2) = \delta(N_1 + N_2) - \sigma(N_1, N_2)\widetilde{\tau}\,,$$

где

$$\sigma(N_1, N_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } \delta(N_1) + \delta(N_2) \geq \tau, \\ 0, & \text{если } \delta(N_1) + \delta(N_2) \in [-1, \tau), \\ -1, & \text{если } \delta(N_1) + \delta(N_2) < -1. \end{cases}$$

$\square$ Доказательство предложения можно посмотреть в работе [3]. $\blacksquare$

Предложение 6. *Для $\delta-$функции от числа Фибоначчи справедливо равенство*

$$\delta(F_n) = (-\tau)^n\,.$$

$\square$ Воспользуемся методом математической индукции:

$$\delta(1) = 1 - \widetilde{\tau} = -\tau\,;$$

$$\delta(1) = 2 - \widetilde{\tau} = 1 - \tau = \tau^2\,.$$

Рассмотрим переход $n \to n+1$. По предположению индукции,

$$\delta(F_{n-1}) = (-\tau)^{n-1}, \quad \delta(F_n) = (-\tau)^n.$$

Так как $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, то, с учетом предложения 5, имеем

$$\delta(F_{n+1}) = \delta(F_{n-1}) + \delta(F_n),$$

откуда легко получить, что

$$\delta(F_{n+1}) = (-\tau)^{n+1}. \qquad \blacksquare$$

Предложение 7. *Для функции δ от кругового произведения двух натуральных чисел справедливо равенство*

$$\delta(N_1)\cdot\delta(N_2)=\delta(N_1\circ N_2)+\varrho(N_1,N_2)\widetilde{\tau}\,,$$

где

$$\varrho(N_1,N_2)=\begin{cases}1, & \text{если } \delta(N_1)\delta(N_2)\geq\tau,\\ 0, & \text{если } \delta(N_1)\delta(N_2)\in[-1;\tau).\end{cases}$$

□ Доказательство данного предложения можно посмотреть в работе [3]. ■

Предложение 8. *Если один из двух сомножителей является числом Фибоначчи, то для $\delta-$функции от их кругового произведения справедливо равенство*

$$\delta(F_n\circ N)=(-\tau)^n\delta(N)\,.$$

□ По предложению 7 можем записать

$$\delta(F_n\circ N)=\delta(F_n)\cdot\delta(N)+\varrho(F_n,N)\widetilde{\tau}\,.$$

Функция $\varrho(F_n,N)$ будет равна нулю, а значит $\delta(F_n\circ N)=\delta(F_n)\cdot\delta(N)$. Тогда, воспользовавшись предложением 6, получим искомое выражение. ■

3. Доказательство основной теоремы. Перейдем к доказательству теоремы 1, сформулированной во введении.

Для того, чтобы получить ограничение для первого слагаемого уравнения (1), воспользуемся явной формулой для кругового умножения

$$F_n\circ X=F_n\cdot X+[(F_n+1)\tau][(X+1)\tau]\,.$$

Теперь с помощью несложных преобразований можно получить, что

$$F_n\circ X=(F_n+F_{n-1}\tau)X+O(1)\,.$$

Затем воспользуемся формулой Бине для $n-$ого числа Фибоначчи

$$F_n=\frac{\widetilde{\tau}^{n+1}-(-\tau)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

и получим искомое ограничение

$$F_n\circ X\leq\frac{1}{\sqrt{5}}(\widetilde{\tau}^{n+1}+\widetilde{\tau}^n\tau)N+O(1)\,;$$

$$F_n\circ X\leq\widetilde{\tau}^n\cdot N+O(1)\,. \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение

$$K-L=C\,,\quad\text{где}\quad K\leq N', \tag{3}$$

и обозначим через $S'_{n,m}(N')$ число решений уравнения (3) с дополнительными условиями

$$K = F_n \circ X\,, \qquad L = F_m \circ Y\,.$$

Так как $X \le N$, то $K \le X/\widetilde{\tau}^n + O(1)$, а значит,

$$S_{n,m}(N) = S'_{n,m}\left(\frac{N}{\widetilde{\tau}^n}\right) + O(1)\,. \tag{4}$$

Лемма 1. *Число N представимо в виде $N = F_n \circ X$ тогда и только тогда, когда $\delta(N) \in I_n$, где*

$$I_n = \begin{cases} (-\tau^{2k}; \tau^{2k-1}), & n = 2k-1, \\ (-\tau^{2k}; \tau^{2k+1}), & n = 2k. \end{cases}$$

□ Докажем, что $\delta(N) \in I_n$. Пусть $N = F_n \circ X$. Перепишем данное равенство в виде

$$\delta(N) = \delta(F_n \circ X)\,.$$

По предложениям 6 и 7 получим, что

$$\delta(N) = \delta(F_n) \cdot \delta(X) = (-\tau)^n \cdot \delta(X)\,.$$

Следовательно,

$$\delta(N) \in I_n\,.$$

Докажем обратное утверждение. Введем $\delta' = \delta(N)/(-\tau)^n$,

$$\delta(N) = a + b\tau\,, \quad a, b \in \mathbb{Z}\,.$$

Поскольку $\tau-$ обратимый элемент кольца $\mathbb{Z}[\tau]$, можно записать

$$\delta' = a' + b'\tau\,, \quad a', b' \in \mathbb{Z}\,.$$

Из выше изложенного следует $\delta' \in [-1; \tau)$, $\delta' \in \mathbb{Z}[\tau]$, откуда по предложению **??** получаем $\delta' = \delta(X)$.

Осталось показать, что X – искомое число. Проверим, что $\delta(F_n \circ X) = \delta(N)$. По предложению 7 имеем $\delta(F_n) \cdot \delta(X) = \delta(N)$, откуда $\delta(X) = \delta(N)/\delta(F_n) = \delta(N)/(-\tau)^n$, а значит,

$$\delta(X) = \delta'\,.$$

Таким образом, исходное уравнение (3) сводится к уравнению вида

$$K - L = C, \quad \delta(N) \in I_n\,, \quad \delta(M) \in I_m\,.$$

Используя свойства функции δ, получаем

$$\delta(K - L) \equiv \delta(K) - \delta(L) (\mathrm{mod}\, \widetilde{\tau})\,.$$

Тогда

$$\delta(K) - \delta(L) \equiv \delta(C), \quad K \leq N. \tag{5}$$

Число решений уравнения (5) вычисляется следующим образом

$$S'_{n,m}(N) = \sum_{K \leq N\,:\,\delta(K) \in I_n} \; \sum_{\substack{L\,:\,\delta(L) \in I_m,\\ \delta(K)-\delta(L)=\delta(C)}} 1 = \sum_{K \leq N\,:\,\delta(K) \in I_n} \; \sum_{\substack{L\,:\,\delta(K) \in \delta(C)+I_m,\\ \delta(K)-\delta(L)=\delta(C)}} 1 =$$

$$= \sum_{\substack{K \leq N\,:\,\delta(K) \in I_n,\\ \delta(K) \in \delta(C)+I_m}} 1 = \sum_{\substack{K \leq N\,:\\ \delta(K)=I_n \cap (I_m+\delta(C))}} 1 = \sharp\{N_1 \leq N : \delta(N_1) \in I_n \cap (I_m + \delta(C))\}.$$

Таким образом получаем, что

$$S'_{n,m}(N) = \frac{|I_n \cap (I_m + \delta(C))|}{|[-1;\tau)|} N + o(N)\,. \tag{6}$$

Поскольку $\tau-$ иррационально, дробная доля $\{X\tau\}$ равномерно распределена по модулю 1. Справедливо более сильное утверждение [7].

Теорема Нидеррайтера. *Пусть дана последовательность дробных долей $\{i\alpha\}$, где $i = 1, 2, ..., N$ и $\alpha = [q_0, q_1, q_2, ...]$ – разложение в цепную дробь иррационального числа α с ограниченными неполными частными $q_i \leq K$ для всех $i \geq 1$, и пусть*

$$A([\beta,\gamma); N) = \sharp\{i : \{i\alpha\} \in [\beta,\gamma), i = 1, 2, ..., N\}\,,$$

$$D_N = \sup_{0 \leq \beta < \gamma \leq 1} \left| \frac{A([\beta,\gamma); N)}{N} - (\gamma - \beta) \right|$$

– верхняя граница отклонений по всем полуинтервалам для числа попаданий $A([\beta,\gamma); N)$ последовательности $\{i\alpha\}$ в полуинтервал $[\beta,\gamma)$. Тогда для D_N имеет место следующее неравенство

$$ND_N \leq 3 + \left(\frac{1}{\ln \widetilde{\tau}} + \frac{K}{\ln K + 1}\right) \ln N\,.$$

Согласно предложению 1, справедлива формула $\delta(x) = -1 + \widetilde{\tau}\langle (x+1)\tau \rangle$. Отсюда вытекает, что значения $\delta(X)$ равномерно распределены на интервале $[-1;\tau)$. По теореме Нидеррайтера остаточный член имеет порядок $O(\ln N)$. Тогда

$$S'_{n,m}(N) = \frac{|I_n \cap (I_m + \delta(C))|}{|[-1;\tau)|} N + O(\ln N)\,.$$

Воспользовавшись формулой (2) можно записать искомое выражение для числа решений уравнения (1)

$$S_{n,m}(N) = \frac{|I_n \cap (I_m + \delta(C))|}{|[-1;\tau)|} \widetilde{\tau}^n X + O(\ln N)\,, \tag{7}$$

откуда следует, что

$$S_{n,m}(N) = |I_n \cap (I_m + \delta(C))|\widetilde{\tau}^{n-1}X + O(\ln N)\,. \tag{8}$$

Таким образом, теорема **??** доказана с $\hat{c}_{n,m}(x) = |I_n| \cap (I_m + x)$. ■

4. Вычисление функции плотности. Перейдем к вычислению функции плотности, введенной в теореме 1.

Теорема 2. *Пусть $\hat{c}_{n,m}(x)$ – функция плотности. Тогда для нее справедливы следующие явные формулы:*

$$\hat{c}_{1,1}(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in [-\tau; 0), \\ 1-x, & x \in [0; \tau), \\ \tau^2, & x \in [-1; -\tau); \end{cases} \qquad \hat{c}_{1,2}(x) = \begin{cases} \tau + x, & x \in [-\tau; 0), \\ \tau, & x \in [0; \tau^2), \\ 1-x, & x \in [\tau^2; \tau), \\ -\tau - x, & x \in [-1; -\tau). \end{cases}$$

Для $n = 1, m > 2$

$$\hat{c}_{1,m}(x) = \begin{cases} R_m + x + \tau^2, & x \in [-\tau^2 - \tau^{m-1} - L_m; -\tau^2 - L_m), \\ \tau^{m-1}, & x \in [-\tau^2 - L_m; \tau - \tau^{m-1} - L_m), \\ \tau - L_m - x, & x \in [\tau - \tau^{m-1} - L_m; \tau), \\ -1 - L_m - x, & x \in [-1; -1 - L_m), \\ 0, & x \in [-1 - L_m; -\tau^2 - \tau^{m-1} - L_m)\,. \end{cases}$$

Для $n \geq 2, m \geq 2$

$$\hat{c}_{n,m}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1 - L_m; L_n - L_m - \tau^{m-1}), \\ \frac{R_m - L_n + x}{\tau^{n-1}}, & x \in [L_n - L_m - \tau^{m-1}; L_n - L_m), \\ \tau^{m-n}, & x \in [L_n - L_m; R_n - L_m - \tau^{m-1}), \\ \frac{R_n - L_m - x}{\tau^{n-1}}, & x \in [R_n - L_m - \tau^{m-1}; R_n - L_m), \\ 0, & x \in [R_n - L_m; \tau - L_m). \end{cases}$$

Здесь

$$L_i = -\tau^{2[\frac{i+1}{2}]}; \qquad R_i = \begin{cases} \tau^i, & i - \text{нечетно}, \\ \tau^{i+1}, & i - \text{четно}. \end{cases}$$

□ Рассмотрим случай, когда $n = 1$ и $m = 1$. Зафиксируем один из отрезков, например I_n, а другой, I_m, будем смещать на величину x. Стоит заметить, что в этом случае функция плотности никогда не примет нулевого значения, поскольку суммарная длина двух интервалов I_1 будет больше $\Big|[-1; \tau)\Big|$, а значит их пересечение будет всегда непустым.

Функция плотности примет свое максимальное значение только тогда, когда оба рассматриваемых интервала наложатся друг на друга (см. рис. 1) и будет равно $|I_1|$, то есть

$$\hat{c}_{1,1}(0) = \tau^0 = 1\,.$$

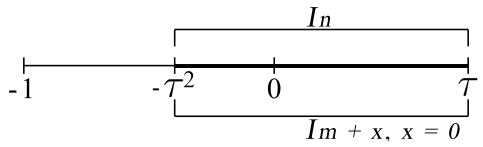

Рис. 1. Полное наложение интервалов I_n и I_m друг на друга.

Для дальнейшего доказательства, необходимо убедиться в том, что L_i и R_i действительно являются соответственно левой и правой границей интервала $[-1;\tau)$. Перепишем I_n, заданный в лемме 1 в виде

$$I_n = \begin{cases} (-\tau^{n+1};\tau^n), & n - \text{нечетное}, \\ (-\tau^n;\tau^{n+1}), & n - \text{четное}. \end{cases}$$

Легко видеть, что R_i является правой границей данного интервала. Теперь, если преобразовать левую границу I_n как $-\tau^{2\left[\frac{n+1}{2}\right]}$, то получим, что L_i- левая граница.

Теперь рассмотрим такой вариант, что $L_m + x \in [-1;\tau^2)$ или $x \in [-\tau;0)$ (см. рис. 2), тогда функция $\hat{c}_{1,1}(x)$ будет принимать значения

$$\hat{c}_{1,1}(x) = \Big|I_1 \cap |I_1 + x|\Big| = R_m + \tau^2 + x = \tau + \tau^2 + x = 1 + x\,.$$

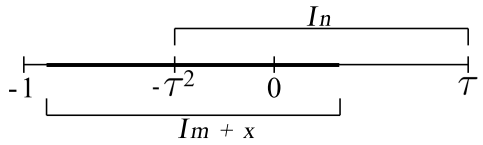

Рис. 2. Наложение интервалов I_n и I_m друг на друга при $x \in [-\tau;0)$.

В этом случае остался последний интервал (см. рис. 3), а именно, $L_m + x \in [-\tau^2;\tau)$ или $x \in [0;1)$, но так как x не может выходить за пределы интервала $[-1;\tau)$, необходимо разбить полученный интервал на два: $x \in [0;\tau)$ и $x \in [-1;-\tau)$. Тогда в первом случае функция плотности примет вид

$$\hat{c}_{1,1}(x) = R_n - (L_n + x) = \tau - (-\tau^2 + x) = 1 - x\,,$$

а во втором насколько пересечение с одним концом фиксированного интервала уменьшится, настолько увеличится с другим, а, следовательно, значение $\hat{c}_{1,1}(x)$ станет постоянным и будет равняться

$$\hat{c}_{1,1}(x) = |I_1| + |I_1| - \widetilde{\tau} = \tau^2\,.$$

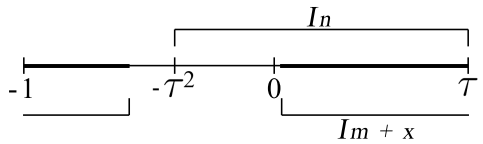

Рис. 3. Наложение интервалов I_n и I_m друг на друга при $x \in [0,\tau)$ и $x \in [-1,-\tau)$.

Кроме того, это значение является минимальным для рассматриваемого случая (см. рис. 4).

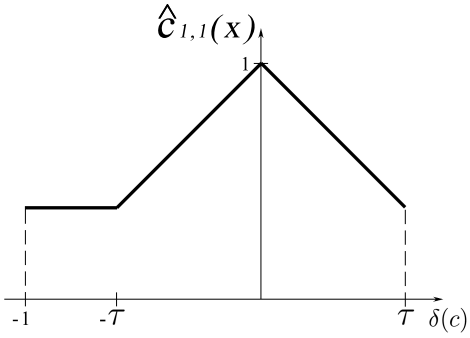

Рис. 4. Функция плотности для $n = 1$ и $m = 1$.

Теперь рассмотрим случай для $n = 1$ и $m = 2$. Здесь функция плотности обратится в ноль в единственном случае, когда левая граница смещаемого интервала будет равна (-1). При $L_m + x \in [-1; -\tau^2)$ или $x \in [-\tau; 0)$,

$$\hat{c}_{1,2}(x) = (R_m + x) - L_n = \tau + x\,.$$

При $L_m + x \in [-\tau^2; 0)$ или $x \in [0; \tau^2)$, функция $\hat{c}_{1,2}(x)$ будет принимать значение, равное длине интервала I_2, то есть

$$\hat{c}_{1,2}(x) = \tau\,.$$

При $L_m + x \in [0; \tau)$ или $x \in [\tau^2; 1)$, снова вышли за пределы кольца $\mathbb{Z}[\tau]$, поэтому следует разбить его на две части $x \in [\tau^2; \tau)$ и $x \in [-1; -\tau)$.

Для первого интервала получим функцию плотности

$$\hat{c}_{1,2}(x) = R_n - (L_m + x) = \tau + \tau^2 - x = 1 - x\,,$$

а для второго имеются две известные точки $(-1; \tau^2)$ и $(-\tau; 0)$, проведя прямую через которые, получим что

$$\hat{c}_{1,2}(x) = -\tau - x \quad \text{(см. рис. 5).}$$

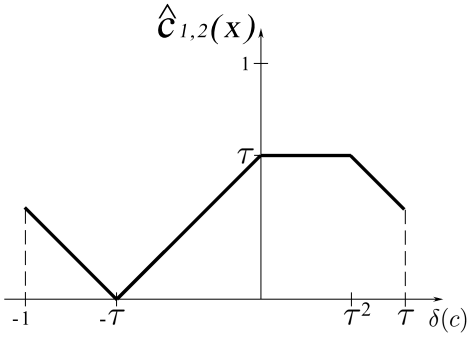

Рис. 5. Функция плотности для $n = 1$ и $m = 2$.

Перейдем к рассмотрению случая при $n = 1$ и $m > 2$. Теперь функция плотности будет обращаться в ноль на целом интервале, поскольку длина смещаемого интервала $|I_m| < \Big||[-1;\tau)| - |I_1|\Big|$. Тогда функция будет принимать нулевые значения при $L_m + x \in [-1; L_n - \tau^{m-1})$ или $x \in [-1 - L_m; -\tau^2 - \tau^{m-1} - L_m)$.

Функция плотности будет принимать максимальные значения, равные $|I_m|$ в том случае, когда I_m полностью входит в фиксированный I_n. Это будет происходить при $L_m + x \in [-\tau^2; \tau - \tau^{m-1})$ или $x \in [-\tau^2 - L_m; \tau - \tau^{m-1} - L_m)$.

Когда $L_m + x \in [-\tau^2 - \tau^{m-1}; -\tau^2)$ или $x \in [-\tau^2 - \tau^{m-1} - L_m; -\tau^2 - L_m)$, $\hat{c}_{1,m}(x)$ примет вид

$$\hat{c}_{1,m}(x) = R_m + x + \tau^2\,.$$

Когда $L_m + x \in [\tau - \tau^{m-1}; \tau)$ или $x \in [\tau - \tau^{m-1} - L_m; \tau - L_m)$, снова выйдем за допустимые границы, что потребует разбить полученный полуинтервал на два новых: $x \in [\tau - \tau^{m-1} - L_m; \tau)$ и $x \in [-1; -1 - L_m)$. Для первого получим зависимость

$$\hat{c}_{1,m}(x) = R_n - (L_m + x) = \tau - L_m - x\,,$$

а во втором проведем прямую через точки $(-1; -L_m)$ и $(-1 - L_m; 0)$ и запишем соотношение

$$\hat{c}_{1,m}(x) = -1 - L_m - x \qquad \text{(см. рис. 6).}$$

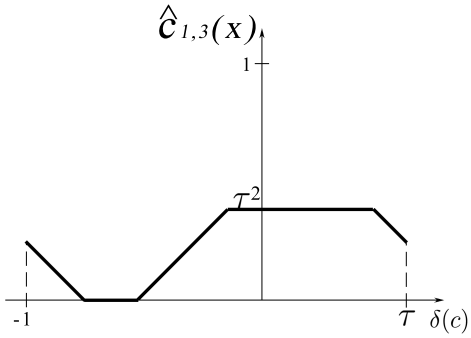

Рис. 6. Функция плотности для $n = 1$ и $m > 2$.

Осталось рассмотреть общий случай для всех $n \geq 2$ и $m \geq 2$.

С увеличением номера интервала, его границы стремятся к нулю. Следовательно, если смещаемый интервал целиком помещается между левыми или правыми границами интервалов $[-1;\tau)$ и I_n, то $\hat{c}_{n,m}(x) = 0$. Такое возможно при $L_m + x \in [R_n; \tau)$ или $x \in [R_n - L_m; \tau - L_m)$.

Максимальные значения функция плотности будет принимать тогда, когда меньший интервал будет целиком входить в больший, тогда, при $L_m + x \in [L_n; R_n - \tau^{m-1})$ или $x \in [L_n - L_m; R_n - L_m - \tau^{m-1})$, получим

$$\hat{c}_{n,m}(x) = \frac{\tau^{m-1}}{\tau^{n-1}} = \tau^{m-n}.$$

Осталось рассмотреть два случая. В первом $L_m + x \in [L_n - \tau^{m-1}; L_n)$ или $x \in [L_n - L_m - \tau^{m-1}; L_n - L_m)$ и

$$\hat{c}_{n,m}(x) = \frac{R_m - L_n + x}{\tau^{n-1}},$$

а во втором $L_m + x \in [R_n - \tau^{m-1}; R_n)$ или $x \in [R_n - L_m - \tau^{m-1}; R_n - L_m)$ и

$$\hat{c}_{n,m}(x) = \frac{R_n - L_m - x}{\tau^{n-1}} \qquad \text{(см. рис. 7).}$$

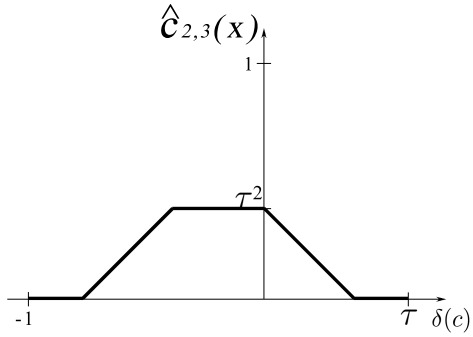

Рис. 7. Функция плотности для $n \geq 2$ и $m \geq 2$.

Таким образом, теорема 2 доказана. ■

Литература

1. Матиясевич Ю.В. Связь систем уравнений в словах и длинах с 10-й проблемой Гильберта // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1968. – 8.
2. Knuth D. Fibonacci multiplication // Appl. Math. Lett. – 1988. – С.57-60.
3. Журавлев В.Г. Суммы квадратов над ∘-кольцом Фибоначчи // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2006. – 337. – С.165-190.
4. Журавлев В.Г. Четно-фибоначчевы числа: бинарная аддитивная задача, распределение по прогрессиям и спектр // Алгебра и анализ. – 2008. – 20. – №18 – С.18-46.
5. Лаптев А.В. Пифагоровы и фибоначчевы тройки // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физикаю. – 2012. – Вып.26. – С.240-244.
6. Швагирева И.К. Бинарная аддитивная задача $F_n \circ N_1 + F_m \circ N_2 = D$ над ∘-прогрессиями Фибоначчи // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения:тез. докл. VIII Международной конференции, посвященной 190-летию П.Л. Чебышева и 120-летию И.М. Виноградова (Саратов, 12-17 сентября 2011 г.) / Саратов: СГУ, 2011. – С.79-80.
7. Кейперс Л., Нидеррайтор Г. Равномерное распределение последовательностей // М.: Наука, 1985.

ON ONE DIOPHANTINE EQUATION OVER FIBONACCI's ∘-RING

D.V. Kuznetsova, A.V. Laptev, A.V. Shutov

Vladimir State University,
Stroiteley Av., 11, Vladimir, 600024, Russia, e-mail: WolvShatakeruk@hotmail.ru,
oxoron30189@yandex.ru, a1981@mail.ru

Abstract. The equation $F_n \circ X - F_m \circ Y = C, X \leq N \in \mathbb{N}$ is studied. Asymptotic formula for the number of its solutions is proved.

Key words: circle multiplication, Fibonacci's sequence, diophantine equations.

УДК 60H10

СИНГУЛЯРНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛЕОНТЬЕСКОГО ТИПА И ПРОИЗВОДНЫЕ В СРЕДНЕМ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Е.Ю. Машков

Курский государственный университет,
Курск, Россия

Аннотация. Сингулярные стохастические уравнения леонтьевского типа мы понимаем как специальный класс стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито, у которых в левой и правой частях имеются прямоугольные числовые матрицы, образующие вместе сингулярный пучок. Кроме того, в правой части имеется слагаемое, зависящее только от времени. Для исследования таких уравнений необходимо использовать производные произвольного порядка от детерминированного слагаемого и винеровского процесса. Для дифференцирования винеровского процесса применяется аппарат так называемых производных в среднем по Нельсону от случайных процессов. Это позволяет при исследовании не использовать аппарат обобщенных функций. Дается краткое введение в теорию производных в среднем, исследуется преобразование уравнений к каноническому виду и находятся формулы для решений в терминах производных в среднем винеровского процесса.

Ключевые слова: производная в среднем, текущая скорость, белый шум, винеровский процесс, уравнение леонтьевского типа.

Введение. Сингулярное стохастическое уравнение леонтьевского типа мы понимаем как выражение

$$\tilde{A}\xi(t) = \int_0^t \tilde{B}\xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \tilde{w}(t)\,,$$

где $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ – сингулярный пучок матриц размера $m \times n$, $\xi(t)$ – искомый случайный процесс, $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс в R^n, $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция.

Сингулярное стохастическое уравнение леонтьевского типа в общей форме крайне неудобно для исследования. Поэтому мы с помощью преобразования Кронекера и последующей замены метрики пространства приводим его к более простому виду, а потом изучаем получившееся уравнение. Специфика подобных уравнений требует рассмотрения производных достаточно высоких порядков свободных членов – в данном случае, детерминированного слагаемого и винеровского процесса. Производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций, которые крайне трудны для использования в конкретных уравнениях. Это обстоятельство делает прямое исследование нашего уравнения необозримо сложным.

Предлагаемый в настоящей работе метод исследования сингулярного стохастического уравнения леонтьевского типа основан на применении аппарата производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, для описания которых не задействованы

обобщенные функции. А именно, мы применяем симметрические производные в среднем (текущие скорости) винеровского процесса. Текущие скорости, в соответствии с общей идеологией теории производных в среднем по Нельсону, являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов. В результате, для изучаемого уравнения мы получаем физически осмысленные формулы для решений в терминах симметрических производных в среднем случайных процессов.

Следующий раздел посвящен изложению основ теории производных в среднем в объеме, необходимом для целей настоящей статьи. Далее, изучаются вопросы о приведении стохастических уравнений сингулярного типа к каноническому виду. Наконец, последний раздел посвящен описанию решений сингулярных стохастических уравнений леонтьевского типа.

Более подробно предварительные сведения об аппарате производных в среднем изложены в [3, 4].

1. Производные в среднем. Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ в R^n, $t \in [0, l]$, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и такой, что $\xi(t)$ является L^1-случайной величиной для всех t. Известно, что каждый такой процесс определяет три семейства σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$:

(i) «прошлое» $\mathcal{P}_t^\xi$ – порожденное прообразами борелевских множеств в R^n при всех отображениях $\xi(s) : \Omega \to R^n$ для $0 < s < t$;

(ii) «будущее» $\mathcal{F}_t^\xi$ – порожденное аналогичным образом для $t < s < l$;

(iii) «настоящее» $\mathcal{N}_t^\xi$ – порожденное самим отображением $\xi(t)$.

Все семейства мы считаем полными, то есть пополняем всеми множествами вероятности нуль.

Ради удобства мы обозначаем условное математическое ожидание $E(\cdot|\mathcal{N}_t^\xi)$ относительно «настоящего» $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$ через E_t^ξ. Обычное («безусловное») математическое ожидание обозначается символом E.

Вообще говоря, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы, так что его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать использования обобщенных функций, согласно Нельсону (см., например, [7–9]) даем следующее определение:

Определение 1 [3, 4].

(i) *Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида*

$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \Big(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \Big),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\Delta t \to +0$ означает, что Δt стремится к 0 и $\triangle t > 0$.

(ii) *Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина*

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \Big(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \Big),$$

где (как и в (i)*) предел предполагается существующим в* $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *и* $\Delta t \to +0$ *означает, что* Δt *стремится к* 0 *и* $\Delta t > 0$.

Следует отметить, что, вообще говоря, $D\xi(t) \neq D_*\xi(t)$, но если, например, $\xi(t)$ почти наверное имеет гладкие выборочные траектории, эти производные очевидно совпадают.

Из свойств условного математического ожидания (см. [10]) следует, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий)

$$Y^0(t,x) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \Big(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \Big| \xi(t) = x \Big) ,$$
$$Y_*^0(t,x) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \Big(\frac{\xi(t) - \xi(t-\Delta t)}{\Delta t} \Big| \xi(t) = x \Big)$$

на R^n, то есть, $D\xi(t) = Y^0(t, \xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y_*^0(t, \xi(t))$.

Определение 2 [3, 4]. *Производная* $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ *называется симметрической производной в среднем. Производная* $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ *называется антисимметрической производной в среднем.*

Рассмотрим векторные поля $v^\xi(t,x) = (Y^0(t,x) + Y_*^0(t,x))/2$ и $u^\xi(t,x) = (Y^0(t,x) - Y_*^0(t,x))/2$.

Определение 3 [3, 4].
$v^\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t)) = D_S\xi(t)$ *называется текущей скоростью процесса* $\xi(t)$;
$u^\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t)) = D_A\xi(t)$ *называется осмотической скоростью процесса* $\xi(t)$.

Текущая скорость является для случайных процессов прямым аналогом обычной физической скорости детермиинированных процессов (см., например, [3, 4, 7–9]). Осмотическая скорость измеряет насколько быстро нарастает «случайность» процесса.

Определяющую роль в наших конструкциях играет винеровский процесс [4], который мы обозначим символом $w(t)$.

Лемма 1 [4]. *Для* $t \in (0, l]$ *имеют место равенства*

$$Dw(t) = 0 , \qquad D_*w(t) = \frac{w(t)}{t} , \qquad D_Sw(t) = \frac{w(t)}{2t} .$$

Приведем леммы для вычисления симметрических производных в среднем высших порядков от винеровского процесса. Следуя системе обозначений из [3, 4], производную порядка k мы будем обозначать как D^w, D_*^w или D_S^w от производных порядка $k-1$. Эти обозначения подчеркивают, что мы всегда используем σ-алгебру «настоящее» именно винеровского процесса $w(t)$.

Лемма 2.

$$\text{(i) } D^w \frac{w(t)}{t} = -\frac{w(t)}{t^2} \text{ для } t \in (0, l); \qquad \text{(ii) } D_*^w \frac{w(t)}{t} = 0 \text{ для } t \in (0, l] ;$$

$$\text{(iii) } D_S^w = -\frac{w(t)}{2t^2} \text{ для } t \in (0, l] .$$

Лемма 3 [5].

$$\text{(i) } D^w\Big(\frac{w(t)}{t^k}\Big) = -k\frac{w(t)}{t^{k+1}}\ ; \qquad \text{(ii) } D^w_*\Big(\frac{w(t)}{t^k}\Big) = -(k-1)\frac{w(t)}{t^{k+1}}\ ;$$

$$\text{(iii) } D^{w(t)}_S\Big(\frac{w(t)}{t^k}\Big) = -\frac{2k-1}{2}\frac{w(t)}{t^{k+1}}\ .$$

Лемма 4. [5]. *При целом $k \geq 2$ имеет место*

$$D^k_S w(t) = (-1)^{k-1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^k}\frac{w(t)}{t^k}\ .$$

2. Сингулярные стохастические уравнения леонтьевского типа и их приведение к каноническому виду. Как сказано во введении, сингулярное стохастичекое уравнение леонтьевского типа – это стохастическое дифференциальное уравнение в R^n вида

$$\tilde{A}\xi(t) = \int_0^t \tilde{B}\xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \tilde{w}(t)\,, \tag{1}$$

где $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ – сингулярный пучок матриц размера $m \times n$, $\xi(t)$ – искомый случайный процесс, $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс в R^n, $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция.

Для сингулярного пучка матриц $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ имеется преобразование Кронекера (описывается парой невырожденных матриц (операторов) P_L и P_R размеров $m \times m$ и $n \times n$ соответственно), при котором матрица $P_L\tilde{B}P_R + \lambda P_L\tilde{A}P_R$ – квазидиагональна (см. [1]) и уравнение (1) преобразуется следующим образом

$$P_L\tilde{A}P_RP_R^{-1}\xi(t) = \int_0^t P_L\tilde{B}P_RP_R^{-1}\xi(s)ds + \int_0^t P_Lf(s)ds + P_L\tilde{w}(t)\,. \tag{2}$$

При соответствующей нумерации векторов базиса, в матрице $A = P_L\tilde{A}P_R$ вдоль главной диагонали стоят в указанном порядке блоки следующих типов: N – жордановы клетки с нулями вдоль главной диагонали, E – единичная матрица, L и G – прямоугольные матрицы указанного ниже типа. В матрице $B = P_L\tilde{B}P_R$ в строках, соответствующих блокам A, стоят в указанном порядке блоки: E – единичная матрица, K – невырожденная матрица, M и H – прямоугольные матрицы указанного ниже вида.

Приведем вид матриц L и M, G и H явно в общем виде:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через P_L^* оператор, сопряженный с P_L, а $(\cdot,\cdot)$ – стандартное скалярное произведение в R^n. Напомним, что винеровский процесс $\tilde{w}(t)$ является гауссовским процессом со средним значением 0 и матрицей ковариаций It, где I – единичная матрица, т. е. с плотностью распределения $\rho^w(t,x) = (2\pi t)^{-n/2}\exp(-x^2/2t)$ относительно формы объема евклидовой метрики $(\cdot,\cdot)$. Так как матрица $P_L P_L^*$ невырождена, существует обратная матрица $(P_L P_L^*)^{-1} = (P_L^*)^{-1} P_L^{-1}$. Следовательно (см. [2]), $P_L\tilde{w}(t)$ также является гауссовским процессом со средним 0 и матрицей ковариаций $P_L P_L^* t$ и, значит, с плотностью

$$\rho^{P_L\tilde{w}}(t,x) = [(2\pi t)^n \Delta]^{-1/2} \exp\Big(-\frac{((P_L P_L^*)^{-1}x, x)}{2t}\Big)$$

относительно той же формы объема, где Δ – определитель матрицы $P_L P_L^*$.

Введем в R^n новое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулой

$$\langle X, Y\rangle = ((P_L P_L^*)^{-1} X, Y).$$

Теорема 1.

(i) *Для любых векторов X и Y из R^n выполняется тождество $\langle P_L X, P_L Y\rangle = (X, Y)$.*

(ii) *Процесс $w(t) = P_L\tilde{w}(t)$ является винеровским в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

□ Напомним, что $(P_L P_L^*)^{-1} = (P_L^*)^{-1} P_L^{-1}$. Тогда

$$\langle P_L X, P_L Y\rangle = ((P_L^*)^{-1} P_L^{-1} P_L X, P_L Y) = (P_L^{-1} P_L X\,, \qquad P_L^{-1} P_L Y) = (X, Y)\,.$$

Дифференциал объема в метрике $\langle\cdot,\cdot\rangle$ отличается множителем $\Delta^{-1/2}$ от дифференциала объема в метрике $(\cdot,\cdot)$, т.е. плотность процесса $P_L\tilde{w}(t)$ относительно формы объема метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ имеет вид

$$(2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(-\frac{((P_L P_L^*)^{-1}x, x)}{2t}\Big) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(-\frac{\langle x, x\rangle}{2t}\Big)\,.$$

Легко видеть, что остальные требования из определения винеровского процесса также выполняются для $P_L\tilde{w}(t)$ в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ■

Пусть e_1, e_2,..., e_n – естественный ортонормированный базис в R^n с $(\cdot,\cdot)$.

Следствие 1. *Векторы Ae_1, Ae_2,..., Ae_n образуют ортонормированный базис в евклидовом пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Следствие 2. *Введем* $\eta(t) = P_R^{-1}\xi(t)$. *В пространстве* R^n *с* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *в разложении по ортонормированному базису* Ae_1, Ae_2,..., Ae_n *сингулярное стохастическое уравнение леонтьевского типа имеет вид*

$$A\eta(t) = \int_0^t B\eta(s)ds + \int_0^t P_L f(s)ds + w(t)\,.$$

Напомним, что в выражения для текущей скорости винеровского процесса в данном случае входит $\mathrm{Grad}(P_L^{-1}x, P_L^{-1}x)$, где Grad – градиент относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Лемма 5. *Имеет место формула* $d\langle x,x\rangle = d(P_L^{-1}x, P_L^{-1}x) = 2(P_L^*)^{-1}P_L^{-1}x$, *где* d – *внешний дифференциал.*

Лемма 6. *Имеет место формула* $\mathrm{Grad}\langle x,x\rangle = \mathrm{Grad}(P_L^{-1}x, P_L^{-1}x) = 2x$.

□ Доказательство следует из формулы поднятия индексов

$$\mathrm{Grad}(P_L^{-1}x, P_L^{-1}x) = P_L P_L^* d(P_L^{-1}x, P_L^{-1}x)$$

и из предыдущей леммы. ■

Следовательно, при отображении в R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулы для текущих скоростей винеровского процесса сохраняют свой вид.

3. Решения сингулярных стохастических уравнений леонтьевского типа. Итак, если пучек $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ сингулярен, то после применения преобразования Кронекера сингулярное стохастическое уравнение леонтьевского типа в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ приобретает вид

$$A\eta(t) = \int_0^t B\eta(s)ds + \int_0^t P_L f(s)ds + w(t)\,. \tag{3}$$

Из вида (3) понятно, что, для простоты, предполагается начальное условие $\eta(0) = 0$ для решения вида (3). Отметим сразу, что построенные нами ниже решения этому условию не удовлетворяют и, более того, при $t = 0$ они не определены. Поэтому мы аппроксимируем решения процессами, которые удовлетворяют этому начальному условию, но становятся решениями лишь с некоторого (заранее заданного сколь угодно малого) момента времени $t_0 > 0$ (см. ниже).

Замечание 1. Переписав (3) в виде

$$A\eta(t) - B\int_0^t \eta(s)ds - \int_0^t P_L f(s)ds = w(t)\,,$$

мы видим, что «настоящее» для процесса

$$A\eta(t) - B\int_0^t \eta(s)ds - \int_0^t P_L f(s)ds$$

совпадает с «настоящим» для $w(t)$. Поэтому последнюю σ-алгебру мы и будем использовать при нахождении производных в среднем, т. е. применять к (3) производные D^w, D^w_* или D^w_S.

Учитывая структуру матриц A и B, нетрудно видеть, что (3) распадается на несколько независимых систем уравнений четырех типов (каждой паре соответствующих блоков в A и B соответствует уравнение определенного типа). Обозначим через $\chi(t)$, $\zeta(t)$, $\eta(t)$, $\theta(t)$ компоненты вектора $\xi(t)$, соответствующие парам блоков N и E, E и K, L и M, G и H, соответственно. Кроме того, посредством $u(t), v(t), g(t), z(t)$ обозначим соответствующие компоненты вектора $P_L f(t)$. Соответствующие компоненты винеровского процесса будут тоже винеровскими процессами. Будем обозначать их, как и сам винеровский процесс, посредством $w(t)$. Исследуем каждый тип уравнений.

Паре матриц N и E размера $(p+1)\times(p+1)$ соответствует система типа

$$N\chi(t) = \int_0^t \chi(s)ds + \int_0^t u(s)ds + w(t)\,, \tag{4}$$

В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \chi^1(t) \\ \chi^2(t) \\ \vdots \\ \chi^p(t) \\ \chi^{p+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t (\chi^1(s)+u^1(s))ds \\ \int_0^t (\chi^2(s)+u^2(s))ds \\ \vdots \\ \int_0^t (\chi^p(s)+u^p(s))ds \\ \int_0^t (\chi^{p+1}(s)+u^{p+1}(s))ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^p(t) \\ w^{p+1}(t) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Из последнего уравнения системы (5) получаем, что

$$\int_0^t (\chi^{p+1}(s)+u^{p+1}(s))ds = -w^{p+1}(t)\,. \tag{6}$$

Так как именно текущая скорость (симметрическая производная в среднем) соответствует физической скорости, из этого уравнения мы находим $\chi^{p+1}(t)$ применением к обеим частям производной D^w_S. Легко видеть, что применение производных в среднем D^w и D^w_* (и, следовательно, D^w_S) к интегралу в левой части дает одинаковый результат $\chi^{p+1}(t)$. Таким образом, мы находим, что

$$\chi^{p+1}(t) = -u^{p+1}(t) - D_S w^{p+1}(t) = -u^{p+1}(t) - \frac{w^{p+1}(t)}{2t}\,. \tag{7}$$

Из предпоследнего уравнения системы (5) мы получаем, что

$$\chi^{p+1}(t) = \int_0^t (\chi^p(s)+u^p(s))ds + w^p(t)\,, \tag{8}$$

откуда, проведя рассуждения, аналогично сделанным выше, заключаем

$$\chi^p(t) = -u^p(t) + D^w_S \chi^{p+1}(t) - D^w_S w^p(t)\,.$$

Подставив в последнее равенство выражение для $\chi^{p+1}(t)$ из (5) и использовав Лемму 2, получим

$$\chi^p(t) = -\frac{du^{p+1}}{dt} - u^p(t) + \frac{w^{p+1}(t)}{2t^2} - \frac{w^p(t)}{2t} \ . \tag{9}$$

Совершенно аналогично, для $1 \le i \le p$ мы получаем рекурентную формулу

$$\chi^i(t) = D_S^w \chi^{i+1}(t) - D_S^w w^i(t) - u^i \, . \tag{10}$$

С помощью Лемм 3 и 4 по формуле (10) нетрудно получить явное выражение для любого $\chi^i(t)$.

Для пары матриц E и K размера $(q+1) \times (q+1)$ получаем систему в R^{q+1} типа

$$\zeta(t) = K \cdot \int_0^t \zeta(s)ds + \int_0^t v(s)ds + w(t) \, , \tag{11}$$

Для уравнения (11) известна аналитическая формула для решений

$$\zeta(t) = \int_0^t v(\tau) \exp K(t-\tau)d\tau + \int_0^t \exp K(t-\tau)dw(\tau) \, .$$

Рассмотрев пару матриц L и M размера $l \times (l+1)$, получим систему вида

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t g(s)ds + w(t) \, . \tag{12}$$

В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta^1(t) \\ \eta^2(t) \\ \vdots \\ \eta^l(t) \\ \eta^{l+1}(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta^1(s) \\ \eta^2(s) \\ \vdots \\ \eta^l(s) \\ \eta^{l+1}(s) \end{pmatrix} ds +$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} g^1(s) \\ g^2(s) \\ \vdots \\ g^{l-1}(s) \\ g^l(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^{l-1}(t) \\ w^l(t) \end{pmatrix} , \tag{13}$$

т. е.

$$\eta^2(t) = \int_0^t (\eta^1(s) + g^1(s))ds + w^1 \, ,$$

$$\eta^3(t) = \int_0^t (\eta^2(s) + g^2(s))ds + w^2 \, ,$$

$$\eta^{l+1}(t) = \int_0^t (\eta^l(s) + g^l(s))ds + w^l \, .$$

Это означает, что можно взять в качестве η^{l+1} произвольный случайный процесс, для которого можно вычислить симметрическую производную порядка l, а потом рекурентно получить все остальные компоненты процесса η. Дело обстоит таким образом потому, что в системе число неизвестных на единицу больше, чем число уравнений, т. е. система недоопределена. Аналогично случаю первой независимой системы, имеют место формулы:

$$\eta^l(t) = D_S^w \eta^{l+1} - D_S^w W^l - g^l(t) = D_S^w \eta^{l+1} - \frac{w^l(t)}{2t} - g^l(t)\,,$$
$$\eta^l(t) = \int_0^t (\eta^{l-1}(s) + g^{l-1}(s))ds + w^{l-1}\,,$$
$$\eta^{l-1}(t) = D_S^w \eta^l - D_S^w w^{l-1} - g^{l-1}(t) = D_S^2 \eta^{l+1} + \frac{w^l(t)}{4t^2} - \frac{w^{l-1}}{2t} - g^{l-1}\,.$$

Точно также, для $1 \le i \le l$ получаем

$$\eta^i(t) = D_S^w \eta^{i+1} - D_S^w w^i(t) - g^i(t)\,. \tag{14}$$

С помощью Лемм 3 и 7 по формулам (14) несложно получить явное выражение для любого $\eta^i(t)$.

И, наконец, для матриц G и H размера $(k+1)\times k$ имеем систему типа

$$G\theta(t) = \int_0^t H\theta(s)ds + \int_0^t z(s)ds + w(s)\,. \tag{15}$$

В координатной форме получаем систему вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta^1(t) \\ \theta^2(t) \\ \vdots \\ \theta^{k-1}(t) \\ \theta^k(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta^1(s) \\ \theta^2(s) \\ \vdots \\ \theta^{k-1}(s) \\ \theta^k(s) \end{pmatrix} ds +$$
$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} z^1(s) \\ z^2(s) \\ \vdots \\ z^k(s) \\ z^{k+1}(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^k(t) \\ w^{k+1}(t) \end{pmatrix} \tag{16}$$

или

$$0 = \int_0^t (\theta^1(s) + z^1(s))ds + w^1\,,$$
$$\theta^1(t) = \int_0^t (\theta^2(s) + z^2(s))ds + w^2\,,$$
$$\theta^{k-1}(t) = \int_0^t (\theta^k(s) + z^k(s))ds + w^k\,,$$
$$\theta^k(t) = \int_0^t z^{k+1}(s)ds + w^{k+1}\,.$$

Начиная с первого уравнения, последовательно получаем

$$\theta^1(t) = -z^1(t) - D_S^w w^1 = -z^1 - \frac{w^1(t)}{2t}\,, \tag{17}$$
$$\theta^2(t) = -z^2(t) + D_S^w\theta^1 - D_S^w w^2(t) = -z^2(t) - \frac{dz^1(t)}{dt} + \frac{w^1(t)}{4t^2} - \frac{w^2(t)}{2t}\,,$$
$$\theta^k(t) = -z^k(t) - \frac{dz^{k-1}(t)}{dt} - ... - \frac{d^{k-1}z^1(t)}{dt^{k-1}} - \\ - D_S w^k(t) - D_S^2 w^{k-1}(t) - ... - D_S^k w^1(t)\,,$$

а также условие согласования

$$\int_0^t z^{k+1}(s)ds + w^{k+1}(t) = -z^k(t) - \frac{dz^{k-1}(t)}{dt} - ... - \frac{d^{k-1}z^1(t)}{dt^{k-1}} - \\ - D_S w^k(t) - D_S^2 w^{k-1}(t) - ... - D_S^k w^1(t)\,.$$

Если компоненты w^i не удовлетворяют этому условию, то система не имеет решений. Здесь число уравнений на единицу больше, чем число неизвестных, т. е. данная подсистема переопределена. Как и ранее, для $2 \le i \le k$ имеет место рекуррентная формула

$$\theta^i(t) = -z^i(t) + D_S^w\theta^{i-1} - D_S^w w^i(t)\,. \tag{18}$$

Вернемся к вопросу о нулевых начальных условиях для решений систем (5), (13) и (16). Из определения симметрических производных в среднем видно, что они корректно определены только на открытых промежутках времени, поскольку в их конструкции задействованы, как приращения по времени вправо, так и влево. Принимая во внимание Леммы 2, 3 и 4, а также формулы (7) и (10), (14), (17) и (18), нетрудно видеть, что полученные выше решения $\xi^i(t)$ описываются как суммы, в которых каждое слагаемое содержит сомножитель вида $w^j(t)/t^k$, $k \ge 1$. Так что решения стремятся к бесконечности при $t \to 0$, т. е. значения решений при $t = 0$ не существуют.

Один из вариантов разрешения указанной ситуации состоит в следующем. Зафиксируем сколь угодно малый момент времени $t_0 \in (0, l)$ и зададим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0\,, & \text{если } 0 \le t \le t_0; \\ t\,, & \text{если } t_0 \le t\,. \end{cases}$$

Элементы $w^j(t)/t^k$ в формулах (7) и (10), (14), (17) и (18) заменим на $w^j(t)/(t_0(t))^k$. Полученные процессы в момент времени $t = 0$ будут принимать нулевые значения, однако они станут решениями только при $t > t_0$. Отметим, что для двух разных моментов времени $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$ при $t > \max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ значения соответствующих процессов п.н. совпадают.

Замечание 2. Напомним, что значения производных в среднем существенно зависят от того, σ-алгебру «настоящее» какого процесса мы используем. Проилюстрируем это на примере полученных выше формул. В Замечании 1 мы обосновали использование σ-алгебры «настоящее» n-мерного винеровского процесса (т.е. использование производной D_S^w), исходя из рассмотрения (3) как единой системы. Однако, вообще говоря, в условие конкретной задачи может входить требование об использовании какой-нибудь другой σ-алгебры. Тогда формулы для решений изменятся. Поясним это на примере системы уравнений (5). Например, так произойдет если рассматривать уравнения системы (5) по отдельности. Уравнение (6) не зависит от других уравнений системы (5) и может исследоваться отдельно от (5). В этом случае, рассуждая как в Замечании 1, что в конструкции производных в среднем для процессов $\chi^{p+1}(t)$ и $w^{p+1}(t)$ надо использовать σ-алгебру «настоящее» процесса $w^{p+1}(t)$. Перепишем затем уравнение (8) в виде $\chi^{p+1}(t) - \int_0^t \chi^p(s)ds = w^p(t)$. Опять рассуждая аналогично Замечанию 1, придем к выводу, что для производных в среднем процессов из этого уравнения надо использовать σ-алгебру «настоящее» процесса $w^p(t)$ и т. д. Напомним, что координаты n-мерного процесса $w(t)$ являются независимыми 1-мерными винеровскими процессами. По свойствам условного математического ожидания это означает, что $E_t^{w^i}(w^j(t)) = E(w^j(t)) = 0$ при $i \neq j$. Аналог рекуррентной формулы (10) примет вид $\chi^i(t) = D_S^{w^i}\chi^{i+1}(t) - D_S^{w^i}w^i(t)$. Однако, из сказанного выше и конструкции производных в среднем вытекает, что $D_S^{w^i}\chi^{i+1} = 0$, т.е. $\chi^i(t) = -D_S^{w^i}w^i = -\frac{w^i(t)}{2t}$ при всех $i = 1, 2, ..., p, p+1$. Аналогичное замечание можно сделать для систем (13) и (16).

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / М.: Физматлит, 1967.– 576 с.
2. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / Скороход А.В. – М.: Наука, 1977.– 568 с.
3. Gliklikh Yu.E. Global end Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / London: Springer-Verlag, 2011. – 460 p.
4. Гликлих Ю.Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / М.: Комкнига, 2005. – 416 с.
5. Гликлих Ю.Е., Машков Е.Ю. Стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – 6, №2. – С.25-39.
6. Cresson J., Darses S. Stochastic Embedding of Dynamical Sustems // J. of Mathematical Physics. – 2007. – 48. – P.072703-1–072303-54. [DOI: 10.1063/1.2736519].
7. Nelson E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics // Phys. Reviews. – 1966. – 150, №4. – P. 1079-1085.
8. Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion / Princeton: Princeton University Press, 1967. – 142 p.

9. Nelson E. Quantum fluctuations / Princeton: Princeton University Press, 1985. – 148 p.
10. Партасарати К.Р. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / М.: Мир, 1988. – 344 с.

SINGULAR STOCHASTIC EQUATIONS OF THE LEONTIEV TYPE AND DERIVATIVE IN AVERAGE OF RANDOM PROCESSES

E.Yu. Mashkov

Kursk State University,
Kursk, Russia

Abstract. Singular stochastic equations of the Leontiev type are understood as the special class of stochastic differential equations of the Ito form which have some rectangular numerical matrices at their left and right sides generating singular bundle. Besides, at the right side there is the item depending on time only. For investigation of such equations, it is necessary to use derivatives of arbitrary order on the deterministic summand and the wiener process. For differentiation of wiener process the technique of so-called Nelson's derivatives in average on random processes is applied. It permits do not use the technique of generalized functions. The short introduction into the theory of derivatives in average is proposed, it is studied the transformation of equations to the canonical form and it is found formulas of solutions in terms of derivatives in average on the wiener process.

Key words: derivative in average, velocity, white noise, Wiener process, Leontiev's equation.

MSC 62K99

НЕКЛАССИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

***М.М. Ошхунов, **З.М. Ошхунова, *М.А. Джанкулаева**

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
ул. Чернышевского, 173, Нальчик, 360004, Россия, e-mail: muaed@inbox.ru,
madina.dzhan@gmail.com;
**Кабардино-Балкарский филиал ОАО Ростелеком,
ул. Головко, 4, Нальчик, 360000, Россия, e-mail: zalina_oshhunova@mail.ru

Аннотация. Предлагается алгоритм нахождения регрессионных функций, отличный от классического подхода. Суть метода заключается в выборе линий регрессии по минимуму суммы квадратов расстояний от статистических точек. Такой подход приводит к неединственному решению (в отличие от классического алгоритма выбора прямой), что имеет геометрическое объяснение. Даны примеры расчета коэффициента корреляции по двум методам, которые показали бóльшую эффективность предлагаемого метода по степени отклонения от статистических данных. Предпринята попытка распространить данный алгоритм на задачи многофакторного регрессионного анализа.

Ключевые слова: регрессионный анализ, метод наименьших квадратов, неклассический вариант метод наименьших квадратов, дисперсия.

Как известно [1], практически вся прикладная классическая статистика основана на методах, разработанных применительно к нормально распределённым величинам. В последнее время появилось большое количество публикаций с нападками на нормальный закон распределения Гаусса. Утверждается, что нормальный закон распределения в экономике встречается весьма редко. В этом случае традиционные методы анализа статистической экономической информации не пригодны. Это заключение весьма непростое, т.к. требуется разработать другие, отличные от классических, методы анализа.

Регрессионный анализ относится к одним из наиболее часто используемых приёмов исследования статистической информации. Он позволяет находить средневзвешенные тренды, которые дают возможность прогнозировать динамические процессы, например, в экономике на основе накопленной ранее информации. Объективность таких прогнозов иногда не очень высокая, но есть несколько требований, когда такой прогноз может быть научно оправдан. Начнём с однофакторного линейного анализа. Требуется найти тесноту связи между двумя признаками в виде линейной зависимости

$$C = kx + b\,. \tag{1}$$

Коэффициенты k, b находят по минимуму суммы квадратов отклонений по оси Oy статистических данных от линейной функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №12-07-00624 а, №13-07-01003 а.

Если ввести новые переменные $\tilde{x}_i = x_i - \bar{x}, \quad \tilde{y}_i = y_i - \bar{y}$, где

$$\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/n, \quad \bar{y} = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)/n,$$

то оптимальные значения этих коэффициентов вычисляются по формулам

$$k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{y}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^2} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x^2}. \tag{2}$$

$$b = \bar{y} - k\bar{x} \tag{3}$$

Формулы (2), (3) определяют параметры линейной регрессии по методу наименьших квадратов.

Уравнение (1) удобно записать в виде:

$$y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) \ , \tag{4}$$

где

$$r = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \ , \tag{5}$$

$$\mu_{xy} = \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{y}_i\right) \Big/ n.$$

Коэффициент r в формуле (5), как известно, носит название коэффициента корреляции и обладает свойством $|r| \leq 1$. Если $|r| \approx 0$, то случайные величины y, x почти не связаны и, наоборот, если $|r| \approx 1$, то теснота связи между этими величинами – сильная.

Заметим, что предложенный алгоритм регрессии никак не зависит от того, является ли плотность распределения статистической информации нормальной или нет.

Заменим условие минимума суммы квадратов отклонений по оси Oy на минимизацию суммы квадратов расстояний

$$S(k, b) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(kx_i + b - y_i)^2}{k^2 + 1} \to \min .$$

Такая замена, в отличие от классического подхода, приводит к двойственности решения и особенно целесообразна, когда теснота связи между факторами y, x — сильная [2].

Оптимальные значения коэффициента k в случае $\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{y}_i \neq 0$ определяются из решения уравнения

$$k^2 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\tilde{y}_i^2 - \tilde{x}_i^2)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{y}_i} \cdot k - 1 = 0 \, ,$$

или в общепринятых терминах статистики

$$k^2 + \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{\mu_{xy}} k - 1 = 0\,. \tag{6}$$

После нахождения корней k_1, k_2 уравнения (6), параметры прямой b_1, b_2 вычисляются по формулам:

$$b_1 = \bar{y} - k_1 \bar{x}\,, \qquad b_2 = \bar{y} - k_2 \bar{x}\,,$$

где

$$k_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}\,, \qquad k_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}\,, \qquad \alpha = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{\mu_{xy}}\,.$$

Случайные величины

$$\frac{(k_1 \tilde{x}_i - \tilde{y}_i)}{\sqrt{k_1^2 + 1}}\,, \qquad \frac{(k_2 \tilde{x}_i - \tilde{y}_i)}{\sqrt{k_2^2 + 1}}\,,$$

которые равны отклонениям по расстоянию от точек с координатами $(x_i; y_i)$ до прямых $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$ должны быть нормально распределенными с нулевыми математическими ожиданиями. Только в этом случае ими можно пользоваться для прогноза динамических процессов в экономике.

Исследования в экономике с использованием множественного регрессионного анализа, предъявляют к статистическому распределению такие же требования нормальности отклонений, как это описано выше.

Таким образом, для обработки статистической информации в экономике методами регрессионного анализа с последующим использованием полученных зависимостей для прогнозных решений, рекомендуется алгоритм минимизации суммы квадратов расстояний, т.к. он даёт существенно меньше погрешности при прогнозе. Согласно приведенным выше формулам

$$S_1(k) = \sum_{i=1}^{n} \left(k\tilde{x}_i - \tilde{y}_i\right)^2 = n\left(\sigma_2^x k^2 - 2\mu_{xy} k + \sigma_y^2\right)\,. \tag{7}$$

Оптимальное значение k из формулы (7) позволяет напрямую подсчитать сумму квадратов отклонений по оси Oy:

$$S_1\left(k\right)_{<8=} = n\left(\sigma_y^2 - \frac{\mu_{xy}^2}{\sigma_x^2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_y^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{y}_i\right)^2 \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^2\right).$$

В случае, когда регрессионная прямая выбирается из минимума суммы квадратов расстояний, имеем

$$S_2\left(k\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(k\tilde{x}_i - \tilde{y}_i\right)^2}{k^2 + 1} = \frac{S_1\left(k\right)}{k^2 + 1}\,. \tag{8}$$

Из формулы (8) следует важный вывод. Независимо от значения параметра k, а, следовательно, и для минимального его значения

$$S_2\left(k\right) \le S_1\left(k\right).$$

Таким образом, выбор прямой регрессии по минимуму суммы квадратов расстояний разумно и практически более обосновано, чем по классической схеме.

Соотношение (8) означает, что сумма квадратов отклонений различаются более существенно для статистических данных, которые сильно коррелированны, т.е. при $|r| \approx 1$ (в этом случае $|k| \to +\infty$).

Заметим, что из полученных значений $S_2(k_1)$, $S_2(k_2)$ следует выбрать минимальное и такой выбор решает задачу оптимизации регрессионной прямой по минимуму суммы квадратов расстояний.

Предлагаемый алгоритм может быть использован без всякого изменения в задачах оптимальной трассировки линейных участков водо- и газопроводов, автомобильных трасс, минимально удаленных от потребителей и населенных пунктов.

Изложенные выше идеи распространяются на многофакторный регрессионный анализ. Рассмотрим, для простоты, реализацию предлагаемого алгоритма применительно к двухфакторному случаю. Пусть переменная z зависит от двух признаков x, y, т.е.

$$z = \alpha + \beta x + \gamma y\,. \tag{9}$$

Неизвестные параметры α, β, γ определяются по следующему алгоритму.

Введем новые переменные

$$\tilde{x}_i = x_i - \bar{x}, \qquad \tilde{y}_i = y_i - \bar{y}, \qquad \tilde{z}_i = z_i - \bar{z}\,.$$

Тогда формула (9) перепишется в виде

$$\tilde{z}_i = \beta\tilde{x}_i + \gamma\tilde{y}_i\,, \tag{10}$$

$$\alpha = \bar{z} - \beta\bar{x} - \gamma\bar{y}\,, \tag{11}$$

$$\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\Big/ n, \quad \bar{y} = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\Big/ n, \quad \bar{z} = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)\Big/ n.$$

Коэффициенты β, γ по классической схеме находят из минимума суммы квадратов отклонений по оси Oy

$$S_1(\beta,\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \left(\beta\tilde{x}_i + \gamma\tilde{y}_i - \tilde{z}_i\right)^2 \to \min\,.$$

Для минимизации функции $S(\beta,\gamma)$ необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial S_1}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial \gamma} = 0\,. \tag{12}$$

Система (12) записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\beta\tilde{x}_i + \gamma\tilde{y}_i - \tilde{z}_i\right)\tilde{x}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\beta\tilde{x}_i + \gamma\tilde{y}_i - \tilde{z}_i\right)\tilde{y}_i = 0\,. \tag{13}$$

Используя стандартные обозначения статистики, (13) перепишем ее в виде системы двух уравнений

$$\begin{cases} \beta\sigma_x^2 + \gamma\mu_{xy} = \mu_{xz}, \\ \beta\mu_{xy} + \gamma\sigma_y^2 = \mu_{yz}. \end{cases} \tag{14}$$

Решением системы (14), очевидно, являются

$$\beta = \frac{\mu_{xz}\sigma_y^2 - \mu_{xy}\mu_{yz}}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \mu_{xy}^2}\ , \qquad \gamma = \frac{\mu_{yz}\sigma_x^2 - \mu_{xy}\mu_{yz}}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \mu_{xy}^2}\ . \tag{15}$$

Формулы (15) дают оптимальные значения параметров β, γ. После их нахождения параметр α вычисляется по формуле (11). Изложенная методика есть классический двухфакторный регрессионный анализ.

Новый подход заключается в нахождении тех же коэффициентов по минимуму суммы квадратов расстояний, что приводит к минимизации функции

$$S_2(\beta,\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\beta\tilde{x}_i + \gamma\tilde{y}_i - \tilde{z}_i)^2}{1+\beta^2+\gamma^2}\ .$$

Система уравнений

$$\frac{\partial S_2}{\partial\beta} = 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial\gamma} = 0,$$

имеет вид

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \left[\tilde{x}_i(\beta\tilde{x}_i + \gamma\tilde{y}_i - \tilde{z}_i)\left(1+\beta^2+\gamma^2\right) - \beta(\beta\tilde{x}_i + \gamma\tilde{y}_i - \tilde{z}_i)^2\right] = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left[\tilde{y}_i(\beta\tilde{x}_i + \gamma\tilde{y}_i - \tilde{z}_i)\left(1+\beta^2+\gamma^2\right) - \gamma(\beta\tilde{x}_i + \gamma\tilde{y}_i - \tilde{z}_i)^2\right] = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Используя общепринятые обозначения прикладной статистики, систему (16) можно записать в виде

$$\begin{cases} (1+\beta^2+\gamma^2)(\beta\sigma_x^2 + \gamma\mu_{xy} - \mu_{xz}) - \beta\left(\beta^2\sigma_x^2 + \gamma^2\sigma_y^2 + \right. \\ \qquad\qquad \left. +\sigma_z^2 - 2\beta\gamma\mu_{xy} + 2\beta\mu_{xz} + 2\gamma\mu_{yz}\right) = 0\,, \\ (1+\beta^2+\gamma^2)\left(\beta\mu_{xy} + \gamma\sigma_y^2 - \mu_{yz}\right) - \gamma\left(\beta^2\sigma_x^2 + \gamma^2\sigma_y^2 + \right. \\ \qquad\qquad \left. +\sigma_z^2 - 2\beta\gamma\mu_{xy} + 2\beta\mu_{xz} + 2\gamma\mu_{yz}\right) = 0\,. \end{cases} \tag{17}$$

Система (17) – нелинейная и может иметь несколько решений. Её можно переписать в виде

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\tilde{x}_i = \dfrac{\beta}{1+\beta^2+\gamma^2}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\ , \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\tilde{y}_i = \dfrac{\gamma}{1+\beta^2+\gamma^2}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\ , \end{cases}$$

где α после нахождения параметров β, γ вычисляется по формуле

$$\alpha = \bar{z} - \beta\bar{x} - \gamma\bar{y}.$$

Число решений, как показывает простой анализ [3], может быть конечным или бесконечным.

Для двухфакторного корреляционного анализа справедлив вывод, сделанный выше: выбор регрессионной зависимости по минимуму суммы квадратов расстояний даёт меньшую дисперсию, чем классический метод. Дисперсия по двум методам будет различаться более существенно для сильно коррелированных величин. Средняя сумма квадратов расстояний будет меньше в $1 + \beta^2 + \gamma^2$ раз, чем средняя сумма отклонений по оси Oz, т.е. дисперсии при классическом выборе [4].

Литература

1. Бобров С.П. Экономическая статистика / М.-Л.: Государственное издательство, 1930. – 520 с.
2. Ошхунов М.М. // Изв. КБНЦ РАН. – 2001, №1 (4), С.63-67.
3. Ошхунов М.М. Введение в математическую статистику / Нальчик: КБГУ, 2004/ – 36 с.
4. Дубровский С.А. Прикладной многомерный статистический анализ / М.: Финансы и статистика, 1982. – 216 с.

NON-CLASSICAL VARIANT OF REGRESSIONS ANALYSIS

***M.M. Oshkhunov, **Z.M. Oshkhunova, *M.A. Dzhankulaeva**

*Kabardino-Balkarian State University named H.M. Berbekov,
Chernishevkogo St., 173, Nalchik, 360004, Russia, e-mail: muaed@inbox.ru, madina.dzhan@gmail.com;
**Kabardino-Balkarian department of OJSC Rostelecom,
Golovko St., 4, Nalchik, 360000, Russia, e-mail: zalina_oshhunova@mail.ru

Abstract. proposes The algorithm of finding regression functions finding is proposed. It is differed from the classical approach. The method consists of the choice of regression lines according to the minimum of the sum of squared distances form statistical points. The approach leads to non-uniqueness of the solution (in the opposite to the classical algorithm the lines choice) which has the geometric explanation. Examples are given of calculating the correlation coefficient for two methods which showed the higher efficiency of the method according to the degree of deviation from statistical data. It is made the attempt to extend the algorithm to the problem of multivariate regression analysis. It is provided some practical calculations of correlation parameters in relation to the specific statistical information.

Key words: regression analysis, method of least squares, non-classical method of least squares, dispersion.

MSC 34M50

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ КОШИ-РИМАНА НА СВЕРХСИНГУЛЯРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

А.Б. Расулов, М.А. Расулзода

Москва, Россия, e-mail: rasulov-abdu@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается эллиптическое уравнение произвольного порядка на плоскости, определяемое оператором Коши-Римана, с особенностью высокого порядка в начале координат. Устанавливаются наличие решений и явные выражения.

Ключевые слова: оператор Коши-Римана, сверхсингулярное многообразие, интегральное представление, граничные задачи.

Пусть $G-$ односвязная конечная область, ограниченная кусочно-гладким замкнутым контуром $\partial G \in C^{1,\alpha}, 0 < \alpha < 1$, содержащая внутри точку$z = 0$.

В области G рассмотрим уравнения произвольного порядка с особенностью высокого порядка в начале координат

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\partial_{\overline{z}} - A_j(z)\right)U + B(z)\overline{U} = F(z),\ A_j(z) = \frac{za_j(z)}{r^{n+1}}\ , \tag{1}$$

где $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$ – оператор Коши-Римана, $n \geq 1$, $a_j(z)$, $j = \overline{1,m}$, $U(z)$ – искомая функция, $B(z), F(z)$ – фиксированные заданные функции.

Из уравнения (1) при $m = 1$ получим неоднородную систему Коши-Римана, которая в классе эллиптических систем первого порядка занимает особое место. Основополагающей работой в этом направлении является монография И.Н. Векуа [2]. Теория Векуа построена в предположении, что коэффициенты и правая часть принадлежат пространству $L^p(G), p > 2$. Поэтому даже уравнение с такими коэффициентами, как $A_1(z) = 1/z$, $B_1(z) = 1/\overline{z}$ не вписывается в эту теорию. Разработки по проблеме дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами были начаты еще в 1957-1963 годах Л.Г. Михайловым, о чем можно судить по его монографии [4]. Исследованию задач для уравнений с коэффициентами, имеющими особенности в изолированной особой точке, посвящены работы З.Д. Усманова[7], Н.Р. Раджабова[5], А. Тунгатарова, А.Ю. Тимофеева, Г.Т. Макацария , М. Райссега и др. ученых. Впервые основательная работа по исследованию дифференциальных и интегральных уравнений с сверхсингулярными коэффициентами была проведена Н.Р. Раджабовым (см., например, [5]).

Из уравнения (1) при $m = 2$ получим уравнение второго порядка с оператором Коши-Римана и со сверхсингулярными коэффициентами. Классическим примером дифференциальных уравнений второго порядка (случай $m = 2$) с оператором $\partial_{\overline{z}}$ является уравнение $U_{\overline{z}^2} = 0$, для которого еще в 1948г. А.В. Бицадзе доказана некорректность

постановки задачи Дирихле [1]. Существенный вклад в развитие таких и общих эллиптических систем с регулярными коэффициентами внес А.П. Солдатов (см., например, [6]). Модифицированное уравнение Бицадзе с добавленными младшими производными в случае регулярных коэффициентов было исследовано также Р.С. Саксом , Н.Е. Товмасяном и другими.

Объектом нашего исследования является уравнение произвольного порядка с оператором Коши-Римана в случае с сверхсингулярными коэффициентами, т.е. уравнение (1).

Под обобщенным решением мы понимаем функцию $U \in C(\overline{G}\backslash 0)$ непрерывно дифференцируемую по $\overline{z}$ до $m-1-$го порядка, а обобщенная производная $m-$го порядка по $\overline{z}$ принадлежит классу $L^p(G_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, где $G_\varepsilon = G \cap \{|z| > \varepsilon\}$.

Введем следующие обозначения:

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - z}\,, \qquad A_j(z) = \tfrac{za_j(z)}{r^{n+1}}\,,$$
$$A_{j0}(z) = \frac{z}{r^{n+1}}[a_{j0}(z) - a_{j0}(0)]\,, \quad j = \overline{1,m}\,, \quad \omega(z) = \tfrac{2}{(n-1)r^{n-1}}\,. \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть $n > 1$ и, в обозначениях (2), функция $A_{j0} \in L^p(G)$, $p > 2$ так, что*

$$h_j(z) = (TA_{j0})(z) + \frac{a_j(0)}{(n-1)\pi i}\int_{\partial G}\frac{\zeta}{|\zeta|^{n+1}}\frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H(\overline{G})\,.$$

Тогда при $n > 1$ сингулярный интеграл $(TA_j)(z)$ существует и представим в виде

$$(TA_j)(z) = -a_j(0)\omega(z) + h_j(z)\,. \tag{3}$$

Пусть при $n = 1$, в обозначениях (2), функция $A_{j0} \in L^p(G)$, $p > 2$ и круг $\{|z| \le \rho\}$ содержится в G так, что

$$h_j^0(z) = (TA_{j0})(z) + (TA_{j0}^0)(z) \in H(\overline{G})\,,$$

где

$$A_{j0}^0(z) = \begin{cases} 0, & |z| < \rho, \\ \bar{z}^{-1}, & |z| \ge \rho. \end{cases}$$

Тогда при $n = 1$ сингулярный интеграл $(TA_j)(z)$ существует и представим в виде

$$(TA_j)(z) = 2a_j(0)\ln\frac{|z|}{\rho} + h_j^0(z)\,.$$

Теорема 1. *Пусть $n > 1, m = 1, B(z) = 0$, $\forall z \in \overline{G}$ функция $A_{10} \in L^p(G)$, $p > 2$ и правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию $e^{a_1(0)\omega(z)}F \in L^p(G)$. Тогда любое решение $U(z) \in C(\overline{G}\backslash 0)$ уравнения (1) представимо в виде*

$$U = e^{-a_1(0)\omega + h_1}[\phi_1 - T(e^{a_1(0)\omega - h_1}F)]\,, \tag{4}$$

где $\phi_1 \in C(\overline{G}\backslash 0)$ *аналитична в области* $G\backslash 0$.

Пусть $n > 1$. Если решение уравнения (1) имеет поведение

$$U(z) = O(1)e^{a_1(0)\omega} \quad \text{при} \quad z \to 0, \tag{5}$$

то по теореме 1 аналитическая в $G \setminus 0$ функция $\phi_1(z)$ ограничена в окрестности $z = 0$ и, следовательно, аналитична во всей области G. Этот факт ниже используем в постановке задачи Римана-Гильберта.

Задача типа Римана-Гильберта. Пусть $n > 1$. Задача Римана-Гильберта состоит в том, что требуется найти решение $U(z) \in C(\overline{G}\backslash 0)$ уравнения

$$\partial_{\bar z} U - A_1(z)U(z) = f(z)\,, \qquad A_1(z) = \frac{za_1(z)}{r^{n+1}}\ . \tag{6}$$

удовлетворяющее (5) и краевому условию

$$\mathrm{Re}\,[\lambda e^{i\mathrm{Im}a_1(0)\omega}U]_{\partial G} = g(t)\,, \tag{7}$$

где функция $\lambda(t) \in C(\partial G)$, $\lambda(t) \neq 0, t \in \partial G$.

Теорема 2. *Пусть* $n > 1$, $m = 1$, $B(z) = 0$, $\forall z \in \overline{G}$, *функция* $A_0 \in L^p(G)$, $p > 2$, *правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию* $e^{a_1(0)\omega}F \in L^p(G)$ *и*

$$æ = -\frac{1}{\pi}\arg\lambda\big|_{\partial G}\,.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1). *При* $æ \geq 0$ *однородное задача (6),(7) имеет* $æ + 1$ *линейно-независимых решений* $U_1, ..., U_{æ+1} \in H_{loc}(G\backslash 0)$, *а неоднородная задача всегда разрешима.*

2). *Если* $æ < 0$, *то однородная задача имеет только нулевое решение, а неоднородная разрешима при выполнении* $-æ - 1$ *условий разрешимости вида*

$$\int_{\partial G} g_0(e^{i\theta})e^{-ki\theta}d\theta = 0\,, \qquad (k = 1, ..., -æ - 1)\,.$$

Теорема 3. *Пусть* $m = 2$, $n > 1$, $B(z) = 0$, $a_1(z) \neq a_2(z)$, $a_1(z) = r^n\varphi(z)$, $\forall z \in \overline{G}$, *где аналитическая функция* $\varphi(z) \in C(\overline{G})$. *Кроме того,*

$$a_2(z) \in C^1(\overline{G}), \quad \mathrm{Re}\,a_2(0) > 0\,; \quad A_{02}(z), |z|^{-2n}f(z) \in L^p(G)\,,\ p > 2\,. \tag{8}$$

Тогда функции $K_0(z) = e^{-a_2(0)\omega + h_2(z) - (T(\varphi))(z)} \in C(\overline{G})$, *и для любых функций* $\phi_2 \in C(\overline{G}\backslash 0)$, $\phi_1 \in C(\overline{G})$, *аналитических в области* G *формула*

$$U(z) = e^{(T\varphi)(z)} \times$$

$$\Big[\phi_2(z) + T\big(K_0(\zeta)\phi_1(\zeta)\big)(z) + T\big((K_{a_2}(z) - K_{a_2}(t))f_0(t)\big)(z)\Big]\,, \tag{9}$$

определяет решение уравнения (1) из класса $C(\overline{G}\backslash 0)$, где

$$K_{a_2}(z) = T\big(K_0(\zeta)\big)(z)\,, \qquad f_0(z) = |z|^{-2n} e^{a_2(0)\omega(z)+h_2(z)} f(z)\,.$$

Поведение этих решений в окрестности начала координат описывает следующая

Теорема 4. *Пусть для уравнения (1) выполнены условия теоремы 3. Тогда поведение решений однородного уравнения (1) из класса $C(\overline{G}\backslash 0)$ в окрестности сверхсингулярной точки определяется формулой:*

$$U(z) = e^{(T\varphi)(z)}\left[\phi_2(z) - \frac{1}{\pi}\int_G \frac{K_0(\zeta)\phi_1(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta\right] =$$

$$= \left(R^2\frac{\varphi(z)-\varphi(0)}{z} + \overline{z}\varphi(z)\right)\phi_2(z) +$$

$$+\frac{\beta_0 E_0(a(0),n,0)}{(n-1)\pi i}\frac{1}{z} + \frac{1}{(n-1)\pi i}\Big(\phi_1(z)-\beta_0\Big)E_1(a(0),n,z)\,,$$

где

$$E_0(a(0),n,0) = \int_{R^{1-n}}^{\infty} e^{-c\eta}\eta^{-1-\frac{2}{n-1}} d\eta\,,$$

$$E_1(a(0),n,z) = \int_{R^{1-n}}^{\infty} e^{-c\eta}\eta^{-1-\frac{2}{n-1}} c_1(\eta,z) d\eta\,,$$

$$c_1(\eta,z) = \exp\Big\{\sum_{k\geq m\geq 1}\frac{a_{km}}{m+1}(\eta^{-\frac{2(m+1)}{n-1}-1})\,z^{k-m}\Big\}\,, \quad c = \frac{2a(0)}{(n-1)}\,.$$

Теорема 5. *Пусть в уравнении (1), функции*

$$a_j(z) \in C^m(\overline{G})\,, \qquad \operatorname{Re} a_j(0) \leq 0\,, \qquad A_{j0}(z) \in L^p(G),\ p>2,\ j=\overline{1,m},\ B(z)=0$$

и правая часть $e^{-TA_1}F(z) \in L^p(G)$, $p>2$. Тогда любое решение уравнения (1) из класса $(G\backslash 0)$ представимо в виде

$$U(z) = \prod_{j=0}^{m-1} S_k(U_{k+1})\,, \tag{10}$$

где

$$S_k(U_{k+1}) \equiv e^{TA_{m-k}(z)}\left(\phi_{m-k}(z) + \left(T(e^{-TA_{m-k}(\zeta)})U_{k+1}\right)(z)\right)\,, \tag{11}$$

$k = 0,1,2...m-1$, где $U_0 \equiv U$, $U_m = F$, $\phi_{m-k}(z)$, $k = 0,1...m-1$ – произвольные аналитические функции комплексного переменного z, причем, если известно, U в G, то соответствующие аналитические функции $\phi_j(z), j=\overline{1,m}$ через значения функции $U(z)$ и ее производных до $m-1$-го порядка включительно, находятся единственным образом.

Замечание. Случай $B(z) \neq 0$ сводится к интегральному уравнению

$$U(z) = \prod_{j=0}^{m-1} S_k(U_{k+1}) \,,$$

где: $B(z)$, $e^{-TA_1} r^{-n-1} f(z) \in L_p(G)$, $p > 2$, причем $U_m = B(z)\overline{U} + F$, которое решается методом последовательных приближений.

Аналогичные результаты получены для уравнения

$$\partial_{\bar z} U - A(z)U + B(z)U^m = 0, \quad A(z) = \frac{z a_1(z)}{|z|^{n+1}} \,. \tag{12}$$

Теорема 6. *Пусть $n > 1$, $m > 0$, $B(z) \in L^p(G))$ и $\forall z \in \overline{G}$, функция $A_{10} \in L^p(G)$, $p > 2$, а также правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию $e^{(m-1)a_1(0)\omega(z)} b \in L^p(G)$. Тогда любое решение $U(z) \in C(\overline{G}\backslash 0)$ уравнения (12) представимо в виде*

$$U = e^{-a_1(0)\omega + h_1} [\phi_1 + (m-1)T(e^{(m-1)(a_1(0)\omega - h_1)} b)]^{\frac{1}{m-1}} \,, \tag{13}$$

где $\phi_1 \in C(\overline{G}\backslash 0)$ аналитична в области $G\backslash 0$.

Задача типа Римана-Гильберта. *Пусть $n > 1$. Требуется найти решение $U(z) \in C(\overline{G}\backslash 0)$ уравнения (12) удовлетворяющее (5) и краевому условию*

$$\mathrm{Re}\,[\lambda e^{iIma_1(0)\omega} U^{m-1}]_{\partial G} = g(t) \,, \tag{14}$$

где функция $\lambda(t) \in C(\partial G)$, $\lambda(t) \neq 0, t \in \partial G$.

Применяя к последней при $m = 1 - 1/k$, $k \in N$ классические результаты о разрешимости [3] сформулированной задачи, приходим к решению задачи Римана-Гильберта в классе однозначных аналитических функций.

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Наука, 1968. – 512 с.
4. Михайлов Л.Г. Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами / Душанбе: ТаджикНИИНТИ, 1963. – 184 с.
5. Раджабов Н.Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами / Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992. – 236 с.
6. Солдатов А.П. Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости // Изв. РАН. – 2006. – .70,№6. – С.161-192.
7. Усманов З.Д. Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой / Душанбе: Изд. АН Тадж. ССР, 1993. – 244с.
8. Расулов А.Б. Интегральные представления решений линейной эллиптической системы второго порядка с внутренней сверхсингулярной точкой // ДАН России. – 2009. – 429,№6. – С.735-737.

9. Расулов А.Б. Интегральные представления и граничные задачи для линейной эллиптической системы третьего порядка с внутренней сверхсингулярной точкой / Дифференциальные уравнения. Минск. – 2011. – 47, №2. – С.287-290.

INTEGRAL REPRESENTATIONS AND BOUNDARY PROBLEMS FOR THE EQUATION OF ARBITRARY ORDER WITH THE CAUCHY-RIEMANN OPERATOR ON SUPERSINGULAR MANIFOLDS

A.B. Rasulov, M.A. Rasulzoda

Moscow, Russia, e-mail: rasulov-abdu@rambler.ru

Abstract. Elliptic equation of arbitrary order on complex plane, defined by cauchy-Riemann's operator with the singularity of a high order at the origin is under consideration. It is found the solution existence and their explicit expressions.

Key words: Cauchy-Riemann's operator, supersingular manifolds, integral representation, boundary problems.

MSC 34B05

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Е.Ю. Романова

Воронежский Государственный Университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия, vsu.romanova@gmail.com

Аннотация. Изучается дифференциальный оператор L с инволюцией, порожденный дифференциальным выражением $l(y) = y'(x) - q(x)y(\omega - x)$ с $q \in L_2[0,\omega]$, и краевыми условиями $y(0) = y(\omega)$. Для исследования спектральных свойств данного оператора применяется метод подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра, а также оценки равносходимости спектральных разложений.

Ключевые слова: спектр оператора, дифференциальный оператор с инволюцией, подобные операторы, асимптотика спектра, спектральное разложение, равносходимость спектральных разложений.

1. Введение. Пусть $L_2[0,\omega]-$ гильбертово пространство суммируемых с квадратом на $[0,\omega]$ комплекснозначных функций со скалярным произведением

$$(x,y) = \int_0^\omega x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau\,, \qquad x,y \in L_2[0,\omega]\,.$$

Через $W_2^1[0,\omega]$ обозначим пространство Соболева

$$\{y \in L_2[0,\omega] : y\text{– абсолютно непрерывна и } \dot{y} \in L_2[0,\omega]\}\,.$$

Рассмотрим оператор

$$L : D(L) \subset L_2[0,\omega] \mapsto L_2[0,\omega]\,,$$

порожденный дифференциальным выражением [1]

$$l(y) = y'(x) - q(x)y(\omega - x)\,, \qquad x \in [0,\omega]\,, \quad q \in L_2[0,\omega]\,, \tag{1}$$

с областью определения

$$y \in D(L) = \{y \in W_2^1[0,\omega] : y(0) = y(\omega)\}.$$

Запишем оператор L в виде

$$Ly = L^0 y - By\,, \tag{2}$$

где $(L^0 y)(x) = y'(x)$. Оператор $L^{(0)}$ будем называть свободным оператором, играющим роль невозмущенного оператора, а $(By)(x) = q(x)y(\omega - x)$ — возмущения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 13-01-00378, 14-01-31196.

Спектр $\sigma(L^0)$ состоит из собственных значений вида $\lambda_n = 2\pi in/\omega$, $n \in \mathbb{N}$. Каждое собственное подпространство, отвечающее собственному значению $\lambda_n, n \in \mathbb{N}$, является одномерным. Соответствующая собственная функция имеет вид $e_n(t) = \exp\left\{2\pi int/\omega\right\}$. Проекторы Рисса $P_n, n \in \mathbb{N}$, построенные по одноточечным множествам $\{\lambda_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ для любого $x \in L_2[0,\omega]$ имеют вид $P_n x = (x, e_n)e_n, n \in \mathbb{N}$.

Интерес к изучению оператора L связан с тем, что такие операторы применяются в теории фильтрации. Инволютивное отображение применялось В.А. Плиссом при исследовании субгармонических колебаний, описываемых уравнениями без диссипации [2]. Отметим также, что к обыкновенным дифференциальным уравнениям, содержащим простейшую инволюцию, сводятся некоторые геометрические задачи, например, задача Бернулли и Эйлера о взаимных траекториях [3], а также краевые задачи для уравнений в частных производных гиперболического и эллиптического типов, если оператор уравнения допускает факторизацию.

В теории возмущенных линейных операторов при изучении дифференциальных операторов, определяемых краевыми условиями на конечном промежутке, используются разнообразные методы [10]- [11]. В настоящей статье для исследования спектральных свойств оператора L используется метод подобных операторов [4]- [9]. Суть метода состоит в преобразовании подобия исследуемого (возмущенного) оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора (в данном случае свободного оператора L^0).Тем самым существенно упрощается изучение исследуемого оператора L.

2. Полученные результаты. Основная идея метода подобных операторов [4]- [9] состоит в следующем. Пусть A — линейный оператор, действующий в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ (он обычно называется невозмущенным оператором), и B — другой оператор, который в некотором смысле «мал» по сравнению с A. При определенных условиях естественно ожидать, что оператор $A - B$ подобен оператору $A - B_0$, где B_0 имеет несложную по отношению к A структуру. Оказалось, что процедура построения оператора B_0 и оператора преобразования оператора $A - B$ в $A - B_0$ тесно связана с гармоническим анализом линейных операторов из некоторого пространства возмущений оператора A, которому принадлежит и B. Проверка условия подобия операторов $A - B$ и $A - B_0$ обычно приводит к вопросу разрешимости некоторых нелинейных уравнений в пространстве возмущений.

Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора L, будем рассматривать оператор L в виде $L = A - B$, где свободный оператор $L^0 = A$ будем считать невозмущенным оператором, а B — возмущением.

Пусть $L_{2,\omega} = L_{2,\omega}[0,\omega]$ — гильбертово пространство определенных на $\mathbb{R}$ комплексных периодических периода ω функций, суммируемых с квадратом модуля на $[0,\omega]$.

Рассмотрим ограниченные операторы $JB, \Gamma B$ из $\operatorname{End} L_{2,\omega}$, определяемые формулами

$$JB = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n B P_n\,, \qquad \Gamma B = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\omega}{2\pi n} \sum_{i-j=n} P_i B P_j\,, \qquad i,j \in \mathbb{Z}\,.$$

Далее, введем последовательности операторов $(J_m B)$, $(\Gamma_m B)$, и трансформаторов (J_m), (Γ_m), $m \in \mathbb{N}$ [8], принадлежащих $\operatorname{End} L_{2,\omega}$ и входящих в допустимую тройку метода

подобных операторов [4]:

$$J_m B = P_{(m)} B P_{(m)} + \sum_{|k|\geq m+1} P_k B P_k = J(B - P_{(m)} B P_{(m)}) + P_{(m)} B P_{(m)}\,, \tag{3}$$

$$\Gamma_m B = \Gamma(B - P_{(m)} B P_{(m)})\,, \tag{4}$$

где

$$P_{(m)} = \sum_{k=1}^{m} P_k\,,$$

$$((JB)y)(x) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\omega} q\Big(\frac{x-s+\omega}{2}\Big) y(s)ds\,, \tag{5}$$

$$((\Gamma B)y)(x) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\omega} f\Big(\frac{\omega-x-s}{2}\Big) q\Big(\frac{x-s+\omega}{2}\Big) y(s)ds\,, \tag{6}$$

$$((B\Gamma B)y)(x) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\omega} f\Big(\frac{x-s}{2}\Big) q(x) q\Big(\frac{2\omega-x-s}{2}\Big) y(s)ds\,, \tag{7}$$

$y \in L_{2,\omega}$, $x \in [0,\omega]$, $f(t) = i(t-\omega/2)$, $t \in [0,\omega]$, $f \in L_{2,\omega}$. В таком случае матрицы $(b_{nj}), (c_{nj}), n, j \in \mathbb{N}$, соответственно операторов B и $B\Gamma B$ в рассматриваемом базисе $\{e_n\,; n \in \mathbb{Z}\}$ имеют вид

$$b_{nj} = q_{n+j}\,, \tag{8}$$

$$c_{nj} = \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{k\neq j} \frac{q_{n+k} q_{k+j}}{k-j}\,. \tag{9}$$

Используя метод подобных операторов, были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Если число $k \in \mathbb{Z}_+$ таково, что $\|\Gamma_k B\|_2 < 1$, (т.е. оператор $I + \Gamma_k B$ обратим), где $\Gamma_k B$ принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$ операторов Гильберта-Шмидта, и $\|\Gamma_k B\|_2$ — норма Гильберта-Шмидта, то оператор $L = A - B$ подобен оператору $\widetilde{L} = A - \widetilde{B}$, где*

$$\widetilde{B} = J_k B + (I + \Gamma_k B)^{-1}(B\Gamma_k B - (\Gamma_k B) J_k B)\,, \tag{10}$$

причем имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma_k B) = (I + \Gamma_k B)(A - \widetilde{B})\,.$$

Операторы $J_k B$, $\Gamma_k B$, $B\Gamma_k B$, $(\Gamma_k B)(J_k B)$, $\widetilde{B}$ являются операторами Гильберта-Шмидта из $\mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$. Оператор $\widetilde{B}$ из (10) представим в виде

$$\widetilde{B} = JB + B\Gamma B - (\Gamma B) JB + C\,, \tag{11}$$

где оператор C принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$.

Непосредственно из теоремы 1 получается, что имеет место

Теорема 2. *Возмущенный оператор L является оператором с компактной резольвентой и существует такая нумерация собственных значений,что $\sigma(L)$ представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)} \cup \{\sigma_n; n \geq m+1\} \ , \tag{12}$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество, а $\sigma_n, n \geq m+1$ определяются равенствами

$$\sigma_n = i\frac{2\pi n}{\omega} - q_{2n} - \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k}(q_{2n+k})^2 + \beta_n \, , \tag{13}$$

где β_n — суммируемая последовательность, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mid \beta_n \mid < \infty$.

В следующей теореме $\widetilde{P}_{(m)}, \widetilde{P}_n, n \geq m+1$ — спектральные проекторы Рисса, построенные по оператору L и множествам $\sigma_{(m)}, \sigma_n, n \geq m+1$, соответственно.

Теорема 3 [8]. *Имеет место равносходимость спектральных разложений операторов L и L^0 :*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 = 0 \, . \tag{14}$$

Литература

1. Хромов А.П. Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. – 2010. – 10:4. – С.17-22.
2. Розовский М.И. Механика уругонаследственных сфер / Сер.«Итоги науки». Упругость и пластичность / М.: Мир, 1967. – 340 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / М.: Наука, 1988. – 512 с.
4. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / Воронеж: Воронежский государственный университет, 1987. – 164 с.
5. Баскаков А.Г. Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – 50:4. – С.435-457.
6. Баскаков А.Г. Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов // Известия РАН. Сер.матем. – 1994. – 58:4. – С.3-32.
7. Баскаков А.Г. Метод подобных операторов и формулы и регуляризованных следов // Изв. ВУЗов. Сер. матем. – 1984. – №3. – С.3-12.
8. Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Известия РАН, серия математическая. – 2011. – 75:3. – С.4-28.
9. Romanova E.Yu. Similar operators method in spectral analysis of Dirac's operator in the lebesgue spaces // Spectral and evolution problems. – 2011. – 21; 2. – P.185-186.
10. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Спектральные операторы / М.: Мир, 1974. – 896 с.
11. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / М.: Мир, 1972. – 740 с.

SIMILAR OPERATORS METHOD AT SPECTRAL ANALYSIS OF DIFFERENTIAL OPERATOR WITH INVOLUTION

E.Yu. Romanova

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: vsu.romanova@gmail.com

Abstract. The differential operator L with involution defined by the differential expression $l(y) = y'(x) - q(x)y(\omega - x)$, $q \in L_2[0, \omega]$ and boundary conditions $y(0) = y(\omega)$ is studied. The method of similar operators is used to analyze the spectral properties of the operator. The asymptotic of spectrum and estimates of equiconvergence of spectral decomposition are obtained.

Key words: spectrum of operator, differential operator with involution, similar operators method, asymptotic of spectrum, spectral decomposition, equiconvergence of spectral decomposition.

MSC 35J62

УБЫВАНИЕ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

А.А. Хаджи

Башкирский государственный университет,
пр. Ленина, 37, Стерлитамак, 453103, Россия, e-mail: anna_5955@mail.ru

Аннотация. Рассматривается некоторый класс анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с младшими членами в неограниченной области. Для решений соответствующей задачи Дирихле установлена ограниченность и получены оценки сверху, характеризующие убывание на бесконечности неограниченных областей.

Ключевые слова: задача Дирихле, анизотропное эллиптическое уравнение, неограниченная область, убывание решения, ограниченность решения.

Введение. Пусть Ω — произвольная неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}_n$, $n \geq 2$. Для анизотропного квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u))_{x_\alpha} - a(\mathbf{x}, u) = \Phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega\,; \tag{1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{2}$$

Предполагается, что функции $a_\alpha(\mathbf{x}, \xi)$, $\alpha = \overline{1, n}$, измеримы по $\mathbf{x} \in \Omega$ для $\xi \in \mathbb{R}_n$. Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ и $1 < p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n$. Положим, что существуют положительные числа $\overline{a}$, $\widehat{a}$ такие, что для любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}_n$ при почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$ выполняются условия:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(a_\alpha(\mathbf{x}, \xi) - a_\alpha(\mathbf{x}, \eta)\right)(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geq \overline{a} \sum_{\alpha=1}^{n} |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^{p_\alpha}\,; \tag{3}$$

$$|a_\alpha(\mathbf{x}, \xi) - a_\alpha(\mathbf{x}, \eta)| \leq \widehat{a}|\xi_\alpha - \eta_\alpha| \left(|\xi_\alpha| + |\eta_\alpha|\right)^{p_\alpha - 2}, \qquad \alpha = \overline{1, n}\,; \tag{4}$$

$$a_\alpha(\mathbf{x}, 0) = 0, \qquad \alpha = \overline{1, n}\,. \tag{5}$$

Функция $a(\mathbf{x}, s)$ измерима по $\mathbf{x} \in \Omega$ для $s \in \mathbb{R}$. Пусть $k > 1$ и существуют числа $\overline{b}, \widehat{b} > 0$ такие, что для всех $s, t \in \mathbb{R}$ при почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$ выполняются условия:

$$(a(\mathbf{x}, s) - a(\mathbf{x}, t))(s - t) \geq \overline{b}|s - t|^k, \tag{6}$$

$$|a(\mathbf{x}, s) - a(\mathbf{x}, t)| \leq \widehat{b}|s - t|(|s| + |t|)^{k-2}, \tag{7}$$

$$a(\mathbf{x},0)=0\,. \tag{8}$$

Очевидно, что функции $a_\alpha(\mathbf{x},\xi)=|\xi_\alpha|^{p_\alpha-2}\xi_\alpha$, $\alpha=\overline{1,n}$, $a(\mathbf{x},s)=|s|^{k-2}s$, удовлетворяют условиям (3) – (8) и при этом уравнение (1) примет вид

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha-2}u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha}-|u|^{k-2}u=\Phi(\mathbf{x}).$$

Изучением поведения на бесконечности решений линейных эллиптических уравнений занимались О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян, Е.М. Ландис, Г.П. Панасенко, В.А. Кондратьев, И. Копачек, Д.М. Леквеишвили и другие (подробный обзор результатов приведен в [1]). Л.М. Кожевниковой, Р.Х. Каримовым [2] для некоторого класса квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка установлены оценки сверху решения задачи Дирихле в неограниченных областях. В работе [3] для решений анизотропных эллиптических уравнений без младших членов получены оценки сверху и доказана их точность в изотропном случае. И.М. Колодий [4] установил ограниченность решений некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений в ограниченных областях. При этом требование ограниченности области является существенным условием в его доказательстве. Основной результат этой статьи — оценка скорости убывания ограниченных обобщенных решений задачи (1), (2) в неограниченных областях Ω.

Теорема 1. *Пусть $u(\mathbf{x})$ — обобщенное решение задачи* (1), (2) *и выполнены условия* (3 -8), *а также*

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{p_\alpha}<1+\frac{n}{k^2}\,, \tag{9}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{p_\alpha}>1\,, \tag{10}$$

$$k^2-nk+n\geq 0\,. \tag{11}$$

Тогда

$$\operatorname{vrai}\max_{\Omega}|u(\mathbf{x})|\leq C\,, \tag{12}$$

где C — константа, зависящая от p_α, k, n и $\|\Phi\|_{L_{k/(k-1)}(\Omega)}$, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\widehat{b}$.

Далее, будем рассматривать неограниченные области расположенные вдоль выделенной оси Ox_s, $s\in\overline{2,n}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_s>0$ и сечение $\gamma_r=\{\mathbf{x}\in\Omega\mid x_s=r\}$ не пусто при любом $r>0$). Введем обозначения: $\Omega_a^b=\{\mathbf{x}\in\Omega\,\Big|\,a<x_s<b\}$, значения $a=0$, $b=\infty$ опускаются.

Определим геометрическую характеристику неограниченной области Ω :

$$\nu(r)=\inf\left\{\|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\gamma_r)}\,\Big|\,g(\mathbf{x})\in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{L_{p_1}(\gamma_r)}=1\right\},\quad r>0.$$

Предполагаются выполненными следующие условия:

$$\int\limits_1^\infty \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho=\infty\,, \tag{13}$$

$$\operatorname{supp}\Phi(\mathbf{x}) \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0. \tag{14}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия* (13), (14), *то существуют положительные числа* κ, $\mathcal{M}$ *такие, что для ограниченного обобщенного решения* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1), (2) *при* $r > 2R_0$ *справедлива оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(\Omega_r)} + \|u\|_{L_k(\Omega_r)} \le \mathcal{M} \exp\left(-\kappa \int_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho) d\rho\right), \tag{15}$$

где $\mathcal{M}$ *— константа, зависящая от* $\|\Phi\|$, R_0, p_s, n, $\overline{a}$, $\widehat{a}$, $\overline{b}$, $\widehat{b}$, κ *— константа, зависящая от* p_s, $\overline{a}$, $\widehat{a}$.

Рассмотрим область вращения

$$\Omega(f)[s] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \,|\, x_s > 0,\ |\mathbf{x}'_s| < f(x_s)\}, \quad s \in \overline{2, n},$$

$\mathbf{x}'_s = (x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_n)$ с положительной функцией $f(x_s) < \infty$. От функции f требуется только, чтобы множество $\Omega(f)[s]$ было областью. Для таких областей справедливо соотношение

$$\nu(r) = \frac{c}{f(r)}, \qquad r > 0,$$

и поэтому условие (13) принимает вид

$$\int_1^\infty \frac{d\rho}{f^{p_1/p_s}(\rho)} = \infty.$$

Следствием теоремы 2 для областей вращения является следующая оценка

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(\Omega_r)} + \|u\|_{L_k(\Omega_r)} \le \mathcal{M} \exp\left(-\widetilde{\kappa} \int_1^r \frac{d\rho}{f^{p_1/p_s}(\rho)} d\rho\right). \tag{16}$$

В области $\Omega(f_a)[s]$ с функцией $f_a(x) = x^a$, $0 \le a < p_1/p_s$, $x > 0$ для решения задачи (1), (2) оценка (16) принимает вид

$$\|u\|_{L_k(\Omega_r)} \le \mathcal{M}_a \exp\left(-\kappa_a r^{1-ap_1/p_s}\right).$$

1. Вспомогательные сведения. Положим: $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L_p(\Omega)$. Определим пространство $\overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \|v_{x_\alpha}\|_{p_\alpha} + \|v\|_k.$$

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1), (2) *с* $\Phi(\mathbf{x}) \in L_{k/(k-1)}(\Omega)$, $\alpha = \overline{1,n}$, *назовем функцию* $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$, *удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u) v_{x_\alpha} + (a(\mathbf{x}, u) + \Phi(\mathbf{x}))v \right\} d\mathbf{x} = 0 \tag{17}$$

для любой функции $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* $(3-8)$. *Тогда существует единственное обобщенное решение* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1), (2) *с функцией* $\Phi(\mathbf{x}) \in L_{k/(k-1)}(\Omega)$ *и справедлива оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} + \|u\|_k^k \le A \|\Phi\|_{k/(k-1)}^{k/(k-1)} , \tag{18}$$

где A *— константа, зависящая от* $\overline{a}$, $\overline{b}$, k.

□Доказательство существования проводится методом галеркинских приближений. ■

Лемма 1 (см. [5]- [7]). *Пусть* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ *и*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |u|^{q_\alpha} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} < \infty, \quad q_\alpha \ge 0, \quad p_\alpha \ge 1, \quad \alpha = \overline{1,n}\,.$$

Если выполнено условие (10), *то* $u(\mathbf{x}) \in L_Q(\Omega)$ *при*

$$Q = \sum_{\alpha=1}^{n} \Big(1 + q_\alpha/p_\alpha\Big) \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha - 1 \Big)^{-1}$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_Q \le B \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |u|^{q_\alpha} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \right)^{K/Q} , \tag{19}$$

где B *— константа, зависящая от* q_α, p_α, n *и*

$$K = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{p_\alpha} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{p_\alpha} - 1 \right)^{-1} .$$

Лемма 2 (см. [8]). *В области* Ω, *расположенной вдоль выделенной оси* Ox_s, *для функции* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ *при* $0 < a < b$ *справедливо неравенство*

$$\frac{1}{b} \|u\|_{p_s, \Omega_a^b} \le \frac{p_s}{p_s - 1} \|u_{x_s}\|_{p_s} . \tag{20}$$

2. Ограниченность решения.

Доказательство теоремы 1 проводится итеративным методом, который был предложен Ю. Мозером [4] и широко использовался в работах И.М. Колодия [4], С.Н. Кружкова [10], [11], Д. Серрина [5].

Для фиксированных чисел $q \geq 1$ и $l > 0$ определим функции:

$$F(|u|) = \begin{cases} |u|^q, & \text{если} \quad |u| \leq l, \\ ql^{q-1}|u| - (q-1)l^q\,, & \text{если} \quad l < |u|, \end{cases}$$

и

$$G(u) = F(|u|)F'(|u|)^{k-1}\operatorname{sign} u\,, \qquad -\infty < u < \infty\,.$$

Положим $v(\mathbf{x}) = G(u)$. Почти всюду на множестве $\{\mathbf{x} : |u| \neq l\}$ имеем

$$v_{x_\alpha} = G'(u)u_{x_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,n}\,,$$

где

$$G'(u) = \begin{cases} \dfrac{kq-k+1}{q}F'(|u|)^k\,, & \text{если} \quad |u| \leq l\,, \\ F'(|u|)^k\,, & \text{если} \quad l < |u|\,. \end{cases}$$

Используя

$$kF'(|u|)^k \geq G'(u) \geq F'(|u|)^k, \qquad |G(u)| \leq F(|u|)F'(|u|)^{k-1},$$

находим

$$L(u,v) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x},\nabla u)v_{x_\alpha} + (a(\mathbf{x},u) + \Phi(\mathbf{x}))v =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x},\nabla u)G'(u)u_{x_\alpha} + (a(\mathbf{x},u) + \Phi(\mathbf{x}))G(u) \geq$$

$$\geq \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x},\nabla u)u_{x_\alpha}F'(|u|)^k - (|a(\mathbf{x},u)| + |\Phi(\mathbf{x})|)F(|u|)F'(|u|)^{k-1}.$$

Пользуясь условиями (3), (5), (7), (8), выводим

$$L(u,v) \geq \bar{a}\sum_{\alpha=1}^{n} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}F'(|u|)^k - (\widehat{b}|u|^{k-1} + |\Phi|)F(|u|)F'(|u|)^{k-1}. \tag{21}$$

На множестве $\{\mathbf{x} : |u| \neq l\}$ неравенство (21) имеет место почти всюду. Поэтому можно проинтегрировать его по $\mathbf{x} \in \Omega$ и, учтя определение обобщенного решения, получим

$$\int\limits_{\Omega} F'(|u|)^k \sum_{\alpha=1}^{n} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \leq C_1 \int\limits_{\Omega} F(|u|)F'(|u|)^{k-1}(|u|^{k-1} + |\Phi|)d\mathbf{x}\,.$$

Учитывая, что $F(|u|) \le |u|^q$, $F'(|u|) \le q|u|^{q-1}$, выводим

$$\int\limits_{\Omega} F'(|u|)^k \sum_{\alpha=1}^{n} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \le C_1 q^{k-1} \int\limits_{\Omega} |u|^{q+(q-1)(k-1)} (|u|^{k-1} + |\Phi|) d\mathbf{x}\,. \tag{22}$$

Предположим, что правая часть (22) конечна. Устремим l к ∞ в левой части (22) и применим лемму Фату:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |u|^{k(q-1)} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \le \frac{C_1}{q} \int\limits_{\Omega} |u|^{qk-k+1} (|u|^{k-1} + |\Phi|) d\mathbf{x} = \frac{C_1}{q} I\,. \tag{23}$$

Применяя неравенство Гельдера и пользуясь оценкой (18), выводим:

$$I \le \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{(qk-k+1)k} d\mathbf{x} \right)^{1/k} \cdot \left(\|u\|_k^{k-1} + \|\Phi\|_{k/(k-1)} \right) \le$$

$$\le C_2 \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{(qk-k+1)k} d\mathbf{x} \right)^{1/k} \cdot \|\Phi\|_{k/(k-1)}\,.$$

Далее, для $q > 1$, применяя неравенство Гельдера и оценку (18), выводим

$$I \le C_2 \|\Phi\|_{k/(k-1)} \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{(q-1)k^3 q/(qk-1)} |u|^{(k^2-k)/(qk-1)} d\mathbf{x} \right)^{1/k} \le$$

$$\le C_2 \|\Phi\|_{k/(k-1)} \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{k^2 q} d\mathbf{x} \right)^{(q-1)/(qk-1)} \cdot \|u\|_k^{(k-1)/(qk-1)} \le \tag{24}$$

$$\le C_3 \|\Phi\|_{k/(k-1)}^{qk/(qk-1)} \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{k^2 q} d\mathbf{x} \right)^{(q-1)/(qk-1)}\,.$$

Отметим, что при $q = 1$

$$I \le C_2 \|u\|_k \cdot \|\Phi\|_{k/(k-1)} \le C_3 \|\Phi\|_{k/(k-1)}^{k/(k-1)}\,. \tag{25}$$

Таким образом, из (23), (25), (24) следует неравенство

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |u|^{k(q-1)} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \le C_4 \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{k^2 q} d\mathbf{x} \right)^{(q-1)/(qk-1)}, \tag{26}$$

причем в случае $q = 1$ второй множитель равен 1.

Положим $P = n\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha - 1\right)^{-1}$. Из леммы 1 для $q_\alpha = k(q-1)$, $\alpha = \overline{1,n}$, имеем

$$Q = \left(n + k(q-1)\sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha\right)\cdot\left(\sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha - 1\right)^{-1} = P + k(q-1)K\,.$$

Тогда, применяя (19), из (26) выводим

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u|^{P+k(q-1)K} d\mathbf{x}\right)^{1/K} \le C_5\left(\int\limits_{\Omega} |u|^{qk^2} d\mathbf{x}\right)^{(q-1)/(qk-1)}. \tag{27}$$

Пусть $h = k^2(q-1)+k\theta$, $\quad m = K/k$, $\quad \tau = P-K\theta = k^2-k\theta$, где $\theta = (P-k^2)/(K-k)$. Тогда $\tau + mh = P + Kk(q-1)$, $\tau + h = k^2 q$. Условие (11) влечет $1+n/k^2 \le 1+1/(k-1)$, из условий (9), (11) следует, что $m > 1$, $\theta > 0$.

Из (27) выводим

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u|^{\tau+mh} d\mathbf{x}\right)^{1/(mh)} \le C_5{}^{k/h}\left(\int\limits_{\Omega} |u|^{\tau+h} d\mathbf{x}\right)^{k(q-1)/(h(qk-1))}.$$

Положим $h = k\theta m^\nu$, $\quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u|^{\tau+k\theta m^{\nu+1}} d\mathbf{x}\right)^{1/(k\theta m^{\nu+1})} \le C_5{}^{1/(\theta m^\nu)}\left(\int\limits_{\Omega} |u|^{\tau+k\theta m^{\nu}} d\mathbf{x}\right)^{(q-1)/(\theta m^\nu(qk-1))}.$$

Введя обозначение

$$\Theta_\nu = \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{\tau+k\theta m^{\nu}} d\mathbf{x}\right)^{1/(k\theta m^\nu)},$$

получаем неравенство

$$\Theta_{\nu+1} \le C_5{}^{1/(m^\nu\theta)}\Theta_\nu{}^{k(q-1)/(qk-1)}, \quad \nu = \overline{0,\infty}\,.$$

Для $\nu = 0$ имеем $q = 1$, следовательно,

$$\Theta_1 \le C_5{}^{1/\theta},$$

далее, поскольку $k(q-1)/(qk-1) < 1$, то

$$\Theta_2 \le C_5{}^{1/(m\theta)}\left(C_5{}^{1/\theta}\right)^{k(q-1)/(qk-1)} \le C_5{}^{1/(m\theta)+1/\theta}$$

и т.д. В итоге, получим

$$\Theta_{\nu+1} \le C_5^{1/\theta \sum\limits_{i=0}^{\infty} 1/m^i} = C.$$

При $\nu \to \infty$ из последнего неравенства получаем оценку (12).

3. Убывание решения.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\theta(x)$, $x > 0$ — абсолютно непрерывная функция, равная единице при $x \ge r$, — нулю при $x \le R_0$, линейная при $x \in [R_0, 2R_0]$ и удовлетворяющая уравнению

$$\theta'(x) = \delta \nu^{p_1/p_s}(x)\theta(x), \quad x \in (2R_0, r), \tag{28}$$

(постоянную δ определим позднее). Решая это уравнение, находим, в частности, что

$$\theta'(x) = \frac{\theta(2R_0)}{R_0} = \frac{1}{R_0} \exp\left(-\delta \int\limits_{2R_0}^{r} \nu^{p_1/p_s}(\rho) d\rho\right), \quad x \in (R_0, 2R_0). \tag{29}$$

Для любой функции $v(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ из определения функции $\nu(\rho)$ следуют неравенства

$$\nu(\rho)\|v\|_{p_1,\gamma_\rho} \le \|v_{x_1}\|_{p_1,\gamma_\rho}, \qquad \rho > 0,$$

из которого выводим соотношение

$$\int\limits_{2R_0}^{r} \theta^{p_s}(\rho)\nu^{p_1}(\rho)\|v\|_{p_1,\gamma_\rho}^{p_1} d\rho \le \int\limits_{2R_0}^{r} \theta^{p_s}(\rho)\|v_{x_1}\|_{p_1,\gamma_\rho}^{p_1} d\rho. \tag{30}$$

Применяя (30) для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$ при $s \in \overline{2,n}$, выводим

$$\begin{aligned} &\int\limits_{2R_0}^{r} \nu^{p_1}(\rho)\theta^{p_s}(\rho)\|v\|_{p_s,\gamma_\rho}^{p_s} d\rho \le \\ &\qquad \le \max_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^{p_s-p_1} \int\limits_{2R_0}^{r} \nu^{p_1}(\rho)\theta^{p_s}(\rho)\|v\|_{p_1,\gamma_\rho}^{p_1} d\rho \le \\ &\qquad\qquad \le \max_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^{p_s-p_1} \int\limits_{2R_0}^{r} \theta^{p_s}(\rho)\|v_{x_1}\|_{p_1,\gamma_\rho}^{p_1} d\rho\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Отметим, что неравенства (31) справедливы для любой ограниченной функции $v \in \overset{\circ}{W}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$.

Пусть $\xi(\mathbf{x})$ липшицева неотрицательная срезающая функция. Положив в (17) $v = u\xi$, получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u)(u\xi)_{x_\alpha} + (a(\mathbf{x}, u) + \Phi(\mathbf{x}))(u\xi) \right\} d\mathbf{x} = 0\,.$$

Возьмем $\xi(x_s) = \theta^{p_s}(x_s)$. Далее, применяя (3)—(6), (8), (14), получаем

$$\overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x} + \overline{b}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u|^k d\mathbf{x} \le \\ \le \widehat{a}p_s\int\limits_{\Omega}|u||u_{x_s}|^{p_s-1}\theta^{p_s-1}(x_s)\theta'(x_s)d\mathbf{x} \equiv J. \tag{32}$$

Используя неравенство Юнга выводим

$$J \le \varepsilon(p_s-1)\widehat{a}\int\limits_{\Omega}|u_{x_s}|^{p_s}\theta^{p_s}d\mathbf{x} + \frac{\widehat{a}}{\varepsilon^{p_s-1}}\int\limits_{\Omega}|u|^{p_s}(\theta'(x_s))^{p_s}d\mathbf{x}\,. \tag{33}$$

Выберем $\varepsilon = \dfrac{\overline{a}}{2\widehat{a}}\cdot\dfrac{1}{p_s-1}$. Соединяя (32), (33), выводим неравенство

$$\frac{\overline{a}}{2}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u_{x_s}|^{p_s}d\mathbf{x} + \overline{a}\sum_{\alpha\ne s,\alpha=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x} + \overline{b}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u|^k d\mathbf{x} \le \\ \le C_1\int\limits_{\Omega}|u|^{p_s}(\theta'(x_s))^{p_s}d\mathbf{x}. \tag{34}$$

Пользуясь (28) и (29), нетрудно привести (34) к виду

$$\frac{\overline{a}}{2}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u_{x_s}|^{p_s}d\mathbf{x} + \overline{a}\sum_{\alpha\ne s,\alpha=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x} + \overline{b}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u|^k d\mathbf{x} \le \\ \le C_1\delta^{p_s}\int\limits_{\Omega^r_{2R_0}}|u|^{p_s}\nu^{p_1}(x_s)\theta^{p_s}(x_s)d\mathbf{x} + \\ + C_1\frac{1}{{R_0}^{p_s}}\exp\left(-\delta p_s\int\limits_{2R_0}^{r}\nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right)\int\limits_{\Omega^{2R_0}_{R_0}}|u|^{p_s}d\mathbf{x} = J_1 + J_2\,. \tag{35}$$

Применяя (31), получаем

$$J_1 \le C_2\delta^{p_s}\int\limits_{\Omega^r_{2R_0}}|u_{x_1}|^{p_1}\theta^{p_s}d\mathbf{x}\,. \tag{36}$$

Используя (20), (18), выводим

$$J_2 \le C_3\exp\left(-\delta p_s\int\limits_{2R_0}^{r}\nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right). \tag{37}$$

Выбирая $\delta = \left(\dfrac{\overline{a}}{2C_2}\right)^{1/p_s}$ и соединяя (35)—(37), выводим

$$\frac{\overline{a}}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\|u_{x_\alpha}\|^{p_\alpha}_{p_\alpha,\Omega_r} + \overline{b}\|u\|^{k}_{k,\Omega_r} \le C_4 \exp\left(-C_5\int\limits_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right).$$

Неравенство (15) доказано.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Кожевниковой Л.М. за помощь в подготовке статьи.

Литература

1. Кожевникова Л.М. Поведение на бесконечности решений псевдодифференциальных эллиптических уравнений в неограниченных областях // Матем. сб. – 2008. – 199(2). – С.61-94.
2. Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М. Поведение на бесконечности решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка а неограниченных областях // Уфимск. матем. журн. – 2010. – 2(2). – С.53-66.
3. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. Решения анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях // Вестник СамГТУ. – 2013. – 30(1). – С.90-96.
4. Колодий И.М. Об ограниченности обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений // Вестник МГУ. – 1970. – 5. – С.45-52.
5. Дубинский Ю.А. Некоторые интегральные неравенства и разрешимость вырождающихся квазилинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений // Матем. сб. – 1964. – 3. – С.458-480.
6. Nirenberg L. On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola norm. super. Pisa. – 1959. – 13. – С.115-162.
7. Лу Вень Туан. К теоремам вложения для пространств функций с частными прозводными, суммируемыми с различными степенями // Вестн. ЛГУ. – 1961. – 7. – С.23-27.
8. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью // Уфимск. матем. журн. – 2011. – 3(4). – С.64-85.
9. Moser J. A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // Communs. Pure and Appl. Math. – 1960. – 3. – С.457-468.
10. Кружков С.Н. О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений // ДАН СССР. – 1963. – 3. – С.470-473.
11. Кружков С.Н. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб. – 1968. – 77. – С.229-334.
12. Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear equatons // Acta math. – 1964. – 3(4). – С.247-302.

SOLUTIONS DECREASE OF ANISOTROPIC ELLIPTIC EQUATIONS WITH THE YOUNGER TERMS IN UNBOUNDED DOMAINS

A.A. Khadzhi

Bashkir State University,
Lenin Av., 37, Sterlitamak, 453103, Russia, e-mail: anna_5955@mail.ru

Abstract. It is studied the class of anisotropic elliptic equations of second order with younger terms in unbounded domains. For solutions of the corresponding Dirichlet problem are set some restrictions and estimates from above that characterize its decrease at infinity in unbounded domains.

Key words: Dirichlet's problem, anisotropic elliptic equation, unbounded domain, solutions decrease, restrictions.

MSC 35J10,

ОПЕРАТОРЫ ШРЕДИНГЕРА НА РАЗВЕТВЛЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

М.Х. Нуман Эльшейх

Российский Университет Дружбы Народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198, Россия, mohnuman@hotmail.com

Аннотация. Рассматриваются операторы Шредингера на разветвленных многообразиях переменной размерности. Получено описание множества самосопряженных расширений симметрического оператора Шредингера, изначально заданного на гладких финитных функциях, носитель которых не содержит точек ветвления многообразия.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, разветвленные многообразия, самосопряженные расширения.

1. Введение. Дифференциальные операторы на разветвленных многообразиях имеют применения к описанию ряда процессов в квантовой механике, физике полупроводников и биологии. Основы теории дифференциальных уравнений на графах изложены в монографии [3], в которой приведен ряд примеров физических задач, приводящих к исследованию дифференциальных операторов на графах. В работах [10, 4, 9] изучены спектральные свойства таких операторов и исследованы динамические свойства эволюции, определяемых уравнением Шредингера на графе. В работах [1, 6, 8, 11] исследуется множество самосопряженных расширений оператора Шредингера, заданного изначально на пространстве финитных гладких функций, не содержащих точек ветвления графа ([6, 8, 11]) или точек смены типа оператора (см. [1]). В статье [8] найдены аппроксимации формулами Фейнмана унитарных полугрупп, задаваемых некоторыми из самосопряженных расширений. В настоящей статье рассматриваются операторы Шредингера на разветвленных многообразиях, гладкие компоненты которых могут иметь различные размерности. Работа является продолжением исследований [8], в которых изучался граф с конечным множеством рёбер, и работы [13], в которой изучались операторы Шредингера на одномерных разветвленных многообразиях.

Актуальность рассматриваемой задачи состоит в том, что в последнее время значительно усилился интерес к описанию динамики частиц на графах, дендритах и иных разветвленных многообразиях со стороны математической физики и квантовой механики. С математической точки зрения операция дифференцирования функции, однозначно определенная для функций, заданных на области или на гладком многообразии, нуждается в доопределении для функций, заданных на многообразиях, содержащих точки ветвления. Цель настоящего исследования – определить действие оператора Шредингера на функциях, заданных на разветвленном многобразии, множество точек ветвления которого, называемое в дальнейшем многообразием ветвления, представляет собой объединение конечного множества гладких поверхностей различной размерности. Для этой цели мы зададим оператор Шредингера $\mathbf{L}_0$ на пространстве $C^\infty_{0,0}$ финитных

и бесконечно дифференцируемых функций, носители которых не содержат точек ветвления и граничных точек многообразия. Оператором Шредингера $\mathbf{L}$ на разветвленном многообразии будем называть самосопряженное расширение оператора $\mathbf{L}_0$. В настоящей работе дано описание множества всех операторов Шредингера на разветвленном многообразии в терминах условий на множество предельных значений на многообразии ветвления функций из области определения оператора $\mathbf{L}$.

2. Операторы Шрёдингера на разветвленном многообразии. Определим разветвленное многообразие Γ как объединение $\Gamma = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{n} \Gamma_\alpha$, где Γ_α при каждом $\alpha \in \{1, 2, \ldots, n\}$ представляет собой d_α-мерную ограниченную область в пространстве R^{d_α} с $(d_\alpha - 1)$ мерной гладкой границей $\eta_\alpha \equiv \partial\Gamma_\alpha$. Граница $\eta = \partial\Gamma$ многообразия Γ представляет собой объединение границ областей $\eta = \bigcup_{\alpha=1}^{n} \eta_\alpha$.

Точка Q называется точкой ветвления многообразия Γ, если она является граничной точкой для не менее чем двух различных областей Γ_α, Γ_β при $\alpha \neq \beta$.

На Γ задается борелевская мера, определяемая требованием, чтобы её сужение на каждую из областей Γ_α совпадало со стандартной мерой Лебега пространства R^{d_α}. Тогда допустимо рассмотрение пространства квадратично интегрируемых комплекснозначных функций на Γ, определяемых посредством равенства $L_2(\Gamma) = \bigoplus L_2(\Gamma_\alpha)$.

Пусть $C_0^\infty(\Gamma)$ — векторное пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на Γ с компактными носителями, не содержащими точек ветвления разветвленного многообразия Γ. Обозначим посредством $\mathbf{L}_0 = \bigoplus \mathbf{L}_0^\alpha$ – линейный оператор, определяемый на линейном пространстве $D(\mathbf{L}_0) = C_0^\infty(\Gamma)$ с равенством $\mathbf{L}_0 u = \{\oplus \mathbf{L}_0^\alpha u_\alpha\}$,

$$\mathbf{L}_0^\alpha u_\alpha = \frac{1}{m_\alpha} \Delta_\alpha u_\alpha + i\big(\overrightarrow{B_\alpha}(x), \nabla u_\alpha\big) + i \operatorname{div}\big(\overrightarrow{B_\alpha}(x)\, u_\alpha\big) + C_\alpha(x) u_\alpha \,. \tag{2.1}$$

Здесь $\{u_\alpha, \alpha = 1, ..., n\}$ — сужения функции u на области Γ_α, $u \in C_0^\infty(\Gamma)$ и $m_\alpha \geq m_0 > 0$ $\forall \alpha = 1, ..., n$.

Мы будем предполагать, дополнительно, что имеет место:

H. $\overrightarrow{B}_\alpha(x) \in C^1(\Gamma_\alpha, R^{d_\alpha}) \bigcap C(\overline{\Gamma}_\alpha, R^{d_\alpha})$, $C_\alpha(x) \in C(\overline{\Gamma}_\alpha, R)$.

Мы будем изучать расширения операторов $\mathbf{L}_0$ с пространства $C_0^\infty(\Gamma)$ на $L_2(\Gamma)$. Важность изучения таких расширений связана, в частности, с тем, что когда $\overrightarrow{B}$, C – вещественнозначные, ограниченные и непрерывные всюду за исключением точек ветвлении функции на Γ, $m_\alpha = m$, каждое симметрическое расширение является линейным самосопряженным оператором $\mathbf{L}$ в пространстве $L_2(\Gamma)$, который представляет собой гамильтониан квантовой частицы с массой m_α во внешних электрическом и магнитном полях $\{C, \overrightarrow{B}\}$ и оператор $\mathbf{L}$ определяет динамику частицы на разветвленном многообразии посредством решения задачи Коши для уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathbf{L} u(x,t)\,, \tag{2.2}$$

с начальным условием

$$u(x, +0) = u_0(x), \quad x \in \Gamma\,. \tag{2.3}$$

Иными словами, все самосопряженные расширения оператора $\mathbf{L}_0$ могут представлять генераторы унитарных групп.

Оператор $\mathbf{L}_0$ с областью определения $D(\mathbf{L}_0) = C_0^\infty(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$, плотно определен и симметричен. Областью определения $D(\mathbf{L}_0^*)$ сопряженного оператора $\mathbf{L}_0^*$ является линейное подпространство $D(\mathbf{L}_0^*) = \bigoplus\limits_{\alpha=1}^{n} W_2^2(\Gamma_\alpha) := W_2^2(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$.

Пусть многообразие Γ состоит из m полупрямых, k конечных интервалов и $N-(m+k)$ областей с размерностью, большей 1. В случае 1-мерной области Γ_α граничное значение $u_\alpha|_{\eta_\alpha}$ является набором комплексных чисел на границе η_α, представляющей собой одну или две точки. В случае $d_\alpha \geq 2$ граничное значение $u_\alpha|_{\eta_\alpha}$ является элементом пространстве $W_2^{\frac{3}{2}}(\eta_\alpha)$. Согласно теореме о следах, $u|_\eta \in W_2^{\frac{3}{2}}(\eta) = \bigoplus\limits_{\alpha=1}^{N} W_2^{\frac{3}{2}}(\eta_\alpha)$ (см. [12]), где через $u|_\eta$ обозначена совокупность $\left(u|_{\eta_1} \ \dots \ u|_{\eta_N}\right)^T$ предельных значений функции u на границе η. Аналогично, предельное значение производной $\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial n_\alpha}$ сужения u_α по направлению внешней нормали n_α к границе η_α в случае полупрямой η_α представляет собой элемент пространства $\mathbb{C}$, в случае же ограниченного интервала – элемент пространства $\mathbb{C}^2$, а в случае области размерности $d_\alpha \geq 2$ – элемент пространства $W_2^{1/2}(\eta_\alpha)$.

Обозначим набор граничных значений нормальной производной посредством $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\eta \equiv \left(\dfrac{\partial u}{\partial n_1}\Big|_{\eta_1}, \ \dots, \ \dfrac{\partial u}{\partial n_N}\Big|_{\eta_N}\right)^T$, где n_α — вектор внешней относительно Γ_α нормали к η_α, $\alpha = 1, \dots, N$. Введем гильбертово пространство

$$h = L_2(\eta) = \bigoplus_{\alpha=1}^{N} L_2(\eta_\alpha) = \mathbb{C}^{m+2k} \bigoplus_{\alpha=m+k+1}^{N} L_2(\eta_\alpha)\,.$$

Определим, далее, пространство граничных значений $G = h^{\frac{3}{2}} \oplus h^{\frac{1}{2}}$, где

$$h^{\frac{3}{2}} = \mathbb{C}^{m+2k} \bigoplus_{\alpha=m+k+1}^{N} W_2^{\frac{3}{2}}(\eta_\alpha)$$

и, аналогично,

$$h^{\frac{1}{2}} = \mathbb{C}^{m+2k} \bigoplus_{\alpha=m+k+1}^{N} W_2^{\frac{1}{2}}(\eta_\alpha)\,.$$

Таким образом, граничное значение $u|_\eta$ функции $u \in W_2^2(\Gamma)$ является элементом пространства $h^{\frac{3}{2}}$, а граничное значение $\frac{\partial u}{\partial n}|_\eta$ ее нормальной производной – элементом пространства $h^{\frac{1}{2}}$.

Введем в пространстве h операторы M и $\mathcal{B}$. Оператор M действует на каждый элемент $v \in h$ как оператор умножения на функцию

$$\mu(\xi) = m_\alpha^{-1}\,, \quad \text{если } \xi \in \eta_\alpha\,,\ \alpha \in \overline{1,n}\,.$$

А оператор $\mathcal{B}$ действует на каждый элемент $v \in h$ как оператор умножения на функцию

$$\beta(\xi) = \big(\overrightarrow{b}_\alpha(\xi), \overrightarrow{n}_\alpha(\xi)\big)\,, \quad \text{если } \xi \in \eta_\alpha\,,\ \alpha \in \overline{1,n}\,,$$

где через $\overrightarrow{b}_\alpha = \overrightarrow{B}_\alpha|_{\eta_\alpha}$ обозначено предельные значения вектор-функции $\overrightarrow{B}_\alpha$ на границе η_α.

Теорема. *Пусть выполнено предположение* **H** *о функциях* $\overrightarrow{B}$, C *и* $m = 1$, $\overrightarrow{b}_\alpha = 0$ *для любого* $\alpha \in \overline{1,n}$; A *– линейный оператор в пространстве* h *с плотной областью определения* $h^{\frac{3}{2}}$, *значения которого лежат в линейном многообразии* $h^{\frac{1}{2}}$; D_A *– линейное многообразие функций* $u \in W_2^2(\Gamma)$, *граничные значения которых связаны с граничными значениями их производных по направлению внешней нормали соотношением*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\eta = Au|_\eta\,.$$

Тогда, для самосопряженности оператора $\mathbf{L}_A = \big(\mathbf{L}_0^*\big)|_{D_A}$, *необходимо и достаточно выполнения равенства* $A = A^*$.

□ Так как $m = 1$, $\overrightarrow{b}_\alpha = 0$ для любого α, то из условий $u \in D(\mathbf{L}_A)$ и $v \in D(\mathbf{L}_0^*)$ следует, что справедливо равенство

$$\big(\mathbf{L}_A u, v\big)_h - \Big(u, \mathbf{L}_0^* v\Big)_h = \Big(\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\eta, v|_\eta\Big)_h - \Big(u|_\eta, \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\eta\Big)_h\,.$$

Следовательно

$$\Big(\mathbf{L}u, v\Big)_h - \Big(u, \mathbf{L}_0^* v\Big)_h = \Big(u|_\eta, A^* v|_\eta - \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\eta\Big)_h\,.$$

Следы $u|_\eta$ принимают произвольные значения, и поэтому равенство $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\eta = A^* v|_\eta$ необходимо и достаточно для включения $v \in D(\mathbf{L}_A^*)$. Поскольку область определения оператора $\mathbf{L}_A$ определяется уравнением $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\eta = Au|_\eta$, то $\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_A^*$. Отсюда следует, что $A = A^*$. ■

Следствие. *Пусть выполнено предположение* **H** *о функциях* $\overrightarrow{B}$, C; A *– линейный оператор в пространстве* h *с плотной областью определения* $h^{\frac{3}{2}}$, *значения которого лежат в линейном многообразии* $h^{\frac{1}{2}}$; D_A *— линейное многообразие функций* $u \in W_2^2(\Gamma)$, *граничные значения которых связаны с граничными значениями их производных по направлению внешней нормали соотношением*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\eta = Au|_\eta\,.$$

Тогда для самосопряженности оператора $\mathbf{L}_A = \left(\mathbf{L}_0^*\right)|_{D_A}$ *необходимо и достаточно выполнения равенства* $MA = A^*M - 2i\mathcal{B}$.

□ Поскольку выполняется предположение **H**, то из условий $u \in D(\mathbf{L}_A)$ и $v \in D(\mathbf{L}_0^*)$ следует, что справедливо равенство

$$\left(\mathbf{L}_A u, v\right)_h - \left(u, \mathbf{L}_0^* v\right)_h = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\eta, Mv|_\eta\right)_h - \left(u|_\eta, M\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\eta\right)_h + 2i\left(u|_\eta, \mathcal{B}v|_\eta\right)_h.$$

Следовательно

$$\left(\mathbf{L}u, v\right)_h - \left(u, \mathbf{L}_0^* v\right)_h = \left(u|_\eta, A^*Mv|_\eta - M\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\eta - 2i\mathcal{B}v|_\eta\right)_h.$$

Следы $u|_\eta$ принимают произвольные значения, и поэтому равенство

$$M\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\eta = \left(A^*M - 2i\mathcal{B}\right)v|_\eta$$

необходимо и достаточно для включения $v \in D(\mathbf{L}_A^*)$. Поскольку область определения оператора $\mathbf{L}_A$ определяется уравнением $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\eta = Au|_\eta$, то $\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_A^*$. Отсюда следует, что $MA = A^*M - 2i\mathcal{B}$. ■

Заключение. Полученное в работе описание множества всех операторов Шредингера на каждом разветвленном многообразии, определяемых как самосопряженные расширения оператора, изначально заданного на гладких финитных функциях с носителями, не соодержащими точек ветвления многообразия дает описание различных возможностей определения оператора Шредингера на пространстве функций, квадратично интегрируемых на этом разветвленном многообразии. Описание области определения каждого из самосопряженных расширений дается в терминах линейных соотношений, которым удовлетворяют предельные значения функции из области определения оператора и ее производной в точках ветвления и граничных точках рассматриваемого многообразия. заметим, что каждому из операторов Шредингера соответствует марковский процесс, поведение которого в окрестности точки ветвления многообразия определяется выбором области определения оператора Шредингера. Полученные результаты расширяют область исследований работы [11], в которой дано описание самосопряженных расширений на графе с одной вершиной и двумя ребрами, на случай графов с произвольным числом ребер и разветвленного многообразия с гладкими компонентами различных размерностей.

Литература

1. Амосов Г.Г., Сакбаев В.Ж. О самосопряженных расширениях оператора Шредингера с вырождением на на двух полупрямых и определяемых ими марковских коциклах // Матем. заметки. – 2004. – 76;3. – С.335-343.
2. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория / М.: Изд. ин. лит., 1962.

3. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / М.: Физматлит, 2004.
4. Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О некоторых качественных свойствах уравнений на одномерном клеточном комплексе // Матем. заметки. – 1996. – 59;6. – С.777-780.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. т.1. Функциональный анализ / М.: Мир, 1977.
6. Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Динамика квантовой частицы с разрывной зависимостью массы от положения // Доклады РАН. – 2010. – 433:3. – С.314-317.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / М.: Мир, 1972.
8. Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Диффузия и квантовая динамика на графах // Доклады РАН. – 2013. – 451, №2. – С.141-145.
9. Толченников А.А., Чернышев В.Л., Шафаревич А.И. Асимптотические свойства и классические динамические системы в квантовых задачах на сингулярных пространствах // Нелинейная динамика. – 2010. – 6;3. – С.623-638.
10. Чернышев В.Л., Шафаревич А.И. Квазиклассический спектр оператора Шредингера на геометрическом графе // Матем. заметки. – 2007. – 82;4. – С.606-620.
11. Gadella M., Kuru S., Negro J. Self-adjoint Hamiltonians with a mass jump: General matching conditions // Phys. Letters. – 2007. – 362, №4. – P.265-268.
12. Яковлев Г.Н. О следах функций из пространства W_p^l на кусочно-гладких поверхностях // Матем. сб. – 1967. – 74(116):4. – С.526-543.
13. Нуман Эльшейх М.Х., Сакбаев В.Ж. Операторы Лапласа для уравнения Шредингера на графах // Труды МФТИ. – 2014. – 6.

SCHRÖDINGER OPERATORS ON BRANCHED MANIFOLDS

M.H. Numan Elsheikh

Peoples' Friendship University,
Miklukho-Maklaya St., 6, Moscow, 117198, Russia, mohnuman@hotmail.com

Abstract. Schrödinger's operators on branched manifolds with variable dimension are studied. In particular, the description of the set of self-adjoint extensions of symmetric Schrödinger operator initially defined on the set of smooth finite functions whose support does not contain branch points of the manifold are obtained.

Key words: Schrödinger's equation, branched manifolds, self-adjoint extensions.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MSC 76W05

ШЕСТИСТРУЙНАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЕОДИНАМО

Г.М. Водинчар, Л.К. Фещенко

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, ул. Мирная, 7, Паратунка, Елизово, 684034, Россия, e-mail: ikir@ikir.ru

Аннотация. Построена кинематическая модель геодинамо, структура полей скоростей которой согласована с данными о splitting-функциях собственных колебаний в жидком ядре Земли. В модели используются три компоненты скорости, являющиеся аппроксимациями мод собственных колебаний жидкого ядра, две из которых определяют 6-струйную конвекцию в ядре Земли, а третья соответствует опережающему вращению твердого ядра.

Ключевые слова: геодинамо, ядро Земли, оператор Пуанкаре.

Введение. Процесс формирования магнитных полей планет и звезд на качественном уровне успешно объясняется теорией гидромагнитного динамо. Разработанные модели конвекции в жидких ядрах планет земного типа, газовых гигантах, конвективных зонах звезд позволяют получать течения, которые могут формировать магнитные поля, близкие по своей топологии к наблюдаемым [1]- [4].

Возможности вычислительных систем не позволяют вести прямое численное моделирование трехмерных задач планетарного динамо на геологических временных масштабах. Отметим, что известные теоремы запрета определяют принципиальную трехмерность задачи динамо [2]. В связи с этим численные модели либо воспроизводят МГД-течения с хорошим разрешением по пространству на относительно небольших временных масштабах, порядка десятков тысяч лет, либо дают возможность просчитывать длительную эволюцию только крупномасштабных пространственных структур. Для моделей первого типа геометрическая структура течений просчитывается в процессе моделирования, а для моделей второго типа геометрическую крупномасштабную структуру конвекции надо задавать. Возникает ключевой вопрос о том, какова реальная крупномасштабная структура конвекции.

Косвенную информацию об этой структуре можно получить из данных о неоднородностях в плотности жидкого ядра. В статье [5] были проанализированы результаты ряда работ по splitting-функциям собственных колебаний Земли и получены срезы распределения плотности на различных глубинах. Вариации плотности соответствующие splitting-функции ${}_{11}S_4$, имеющей максимум на глубинах жидкого ядра, представлены на рис. 1. Здесь прослеживается четкая 12-зонная шахматная структура, которой в первом приближении соответствует тессеральная сферическая гармоника Y_4^2. Автором [5]

Работа выполнена при поддержке ДВО РАН (проект 10-III-B-07-158) и Минобрнауки России по Программе стратегического развития КамГУ им. Витуса Беринга на 2012-2016 гг.

была высказана гипотеза о соответствующей структуре конвекции, где в шести областях материал ядра «тонет», а в шести – «всплывает». Возможность существования подобной конвективной структуры и генерации в ней магнитного поля дипольного типа рассматривалась в работах авторов [6]- [7]. Были найдены квазистационарные решения в которых величина характерной скорости конвекции составляла $\sim 10^{-4}$ м/с, совпадая с известными оценками для ядра Земли [8]. При этом величина дипольной составляющей модельного поля в пересчете на гауссовский гармонический коэффициент была $\sim 10^5$ нТл, при реальном значении в $3 \cdot 10^4$ нТл [9].

Описание геометрии течений только гармоникой Y_4^2 не учитывает некоторую «скошенность» распределения на рис. 1. В настоящей работе исследуется более точное воспроизведение наблюдаемых конвективных структур в рамках кинематической модели.

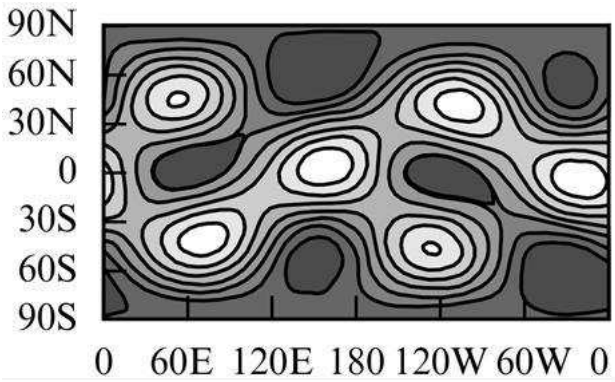

Рис. 1. Портрет splitting-функции для моды ${}_{11}S_4$ собственных колебаний Земли из работы [5]. Черный цвет – плотность вещества на 0.2% выше средней, белый – плотность на 0.2% ниже средней. По горизонтальной оси отмечены градусы долготы, по вертикальной – широты.

1. Выбор структуры течений. Изображенное на рис. 1 распределение раскладывалась по сферическим гармоникам Y_n^m до $n = 6$. Вычислялись коэффициенты разложения $c_{n,\pm m}$ и амплитуды $A_{n,m} = \sqrt{c_{n,m}^2 + c_{n,-m}^2}$. В таблице 1 приведены результаты разложения, упорядоченные по убыванию амплитуд. Ряд гармоник оборван по признаку резкого падения амплитуды $A_{4,4}$.

Таблица 1

n	m	$c_{n,m}$	$c_{n,-m}$	$A_{n,m}$
4	2	0.059	−0.073	0.094
2	0	0.042	–	0.042
4	0	0.032	–	0.03
4	3	0.011	−0.02	0.023
2	2	−0.016	0.006	0.017
4	1	−0.01	−0.013	0.016
2	1	−0.003	0.016	0.016
4	4	−0.003	−0.001	0.003

Для анализа содержания таблицы 1 рассмотрим сначала представление поля скорости в задаче геодинамо, использовавшееся авторами в [7]. Все построения ведутся в геоцентрической системе координат, где жидкому ядру соответствует сферическая оболочка $r_1 \leq r \leq r_2$, а за единицу длины принята толщина жидкого ядра. Тогда $r_1 = 0.664$ и $r_2 = 1.664$.

Материал ядра считается несжимаемым и на границах контактирующим с твердым телом. Тогда $\nabla \mathbf{v} = 0$ и скорость нулевая на границах.

Соленоидальное поле скорости $\mathbf{v}$ раскладывается в сумму тороидальной $\mathbf{v}^T$ и полоидальной $\mathbf{v}^S$ составляющих, для которых в свою очередь используется разложения

$$\mathbf{v}^T = \sum_{k,n,m} \beta^T_{k,n,m}(t)\, \mathbf{v}^T_{k,n,m}(r,\theta,\varphi), \qquad \mathbf{v}^S = \sum_{k,n,m} \beta^S_{k,n,m}(t)\, \mathbf{v}^S_{k,n,m}(r,\theta,\varphi), \tag{1}$$

где θ и φ – коширота и долгота, соответственно.

Базисные поля $\mathbf{v}^T_{k,n,m}(r,\theta,\varphi)$ и $\mathbf{v}^T_{k,n,m}(r,\theta,\varphi)$ являются собственными модами затухания для уравнения Навье-Стокса, т.е. являются решениями спектральной задачи

$$\mu \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v} - \nabla p = 0$$

в пространстве соленоидальных полей, нулевых при $r = r_{1,2}$. В равносильной формулировке эта задача распадается на задачи

$$\mu \mathbf{v}^T + \Delta \mathbf{v}^T = 0, \qquad \mu \mathrm{rot} \mathbf{v}^S + \mathrm{rot} \Delta \mathbf{v}^S = 0 \tag{2}$$

в подпространствах тороидальных и полоидальных полей. Индексы k, n, m соответствуют дискретизации спектра этих задач по переменным r, θ и φ и определяют разномасштабные структуры в поле скорости по этим переменным.

Сами базисные поля имеют вид

$$\mathbf{v}^T_{k,n,m} = \mathrm{rot}\left(R^T_{kn}(r) Y^m_n(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right), \qquad \mathbf{v}^S_{k,n,m} = \mathrm{rotrot}\left(R^S_{kn}(r) Y^m_n(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right), \tag{3}$$

где функции $R^T_{kn}(r)$ и $R^S_{kn}(r)$ определяются из задач (2), а собственные значения μ^T_{kn} и μ^S_{kn} входят в выражения для этих функций. Уравнения на собственные значения и схема расчета функций $R^T_{kn}(r)$ и $R^S_{kn}(r)$ описаны в [7].

Система собственных функций $\left\{\mathbf{v}^T_{k,n,m}, \mathbf{v}^S_{k,n,m}\right\}$ обладает свойством ортогональности и полноты относительно скалярного произведения

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} d\mathbf{r}\,, \tag{4}$$

где интегрирование ведется по объему ядра.

Наблюдаемая в splitting-функциях неоднородность в распределении плотности по сфере соответствует сферическому распределению вертикального переноса вещества ядра, т.е. радиальной составляющей поля скорости. Тороидальные поля не имеют радиальной составляющей и не определяют конвекцию как таковую. Собственно они возникают в конвекции в результате кориолисова сноса полоидальной части скорости. Соответственно, тороидальные компоненты нельзя увидеть в рис. 1. Радиальная проекция полоидальной моды $\mathbf{v}^S_{k,n,m}$ имеет вид $\dfrac{n(n+1)}{r} R_{kn}(r) Y^m_n(\theta,\varphi)$, что позволяет связать данные табл. 1 с вкладом различных $\mathbf{v}^S_{k,n,m}$ в поле скорости.

Учтем также следующие обстоятельства. В классе соленоидальных полей линейные оболочки H^m собственных полей $\mathbf{v}^T_{k,n,\pm m}, \mathbf{v}^S_{k,n,\pm m}$ устойчивы относительно кориолисова сноса [10]. Точнее говоря, вращение приводит к расщеплению, например, полоидальной моды $\mathbf{v}^S_{k,n,m}$ на бесконечную цепочку чередующихся полоидальных и тороидальных мод вида $\mathbf{v}^S_{l,n,-m}$, $\mathbf{v}^T_{l,n\pm1,\pm m}$, $\mathbf{v}^S_{l,n\pm2,\pm m}$, $\mathbf{v}^T_{l,n\pm3,\pm m}$, ... [7]. Аналогична схема расщепления тороидальных мод.

В связи с этим в табл. 1 строки с индексами (4,2) и (2,2) соответствуют одной устойчивой группе мод. Аналогично можно сгруппировать (2,0) и (4,0), (2,1) и (4,1).

На рис. 2 приведены построенные по данным табл. 1 распределения с накоплением числа используемых групп мод. Видно, что различия между рис. 2a и рис. 2b практически нет, т.е. группу содержащую индексы (2,1) и (4,1) можно не добавлять.

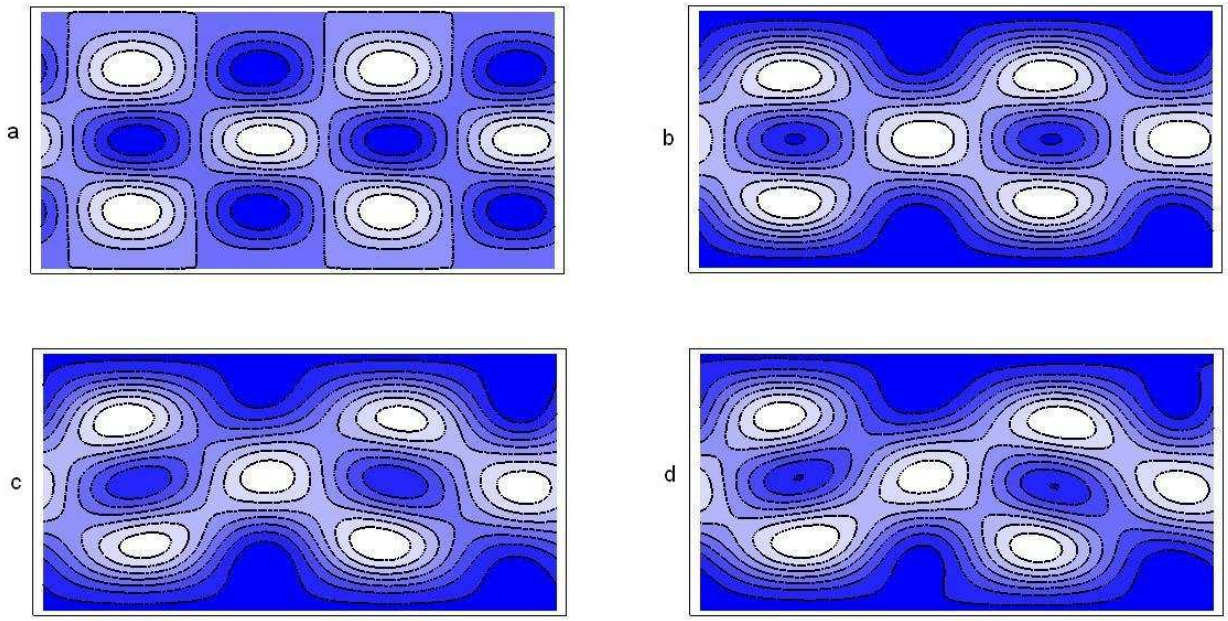

Рис. 2. Распределения комбинаций функций из таблицы 1. a – группа $Y_4^{\pm2}$ и $Y_2^{\pm2}$; b – добавлены к предыдущему Y_2^0 и Y_4^0; c – добавлены к предыдущему $Y_4^{\pm3}$; d – добавлены к предыдущему $Y_4^{\pm1}$ и $Y_2^{\pm1}$.

Полоидальные моды, определяемые сферическим гармониками $Y_4^{\pm2}$ и $Y_4^{\pm3}$ задают каждая конвективную структуру в ядре, содержащую 6 ячеек. Они интересны тем, что при существующей относительной толщине земного ядра в 6-ячейковой (6-струйной) конвекции горизонтальные и вертикальные масштабы ячеек наиболее близки, а такие структуры устойчивы. Отметим, что 6-ячейковая конвекция не реализуется никакими другими комбинациями сферических индексов.

Всего предлагается использовать три группы мод скорости. Две группы соответствуют 6-струйной конвекции. Первая включает в себя полоидальную $\mathbf{v}^S_{0,4,\pm2}$, задающую 6-струйную конвективную структуру, и моды $\mathbf{v}^S_{0,2,\pm2}$, $\mathbf{v}^T_{1,3,\pm2}$, $\mathbf{v}^T_{0,5,\pm2}$ возникающие

при ее расщеплении за счет вращения. Вторая содержит основную, также задающую 6-струйную конвекцию, моду $\mathbf{v}^S_{0,4,\pm3}$ и ее расщепления $\mathbf{v}^T_{1,3,\pm3}$, $\mathbf{v}^T_{0,5,\pm3}$.

Нулевое значение радиального индекса у основных конвективных мод выбрано для того, чтобы выделить наиболее крупные ячейки, переносящие вещество от нижней границы ядра к верхней.

Третья группа мод включает полоидальные составляющие со сферическими индексами (2,0) и (4,0), и ее появление можно объяснить эффектом опережающего вращения твердого ядра. Имеется ряд данных о том, что твердое ядро Земли имеет угловую скорость вращения несколько больше, чем Земля в целом, что объясняют сохранением углового момента Земли при конвективных движениях [12]. В используемом представлении для поля скорости этот эффект можно учесть,если поменять в выражении (3) тороидальной моды $\mathbf{v}^T_{0,1,0}$ радиальную функцию $R^T_{01}(r)$ на некоторую убывающую функцию $R(r)$, удовлетворяющую условиям $R(r_1) = 1$, $R(r_2) = 0$. А для того, чтобы эта особая мода скорости не была подвержена вязкой диссипации надо положить $R(r) = ar + b/r^2$, где $a = \dfrac{r_1^2}{r_1^3 - r_2^3}$ и $b = -\dfrac{r_1^2 r_2^3}{r_1^3 - r_2^3}$. Тогда, с учетом (1), варьируя величину соответствующей амплитуды $\beta^T_{0,1,0}$ можно задать нужную величину опережающего вращения. Кориолисово расщепление этой моды и приводит к возникновению полоидальных мод со сферическими индексами (2,0) и (4,0), а также тороидальной (3,0). Поэтому в состав третьей группы моды входят модифицированная $\mathbf{v}^T_{0,1,0}$, а также $\mathbf{v}^S_{0,2,0}$, $\mathbf{v}^T_{1,3,0}$,$\mathbf{v}^S_{0,4,0}$.

После распределения мод по группам необходимо задать коэффициенты, с которыми они входят в разложение скорости, поскольку кинематическая модель динамо предполагает полное задание поля скорости. Эти коэффициенты определяются из условия структурной устойчивости объединенной группы мод при вращении. Подобной устойчивостью обладают моды собственных колебаний вращающейся жидкости.

Известно решение задачи Пуанкаре о собственных колебаниях вращающейся идеальной жидкости $i\lambda\mathbf{v} + 2\mathbf{k} \times \mathbf{v} + \nabla p = 0$, удовлетворяющей условию непроницания на твердой границе [10]. Здесь $\mathbf{k}$ – орт оси вращения. Для вязкой жидкости эта задача переопределена, ввиду увеличения числа граничных условий.

Аналогом задачи Пуанкаре для вязкой жидкости является спектральная задача $\lambda\mathbf{v} + \epsilon\Delta\mathbf{v} + 2\mathbf{k} \times \mathbf{v} + \nabla p = 0$, где ϵ – число Экмана, характеризующее отношение периода вращения ко времени вязкой диссипации. Будем называть ее далее вязкой задачей Пуанкаре.

Эта задача изучалась в работе [11] для случая сферической оболочки. Установлены такие важные важные свойства как дискретность спектра, полнота системы собственных функций, получены оценки границ спектра. Однако, точное решение этой задачи по-видимому неизвестно.

Поскольку система полей $\left\{\mathbf{v}^T_{k,n,m}, \mathbf{v}^S_{k,n,m}\right\}$ полна, можно аппроксимировать вязкие моды Пуанкаре с помощью этих полей. В частности, для мод образующих рассмотренные выше три группы можно определить коэффициенты так, чтобы соответствующая группа наилучшим образом аппроксимировала вязкую Пуанкаре моду. Такая аппроксимация в метрике скалярного произведения (4) была построена.

Соответствующие аппроксимации имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}_1 = 0.25(\cos\psi_1 \mathbf{v}^T_{0,1,0}) - 0.13(\sin\psi_1 \mathbf{v}^S_{0,2,0}) + 0.1659(\cos\psi_1 \mathbf{v}^T_{0,3,0}) - 0.1374(\sin\psi_1 \mathbf{v}^S_{0,4,0}),\\
&\mathbf{v}_2 = 0.1577(\cos\psi_2 \mathbf{v}^S_{0,2,-2} + \sin\psi_2 \mathbf{v}^S_{0,2,2}) + 0.2575(\sin\psi_2 \mathbf{v}^T_{1,3,-2} - \cos\psi_2 \mathbf{v}^T_{1,3,2}) +\\
&+0.5323(\cos\psi_2 \mathbf{v}^S_{0,4,-2} + \sin\psi_2 \mathbf{v}^S_{0,4,2}) + 0.4254(-\sin\psi_2 \mathbf{v}^T_{0,5,-2} + \cos\psi_2 \mathbf{v}^T_{0,5,2}),\\
&\mathbf{v}_3 = 0.3649(\sin\psi_3 \mathbf{v}^T_{1,3,-3} + \cos\psi_3 \mathbf{v}^T_{1,3,3}) + 0.4914(\cos\psi_3 \mathbf{v}^S_{0,4,-3} - \sin\psi_3 \mathbf{v}^S_{0,4,3}) -\\
&-0.3542(\sin\psi_3 \mathbf{v}^T_{0,5,-3} + \cos\psi_3 \mathbf{v}^T_{0,5,3}),
\end{aligned} \tag{5}$$

где ψ_i – произвольные углы.

Окончательно, скорость в модели принимается в виде

$$\mathbf{v} = \alpha\left(k_1 \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + k_3 \mathbf{v_3}\right), \tag{6}$$

где α нормирующий множитель, а коэффициенты k_1 и k_3 определяют относительный вклад каждой из трех аппроксимаций вязких мод Пуанкаре в поле скорости.

2. Кинематическая модель геодинамо. В кинематическом приближении задача динамо сводится к решению уравнения индукции для магнитного поля

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\left(\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) + \mathrm{Re}_m^{-1} \Delta \mathbf{B},\\
&\bigtriangledown \mathbf{B} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

при заданной скорости $\mathbf{v}$. Уравнение записано в безразмерном виде. За единицу времени принята величина h/v_0, где $h = 2.1 \cdot 10^6$ м – толщина жидкого ядра, а $v_0 = 10^{-4}$ м/с – характерная величина скорости конвекции. Основным параметром задачи является магнитное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_m = hv_0/\nu_m$, где ν_m – магнитная вязкость ядра. Оно дает отношение характерного времени диссипации магнитного поля h^2/ν_m ко времени конвективного цикла h/v_0 .

К уравнениям (7) добавляются вакуумные граничные условия для магнитного поля [13]. Физически эти условия означают, что среда за пределами ядра непроводящая и токи в ней отсутствуют. Такой допуск оправдан тем, что временные масштабы процессов в ядре составляют от 10^3 лет и более, т.е. на порядки превосходят характерные времена атмосферных и магнитосферных процессов. Математически вакуумные условия требуют непрерывного перехода поля $\mathbf{B}$ в потенциальное поле при $r = r_2$.

Учитывая описанное выше спектральное представление для поля скорости, поле $\mathbf{B}$ также представим в виде комбинации собственных тороидальных и полоидальных полей оператора Лапласа

$$\mathbf{B} = \sum_{k,n,m} \gamma^T_{k,n,m}(t)\, \mathbf{B}^T_{k,n,m}(r,\theta,\varphi) + \sum_{k,n,m} \gamma^S_{k,n,m}(t)\, \mathbf{B}^S_{k,n,m}(r,\theta,\varphi). \tag{8}$$

Проведем усечение рядов (8), оставим в них три составляющие дипольной части геомагнитного поля $\mathbf{B}^S_{0,1,-1}$, $\mathbf{B}^S_{0,1,0}$ и $\mathbf{B}^S_{0,1,1}$, а также моды которые структурно связаны

с компонентами скорости, т.е. «зацепляются» с ними в слагаемом $\mathrm{rot}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ и регенерируют поле. Если использовать одноиндексные обозначения для магнитных мод, то интеграл по объему ядра

$$W_{ij}^k = \int \mathbf{B}_k \mathrm{rot}\,(\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_j)\, d\mathbf{r}$$

дает генерацию магнитной моды $\mathbf{B}_k$ при нелинейном взаимодействии компоненты скорости $\mathbf{v}_i$, заданной одним из выражений (5) и магнитной $\mathbf{B}_j$, т.е. собственно работу механизма динамо. При этом в рассматриваемой простой модели нас интересовала прежде всего регенерация дипольных компонент.

Расчет интегралов W_{ij}^k для различных комбинаций мод показал, что для этого надо оставить следующие магнитные моды (всего 17): $\mathbf{B}_{0,2,0}^T$, $\mathbf{B}_{0,2,\pm1}^T$,$\mathbf{B}_{0,4,0}^T$, $\mathbf{B}_{0,4,\pm2}^T$,$\mathbf{B}_{0,4,\pm3}^T$, $\mathbf{B}_{1,3,0}^S$,$\mathbf{B}_{1,3,\pm1}^S$, $\mathbf{B}_{1,3,\pm2}^S$,$\mathbf{B}_{0,5,\pm2}^S$, $\mathbf{B}_{0,5,\pm3}^S$. Всего, вместе с дипольными, получается 20 магнитных мод. Отметим, что поскольку эти моды отличаются какими-либо сферическим индексами, то они ортогональны на сфере, а значит и в объеме ядра.

Далее для удобства будем использовать одноиндексные обозначения для магнитных компонент.

Представляя магнитную индукцию линейными комбинациями вышеуказанных $\mathbf{B}_j$, а скорость – разложением (6), получаем галеркинские приближения для уравнения индукции (7)

$$A_l^l \frac{d\gamma_l}{dt} = \sum_{j=1}^{20} W_j^l \gamma_j - \frac{\eta_l}{Re_m} A_l^l \gamma_l\,, \qquad l = 1,\ldots,20\,, \tag{9}$$

где $A_l^l = \int \mathbf{B}_l^2 d\mathbf{r}$, $W_j^l = \int \mathbf{B}_l \mathrm{rot}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_j)\, d\mathbf{r}$, а η_l — собственное значение магнитной моды $\mathbf{B}_l$.

Это система линейных уравнений с постоянными коэффициентами для амплитуд магнитных мод и изменение величины магнитного поля со временем тогда можно охарактеризовать числом $\Lambda = \max\limits_i \mathfrak{Re}\lambda_i$, где λ_i собственное значение матрицы системы (9). Это число определяет скорость изменения величины магнитного поля.

Произведение $\Lambda \mathrm{Re}_m$ можно интерпретировать как отношение двух времен – характерного времени диссипации магнитного поля и характерного времени изменения поля в рассматриваемой модели. В связи с этим предлагается следующий критерий воспроизведения магнитного поля динамо-механизмом в модели – $\Lambda > 0$ или $|\Lambda|\mathrm{Re} \ll 1$. В первом случае поле нарастает, во втором затухает, но скорость его затухания много меньше скорости омического затухания в отсутствие работы динамо.

Ясно, что значение Λ зависит от числа Re_m и от весовых коэффициентов k_1, k_2 в формулах (6). При этом вычислительные эксперименты показали, что собственные значения матрицы системы (9) не зависят от значений углов ψ_i в (5).

Была проведена серия расчетов с перебором значений k_i от 0.1 до 10 и Re_m от 5 до 500 в логарифмической шкале. Для каждой такой комбинации определялись соответствующие Λ и $|\Lambda|\mathrm{Re}$.

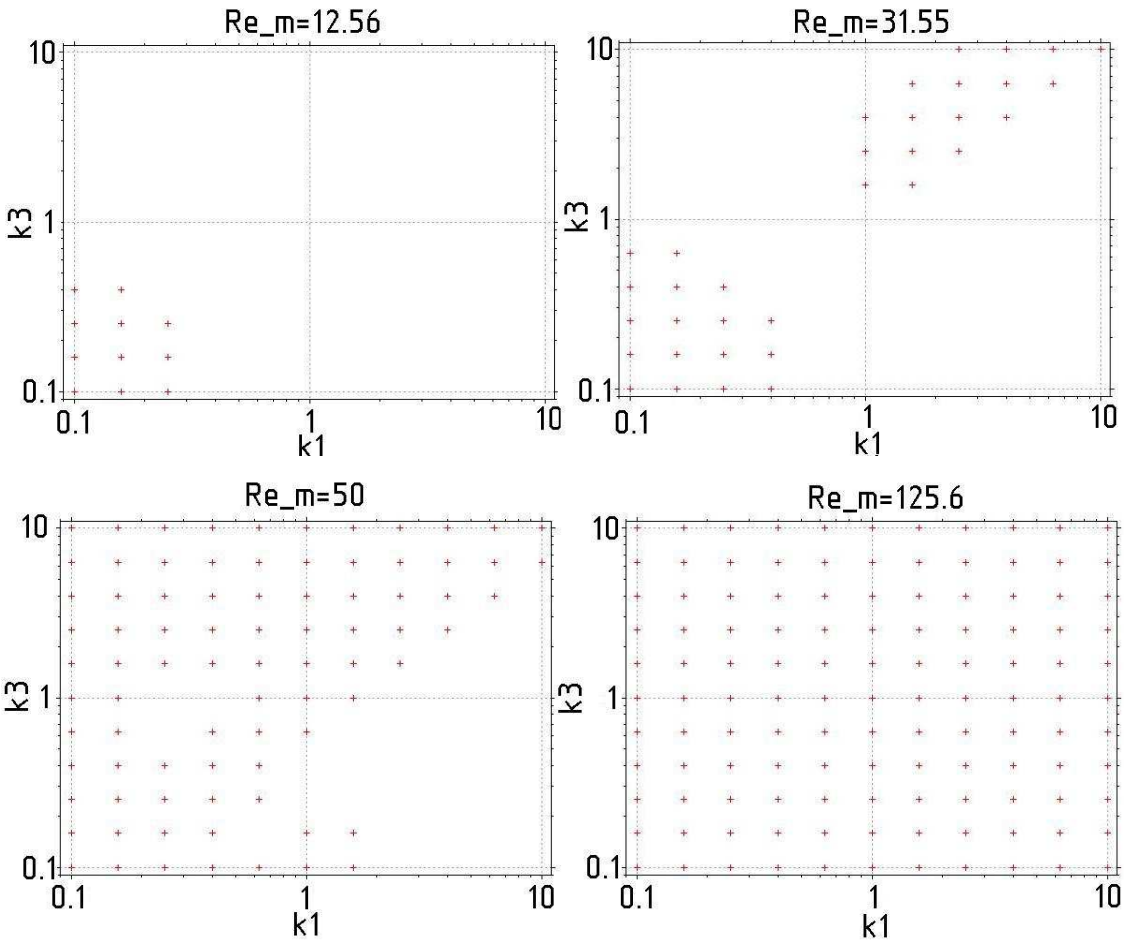

Рис. 3. Области поддерживания магнитного поля в плоскости параметров (k_1, k_3) при различных Re_m.

Диапазон значений для Re_m выбирался из следующих соображений. Поскольку $h = 2.1 \cdot 10^6$ м и характерная скорость конвекции v_0 по оценкам составляет 10^{-4} м/с, то $\mathrm{Re}_m = 210/\nu_m$. Молекулярное значение магнитной вязкости составляет $\nu_m^M = 1$ м^2/с [13], а турбулентное значение $\nu_m^T = 20$ м^2/с [14]. Поэтому значения Re_m варьировались так, чтобы перекрыть диапазон значений от турбулентного до молекулярного.

Результаты расчетов для некоторых значений Re_m представлены на рис. 3. В плоскости (k_1, k_3) крестиками обозначены пары коэффициентов, в которых в модели поддерживается магнитное поле. Видно, что с ростом Re_m области поддержания поля увеличиваются.

Заключение. В работе в рамках кинематического приближения показана возможность удерживания магнитного поля гидродинамическими структурами, косвенно наблюдаемыми в ядре Земли. В качестве составляющих скорости использованы аппроксимации мод собственных колебаний вращающейся жидкости, соответствующих 6-струйной конвекции в ядре Земли и опережающему вращению внутреннего ядра. Установлено,

что режим усиления магнитного поля реализуется в широком диапазоне значений магнитного числа Рейнольдса от турбулентного до молекулярного значения.

Литература

1. Kono M., Roberts P.H. Recent geodynamo simulations and observations of the field // Reviews of Geophysics. – 2002. – 40, №10. – P.B1-B41.
2. Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в астрофизике / М.-Ижевск: НИЦ «РХД», 2006.
3. Cupal I., Hejda P., Reshetnyak M. Dynamo model with termal convection and with the free-rotating inner core // Planetary Physics Sciences. – 2002. – 50. – P.1117-1122.
4. Ustyugov S. Three-Dimensional Numerical MHD Simulation of Solar Convection // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. – 2008. – 4. – P.1061-1068.
5. Кузнецов В.В. Анизотропия свойств внутреннего ядра Земли // Успехи физ. наук. – 1997. – 169, №9. – С.1001-1012.
6. Водинчар Г.М., Шевцов Б.М. Маломодовая модель конвекции во вращающемся шаровом слое вязкой жидкости // Вычислительные технологии. – 2009. – 14, №4. – С.3–15.
7. Водинчар Г.М., Крутьева Л.К. Маломодовая модель конвекции во вращающемся шаровом слое вязкой жидкости // Вычислительные технологии. – 2011. – 16, № 2. – С.35–44.
8. Голицын Г.С. Режимы конвекции на различных вращающихся геофизических и астрофизических объектах // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1991. Т. 27. № 1. С. 20-31.
9. International Geomagnetic Reference Field. http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html.
10. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей / Л.: Гидрметеоиздат, 1975.
11. Резников Е.Л., Розенкноп Л.М. О собственных колебаниях вращающейся вязкой жидкости во внешнем ядре Земли // Вопросы геодинамики и сейсмологии (Вычислительная сейсмология. Вып. 30) / М.: Геос, 1998. – С.121-132.
12. Джекобс Дж. Земное ядро / М.: Мир, 1979.
13. Merril R.T., McElhinny M.W., McFadden P.L. The Magnetic Field of the Earth / N.-Y.: Acad. Press, 1996.
14. Frick P., Reshethyak M., Sokoloff D. Combined grid-shell approach fo convection in a rotating spherical layer // EuroPhys Letters. – 2002. – 59, №2. – P.212-217.

6-JET KINEMATIC MODEL OF GEODYNAMO

G.M. Vodinchar, L.K. Feshchenko

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation,
Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,
Mirnaya Str., 7, Paratunka, Elizovskiy district, Kamchatka region, 684034, Russia, e-mail: ikir@ikir.ru

Abstract. Geodynamo kinematic model is built. The field velocity structure which is compatible with data over the splitting-functions of oscillations in the Earth liquid core. In the model three velocity components are used which are approximate oscillations modes of the liquid core. Two of them define 6-jet convection in the Earth's core, and the third corresponds to anticipatory rotation of the solid core.

Key words: geodynamo, kinematic dynamo, Earth's core, Poincare operator.

MSC 80A30

ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ БИНАРНОЙ АВТОКАТАЛИТИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ. СИЛЬНО АСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Фам Минь Туан, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучается стохастическая модель бинарной автокаталитической химической реакции на основе уравнений химической кинетики со стохастически возмущенными параметрами, в которой возмущение описывается обобщенным случайным процессом белого шума. Исследуется стационарная плотность распределения первого порядка случайного процесса, описывающего эволюцию концентрации одного из компонентов реакции. С качественной точки зрения исследуется критическая поверхность в трехпараметрическом пространстве термодинамических параметров состояния смеси, при пересечении которой происходит индуцированный шумом фазовый переход в стохастической системе, то есть перестройка унимодальной плотности распределения в бимодальную. Развита теория возмущений в случае сильного превосходства концентрации одного катализатора на концентрацией другого. Она позволяет вычислить приближенно фазовые диаграммы при малых значениях параметра, характеризующего такую асимметрию.

Ключевые слова: химическая реакция, стохастическая модель, фазовый переход, бифуркация, плотность распределения, критическая поверхность, теория возмущений.

1. Введение. В работе [1] была рассмотрена стохастическая модель химической кинетики, исследовавшаяся ранее в [2, 3] и описывающая протекание автокаталитических химических реакций определенного типа между двумя реагентами с учетом их термодинамических флуктуаций. В рамках этой модели эволюция во времени относительной доли $\tilde{x}_t$ концентраций реагентов описывается посредством стохастического дифференциального уравнения

$$d\tilde{x}_t = [\alpha - \tilde{x}_t + \lambda\tilde{x}_t(1-\tilde{x}_t)]\,dt + \sigma\tilde{x}_t(1-\tilde{x}_t)d\tilde{w}_t\,, \tag{1}$$

со свободными параметрами модели $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $\alpha \in [0,1]$ и с мультипликативным белым шумом $d\tilde{w}_t/dt$. Стохастический дифференциал $d\tilde{w}_t$ в этом уравнении понимается по Стратоновичу. Таким образом, эволюция системы представляет собой неоднородный диффузионный марковский случайный процесс в пространстве относительных концентраций. Этот процесс обладает финальной плотностью распределения $p(x)$ для случайной величины $\tilde{x}_t$, которая, в зависимости от значений трех параметров $\langle\lambda, \sigma^2, \alpha\rangle$ модели является либо унимодальной, либо бимодальной. Финальная плотность определяется явной формулой [1]

$$p(x) = \frac{A}{x(1-x)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\beta}\exp\left\{\frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{\alpha-1}{1-x} - \frac{\alpha}{x}\right)\right\}, \tag{2}$$

$$A = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{2}{\sigma^2} + \beta\ln\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right\}\left[K_{-\beta}\left(-\frac{4}{\sigma^2}\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\right)\right]^{-1},$$

где $K_{-\beta}(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода с показателем $(-\beta)$ и $\beta = 2(2\alpha + \lambda - 1)/\sigma^2$. Переход от унимодальной плотности к бимодальной происходит на некотором двумерном многообразии Σ в пространстве параметров $\langle\lambda, \sigma^2, \alpha\rangle$, которое называется *критической поверхностью*. Такой переход физически трактуется как динамический фазовый переход в смеси химических реагентов. Уравнение для критической поверхности находится из условия равенства нулю производных $p'(x) = 0$, что эквивалентно уравнению

$$S(x) \equiv \alpha - x + \lambda x(1-x) - \frac{\sigma^2}{2}x(1-x)(1-2x) = 0\,, \tag{3}$$

и $p''(x) = 0$. При этом совместное решение такой системы уравнений для концентрации x обязано находиться на интервале $[0, 1]$.

В работе [1] было показано, что критическая поверхность Σ в пространстве наборов параметров $\langle\lambda, \sigma^2, \alpha\rangle$, при пересечении которой в пространстве параметров происходит фазовый переход, определяется уравнением

$$P(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) \equiv \lambda^4 + \lambda^2\Big(1 - 5\sigma^2 - \sigma^4/2\Big) - \lambda\varepsilon(9\sigma^4 + 18\sigma^2 - 4\lambda^2) - 4\sigma^2\Big(1 - \sigma^2/4\Big)^3 - 27\sigma^4\varepsilon^2 = 0\,, \tag{4}$$

где $\varepsilon = \alpha - 1/2 \in [-1/2, 1/2]$. Кроме того, в работе [1] было показано, что параметры критической поверхности, удовлетворяющие этому уравнению, должны, дополнительно, обладать свойством

$$|G(\lambda, \sigma^2, \varepsilon)| \le 1\,, \qquad G(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) \equiv \frac{4\lambda(1 + 2\sigma^2) + 36\,\varepsilon\sigma^2}{4\lambda^2 + 3\sigma^4 - 12\sigma^2}\,.$$

Если ввести функции $G_\pm(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) = (1 \pm G(\lambda, \sigma^2, \varepsilon))\Delta$

$$\Delta = 4\lambda^2 + 3\sigma^4 - 12\sigma^2\,,$$

то это условие перепишется в более простом виде

$$G_+(\lambda, \sigma^2, \varepsilon)G_-(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) \ge 0\,,$$

так, что допустимая область для расположения точек бифуркации представляет собой объединение областей $\mathfrak{G}_\pm$, границами которых являются соответственно гиперболы

$$G_\pm(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) \equiv (2\sigma^2 + 1 \pm 2\lambda)^2 - (\sigma^2 + 2(4 \mp 9\varepsilon))^2 + 4(4 \mp 9\varepsilon)^2 - 1 = 0\,.$$

На это обстоятельство не было обращено должного внимания в предшествующих работах [2, 3]. По этой причине, критическая поверхность Σ является, вообще говоря, только одной связной частью поверхности, определяемой уравнением (4).

В настоящем сообщении мы разрабатываем метод вычисления фазовых диаграмм термодинамически равновесного состояния системы химических реагентов при значениях параметра α, близких к краям своей физически естественной области изменения, то есть к 0 и 1. Ввиду симметрии поверхности относительно одновременной замены $\alpha \Leftrightarrow 1-\alpha$ и $\lambda \Leftrightarrow -\lambda$, нам достаточно изучить только окрестность точки $\alpha = 0$.

2. Вырожденный случай. Рассмотрим сечение критической поверхности в вырожденных случаях при $\varepsilon = \mp 1/2$.

Теорема 1. *Сечение поверхности Σ с полуплоскостью $\{\langle\lambda, \sigma^2, \varepsilon = -1/2\rangle : \lambda \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ ($\{\langle\lambda, \sigma^2, \varepsilon = 1/2\rangle : \lambda \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$) состоит из (двукратной) полупрямой $\lambda_0^{(-)} = 1 + \sigma^2/2$ ($\lambda_0^{(+)} = -(1+\sigma^2/2)$), $\sigma^2 \geq 1$ и кривых $\lambda_*^{(-)} = (-\sigma^2 \pm 4\sigma)/2$ ($\lambda_*^{(+)} = (\sigma^2 \pm 4\sigma)/2$), $\sigma^2 \geq 1$, для которых общими с цилиндром точками являются соответственно $\lambda = \pm 3/2$, $\sigma^2 = 1$.*

□ Уравнение (4) при значениях $\varepsilon = \pm 1/2$

$$\lambda^4 + \lambda^2\Big(1 - 5\sigma^2 - \sigma^4/2\Big) \mp \lambda(9\sigma^4 + 18\sigma^2 - 4\lambda^2)/2 - 4\sigma^2\Big(1 - \sigma^2/4\Big)^3 - 27\sigma^4/4 = 0$$

допускает явное разложение на множители

$$\Big(\lambda \pm (1 + \sigma^2/2)\Big)^2\Big(\lambda^2 \mp \sigma^2\lambda + \sigma^2(\sigma^2 - 16)/4\Big) = 0$$

и поэтому – точное алгебраическое выражение всех решений, которые являются вещественными, представляется следующим образом.

При $\varepsilon = -1/2$ список решений состоит из двукратного решения $\lambda_0^{(-)} = 1 + \sigma^2/2$, то есть представляет собой «удвоенную» прямую, и решений

$$\lambda_*^{(-)} = (-\sigma^2 \pm 4\sigma)/2\,,$$

которые представляет собой кривую, составленную из двух полубесконечных ветвей (так как $\sigma^2 \geq 0$) с единственной общей (концевой) точкой при $\lambda = 3/2$, $\sigma^2 = 1$, то есть оба решения склеиваются в этой точке в единую гладкую кривую, на которой λ изменяется от $-\infty$ до 2 (в точке $\lambda = 2$ функция $\lambda_*^{(-)}$ достигается максимума).

Точно также, при $\varepsilon = 1/2$ список решений состоит из «удвоенной» прямой $\lambda_0^{(+)} = -(1 + \sigma^2/2)$ и решений

$$\lambda_*^{(+)} = (+\sigma^2 \pm 4\sigma)/2\,.$$

Они составляются в единую гладкую кривую, для которой λ принимает значения из $[-2, \infty)$ ($\langle -3/2, 1\rangle$ – точка склейки двух полубесконечных ветвей). ■

Естественно, что в обоих случаях кривые, определяемые теоремой, находятся вне эллипса $\Delta = 4\lambda^2 + 3\sigma^4 - 12\sigma^2 = 0$. Это проверяется подстановкой выражения для $\lambda_*^{(\pm)}$ в уравнение для эллипса, что приводит к неравенству $\Delta = 4\sigma^2(\sigma \pm 1)^2 \geq 0$. Таким образом, кривые имеют каждая по две точки касания с эллипсом: при $\sigma = 0, \lambda = 0$ и $\sigma = 1, \lambda = \mp 3/2$.

3. Теория возмущений. Нашей задачей является изучение критической поверхности вблизи предельных значений $\varepsilon = \pm 1/2$. Принимая во внимание симметрию критической поверхности, мы изучим только случай $\varepsilon = -1/2$ ($\alpha = 0$).

Покажем сначала, что изучение сечений поверхности, то есть кривых $\lambda(\sigma^2)$, при постоянном, но малом значении α посредством разложения в ряд по полуцелым степеням α невозможно.

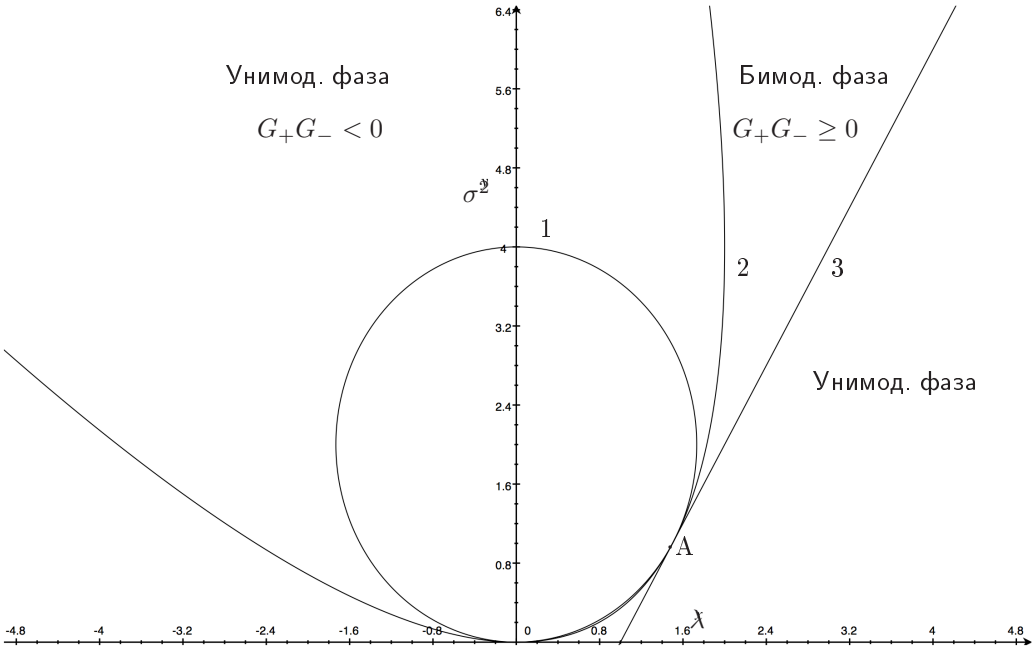

Рис. 1. В плоскости $\langle \lambda, \sigma^2 \rangle$ при $\varepsilon = -1/2$ изображены: 1 — эллипс, ограничивающий расположение кривой раздела фаз; 2 — параболы $\lambda_*^{(-)}$, «сшитые» в точке $A = \langle 3/2, 1 \rangle$ и расположенные полностью вне эллипса; 3 — сдвоенная прямая $\lambda_0^{(-)}$.

Произведем подстановку $\varepsilon = -1/2 + \alpha$ в уравнение (4) $P(\lambda, \sigma^2, -1/2 + \alpha) = 0$. Будем искать решение в виде разложения $\lambda(\sigma^2) = \lambda_0(\sigma^2) + \alpha^{1/2}\lambda_1(\sigma^2) + \alpha\lambda_2(\sigma^2) + O(\alpha^{3/2})$, где $\lambda_0(\sigma^2) = 1 + \sigma^2/2$ – одна из ветвей решения этого уравнения ($\lambda_0^{(-)}$) при $\alpha = 0$. В результате, получаем

$$P(\lambda_0(\sigma^2), \sigma^2, -1/2) = 0\,, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_0, \sigma^2, -1/2} = 0\,,$$

(так как прямая $\lambda_0(\sigma^2)$ двойная) и

$$P = \alpha \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}\right)_{\lambda_0, \sigma^2, -1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2}\right)_{\lambda_0, \sigma^2, -1/2} [\alpha\lambda_1^2 + 2\alpha^{3/2}\lambda_1\lambda_2] +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 P}{\partial \lambda^3}\right)_{\lambda_0, \sigma^2, -1/2} \alpha^{3/2}\lambda_1^3 + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial \varepsilon}\right)_{\lambda_0, \sigma^2, -1/2} \alpha^{3/2}\lambda_1 + o(\alpha^{3/2})$$

или, после подстановки явных выражений для частных производных, имеем

$$P = -\alpha(\lambda_0(9\sigma^4 + 18\sigma^2 - 4\lambda_0^2) - 27\sigma^4) + (\sigma^2-1)^2[\alpha\lambda_1^2 + 2\alpha^{3/2}\lambda_1\lambda_2] + 2(\sigma^2+1)\alpha^{3/2}\lambda_1^3 -$$
$$- 6\alpha^{3/2}(\sigma^2-1)(\sigma^2+2)\lambda_1\,.$$

Слагаемые порядка α дают выражение $\lambda_1^2(\sigma^2) = 4(\sigma^2-1)$ при $\sigma^2 \neq 1$. Баланс слагаемых порядка $\alpha^{3/2}$ дает уравнение

$$(\sigma^2-1)^2\lambda_2 + (\sigma^2+1)\lambda_1^2 - 3(\sigma^2-1)(\sigma^2+2) = 0,$$

что с учетом явного выражения для $\lambda_1(\sigma^2)$, дает

$$\lambda_2(\sigma^2) = \frac{2-\sigma^2}{\sigma^2-1}\,.$$

Мы видим, что в первом приближении появляется расщепление $\lambda_1(\sigma^2) = \pm 2\sqrt{\sigma^2-1}$, однако, уже в следующем приближении появляется малый знаменатель вблизи точки $\sigma^2 = 1$, что делает теорию возмущений неприменимой. Если произвести расчет, выбрав в качестве нулевого приближения другую ветвь $(\lambda_*^{(-)})$ из числа тех, которые слипаются в точке $\langle 3/2, 1\rangle$, $\lambda_0(\sigma^2) = (-\sigma^2+4\sigma)/2$, то для $\lambda_1(\sigma^2)$ получим уравнение $4\sigma^3(\sigma-1)^3 + (\sigma^2-1)^2\lambda_1^2(\sigma^2) = 0$, у которого нет решения при $\sigma^2 > 1$ (интересующая нас часть кривой, которая является границей раздела фаз, расположена в полуплоскости с $\sigma^2 > 1$), что делает неприменимой теорию возмущений уже в первом приближении.[1)]

В связи с описанной выше невозможностью построения теории возмущений посредством прямого разложения в ряд по полуцелым степеням, мы применим другой подход для изучения поведения границы раздела фаз. Совершим подстановку

$$\lambda = (3+u+v)/2\,, \quad \sigma^2 = 1+v-u \tag{5}$$

так, что уравнение (4) принимает вид

$$u^2(v^2+4u) + \alpha\{36u^2 + 6uv(u+v-3) - 4(u^3+v^3)\} - 27\alpha^2(1+v-u)^2 = 0\,,$$

а уравнение эллипса в этих переменных, $u^2+v^2-uv+3u = 0$. Теперь, чтобы произвести расщепление, подберем правильный масштаб изменения переменных u, v в окрестности точки $\langle 0,0\rangle$ при $\alpha \to 0$. Для этого произведем замену $u \to \alpha^a u$, $v \to \alpha^b v$, где $a > 0$, $b > 0$ постоянные показатели

$$\alpha^{2(a+b)}u^2v^2 + 4\alpha^{3a}u^3 + 36\alpha^{2a+1}u^2 + 6\alpha^{2a+b+1}vu^2 + 6\alpha^{2b+a+1}uv^2 - 18\alpha^{a+b+1}uv -$$
$$-4\alpha^{3a+1}u^3 - 4\alpha^{3b+1}v^3 - 27\alpha^2(1+v-u)^2 = 0\,.$$

[1]Заметим, что на наличие сложности при построении теории возмущений указывает уже то, что при $\varepsilon = -1/2$ имеется пересечение оси $\sigma^2 = 0$, а при $\varepsilon \neq -1/2$ такого пересечения нет, так как уравнение для точек пересечения $\lambda^4 + \lambda^2 + 4\varepsilon\lambda^3 = 0$ имеет единственное решение $\lambda = 0$. Следовательно части прямых $\pm(\sigma^2/2+1)$, которые расположены при $\sigma^2 < 1$ должны бифуркационным образом деформироваться так, чтобы их точки пересечения с $\sigma^2 = 0$ исчезли.

Для нахождения правильного вида асимптотики, нужно разбить все имеющиеся наименьшие показатели степеней $2a+2b$, $3a$, $2a+1$, $a+b+1$, $3b+1$, 2 у переменной α на группы так, чтобы имелась группа, по крайней мере, из двух слагаемых, с одинаковыми минимальными значениями степеней. Это возможно сделать единственным способом $a = 2/3$, $b = 1/3$. В результате, приравнивая коэффициент при минимальной степени величины α, равной 2, имеем

$$4(u^3 - v^3 - 27) + (uv - 9)^2 = 0\,. \tag{6}$$

При $v \to \infty$ неявная функция $u(v)$ не может быть ограниченной, так как, в противном случае, получаем противоречие. Поэтому имеются асимптотики кривой $u(v) \to \infty$ при $v \to \infty$. Возможны следующие случаи: $u \sim v^2$, $u \sim v^{1/2}$. Они следуют из сравнения слагаемых со старшими степенями u^2v^2, u^3 и v^3 и из соображений компенсации слагаемых с наибольшими показателями степени. Рассмотрим оба случая. Положим $u = av^2 + f$. Подстановка с удержанием главных степеней v^6, которые должны исчезать, дает условие $a = -1/4$. После этого находим $f = -2/v + o(v^{-1})$, как главное поправочное слагаемое. Второй случай с показателем $1/2$ получается сразу из соображений симметрии $v = u^2/4 + 2/u + o(u^{-1})$.

Общий вид кривой, определяемой уравнением (6), на плоскости $\langle u, v\rangle$ показан на рис. 2, где расположены сверху вниз вдоль оси v обе ее связные компоненты и кубическая парабола, ограничивающая кривую снизу. Такой ее вид обусловлен следующим качественным анализом.

Кривая переходит сама в себя при растяжении $\alpha^{-2/3}$ вдоль оси u и $\alpha^{-1/3}$ вдоль оси v. Кроме того, она расположена выше кубической параболы $v^3 - u^3 + 27 = 0$ на рис. 2.[2)] Заметим, что кривая симметрична относительно замены $u \Rightarrow -v$.

Проверим кривую (6) на самопересечение. В случае наличия самопересечения должен существовать, по крайней мере, двукратный корень относительно u при фиксированном v,

$$Q(u) = 4u^3 + u^2v^2 - 4v^3 - 18uv - 27 \equiv 4(u^3 - v^3 - 27) + (uv - 9)^2 = 0\,.$$

Используя алгоритм Евклида для этого полинома и его производной по u, $Q'(u)/2 = 6u^2 + uv^2 - 9v$ находим остаток (результат применения алгоритма) в виде $(v^3 - 27)^3/81$. Следовательно, единственная точка, в которой самопересечение возможно, определяется точкой при $v = 3$.

Далее, кривая имеет точки пересечения с диагональю $u = -v$. Наличие таких точек позволяет сделать заключение о ее двухсвязности. Совершая подстановку $u = -v$ в уравнение, получаем $(u-1)(u+3)^3 = 0$, то есть имеется трехкратный корень $u = -3$, $v = 3$, и поэтому точка $\langle -3, 3\rangle$ является особой, а также корень $u = 1$, $v = -1$.

[2]Заметим, что $uv = 9 \pm 2\sqrt{27 + v^3 - u^3}$. Тогда при обращении в нуль подкоренного выражения происходит смена знака в формуле, определяющей кривую. При этом та ветвь кривой, для которой такое положение реализуется, касается в точках указанного изменения знака кубической параболы.

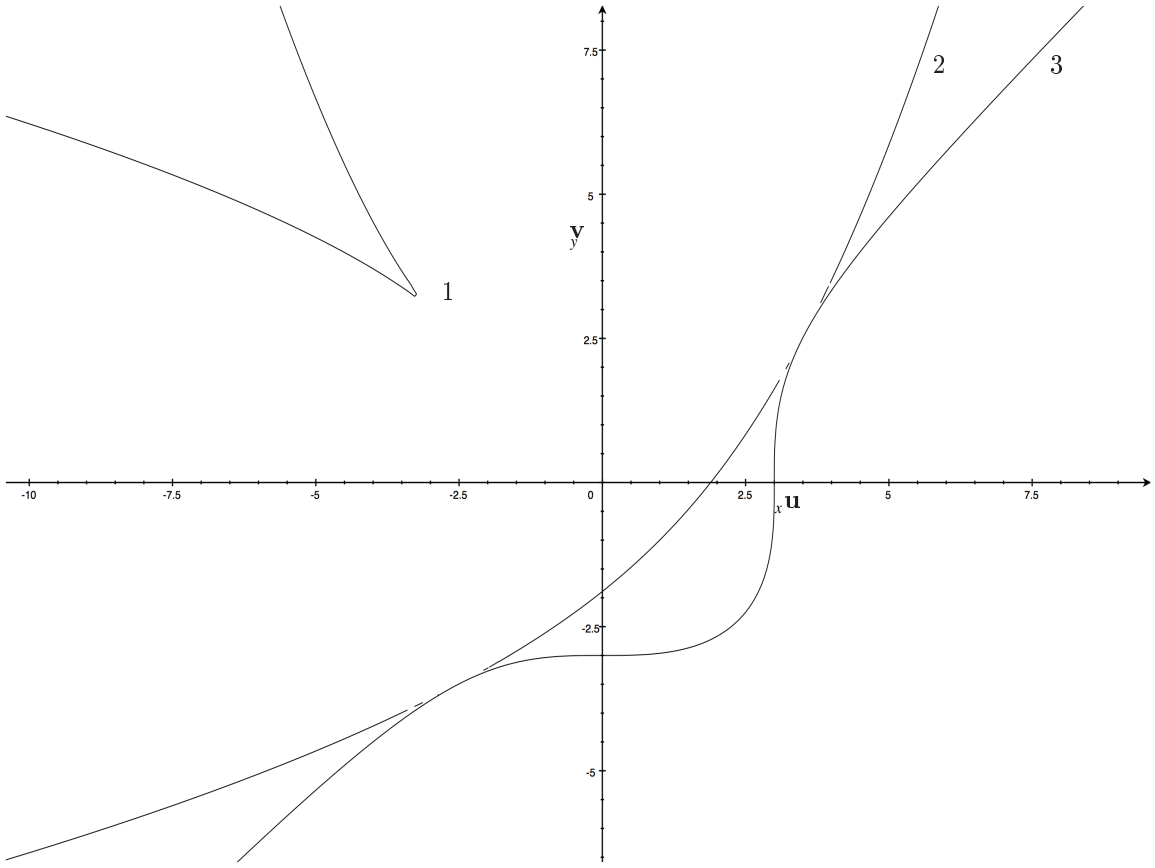

Рис. 2. В плоскости $\langle u, v\rangle$ изображены: 1 – ветвь двухсвязной кривой (6), содержащая «касп» и описывающая участок границы раздела фаз; 2 – нефизическая ветвь кривой (6); 3 – кубическая парабола, касающаяся нефизической ветви в точках $u = 3[(1 \pm \sqrt{5})/2]^{1/3}$, которые находятся как совместные решения системы $uv = 9, \quad u^3 - v^3 = 27$.

В точке $\langle 1, -1\rangle$ кривая пересекает трансверсально диагональ $v = -u$, так как в этой точке невозможно ее самопересечение. Это указывает на то, что кривая двухсвязна. Если бы она была односвязна, то дуги кривой, связанные с этим пересечением диагонали, при их продолжении, ввиду симметрии кривой относительно диагонали, должны соединиться с продолжением дуги кривой, проходящей через точку $\langle -3, 3\rangle$, то есть иметь, по крайней мере, две точки таких соединений. Если соединение состоит в том, что указанные продолжения кривой переходят друг в друга, то кривая должна быть заключена в ограниченной области плоскости, а это, как указано выше, невозможно. Если же соединение происходит посредством самопересечения — пересечения двух ветвей кривой, то это невозможно, так как такое самопересечения может реализоваться только в точке $\langle -3, 3\rangle$ на диагонали. Таким образом, отрезок дуги, пересекающий диагональ в $\langle 1, -1\rangle$, лежит на части кривой, несвязанной с дугой, которой принадлежит точка $\langle -3, 3\rangle$.

Точка $\langle -3, 3\rangle$ лежит на одной из ветвей двухсвязной кривой. Исследуем поведение

кривой на этой ее связной части в окрестности этой особой точки и тип возникающей при этом особенности. С этой целью перейдем к полярным координатам с центром в точке $\langle -3, 3\rangle$, то есть произведем в уравнении замену $u \Rightarrow u-3$ и $v \Rightarrow v+3$. В результате, получаем следующее

$$u^2v^2 + (u-v)(4(u^2+v^2)+10uv) = 27(u+v)^2\,,$$

а затем положим $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$. Тогда, после деления уравнения на ρ^2, имеем

$$\frac{1}{4}\rho^2\sin^2 2\varphi + \rho(\cos\varphi - \sin\varphi)(4+5\sin 2\varphi) - 27(1+\sin 2\varphi) = 0\,. \tag{7}$$

Квадратное уравнение дает два решения

$$\rho = \frac{2}{\sin^2 2\varphi}\left[(\sin\,\varphi - \cos\,\varphi)(4+5\sin\,2\varphi) \pm \big(2(2+\sin 2\varphi)\big)^{3/2}\right]\,, \tag{8}$$

но истинному решению соответствует только знак $(+)$, так как только в этом случае, ввиду отрицательности последнего слагаемого в уравнении, выражение в правой части (8) положительно. Так как решение с $\rho(\varphi) > 0$ единственно, то в исследуемой точке реализуется особенность типа «касп», так как при наличии самопересечения в этой точке, должно быть, по меньшей мере, два решения $\rho(\varphi)$. Заметим, что характер особенности при $\rho \to \infty$ удается выяснить только при учете слагаемого, пропорционального ρ^2, так как свободный член $\sim (1+\sin 2\varphi)$ уравнения обращается в ноль при $\varphi = -\pi/4, 3\pi/4$.

Найденные значения углов определяют возможные направления подхода кривой к особой точке $\varphi \to -\pi/4, 3\pi/4$ (отвечающей кратному решению) при $\rho \to 0$. Для исследования того, какое из них реализуется на самом деле, введем отклонения $\psi = \varphi + \pi/4$ и $\psi = \varphi - 3\pi/4$ и изучим поведение решений уравнения в окрестности угла $\psi = 0$ в обоих случаях. Так как

$$\sin\,2\varphi = -1 + 2\psi^2 + o(\psi^2)\,, \quad \cos\,\varphi - \sin\,\varphi = \mp\sqrt{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\psi^2 + o(\psi^2)\,,$$

где верхние знаки в этой формуле соответствуют $\varphi = 3\pi/4$, а нижние — $\varphi = -\pi/4$, то подстановка этих асимптотических при $\psi \to 0$ выражений в уравнение (7) с удержанием в нем только главных при $\psi \to 0$ слагаемых дает

$$\rho^2 \pm 4\sqrt{2}\,\rho - 216\psi^2 + o(\psi^2) = 0\,.$$

Отсюда следует, что при знаке $(+)$ получается $\rho(\varphi) = 27\sqrt{2}\,\psi^2 + o(\psi^2)$. При знаке $(-)$ имеется только одна возможность получить решение $\rho(\varphi)$, обращающееся в нуль при $\psi = 0$. Но оно, ввиду требования неотрицательности $\rho(\varphi)$, дает только лишь изолированное значение $\psi = 0$, то есть такой функции не существует. Тогда получаем, что кривая $\rho(\varphi)$ может подходить к кратной точке только под углом $\varphi = 3\pi/4$, то есть кратная точка не является точкой самопересечения кривой. Следовательно, в кратной точке реализуется особенность кривой в виде «каспа».

Вернемся теперь к исходным переменным λ, σ^2 на изученной нами связной части кривой. Учитывая все проделанные замены переменных в процессе перехода к кривой, описываемой формулой (8), находим

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[3(1+\alpha^{1/3}-\alpha^{2/3}) + \alpha^{1/3}\rho\sin\varphi - \alpha^{2/3}\rho\cos\varphi\right],$$

$$\sigma^2 = 1 + 3\left(\alpha^{1/3}+\alpha^{2/3}\right) + \alpha^{1/3}\rho\sin\varphi - \alpha^{2/3}\rho\cos\varphi$$

с функцией $\rho(\varphi)$, определяемой (7). Эти формулы параметрически задают приближенно, с точностью до $\alpha^{2/3}$, кривую раздела фаз при малых значениях α. Заметим, что эти выражения для λ, σ^2 при $\varphi = 3\pi/4$ удовлетворяют уравнению эллипса с той точностью, с которой они получены. Таким образом, проблемы, возникшие при построении прямого разложения по полуцелым степеням α связаны с неправильным выбором шкалы асимптотического разложения вблизи $\alpha = 0$.

Если перейти к исходным переменным на другой связной части в точке пересечения диагонали $\langle 1, -1\rangle$, то получим, что $\sigma^2 = 1 - \alpha^{1/3} - \alpha^{2/3}(1 + o(1))$. Таким образом, на этой связной части $\sigma^2 < 1$, и поэтому она не описывает кривую раздела фаз в нашей физической задаче, на которой должно выполняться обратное неравенство для σ^2.

Литература

1. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Анализ стохастической модели химической кинетики бинарной автокаталитической реакции // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 12(155);31. – С.183-185.
2. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии / Пер. с англ. /М.: Мир, 1987. – 400 с.
3. Arnold L., Horsthemke W., Lefever R. White and coloured external noise and transition phenomena in nonlinear systems // Zs. Phys. – 1978. – B29. – P.367-373.
4. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Анализ фазовой диаграммы в стохастической модели химической кинетики бинарной циклической реакции // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 26 (169);33. – С.57-63.

CRITICAL SURFACE INVESTIGATION OF CHEMICAL STOCHASTIC MODEL OF BINARY AUTOCATALYTIC REACTION. LARGE ASYMMETRIC CASE

Pham Minh Tuan, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy Str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru,

Abstract. The stochastic model of binary chemical reaction is studied on the basis of chemical kinetics equations with stochastically perturbed parameters. The perturbation is described by generalized random process named "white noise". The stationary probability distribution density depended on relative concentration is investigated. The critical surface in the three thermodynamical parameter space of the mixture state is observed qualitatively. The noise induced phase transition in the stochastic system is under consideration. At this the reconstruction of unimodal distribution density into the bimodal one is occured at intersection of the critical surface. In the case of the large overcoming of the one component concentration over the other concentration component the perturbation theory is developed. It permits to calculate approximately critical surface at small values of parameter that characterizes such an asymmetry.

Key words: chemical reaction, stochastic model, distribution density, phase transition, bifurcation, critical surface, perturbation theory.

MSC 74C10

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ И ВЫПУЧИВАНИЕ. Часть I: МОДЕЛЬ ШЭНЛИ

В.И. Ванько

МГТУ им. Н.Э.Баумана,
ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, 105005, Россия, e-mail: vvanko@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы теории стержней в постановках, разработанных в трудах Энгессера, Ясинского, Кармана, Шэнли, Хоффа, Работнова, Ильюшина и др., т.е. изучается поведение достаточно коротких стержней (квазистатический процесс), материал которых работает в упруго-пластической стадии; учитываются также свойства ползучести материала.

Ключевые слова: стержневая модель, продольная сила, продолжающееся нагружение, критические значения, корректность квазистатической постановки.

1. История вопроса. В дальнейшем термин «*продольный изгиб*» употребляется при изучении поведения упругих или упруго-пластических стержней под действием возрастающей силы; термин «*выпучивание*» — при изучении поведения стержня, материал которого находится в состоянии ползучести.

Обоснование квазистатического подхода можно найти в работах [1, 2]. Точность такой постановки оценивается в работе [3].

Интерес к проблемам продольного изгиба и выпучивания не случаен, так как большинство элементов современных конструкций работает в условиях, приближающихся к рассматриваемым: высокие уровни нагрузок требуют полного учета упруго-пластических свойств материала; повышенные рабочие температуры эксплуатации изделий выдвигают на первый план необходимость учета свойств ползучести материала. В наиболее ответственных элементах конструкций необходимо учитывать все эти факторы.

Впервые задача об изгибе стержня (в современной трактовке) была поставлена Д. Бернулли, который сформулировал гипотезу *плоских сечений* и пришел к соотношению между изгибающим моментом в сечении, кривизной и жесткостью на изгиб упругого бруса. Эйлер, решая задачу, поставленную Бернулли, получил критическую силу, «силу колонны» [4].

Развитие исследований Эйлера содержится в трудах Лагранжа, Клебша и Кирхгофа, которые разработали геометрически нелинейную теорию гибких упругих стержней [5, 6].

Энгессер, принимая гипотезу плоских сечений, рассмотрел задачу о продольном изгибе с учетом пластичности в геометрически линейной постановке: «Мы представляем себе стержень, изогнутый на очень малую величину δu, и ищем сжимающую силу, способную удержать стержень в этом слабо изогнутом состоянии». Предполагая, что при изгибе *постоянной* силой во всех точках любого поперечного сечения происходит активное нагружение, Энгессер пришел к понятию *касательно-модульной* силы [7].

Ясинский указал, что при изгибе во внешних волокнах стержня происходит разгрузка, и поэтому в формуле для критической силы должен присутствовать множитель, являющийся комбинацией касательного модуля и модуля Юнга [8].

В следующей работе Энгессер дает формулу для вычисления уточненного, «*редуцированного модуля*» для прямоугольного сечения [9].

Дальнейшее, существенное, развитие теории продольного изгиба содержится в работах Кармана [10, 11]. Карман впервые поставил задачу о продольном изгибе стержня с начальными неправильностями — эксцентриситет приложения силы или начальный прогиб, причем материал стержня подчиняется произвольному закону мгновенного нагружения; построены кривые прогиб-нагрузка для различных значений эксцентриситета. Дана также строгая постановка задачи об устойчивости (в смысле Эйлера) стержня под действием постоянной нагрузки и вычислены значения редуцированного модуля для сечений произвольной геометрии. Поставленные Карманом эксперименты до сих пор являются образцовыми [11].

Вопрос казался исчерпанным, пока в 1946 г. не появились работы Шэнли, который по-новому взглянул на проблему продольного изгиба, предположив, что предметом исследования является *свободный* шарнирно опертый стержень и нагрузка непрерывно возрастает. В этой постановке касательно-модульная нагрузка, которую в дальнейшем будем называть *силой Шэнли*, приобретает смысл силы, при которой впервые идеально прямой стержень приобретает *возможность* искривиться. Сила редуцированного модуля, *сила Кармана*, имеет смысл нагрузки, при стремлении к которой прогиб либо скорость прогиба стремятся к бесконечности (интенсивно возрастают) [12, 13].

Необходимо подчеркнуть, что отличие результатов, полученных в различных постановках, является следствием влияния истории нагружения на упруго-пластический процесс, что исследовано Г.В. Ивановым [14].

Следует отметить предшествующие работы Дюберга и Уайлдера, А.А. Ильюшина и В.Г. Зубчанинова [15-17]: стержень рассматривается как элемент некоторой конструкции, со стороны которой на последний во время начала изгиба передается возрастающая или убывающая нагрузка. В этих условиях первоначально прямой стержень может нести нагрузку, бóльшую кармановой.

Так как получение результатов, если отказаться от рассмотрения простейших моделей (модель Шэнли либо двутавр), связано с принципиальными трудностями вследствие необходимости учёта истории нагружения в каждой точке, то естественно, что наряду с работами качественного характера развивались и численные методы решения задач о продольном изгибе.

Впервые, по-видимому, численное интегрирование полученных соотношений предпринял Т. Карман в цитированной выше работе [11].

К. Ежеку удалось найти точное решение задачи о продольном изгибе стержня из упруго-идеально-пластического материала [18].

Т.-Х. Лин впервые предложил шаговый метод, посредством которого процесс решения задачи уже мог быть представлен в виде алгоритма [19].

Развитие техники в послевоенный период ставило исследователей перед необходимостью учёта влияния высоких температур на поведение элементов конструкций. Одним

из основных свойств материалов в условиях работы при высоких температурах является *ползучесть*.

Впервые задача об устойчивости (квазистатический процесс, геометрически линейная постановка) стержня из линейно вязко-упругого материала была поставлена и решена А.Р. Ржаницыным [20]. В этой работе предложен квазистатический критерий (по сути — достаточное условие) устойчивости и исследованы уровни нагрузок, при которых стержень «асимптотически устойчив», т.е. при бесконечно большом времени прогибы его ограничены, и неустойчив: при возрастании времени прогиб стремится к бесконечности при конечном значении времени, т.е. существует *критическое время*.

Н. Хофф исследовал выпучивание стержней из нелинейно вязкого материала (установившаяся ползучесть) [1]. В этом случае, ввиду нелинейности закона ползучести, провести *качественное* рассмотрение уравнения равновесия невозможно, и автор предлагает изучать поведение двутавровой (двухполочной) модели стержня, считая начальную и все последующие формы выпучивания в виде полуволны синусоиды, причём уравнение равновесия удовлетворяется в срединном (по длине стержня) сечении. Это — метод коллокации, качественно аналогичный изучению модели Шэнли [13].

Решающее влияние на дальнейшее развитие работ по исследованию выпучивания стержней имели работы Хоффа [21], и Веубеке [22]. Если рассмотреть стержень из упруго-пластического материала, то вследствие роста деформаций в точках стержня, уменьшается касательный модуль, что приводит к падению мгновенной жёсткости на изгиб поперечных сечений стержня. Наконец, может наступить такой момент времени (при ограниченном прогибе), что приложенная нагрузка станет равна критической мгновенной нагрузке, соответствующей данному значению жёсткости. В этот момент скорость прогиба неограниченно возрастает и стержень теряет *несущую способность*.

Следует отметить работу Жичковского [23], который показал, что если изучать *конечные* прогибы (т.е. решать задачу в геометрически нелинейной постановке) упругого стержня в условиях ползучести, то никаких особенностей на кривой прогиб — время не наблюдается.

В цитированных выше работах отмечалась сильная зависимость критического времени от начальных несовершенств. Поэтому, наряду с отмеченными работами, развивались исследования, в которых рассматривались совершенные конструкции и на основе тех или иных соображений делались выводы о потере устойчивости начальной формы равновесия.

Впервые строгий подход к устойчивости идеального стержня в условиях ползучести продемонстрирован в работе Ю.Н. Работнова и С.А. Шестерикова [24]. Предложенное авторами условие сформулировано в терминах классической теории устойчивости А.М. Ляпунова. Смысл упомянутого условия в следующем: если некоторое возмущение действует на стержень до момента накопления определённого значения деформации ползучести, то возникший прогиб убывает; если возмущение приложено после накопления указанного уровня деформации ползучести, то скорость прогиба возрастает – равновесие неустойчиво.

Обзоры литературы содержатся в работах Ясинского [8], Кармана [10], Хоффа [25, 26], А.С. Вольмира [27]; в работе В.Г. Зубчанинова представлен обширный обзор лите-

ратуры с анализом результатов цитируемых авторов [28].

2. Упруго-пластическая модель Шэнли. Рассматриваем стержневую модель Шэнли, рис. 1, представляющую собой абсолютно жесткую стойку длиною L, опирающуюся на два одинаковых упруго-пластических стержня длиною h ($L \gg h$) с площадью поперечного сечения $F/2$. Заметим, что рассмотрение такой модели равносильно рассмотрению двутавровой модели в случае использования метода коллокации по срединному сечению [1].

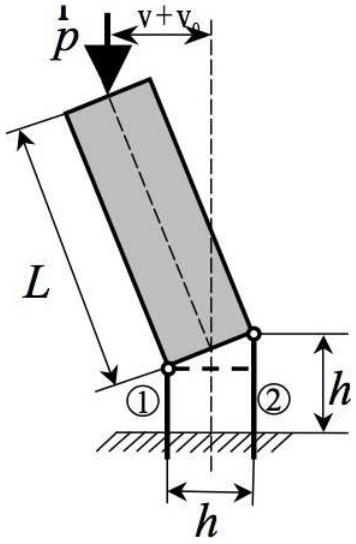

Рис. 1.

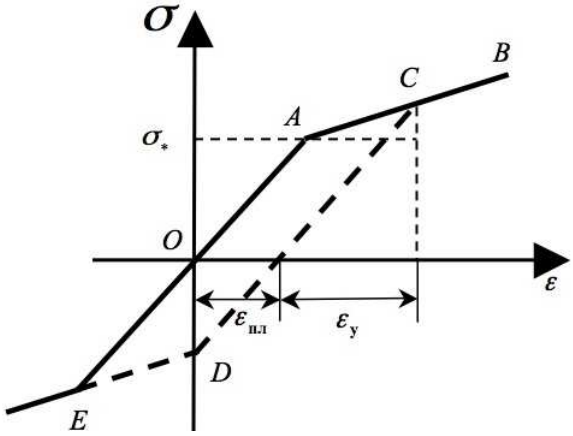

Рис. 2.

Считаем, что стержни 1 и 2 изготовлены из упруго-пластического материала с линейным упрочнением, рис. 2.

Все линейные величины относим к $h/2$; индексы 1 и 2 обозначают величины, соответствующие первому и второму стержням; за положительные приняты сжимающие напряжения, нагрузки и деформации сжатия; E — модуль Юнга, E_t — касательный модуль, принятый постоянным; $\sigma = P/F$, где F — суммарная площадь поперечных сечений стержней.

Общая деформация есть сумма упругой и пластической деформаций: $\varepsilon = \varepsilon_{\text{у}} + \varepsilon_{\text{пл}}$.

Из рис. 2 следует

$$\varepsilon_{\text{пл}} = \frac{\sigma - \sigma_*}{E_t} - \frac{\sigma - \sigma_*}{E} = \frac{E - E_t}{EE_t}(\sigma - \sigma_*)\,, \qquad \varepsilon_{\text{у}} = \sigma/E\,.$$

Поэтому деформация вычисляется в виде

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{(\sigma - \sigma_*)}{\mu} \qquad \left(\mu = \frac{EE_t}{E - E_t}\right)\,. \tag{2.1}$$

Скорость упруго-пластических деформаций в стержнях 1 и 2 можно представить как

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_i}{E} + k_i\frac{\dot{\sigma}_i}{\mu} \quad (i = 1, 2)\,. \tag{2.2}$$

Значения коэффициентов k_1 и k_2, соответствующих стержням, характеризуют процессы нагружения, либо разгрузки:

$$k_i = \begin{cases} 0, & |\sigma_i| < \sigma_*, \\ 1, & |\sigma_i| > \sigma_*, \quad \sigma_i\dot{\sigma}_i > 0 \text{ – активное нагружение}, \\ 0, & |\sigma_i| > \sigma_*, \quad \sigma_i\dot{\sigma}_i < 0 \text{ – разгрузка}. \end{cases}$$

В качестве независимого параметра, по которому производится дифференцирование при изучении упруго-пластических процессов можно выбрать любую положительную монотонно возрастающую функцию, например, возрастающую нагрузку. При учете эффектов ползучести таким независимым параметром является физическое время.

Запишем уравнения равновесия модели и, исходя из геометрических соображений (рис. 1), уравнение совместности деформаций в стержнях:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma\,, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2\sigma w \quad \big(\sigma = P/F,\ w = v/(h/2)\big)\,. \tag{2.3}$$

Пусть v_1 и v_2 — вертикальные перемещения концевых точек стержней 1 и 2 соответственно; v — отклонение точки приложения сжимающей силы. Тогда в силу равенства углов отклонения (рис. 2.1), имеем:

$$(v_1 - v_2)/h = (v - v_0)/L \Rightarrow \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \gamma w \quad (\gamma = h/2L)\,. \tag{2.4}$$

При условии постоянства продольной силы вычисляем эйлерову нагрузку для данной модели в *упругой* стадии:

$$(2.3) \Rightarrow \sigma_1 = \sigma(1+w)\,, \quad \sigma_2 = \sigma(1-w)\,;$$

$$\begin{aligned} (2.4) \Rightarrow \sigma_1/E - \sigma_2/E = \gamma w \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)/E = \gamma w \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\sigma w/E = \gamma w \Rightarrow (2\sigma/E - \gamma)w = 0\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из соотношения (2.5) следует, что решение $w \neq 0$ возможно, если

$$2\sigma/E - \gamma = 0 \Rightarrow \sigma_э \Rightarrow \gamma E/2 = Eh/4L\,. \tag{2.6}$$

Формула (2.6) дает значение эйлерова напряжения. Далее, деформации и напряжения отнесем к соответствующим эйлеровым значениям. Тогда безразмерное эйлерово напряжение $\sigma_э = 1$.

Уравнения (2.3) и (2.4) продифференцируем по некоторому положительному монотонно возрастающему параметру, характеризующему внешнюю нагрузку:

$$\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}(1+w) + \sigma\dot{w}\,, \quad \dot{\sigma}_2 = \dot{\sigma}(1-w) - \sigma\dot{w}\,, \quad \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2 = \gamma\dot{w}\,. \tag{2.7}$$

Подставляя в условие совместности скоростей деформаций (2.7) выражения (2.2), получим уравнение:

$$\dot{\sigma}w\left(1 + (k_1+k_2)\frac{E}{2\mu}\right) + \dot{\sigma}(k_1-k_2)\frac{E}{2\mu} = \dot{w}\left(\gamma\frac{E}{2} - \sigma\left(1 + \frac{E}{2\mu}(k_1+k_2)\right)\right)\,,$$

левую и правую части которого разделим на эйлерово напряжение $\gamma E/2 = \sigma_э$ и запишем уравнение продольного изгиба упругопластической модели Шэнли:

$$\dot{\sigma} w(1+\alpha(k_1+k_2)) + \dot{\sigma}\alpha(k_1-k_2) = \dot{w}\{1-\sigma(1+\alpha(k_1+k_2))\}\,. \tag{2.8}$$

Здесь напряжение σ — безразмерная величина, $\alpha = E/2\mu = (1-\sigma_t)/2\sigma_t$, $\sigma_t = E_t/E$ — безразмерное напряжение по касательному модулю — напряжение Шэнли.

При монотонно возрастающих нагрузках фигурная скобка в правой части уравнения (2.8) является убывающей функцией, имеющей при упруго-пластических деформациях вид:

$$1-\sigma\left(1+\frac{1-\sigma_t}{2\sigma_t}\right) \geq 0 \qquad (k_1=1, k_2=0)\,, \tag{2.9}$$

$$1-\sigma\left(1+\frac{1-\sigma_t}{\sigma_t}\right) \geq 0 \qquad (k_1=1, k_2=0)\,, \tag{2.10}$$

причем (2.9) принимает нулевое значение при

$$\sigma = \frac{2E_t}{E+E_t} = \sigma_k \text{— напряжение Кармана,}$$

а (2.10) обращается в нуль при $\sigma = \sigma_t$.

Считаем, что начальная неправильность $w_0 > 0$. Тогда очевидно, что $\operatorname{sgn} w = \operatorname{sgn} w_0$.

Условимся говорить, что квазистатическая постановка *корректна*, если решение уравнения (2.8) имеет характер: $w > 0$, $\dot{w} > 0$ [29].

Рассмотрим, используя уравнение (2.8), различные постановки.

1) Продольный изгиб упругого стержня в условиях продолжающегося нагружения ($\dot{\sigma} > 0$, $k_1 = k_2 = 0$):

$$(2.8) \Rightarrow \dot{\sigma} w = \dot{w}(1-\sigma)\,; \quad w = w_0 \ \text{ при } \ \sigma = 0 \qquad w = w_0/(1-\sigma)\,, \tag{2.11}$$

отсюда: $\lim\limits_{\sigma\to 1} w =$, т.е. эйлерова сила такова, что, при стремлении $P \to P_э$, прогиб стремится к «бесконечно большому» значению – интенсивно возрастает.

Если $w_0 = 0$, то отличный от нуля прогиб возможен лишь при $\sigma = 1$ (наряду с тривиальным решением).

Таким образом, бифуркация в смысле Эйлера возможна при нагрузке, равной эйлеровой, как при постоянном, так и при продолжающемся нагружении.

Далее считаем, что выполняется неравенство

$$\sigma_* < \sigma_t = E_t/E\,. \tag{2.12}$$

2) Постановка Кармана. Пусть в процессе возрастания нагрузки принимаются меры по предотвращению возможности выпучивания [30, 31]. Ищем такую постоянную силу, при которой наряду с тривиальным решением возможен переход к нетривиальной форме равновесия: $\dot{w} > 0$.

Так как стержень 1 все время находится в состоянии активного нагружения, то $k_1 = 1$. Имеем из (2.8) ($\sigma = \sigma_0, \dot\sigma = 0$):

$$\dot w\big(1 - \sigma_0(1 + \alpha(1 + k_2))\big)\,, \quad w_0 = 0\,. \tag{2.13}$$

Если искомая постоянная сила существует, то в момент перехода к соседней равновесной форме имеем:

$$\sigma_2 > 0\,, \quad \dot\sigma_2 = -\sigma_0 \dot w < 0 \Rightarrow \sigma_2\dot\sigma_2 < 0 \Rightarrow k_2 = 0\,.$$

Поэтому

$$(2.8) \Rightarrow 1 - \sigma_0(1 + \alpha) = 0 \Rightarrow \sigma_0 = 2E_t/(E + E_t) = \sigma_k\,. \tag{2.13}$$

Назовем это безразмерное напряжение (безразмерную нагрузку) *ка́рмановым напряжением* (*ка́рмановой нагрузкой*).

Итак, в случае упругого стержня (при $\dot\sigma = 0$ и $\dot\sigma > 0$) и упруго-пластического (при $\dot\sigma = 0$) осуществляется бифуркация в смысле Эйлера при $\sigma = \sigma_э = 1$ и $\sigma = \sigma_k < 1$ соответственно.

Имеем соотношения между напряжениями по Эйлеру, Карману и Шэнли:

$$\sigma_t < \sigma_k < 1 \qquad (\forall E_t < E) \tag{2.14}$$

3) Постановка Шэнли. Исследуем поведение идеального стержня под действием возрастающей нагрузки: $\dot\sigma > 0$.

Пусть $\sigma_i > \sigma_*$ и в обоих стержнях происходит нагружение: $k_i = 1$, $i = 1, 2$. Поэтому

$$(2.8) \Rightarrow \begin{cases} \dot\sigma w(1 + 2\alpha) = \dot w\big(1 - \sigma(1 + 2\alpha)\big)\,; \\ w = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = \sigma_*\,. \end{cases} \tag{2.15}$$

Задача (2.15) имеет тривиальное решение до тех пор пока $1 - \sigma(1 + 2\alpha) \neq 0$, т.е. $\sigma < E_t/E = \sigma_t$.

Возможность появления нетривиальной формы равновесия могла бы осуществиться только при $\sigma = \sigma_t$. Однако бифуркации в смысле Эйлера не произойдет, потому что в момент перехода к соседней форме равновесия уравнение (2.15) теряет силу, ибо $k_2 = 0$, вследствие изменения знака скорости деформации во втором стержне (второй стержень при появлении изгиба неизбежно подвергается растяжению):

$$\dot\varepsilon_2 = \frac{\dot\sigma_2}{E} + \frac{\dot\sigma_2}{\mu} < 0 \Rightarrow \dot\sigma_2 < 0 \Rightarrow \sigma_2\dot\sigma_2 < 0\,.$$

Следовательно, во втором стержне реализуется состояние *разгрузки*.

Если при $\sigma \geq \sigma_t$ начнется продольный изгиб, то процесс будет описываться решением задачи:

$$\begin{cases} \dot\sigma w(1 + \alpha) + \alpha\dot\sigma = \dot w(1 - \sigma(1 + \alpha))\,; \\ w = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = \sigma_t\,. \end{cases} \tag{2.16}$$

Отсюда получим

$$w = \alpha\frac{\sigma - \sigma_t}{1 - \sigma(1 + \alpha)}\,.$$

Предположив, что материал абсолютно упруг при растяжении, получим результат Шэнли—Работнова [13, 30, 31]: $w \to \infty$ при $\sigma \to \sigma_k$, рис. 3.3.

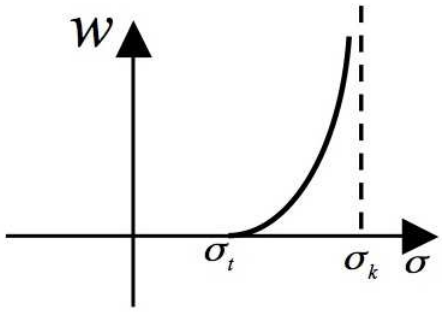

Рис. 3.

При рассмотрении обычной схемы $\sigma \sim \varepsilon$ (без учета эффекта Баушингера) решение задачи (2.16) описывает процесс продольного изгиба до тех пор, пока $\sigma_2 = \sigma(1-w) > -\sigma_*$, после чего имеем:

$$|\sigma_2| > \sigma_*\,, \quad \sigma_2 < 0\,, \quad \dot{\sigma}_2 < 0 \Rightarrow \sigma_2\dot{\sigma}_2 > 0 \quad \text{и} \quad k_1 = 1\,.$$

Изгиб описывался бы уравнением (2.15), в правой части которого множитель $\dot{w}$ при принял бы отрицательное значение:

$$1 - \sigma(1+2\alpha) < 0\,, \quad \text{так как} \quad \sigma > \sigma_t\,.$$

При этом $\dot{w} < 0$ и квазистатическая постановка теряет *корректность*. В работе [32] показано, что при этом нарушаются условия равновесия модели.

Итак, квазистатический продольный изгиб заканчивается при $\sigma \le \sigma_k$ с конечной скоростью и конечным прогибом, рис. 4.

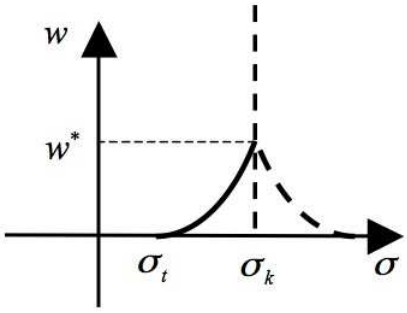

Рис. 4.

Можно показать, что при малых начальных прогибах $w_0 \sim 0,1$ напряжение $\tilde{\sigma}$, при котором

$$\sigma_2 = \sigma(1-w) = -\sigma_*$$

удовлетворяет неравенствам [29]:

$$\sigma_t < \tilde{\sigma} < \sigma_k \,. \tag{2.17}$$

Неравенства (2.17) существенны для дальнейшего анализа. Сводка результатов некоторых вычислений приведена в табл. 1.

Таблица 1

w_0	σ_*	σ_t	σ_k	$\tilde{\sigma}$	W
0,05				0,566	
0,1	0,4	0,45	0,617	0,552	1,89
0,15				0,537	
0,05				0,7	
0,1	0,5	0,6	0,75	0,68	1,835
0,15				0,664	

Отметим, что учет эффекта Баушингера существенных изменений в характер процесса упруго-пластического продольного изгиба не вносит [32].

3. Модель Шэнли в условиях ползучести. При изучении выпучивания стержней при ползучести за критерий «потери устойчивости» (достаточное условие) обычно принимается какая-то характерная особенность кривой «прогиб—время». Например, обращение прогиба в бесконечность при конечном времени [1], точка минимума [2], точка перегиба [33, 34], обращение скорости прогиба в бесконечность (при конечном значении времени) [35, 36].

В настоящем разделе выясним качественный характер процессов выпучивания в зависимости от уровня нагрузки [29].

Примем за основу степенной закон установившейся ползучести с нечетным показателем степени (для упрощения выкладок). Тогда скорости деформаций в стерженьках модели Шэнли выразятся зависимостями:

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{\dot{\sigma}_i}{E} + \frac{\dot{\sigma}_i}{\mu} + \left(\frac{\sigma_i}{\lambda}\right)^n . \tag{2.18}$$

Здесь λ – постоянная ползучести материала, n – нечетное целое число, либо отношение двух нечетных чисел.

Уравнение равновесия, вывод которого аналогичен выводу уравнения (2.8), получается в виде:

$$\dot{\sigma} w\big(1 + \alpha(k_1 + k_2)\big) + \dot{\sigma}\alpha(k_1 - k_2) +$$
$$+\gamma^{-1}\left(\frac{E}{\lambda}\right)^n \sigma^n\{(1+w)^n - (1-w)^n\} = \dot{w}\{1 - \sigma\big(1 + \alpha(k_1 + k_2)\big)\}\,. \tag{2.19}$$

Исследуем решение следующей задачи: стержень *мгновенно* (разумеется, квазистатически) нагружается до уровня $\sigma = \sigma_0 = \mathrm{const}$; выясним влияние величины σ_0 на характер выпучивания.

Нагружаем стержень силой $\sigma_0 = \sigma_t$. Так как при этом $|\sigma_2| < \sigma_*$ (см. неравенство (2.17)), то $k_2 = 0$. Из (2.19) имеем

$$\begin{cases} \gamma^{-1}\left(\dfrac{E}{\lambda}\right)^n \sigma_0^n\{(1+w)^n - (1-w)^n\} = \dot{w}\{1 - \sigma_0\big(1+\alpha\big)\} \\ w = w^{(*)}|_{\sigma_0=\sigma_t} \quad \text{при} \quad t = 0\,. \end{cases} \tag{2.20}$$

Предполагаем, что изначально стержень имел некоторый прогиб w_0 и величину прогиба $w^{(*)}$ вычислили, решая упруго-пластическую задачу при $\sigma \to \sigma_t$.

Уравнение (2.20) сохраняет силу до достижения прогибом величины w^* (см. табл. 1), при которой

$$\sigma_2 = \sigma_t(1 - w^*) = -\sigma_*\,.$$

Время достижения этого прогиба в силу (2.20):

$$t_1^* = \gamma\,[1 - \sigma_t(1+\alpha)]\left(\frac{\lambda}{E\sigma_t}\right)^n \int\limits_{w^{(*)}}^{w^*} \frac{dw}{(1+w)^n - (1-w)^n}\,.$$

При $w > w^*$ имеем $k_1 = 1$, $|\sigma_2| > \sigma_*$, $\dot{\sigma}_2 = -\sigma_t\dot{w} < 0$ и так как $\sigma_2\dot{\sigma}_2 < 0$, $k_2 = 1$. Следовательно, $k_1 = k_2 = 1$ и поэтому в уравнении выпучивания множитель при $\dot{w}$ в правой части обращается в нуль, в результате, имеем:

$$\dot{w}(t_1^*) = \infty\,.$$

Потеря устойчивости происходит в смысле Хоффа—Веубеке [21, 22, 35, 36] (см. рис. 5), прогиб конечен, скорость прогиба бесконечна при $t = t_1^*$.

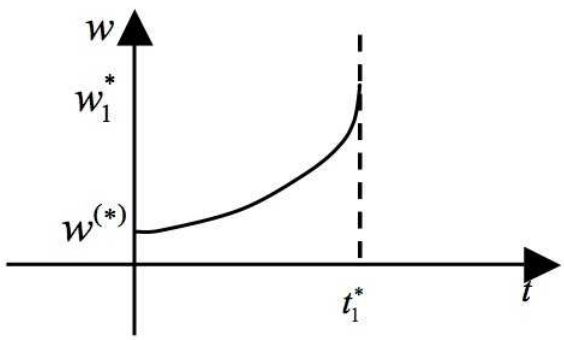

Рис. 5.

Будем нагружать «мгновенно» стержень нагрузкой равной $\sigma_0 = \sigma_t + \delta\sigma$, где $\delta\sigma$ — положительная либо отрицательная величина $|\delta\sigma| \ll \sigma_t$.

1). Пусть $\delta\sigma < 0$. Процесс описывается уравнением (2.20) с начальным условием

$$w = w^{(**)}|_{\sigma_0<\sigma_t} \quad \text{при} \quad t = 0\,.$$

Так же, как и выше, уравнение (2.20) сохраняет силу до определенного прогиба $w^{**}(t_2^*)$, при котором во втором стержне достигается предел текучести при растяжении $\sigma_2 = -\sigma_*$. В таком случае задача для уравнения выпучивания имеет вид:

$$\begin{cases} \gamma^{-1}\left(\dfrac{E}{\lambda}\sigma_0\right)^n \{(1+w)^n - (1-w)^n\} = \dot{w}\left[1 - \sigma_0(1+2\alpha)\right], \\ w = w^{(**)}|_{\sigma_0=\sigma_t} \quad \text{при} \quad t = t_2^*. \end{cases} \tag{2.21}$$

Так как в квадратных скобках справа величина положительная, квазистатическая постановка сохраняет корректность при любой величине прогиба: $\dot{w} > 0$.

Из (2.21) имеем:

$$t = \frac{\gamma}{\sigma_0^n}\left\{\frac{\lambda}{E}\right)^n \left([1 - \sigma_0(1+\alpha)] \int\limits_{w^{(**)}}^{w^{**}} \frac{dw}{(1+w)^n - (1-w)^n} + \right.$$

$$\left. + \ [1 - \sigma_0(1+2\alpha)] \int\limits_{w^{**}}^{w} \frac{dz}{(1+z)^n - (1-z)^n}\right\}.$$

При $w \to$ и $n > 1$ несобственный интеграл (второе слагаемое в фигурных скобках) сходится и происходит потеря устойчивости в смысле достижения бесконечно большого прогиба за конечное время, t^* — *критическое время*, см. рис. 6.

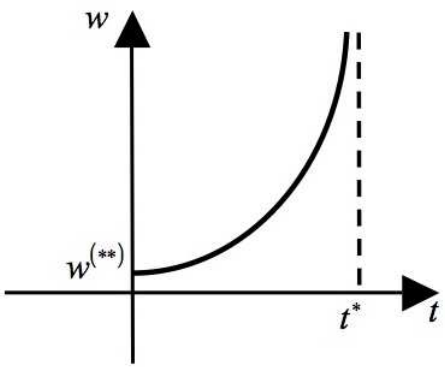

Рис. 6.

2). При $\delta\sigma > 0$ имеем уравнение (2.20), где $\sigma_0 > \sigma_t$. Начальным условием служит мгновенный прогиб w_{***}, соответствующий σ_0. При $w = w^{***}$ имеем $\sigma_2 = -\sigma_*$. Достижение этого прогиба произойдет за время

$$t_3^* = \frac{\gamma}{\sigma_0^n}\left(\frac{\lambda}{E}\right)^n [1 - \sigma_0(1+\alpha)] \int\limits_{w_{***}}^{w^{***}} \frac{dw}{(1+w)^n - (1-w)^n}.$$

Так как при $w > w^{***}$, имеем $|\sigma_2| > \sigma_*$, то $k_2 = 1$ и выпучивание описывалось бы уравнением (2.21), причем в квадратных скобках справа (множитель при $\dot{w}$) стояла бы отрицательная константа

$$1 - \sigma_0(1 + 2\alpha) < 0\,.$$

Отсюда видно, что при времени $t > t_3^*$ квазистатическое рассмотрение становится *некорректным*. Важно подчеркнуть, что (см. рис. 7)

$$0 < \dot{w}(t_3^* - 0) < \infty\,.$$

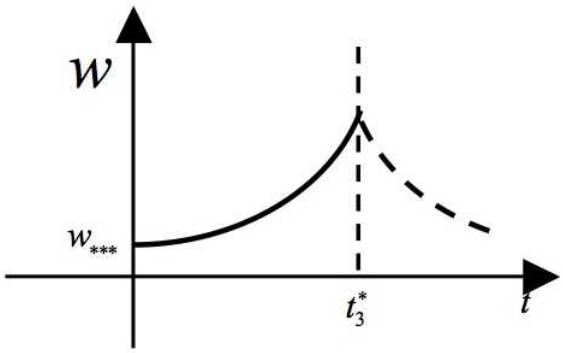

Рис. 7.

Таким образом, процесс выпучивания (кривая $w \sim t$) при $\sigma_0 = \sigma_t$ неустойчив в том смысле, что при любом изменении мгновенно приложенной нагрузки характер выпучивания существенно изменяется.

Литература

1. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость / М: ИЛ, 1956. – 156 с.
2. Rabotnov Ju.N. The theory of creep and its applications // Plasticity. – N.-Y.: Pergamon press, 1960. – 612 с.
3. Макаров Б.П. О поведении сжато-изогнутых стержней в пластической стадии // Строительная механика и расчёт сооружений. -– 1965. – №5. – С.35-37.
4. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума / М.-Л.: ГТТИ, 1934. – 600 с.
5. Лагранж Ж. Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны // Николаи Е.Л. Труды по механике / М.: ГТИ, 1955. – 584 с.
6. Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике / М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 402 с.
7. Engesser F. Über Knickfestigkeit gerader Stäbe // Zeitschrift der Architect und Ingenieur Vereinigung zu Hannover. – 1889. – B.35. – S.455.
8. Jasinski F. Zu den Knickfragen // Schweiz. Bauzeitung. – 1895. – B.26;24 (см. Ясинский Ф.С. Избранные труды / М.: ГТИ, 1952. – 428 с.).
9. Engesser F. Über Knickfestigkeit // Schweiz. Bauzeitung. – 1895. – B.26; 24.
10. Kármán Th., von Die Knickfestigkeit gerader Stübe // Physikalische Zeitschrift. – 1908. – B.8, S.136 (см. Kármán Th., von Collected Works. Vol. 1: 1902-1913 / London: Butter Worths Scientific Publications, 1956. – 531 с.).

11. Kármán Th., von Untersuchungen über Knickfestigkeit // Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgegeben vom Verein Deutscher Ingenieure. – 1910. – B.81 (см. Collected Works of Th. von Kármán. Vol. 1).
12. Shanley F. The column paradox // Journal of the aeronautical Sciencis (JAS). – 1946. – 13; №12. – P.678.
13. Shanley F. Inelastic column theory // JAS. – 1947. – 14; №5. – P.261-267.
14. Иванов Г.В. Об устойчивости равновесия при неупругих деформациях // ПМТФ. – 1961. – №1. – С.47-56.
15. Дюберг Дж., Уайлдер Т. Поведение колонны в области пластических деформаций // Сб. переводов Механика. – 1951. – №5. – С.67-72.
16. Ильюшин А.А. Об упруго-пластической устойчивости конструкции, включающей стержневые элементы // Инж. сборник. – 1960. – XXVII. – С.87-90.
17. Зубчанинов В.Г. Устойчивость стержней как элементов конструкций // Инж. сборник. – 1960. – XXVII. – С.101-113.
18. Jeźek K. Die Tragfähigkeit des exzentrisch beanspruchten und des querbelasteten Druckstabes aus einem ideal plastischen Stahl // Sitzungsberichte der Academie der Wissenshaften in Wien. – Abteilung IIa. – 1934. – B.143; 7. – S.339-366.
19. Лин Т.-Х. Выпучивание неупругой колонны // Сб. Механика. – 1951, №5 – С. 61-83.
20. Ржаницын А.Р. Процессы деформирования конструкций из упруго-вязких элементов // ДАН СССР. – 1946. – LII; №1. – С.25-27.
21. Hoff N.J. Creep Buckling // The Aeronautical Quarterly. – 1956. – 7; №2. – P.1-20.
22. Veubeke F. Creep Buckling // Chapter 13 in Temperature effects in Aircraft Structures / N.-Y.: Pergamon Press, 1958. – 420 с.
23. Życzkowsky M. Creep Buckling // in Creep in Structures / N.-Y.: Academic Press; Springer, 1962. – 375 с.
24. Работнов Ю.Н., Шестериков С.А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // ПММ. – 1957. – 21; №3. – С.406-412.
25. Хофф Н. Выпучивание при высоких температурах // Сб. Механика. – 1958. – №5. – С.63-100.
26. Хофф Н. Обзор теорий выпучивания при ползучести // Сб. Механика. – 1960. – №1. – С.63-96.
27. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем / М.: Физматгиз, 1963. – 880 с.
28. Зубчанинов В.Г. Устойчивость / Учебное пособие. Часть 1 / Тверь: Тв. политехн. ин-т, 1995.– 200 с.
29. Ванько В.И. О критериях выпучивания в условиях ползучести // ПМТФ. – 1965. – №2. – С.127-130.
30. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов / М.: Физматгиз, 1962. – 456 с.
31. Работнов Ю.Н. О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности // Инж. сборник. – 1952. – XI. – С.123-126.
32. Пановко Я.Г. О критической силе сжатого стержня за пределом пропорциональности // Инж. сб. – 1954. – XX. – С.160-163.
33. Шестериков С.А. О критериях устойчивости при ползучести // ПММ. – 1959. – 23;6. – С.1101-1106.
34. Куршин Л.М. Устойчивость стержней в условиях ползучести // ПМТФ. – 1961, – №6. – С.128-135.
35. Хофф. Н. Продольный изгиб при ползучести // Сб. пер. Механика. – М.: ИЛ, 1956, №6. – С.118-134.
36. Де Веубеке Ф. Выпучивание при ползучести // Сб. Влияние высоких температур на авиаконструкции. – М.: Оборонгиз. – 416 с.

LONGITUDINAL BEND AND SWELLING. Part I: SHANLEY MODEL

V.I. Vanko

Bauman MSTU
2d Bauman St., 5, Moscow, 105005, Russia, e-mail: vvanko@mail.ru

Abstract. Some problems of the rod theory in frameworks of approaches proposed by Engesser, Jasinski, Kármán, Shanley, Rabotnov, Ilyushin et al It is studied the evolution of sufficiently short rods (quasistatic process) at the elastic-plastic stadium is under consideration and the creep property of its material is taken into account.

Key words: rod model, longitudinal force, stressing, critic values, correctness, quasistatic statement.

MSC 82B20

ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ ВЕКТОРНОЙ РЕШЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ С ПАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ. СЛУЧАЙ ВЫРОЖДЕННОГО ОБМЕННОГО ИНТЕГРАЛА

А.С. Клюев, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучается класс периодических основных состояний сферически симметричной векторной модели статистической механики решеточных систем с парным обменным взаимодействием с суммируемым обменным интегралом. Показано, что векторное поле, минимизирующее энергию, при отсутствии вырождения обменного интеграла таково, что его фурье-образ сосредоточен не более чем в двух противоположных по знаку точках $\mathbf{k}$-пространства.

Ключевые слова: векторная модель, гамильтониан, основное состояние.

Введение. Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [1]. Объектом этих исследований является классическая задача теории магнетизма (см. [2]) – описание класса векторных полей, реализующих минимум фиксированного магнитного гамильтониана. Как и в работе [1], эту задачу мы будем изучать в рамках так называемой векторной сферически симметричной модели статистической механики классических решеточных систем без учета в ней внешнего магнитного поля [3]. В отличие от указанной работы, мы рассмотрим случай, когда обменный интеграл, описывающий взаимодействие пар магнитных моментов в узлах решетки, обладает фурье-образом, минимум которого реализуется на таком множестве $\mathcal{K}$ пар, взаимно-противоположных по знаку волновых векторов, которое содержит более одной пары. При этом парный обменный интеграл предполагается суммируемым на решетке. Мы покажем, что класс распределений векторных полей на решетке, минимизирующих энергию, является, по сути, тем же самым, что и в случае, когда указанное множество состоит из одной пары, а именно эти векторные поля представляют спиралеобразные структуры.

1. Векторная решеточная модель. Рассмотрим модель бесконечной идеальной кристаллической решетки в виде дискретного периодического множества Λ в $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$. Для простоты, будем считать, что решетка обладает простой элементарной кристаллической ячейкой и, более того, представляет собой простую кубическую решетку, то есть ее постоянные векторы решетки $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ $(d = 3)$ взаимно ортогональны и имеют одинаковую длину, которую, опять же для простоты, будем считать единичной и физически безразмерной. В этом случае множество $\Lambda = \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{Z}^d = \Big\{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} n_i \mathbf{e}_i\,,\ n_i \in \mathbb{Z}\,, i = 1, 2, 3\Big\}. \tag{1}$$

Здесь полагается, что начало отсчета $\mathbf{0}$ совмещено либо с одним из узлов Λ, либо с центром ячейки.

Обозначим посредством Λ_N конечное подмножество из Λ, определяемое как

$$\Lambda_N = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} n_i \mathbf{e}_i \ : n_i = -L/2 + k, k = 0 \div L, i = 1 \div d \right\},$$

где $N = (L+1)^d$ и $L \in \mathbb{N}$. Это множество служит моделью конечного образца кристалла с простой элементарной кристаллической ячейкой, где число L – является его размером. Если L нечетно, то начало координат помещается в центр тяжести элементарной ячейки, если же L четно, то – в узел решетки.

Обозначим, далее, посредством $\mathcal{M}_d$ класс всех векторных (псевдовекторных) полей $\langle \mathbf{s}_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2, 3;\ s_j(\mathbf{x}) s_j(\mathbf{x}) = s^2 \rangle$. По повторяющемуся векторному индексу j здесь и далее предполагается суммирование от 1 до 3. Таким образом, независимо от размерности d решетки, поле всегда полагается трехмерным. Поэтому, далее, во всех выражениях, в которых векторный индекс не повторяется, полагается, что он принимает значения от 1 до 3, а если векторный индекс у поля не указывается, то оно выделяется жирным шрифтом как и узлы решетки. [1)]

Пусть каждому распределению поля $\langle s_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda_N \rangle$ сопоставлено значение гамильтониана

$$\mathsf{H}_N[\mathbf{s}] = \frac{1}{2} \sum_{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \in \Lambda_N^2} I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) s_i(\mathbf{x}_1) s_i(\mathbf{x}_2) \tag{2}$$

— энергии поля $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ в кристалле Λ_N. Решеточная система статистической механики с гамильтонианом (2) называется сферически симметричной векторной моделью в отсутствии внешнего магнитного поля. Здесь функция $I(\mathbf{x})$, заданная на решетке Λ, предполагается обладающей свойствами симметрии $I(\mathbf{x}) = I(-\mathbf{x})$ и достаточно быстрой сходимости к нулю при $|\mathbf{x}| \to \infty$ такой, что

$$\sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} |I(\mathbf{x})| < \infty\,. \tag{3}$$

В статистической механике часто используется конструкционный прием, который называется введением периодических граничных условий [1]. Этим термином обозначается сопоставление системе с гамильтонианом H_N системы с гамильтонианом, обозначаемым нами далее $\mathsf{H}[\cdot; \Lambda_N]$, который определяется на классе периодических по $\operatorname{mod} \Lambda_N$ полей $\mathbf{s}$ на Λ.

3. Задача об определении основного состояния. В рамках моделей с гамильтонианами вида (2) и соответствующих каждому из них периодических аналогов $\mathsf{H}[\cdot; \Lambda_N]$ представляет особенный интерес решение задачи об описании таких полей $\langle s_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda \rangle$,

[1]На самом деле, из полученного основного результата работы вытекает, что он остается верным и в том случае, когда размерность вектора s_i равна двум. Одномерный же случай, соответствующий так называемой модели Изинга, является вырожденным и на него результат настоящей работы не распространяется.

которые реализуют минимум для каждого члена последовательности функционалов $\langle \mathsf{H}_N; L \in \mathbb{N}\rangle$. Это означает, что для каждого Λ_N ищется класс $\mathcal{B}_N$ полей $\langle s_i^{(N)}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda_N\rangle$, $(\mathbf{s}^{(N)}(\mathbf{x}))^2 = 1$, которые реализуют минимум функционала $\mathsf{H}_N[\cdot; \Lambda_N]$,

$$E_N = \min\{\mathsf{H}_N[\mathbf{s}^{(N)}]\,; \mathbf{x} \in \Lambda_N\}\,.$$

После этого ищется класс $\mathcal{B}$ полей $\langle s_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda\rangle$, которые являются предельными точками последовательностей $\langle\langle s_i^{(N)}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda_N\rangle; N = (L+1)^d\rangle$ при переходе к пределу $L \to \infty$. Такой предельный переход называется *термодинамическим.* [2]

Вычисление поля $\mathbf{s}^{(N)}$, которое реализует условный минимум гамильтониана H_N при выполнении совокупности условий $(\mathbf{s}^{(N)}(\mathbf{x}))^2 = 1$, $\mathbf{x} \in \Lambda_N$ является, таким образом, задачей на условный экстремум. Однако, ее решение на основе стандартного метода неопределенных множителей Лагранжа крайне затруднительно. Поэтому в настоящей работе применяется иной метод решения этой задачи, который был использован в работе [1]. Этот метод в сильной степени приспособлен к специфике рассматриваемой задачи и, по-видимому, не допускает широкого обобщения.

При решении задачи об описании класса полей, минимизирующих последовательность функционалов $\langle \mathsf{H}_N; L \in \mathbb{N}\rangle$, нами применяется конечное преобразование Фурье для полей на Λ_N, подробно разобранное в работе [1]. Поэтому мы, при решении задачи, будем обращаться с формализмом конечного преобразования Фурье без детальных пояснений, отсылая читателя за подробностями к цитируемой работе.

4. Описание класса $\mathcal{B}_N$. Не ограничивая общности, можно считать, что $I(0) = 0$ в (2), так как, в противном случае, слагаемые $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\mathbf{x}} I(0)(\mathbf{s}^{(N)}(\mathbf{x}))^2 = \dfrac{1}{2}I(0)N$, пропорциональные $I(0)$, не зависят от вида поля $\mathbf{s}^{(N)}(\mathbf{x})$ и поэтому могут не учитываться при вычислении основного состояния. Кроме того, мы опишем класс $\mathcal{B}$, соответствующий указанному выше гамильтониану $\mathsf{H}[\cdot; \Lambda_N]$ с периодическими граничными условиями. При этом поле, минимизирующее энергию, при некоторых ограничениях на порядок перехода к термодинамическому пределу (см. ниже) не зависит от величины N. По этой причине, мы будем далее опускать верхний индекс N в обозначении этого поля.

Определим, на основе конечного Фурье-преобразования, функции

$$\bar{I}_N(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} I(\mathbf{x}) \exp\left(-i(\mathbf{k},\mathbf{x})\right)\,, \tag{4}$$

$$\bar{s}_j(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} s_j(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \tag{5}$$

так, что имеют место формулы обращения

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{I}_N(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{I}_N(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\,, \tag{6}$$

[2] Подробнее об этом предельном переходе см. [1].

$$s_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j^*(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\,, \tag{7}$$

выполняющиеся во всех узлах $\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^d$.

Из условия $I(-\mathbf{x}) = I(\mathbf{x})$ и определения (4) следует, что функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ вещественна и для нее имеет место равенство $\bar{I}(-\mathbf{k}) = \bar{I}(\mathbf{k})$. Кроме того, заметим, что, в силу абсолютной суммируемости $I(\mathbf{x})$ на Λ (см. (3)), в формуле (4) возможен термодинамический предельный переход $\Lambda_N \to \Lambda$ при $L\to\infty$,

$$\bar{I}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} I(\mathbf{x})\exp\left(-i(\mathbf{k},\mathbf{x})\right)\,, \tag{8}$$

а также, как следствие, — такой же предельный переход в формуле (6), который приводит к представлению

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}} \bar{I}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}d\mathbf{k}\,, \tag{9}$$

где $\bar{\Lambda} = (-\pi,\pi]^d$. При этом функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ непрерывна внутри $\bar{\Lambda}$ и периодическая по $\operatorname{mod}\bar{\Lambda}$. Свойство абсолютной суммируемости обменного интеграла $I(\mathbf{x})$ гарантирует непрерывность $\bar{I}(\mathbf{k})$ на границе области $\bar{\Lambda}$.

Вещественная функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ определена для всех векторов $\mathbf{k}$, составляющих пространство $\mathbb{R}^d$, в котором она является периодической по $\operatorname{mod}\bar{\Lambda}$. В силу свойства $\bar{I}(-\mathbf{k}) = \bar{I}(\mathbf{k})$, если эта функция имеет глобальный минимум в какой-либо точке $\mathbf{k}_*\in\bar{\Lambda}$, то она обязана иметь такой же минимум в точке $-\mathbf{k}_*$.

При решении задачи описания класса основных состояний векторной модели мы будем в настоящей работе предполагать, в отличие от [1], что множество $\mathcal{M}$ пар точек $\{\mathbf{k}_*,-\mathbf{k}_*\}$ вместе с возможной точкой $\mathbf{k}_* = 0$ (для которой нет парной), в которых функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ достигает глобального минимума в $\bar{\Lambda}$, не состоит только из единственной пары.

Для решения задачи о минимуме преобразуем гамильтониан следующим образом. Подставим в периодический гамильтониан

$$\mathsf{H}[\mathbf{s}(\mathbf{x});\Lambda_N] = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}_1\in\Lambda,\ \mathbf{x}_2\in\Lambda_N} I(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)s_j(\mathbf{x}_1)s_j(\mathbf{x}_2)$$

разложения (7). Тогда, после естественных преобразований (см. [1]), получим

$$\mathsf{H}[\mathbf{s}(\mathbf{x});\Lambda_N] = \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{I}(\mathbf{k})|\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2\,. \tag{10}$$

Пусть функция $\bar{I}_N(\mathbf{k})$ имеет глобальный минимум в какой-то паре точек $\{\mathbf{k}_*,-\mathbf{k}_*\}\subset\bar{\Lambda}_N$ (либо в точке $\mathbf{k}_* = 0$). Тогда при $L\to\infty$, когда $\Lambda_N\to\Lambda$, в силу непрерывности функции $\bar{I}(\mathbf{k})$, во всех точках из $\bar{\Lambda}_N$, соответствующих кристаллу Λ_N с размером L, имеет место предельное соотношение $\bar{I}_{m^dN}(\mathbf{k})\to\bar{I}(\mathbf{k})$ при $m\to\infty$, когда размер L

кристалла Λ_N увеличивается пропорционально $m \in \mathbb{N}$. Однако, при переходе к такому пределу глобальный минимум функции $\bar{I}(\mathbf{k})$ может появиться в точке $\mathbf{k}_*$, которая не содержится ни в одном из множеств $\bar{\Lambda}_N$. Не отвлекаясь на эти математические тонкости, будем решать задачу об описании класса основных состояний гамильтониана только для того случая, когда точки минимума функции $\bar{I}(\mathbf{k})$ не зависят от размера L кристалла, начиная с некоторого его значения.

Итак, необходимо минимизировать квадратичную форму (10) с учетом N условий $s_j^2(\mathbf{x}) = 1, \mathbf{x} \in \Lambda_N$. Всю совокупность этих условий запишем в следующей эквивалентной форме

$$\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} s_j^2(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{x},\mathbf{k})} = N\delta_{\mathbf{k},0}\,, \quad \mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N\,.$$

Подстановка в левую часть, фурье-представления (7) векторного поля $s_j(\mathbf{x})$ приводит эту систему условий, ограничивающих возможный выбор поля $s_j(\mathbf{x})$ при минимизации квадратичной формы (10), к квадратичной форме в терминах поля $\bar{s}_j(\mathbf{k})$,

$$\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} s_j^2(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{x},\mathbf{k})} = \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} \exp(i(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2)\delta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2+\mathbf{k}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}')\bar{s}_j^*(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\,.$$

Таким образом, имеем

$$\delta_{\mathbf{k},0} = \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}'\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}')\bar{s}_j^*(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\,, \quad \mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N\,. \tag{12}$$

При этом на поле $\bar{s}_j(\mathbf{k})$, ввиду его комплекснозначности, наложены дополнительные условия $\bar{s}_j^*(\mathbf{k}) = \bar{s}_j(-\mathbf{k})$.

Поиск минимума формы (10) при совокупности условий (12) производится следующим образом. Сначала, находятся поля $\bar{s}_j(\mathbf{k})$, реализующие минимум с учетом только одного условия из списка (12), а именно при $\bar{\mathbf{k}} = 0$,

$$\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} |\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2 = N^2\,.$$

Затем для полей этого класса проверяется выполнимость условий (12) при $\bar{\mathbf{k}} \neq 0$.

При учете только условия с $\mathbf{k} = 0$ нужно минимизировать линейную форму

$$\mathsf{H}_N = \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{I}(\mathbf{k})\eta(\mathbf{k})\,, \tag{13}$$

у которой неотрицательные переменные $\eta(\mathbf{k}) = |\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2$ подчинены условию

$$\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \eta(\mathbf{k}) = N^2. \tag{14}$$

При этом переменные $\eta(\mathbf{k})$ не являются независимыми, а подчинены условиям

$$\eta(\mathbf{k}) = \eta(-\mathbf{k})\,, \quad \mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N\,, \tag{15}$$

где $\mathbf{k} \notin \partial(-\pi,\pi]^d$. Используя непрерывность функции $\bar{I}(\mathbf{k})$, можно считать, что в форме допускаются также все слагаемые с векторами $\mathbf{k} \in \partial(-\pi,\pi]^d$ и последнее ограничение можно опустить.

Минимизация линейной формы на выпуклом множестве $\mathcal{R} = \{\eta(\mathbf{k}) \geq 0 : \mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N, \sum\limits_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \eta(\mathbf{k}) = N^2\}$ сводится к выбору набора значений $\eta(\mathbf{k})$ на его границе. Среди всех граничных точек реализуют минимум только те, в которых достигается абсолютный минимум функции $\bar{I}(\mathbf{k})$. Ранее было указано, что эта функция обладает свойством инвариантности $\bar{I}(\mathbf{k}) = \bar{I}(-\mathbf{k})$, если $\mathbf{k}$ находится внутри $\bar{\Lambda}_N$. Если же $\mathbf{k}$ находится на границе куба $\bar{\Lambda}_N$ (но не в угловой точке), то рассмотрим два случая. Если вектор $\mathbf{k}$ лежит на внутренней части какой-либо стороны $\bar{\Lambda}_N$ (не на ребре), то выполняется $\bar{I}(\mathrm{pr}(\mathbf{k})) = \bar{I}(-\mathrm{pr}(\mathbf{k}))$, где pr обозначает проекцию $\bar{\Lambda}_N$ на: координатную плоскость, параллельную этой стороне. Это следует из формулы (8), в которую нужно подставить, например, $\mathbf{k} = \pi\mathbf{e}_1 + \mathrm{pr}(\mathbf{k})$. Если же вектор $\mathbf{k}$ лежит на внутренней части ребра куба $\bar{\Lambda}_N$, то в указанной формуле операция pr обозначает проекцию на координатную ось, параллельную этому ребру, что вытекает из аналогичной подстановки в формулу (8), например, $\mathbf{k} = \pi(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)+\mathrm{pr}(\mathbf{k})\mathbf{e}_3$. Отождествив противоположные стороны границы области $\bar{\Lambda}_N$, можно считать, что функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ инвариантна относительно преобразования $\mathbf{k} \Rightarrow -\mathbf{k}$ на $\bar{\Lambda}_N$ с учетом такого отождествления, что будет далее везде подразумеваться. Возможность включения угловых точек куба в множество $\mathcal{K}$ мы не рассматриваем.

Обозначим посредством $\mathcal{K}$ подмножество в замыкании $\mathrm{cl}(\bar{\Lambda}_N)$, с учетом отождествления противоположных сторон, для тех векторов $\mathbf{k}$, в которых реализуется этот глобальный минимум. Это множество инвариантно относительно отражений $-\mathcal{K} = \mathcal{K}$, ввиду свойства (15), если под отражением понимать сделанное выше соглашение об отождествлении сторон $\bar{\Lambda}_N$, а также ввиду того, что для этих точек минимума имеет место $\bar{I}(\mathbf{k}) = \bar{I}(-\mathbf{k})$. Кроме того, нужно учесть инвариантность минимизируемой формы относительно замены $\mathbf{k} \Rightarrow -\mathbf{k}$. Тогда функции $\eta(\mathbf{k})$, для которых достигается минимум формы (13) могут быть не равны нулю только для $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$. Отсюда следует, что векторное поле $\bar{s}_j(\mathbf{k})$, в общем случае, может быть отлично нуля только при $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$.

Потребуем теперь выполнимости соотношений (12). После подстановки в эти соотношения, получим

$$\delta_{\mathbf{k},0} = \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}'\in\mathcal{K},\, \mathbf{k}-\mathbf{k}'\in\mathcal{K}} \bar{s}_j(\mathbf{k}')\bar{s}_j^*(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\,. \tag{16}$$

При анализе того, к каким ограничениям приводит совокупность этих соотношений, предположим, что множество $\mathcal{K}$ удовлетворяет следующему условию: для любой пары векторов $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ из $\mathcal{K}$ выполняется $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \notin \mathcal{K}$ (в частности, это предполагает, что $0 \notin \mathcal{K}$ точно также как и угловые точки куба $\bar{\Lambda}_N$). Если такое допущение имеет место, то в представленной сумме найдутся отличные от нуля слагаемые только в том случае, когда $\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathcal{K}$, $\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$. Это приводит к $|\mathcal{K}|(|\mathcal{K}|-1)+1$ условиям. При подстановке каждого из этих значений $\mathbf{k}$ в представленной сумме отличны от

тождественного нуля только два совпадающих друг с другом слагаемых с $\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2)$ при $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$. По этой причине, мы получаем, на основании (16), следующий список условий

$$\bar{s}_j(-\mathbf{k}_2)\bar{s}_j^*(-\mathbf{k}_1) + \bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) = 0\,, \qquad \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathcal{K},\ \mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$$

и соотношение (14) при $\mathbf{k} = 0$,

$$\sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{K}} \bar{s}_j(\mathbf{k}')\bar{s}_j^*(\mathbf{k}') = N^2\,. \tag{17}$$

Зафиксируем в списке этих соотношений вектор $\mathbf{k}_1 \in \mathcal{K}$. Тогда в нем, наверняка, имеются два соотношения: $\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) = 0$, $\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(-\mathbf{k}_2) = 0$ с фиксированным вектором $\mathbf{k}_2 \neq \mathbf{k}_1$ из $\mathcal{K}$. Разложим каждый из векторов $\bar{s}_j(\mathbf{k}')$, $\mathbf{k}' \in \mathcal{K}$ на сумму реальной и мнимой частей: $\bar{s}_j(\mathbf{k}') = a_j(\mathbf{k}') + ib_j(\mathbf{k}')$. Тогда из представленных соотношений следует, что $\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_2) = 0$, $\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)b_j(\mathbf{k}_2) = 0$, и поэтому

$$a_j(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_2) = 0\,, \quad b_j(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_2) = 0\,, \quad a_j(\mathbf{k}_1)b_j(\mathbf{k}_2) = 0\,, \quad b_j(\mathbf{k}_1)b_j(\mathbf{k}_2) = 0\,.$$

Кроме того, выбрав $\mathbf{k} = -2\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k} = -2\mathbf{k}_2$, получим дополнительные соотношения

$$a_j(\mathbf{k}_1)b_j(\mathbf{k}_1) = 0\,, \quad a_j(\mathbf{k}_2)b_j(\mathbf{k}_2) = 0\,, \qquad a_j^2(\mathbf{k}_1) = b_j^2(\mathbf{k}_1)\,, \quad a_j^2(\mathbf{k}_2) = b_j^2(\mathbf{k}_2) = 0\,,$$

то есть для каждой пары $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathcal{K}$ должны существовать четыре вектора, являющиеся все попарно взаимно ортогональными. Это может быть только в том случае, когда один из них равен нулю. Такое положение невозможно, в силу указанных равенств длин векторов $a_j(\mathbf{k}_1)$ и $b_j(\mathbf{k}_1)$, а также $a_j(\mathbf{k}_2)$ и $b_j(\mathbf{k}_2)$.

Следовательно, распределение векторного поля $\bar{s}_j(\mathbf{k})$ и, соответственно, поля $s_j(\mathbf{x})$, реализующее минимум функционала (10) (соответственно (2)) таково, что в сумме (13) имеется только два ненулевых слагаемых с $\eta(\mathbf{k}')$ и $\eta(-\mathbf{k}')$ при некотором произвольном, но фиксированном векторе $\mathbf{k}' \in \mathcal{K}$. Тогда распределение векторного поля $s_j(\mathbf{x})$, реализующего минимум энергии, вид

$$s_j(\mathbf{x}) = \frac{2}{N}\mathrm{Re}\left[(a_j(\mathbf{k}') + ib_j(\mathbf{k}'))e^{i(\mathbf{k}',\mathbf{x})}\right]\,,$$

где векторы $a_j(\mathbf{k}')$ и $b_j(\mathbf{k}')$ взаимно ортогональны и равны по своей длине.

Наконец, обратимся к равенству (17). Оно позволяет определить длину векторов $a_j(\mathbf{k}')$ и $b_j(\mathbf{k}')$,

$$N^2 = |\bar{s}_j(\mathbf{k}')|^2 + |\bar{s}_j(-\mathbf{k}')|^2 = 2(a_j^2(\mathbf{k}') + b_j^2(\mathbf{k}')) = 4a_j^2(\mathbf{k}')\,,$$

то есть $|a_j(\mathbf{k}')| = N/2$ или, окончательно,

$$s_j(\mathbf{x}) = m_j\cos(\mathbf{x}, \mathbf{k}') + n_j\sin(\mathbf{x}, \mathbf{k}') \tag{18}$$

где $\mathbf{m} = a_j(\mathbf{k}')/|a_j(\mathbf{k}')|$ и $\mathbf{n} = -b_j(\mathbf{k}')/|b_j(\mathbf{k}')|$ — взаимно ортогональные единичные векторы.

Таким образом, поле $s_j(\mathbf{x})$, при условии, что множество $\mathcal{K}$ не содержит 0 и угловых точек куба $\bar{\Lambda}_N$, реализующее минимум функционала энергии геометрически, представляет собой *спиральную магнитную структуру*, определяемую произвольной парой взаимно ортогональных векторов $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ и вектором $\mathbf{k}' \in \mathcal{K} \subset \bar{\Lambda}_N$, который определяет направление оси и шаг спирали.

Литература

1. Вирченко Ю.П. Основное состояние векторной решеточной модели // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2012. – 23(142);29. – С.54-66.
2. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны / М.: Наука, 1967. – 368 с.
3. Ruelle D. Statistical Mechanics, Rigorous Results / Ney York-Amsterdam: W.A.Benjamin, Inc., 1969. (Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты / М.: Мир, 1971.)
4. Вирченко Ю.П. К теории основного состояния обменной модели Гейзенберга // Проблемы теоретической физики / Киев: Наукова думка, 1991. – С.80-96.

GROUND STATE OF VECTOR LATTICE MODEL WITH PAIR INTERACTION THE DEGENERATE EXCHANGE INTEGRAL CASE

A.S. Klyuyev, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. The class of periodical ground states of spherically symmetric vector model of statistical mechanics is studied. It is done at the supposition that external field is absent and the exchange integral in its hamiltonian is integrable. Besides, it is supposed that the Fourier-image of exchange integral is degenerate that is the Fourier-image of pair-exchange integral has more than one pair of sign-opposite points in **k**-space where its minimum is realized. It is shown that the vector field should be concentrated only at one pair point of **k**-space with opposite sign as it is in the case without the degeneracy of exchange integral.

Key words: vector model, hamiltonian, ground state.

MSC 81P20

ГАУССОВСКИЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧНОМ СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Л.Т. Фат, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматриваются случайные гауссовские векторные поля в $\mathbb{R}^3$ с нулевым средним значением, реализации которых с вероятностью единица являются почти-периодическими в среднем квадратичном. Находится общий вид корреляционной функции таких случайных полей в том случае, когда они с вероятностью единица являются гладкими и обладают свойством соленоидальности.

Ключевые слова: соленоидальное поле, функции почти периодические в среднем квадратичном, гауссовское случайное поле, корреляционная функция.

Пусть $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, 3$ — гауссовское случайное векторное поле с нулевым средним, $\langle \tilde{A}_i(\mathbf{x}) \rangle = 0$. Оно полностью характеризуется корреляционной функцией

$$K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \tilde{A}_i(\mathbf{x}) \tilde{A}_j(\mathbf{y}) \rangle \,, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \,; \; i, j = 1, 2, 3.$$

Пусть это поле является гладким с вероятностью единица и с той же вероятностью обладает свойством соленоидальности, то есть для почти каждой его реализации выполняется

$$\nabla_i \tilde{A}_i(\mathbf{x}) = 0 \,. \tag{1}$$

Это приводит к тому, что корреляционная функция $K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} = \frac{\partial K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} = 0 \,.$$

Будем, далее, считать, что поле $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ таково, что с вероятностью единица его реализации представляются почти-периодическими в среднем квадратичном функциями. Это означает, что почти каждая случайная реализация представима в виде ряда

$$\tilde{A}_i(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \tilde{\mathfrak{A}}} \tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa}) \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})) \,, \tag{2}$$

где суммирование производится по случайному не более чем счетному множеству $\tilde{\mathfrak{A}}$ векторов $\boldsymbol{\kappa}$ из $\mathbb{R}^3$, однозначно определяемому реализацией $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$, а набор случайных коэффициентов $\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})$, $\boldsymbol{\kappa} \in \tilde{\mathfrak{A}}$, $i = 1, 2, 3$ квадратично суммируем

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \tilde{\mathfrak{A}}} |\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})|^2 < \infty \,, \tag{3}$$

где множество $\tilde{\mathfrak{A}}$ векторов $\boldsymbol{\kappa}$ определяется условием

$$\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa}) = \lim_{\Lambda\to\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\Lambda|} \int\limits_{\Lambda} \tilde{A}_i(\mathbf{x}) \exp(-i(\mathbf{x},\boldsymbol{\kappa}))d\mathbf{x} \neq 0\,. \tag{4}$$

Заметим, во избежание возможного ошибочного представления, что наличие разложений (2) случайных реализаций гауссовского поля $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ не означает, что это поле обязательно обладает дискретным спектром. Это связано с тем, что множество $\tilde{\mathfrak{A}}$ векторов $\boldsymbol{\kappa}$, по которому производится суммирование в (2), не является фиксированным, как это было бы при наличии только дискретного спектра у поля $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$, а это эффективно может приводить к появлению непрерывного спектра у поля $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$.

Формулу (2) можно представить в следующем виде

$$\tilde{A}_i(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \exp(i(\boldsymbol{\kappa},\mathbf{x}))\tilde{\tilde{A}}(\boldsymbol{k})d\boldsymbol{k}\,, \tag{5}$$

где $\tilde{\tilde{A}}(\boldsymbol{k})$ — обобщенная случайная функция

$$\tilde{\tilde{A}}_i(\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}'\in\tilde{\mathfrak{A}}} \tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa}')\delta(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \tilde{A}_i(\mathbf{x}) \exp(-i(\boldsymbol{\kappa},\mathbf{x}))d\mathbf{x}\,, \tag{6}$$

Целью настоящего сообщения является доказательство общего представления для корреляционных функций случайных гауссовских векторных полей описанного выше типа.

1. Основная теорема. *Пусть гауссовское случайное векторное поле $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$ является с вероятностью единица почти-периодическим в среднем квадратичном и с той же вероятностью все его частные производные $\nabla_i\tilde{A}_j(\mathbf{x})$ реализаций поля $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$ локально квадратично интегрируемы и являются почти периодическими функциями в среднем квадратичном, для которых выполнено условие $\nabla_i\tilde{A}_i(\mathbf{x}) = 0$.*

Тогда для корреляционной функции поля $\{\tilde{A}_i(\mathbf{x})\}$ справедливо следующее представление

$$K_{i_1i_2}(\mathbf{x_1},\mathbf{x}_2) = -\varepsilon_{i_1j_1k_1}\varepsilon_{i_2j_2k_2}\nabla^{(\mathbf{x}_1)}_{j_1}\nabla^{(\mathbf{x}_2)}_{j_2}R_{k_1k_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\,, \tag{7}$$

где $R_{i_1i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ — корреляционная функция некоторого гладкого с вероятностью единица гауссовского поля с нулевым средним.

(Операторы $\nabla^{(\mathbf{x}_1)}$, $\nabla^{(\mathbf{x}_2)}$ обозначают градиенты, соответственно, по переменным $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$.)

□ Ввиду наличия соленоидальности у реализаций $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$ с вероятностью единица, подставив разложение (2) в (1), получим

$$\nabla_i\tilde{A}_i(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\tilde{\mathfrak{A}}} \kappa_i\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa}) \exp(i(\boldsymbol{\kappa},\mathbf{x})) = 0\,,$$

где в левой части, ввиду гладкости случайных реализаций $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$ в среднем квадратичном, стоит ряд, квадратично суммируемый с вероятностью 1,

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\tilde{\mathfrak{A}}} \boldsymbol{\kappa}^2 |\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})|^2 < \infty\,. \tag{8}$$

Вследствие однозначности разложения почти-периодической в среднем квадратичном в ряд вида (2), получаем бесконечный набор условий для коэффициентов разложения

$$\boldsymbol{\kappa}_i \tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa}) = 0\,, \quad \boldsymbol{\kappa} \in \tilde{\mathfrak{A}}\,. \tag{9}$$

Рассмотрим набор случайных коэффициентов $\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})$, $\boldsymbol{\kappa} \in \tilde{\mathfrak{A}}$, занумерованных случайным счетным множеством $\tilde{\mathfrak{A}} \subset \mathbb{R}^3$, который представляет ненулевые значения линейного преобразования (4) некоторой реализации $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$ исходного случайного поля. Этот набор можно рассматривать как реализацию случайного поля $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa}); \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^3\}$, которое получается линейным преобразованием (4) случайного поля $\{\tilde{A}_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$ и которая обращается в нуль при $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^3 \setminus \tilde{\mathfrak{A}}$ (по этой причине такое случайное поле $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa}); \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^3\}$ несепарабельно). Такой подход позволяет избавиться от явного учета случайного множества $\tilde{\mathfrak{A}}$. Кроме того, при таком рассмотрении поле $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa}); \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^3\}$ является гауссовским, так как оно получается посредством линейного преобразования гауссовского случайного поля $\{\tilde{A}_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$. Оно имеет нулевое среднее значение,

$$\langle \tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa}) \rangle = \lim_{\Lambda\to\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\Lambda|} \int\limits_{\Lambda} \langle \tilde{A}_i(\mathbf{x}) \rangle \exp(-i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa})) d\mathbf{x} = 0\,,$$

где $\boldsymbol{\kappa}$ может (после усреднения) принимать любые значения из $\mathbb{R}^3$.

На основании (5) и (6) имеет место

$$D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} K_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \exp(-i[(\boldsymbol{\kappa}_1, \mathbf{x}_1) - (\boldsymbol{\kappa}_2, \mathbf{x}_2)]) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \langle \tilde{A}_{i_1}(\mathbf{x}_1) \tilde{A}_{i_2}(\mathbf{x}_2) \rangle \exp(-i[(\boldsymbol{\kappa}_1, \mathbf{x}_1) - (\boldsymbol{\kappa}_2, \mathbf{x}_2)]) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = \langle \tilde{\tilde{A}}(\boldsymbol{\kappa}_1) \tilde{\tilde{A}}^*(\boldsymbol{\kappa}_2) \rangle\,, \tag{10}$$

$$K_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) \exp(i[(\boldsymbol{\kappa}_1, \mathbf{x}_1) - (\boldsymbol{\kappa}_2, \mathbf{x}_2)]) d\boldsymbol{\kappa}_1 d\boldsymbol{\kappa}_2\,. \tag{11}$$

Поэтому обобщенная случайная функция $\tilde{\tilde{A}}(\boldsymbol{k})$ полностью характеризуется корреляционной функцией $D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2)$ и эта обобщенная тензор-функция однозначно характеризует корреляционную функцию $K_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ для случайных полей, реализации которых принадлежат пространству почти-периодических в среднем квадратичном случайных полей.

Свернув тензор $D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$ с вектором $\boldsymbol{\kappa}_1$ или вектором $\boldsymbol{\kappa}_2$ и применив формулу (9) и (6) для усредняемых реализаций $\tilde{a}_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1)$, $\tilde{a}_{i_2}(\boldsymbol{\kappa}_2)$, получим необходимое и достаточное условие для корреляционной функции $D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$ для того, чтобы поле $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ соответствовало соленоидальному полю $\{\tilde{A}_i(\mathbf{x})\}$,

$$(\boldsymbol{\kappa_1})_{i_1}D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)=(\boldsymbol{\kappa_2})_{i_2}D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)=0\,. \tag{12}$$

Проанализируем это условие. Для этого представим общее решение уравнения (9) в следующем виде, рассматривая его при фиксированном значении вектора $\boldsymbol{\kappa}$,

$$\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})=\varepsilon_{ijk}\kappa_j\tilde{b}_k(\boldsymbol{\kappa})\,, \tag{13}$$

где ε_{ijk} — псевдотензор Леви-Чивитта, $\tilde{b}_k(\boldsymbol{\kappa})$ — некоторый случайный вектор. Такое представление связано с тем, что весь класс векторов $\mathbf{a}$, ортогональных вектору $\boldsymbol{\kappa}$, описывается формулой $\mathbf{a}=[\boldsymbol{\kappa},\mathbf{b}]$, где $\mathbf{b}$ – произвольный вектор, неколлинеарный вектору $\boldsymbol{\kappa}$. Общее решение вырожденного линейного уравнения (13) относительно вектора $\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})$ при фиксированном значении вектора $\tilde{a}_k(\boldsymbol{\kappa})$ имеет вид (если $\boldsymbol{\kappa}\neq 0$)

$$\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})=\lambda(\boldsymbol{\kappa})\kappa_i-\boldsymbol{\kappa}^{-2}\varepsilon_{ijk}\kappa_j\tilde{a}_k(\boldsymbol{\kappa})\,, \tag{14}$$

где $\lambda(\boldsymbol{\kappa})$ – произвольная функция от $\boldsymbol{\kappa}$. Если рассматривать это решение для всей совокупности случайных реализаций $\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})$, то совокупность всех функций $\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})$, $\boldsymbol{\kappa}\in\mathbb{R}^3$ будет составлять случайное поле $\{\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ при условии, что, дополнительно, определено случайное скалярное поле с реализациями $\lambda(\boldsymbol{\kappa})$, $\boldsymbol{\kappa}\in\mathbb{R}^3$.

С другой стороны, из формул (13) и (14) видно, что скалярное поле $\{\lambda(\boldsymbol{\kappa})\}$ не дает в клада в поле $\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})$ и поэтому его можно выбрать произвольно. Положим его равным нулю. Тогда $\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})=-\boldsymbol{\kappa}^{-2}\varepsilon_{ijk}\kappa_j\tilde{a}_k(\boldsymbol{\kappa})$ и поле $\{\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$, как линейное преобразование гауссовского поля является тоже гауссовским и обладает вслед за полем $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ нулевым средним значением. Его реализации обращаются в нуль в тех же точках, что и порождающие их реализации $\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})$, то есть семейством векторов $\boldsymbol{\kappa}\in\mathbb{R}^3$, в которых реализация $\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})$ не обращается в нуль, является семейство $\tilde{\mathfrak{A}}$, соответствующее порождающей реализации. Тогда распределение вероятностей поля $\{\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ порождается распределением вероятностей поля $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$. При этом в силу выполнимости свойства (8) для реализаций $\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})$ с вероятностью 1, для реализаций $\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})$ выполняется с той же вероятностью

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\tilde{\mathfrak{A}}}\boldsymbol{\kappa}^4|\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})|^2<\infty \tag{15}$$

с тем же семейством $\tilde{\mathfrak{A}}$. И обратно, если выполняется (14), то поле $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$, определяемое формулой (13), является гауссовским поле с нулевым средним, для которого выполняется условие (8). Тогда определив произвольное гауссовское поле $\{\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ с нулевым средним и с реализациями, удовлетворяющими с вероятностью 1 условию (15), мы, тем самым, определим однозначным образом случайное поле $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$.

Введем обобщенное случайное поле $\{\tilde{\tilde{B}}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ с реализациями

$$\tilde{\tilde{B}}_i(\boldsymbol{\kappa})=\sum_{\boldsymbol{\kappa}'\in\mathfrak{A}}\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa}')\delta(\boldsymbol{\kappa}'-\boldsymbol{\kappa})\,.$$

Оно является гауссовским полем с нулевым средним, так как получается из поля $\tilde{\bar{A}}_i(\boldsymbol{\kappa})$ на основе его линейного преобразования. Поэтому поле $\{\tilde{B}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ полностью определяется своей обобщенной корреляционной функцией

$$C_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) = \langle \tilde{\bar{B}}_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1)\tilde{\bar{B}}^*_{i_2}(\boldsymbol{\kappa}_2)\rangle\,.$$

Определив фурье-преобразование

$$\tilde{B}_i(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{\bar{B}}_i(\boldsymbol{\kappa})\exp(i(\mathbf{x},\boldsymbol{\kappa}))d\boldsymbol{\kappa} = \sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\tilde{\mathfrak{A}}} \tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})e^{i(\mathbf{x},\boldsymbol{\kappa})}\,,$$

которое является линейным преобразованием поля $\{\tilde{\bar{B}}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ и которое, таким образом является гауссовским случайным полем с нулевым средним, выразим, аналогично формуле (11), корреляционную функцию $R_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \langle \tilde{B}_{i_1}(\mathbf{x}_1)\tilde{B}_{i_2}(\mathbf{x}_2)\rangle$, следующим образом его полностью определяющую через корреляционную функцию $C_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$,

$$R_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^6}\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} C_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)\exp(i[(\boldsymbol{\kappa}_1,\mathbf{x}_1)-(\boldsymbol{\kappa}_2,\mathbf{x}_2)])d\boldsymbol{\kappa}_1 d\boldsymbol{\kappa}_2 \qquad (16)$$

так, что имеет место обратная связь

$$C_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} R_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\exp\big(i[(\mathbf{x}_2,\boldsymbol{\kappa}_2)-(\mathbf{x}_1,\boldsymbol{\kappa}_1]\big)d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2\,.$$

Корреляционные функции $R_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$, $C_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$ являются положительно определенными, то есть имеют место неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} R_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)u_{i_1}(\mathbf{x}_1)u^*_{i_2}(\mathbf{x}_2)d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \geq 0\,,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} C_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)\bar{u}_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1)\bar{u}^*_{i_2}(\boldsymbol{\kappa}_2)d\boldsymbol{\kappa}_1 d\boldsymbol{\kappa}_2 \geq 0$$

для любых финитных измеримых вектор-функций $u_i(\cdot)$. Кроме положительной определенности, корреляционная функция $R_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$, дополнительно, должна быть дифференцируемой как по переменной $\mathbf{x}_1$, так и по переменной $\mathbf{x}_2$. Она должна быть подчинена дополнительному условию, которое является следствием (15). Такое условие формулируется в терминах корреляционной функции $R_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ случайного поля $\{\tilde{B}_i(\mathbf{x})\}$ для которого, в силу выполнимости условия (15), существуют все вторые частные производные

$$\nabla_k\nabla_l\tilde{B}_i(\mathbf{x}) = -\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\tilde{\mathfrak{A}}}\kappa_k\kappa_l\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})e^{i(\mathbf{x},\boldsymbol{\kappa})}\,,$$

как интегрируемые и почти-периодические в среднем квадратичном функции.

Из формулы (13) вытекает следующая связь между корреляционными функциями $C_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$ и $D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$,

$$D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)=\varepsilon_{i_1j_1k_1}\varepsilon_{i_2j_2k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1)_{j_1}(\boldsymbol{\kappa}_2)_{j_2}C_{k_1,k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)\,. \tag{17}$$

Воспользовавшись определениями корреляционных функций $K_{i_1i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ и $R_{i_1i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$, получим формулу (7) формулировки теоремы. ■

Заметим, что корреляционная функция (7) удовлетворяет условию

$$\nabla_{i_1}^{(\mathbf{x}_1)}K_{i_1i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\nabla_{i_2}^{(\mathbf{x}_2)}K_{i_1i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\,.$$

2. Пример гауссовского соленоидального поля. Пусть s_j, $j=1,2,3$ — псевдовектор в $\mathbb{R}^3$ и $\tilde a_j,\tilde b_j$, $j=1,2,3$ — два гауссовских случайных эквивалентных вектора с нулевым средним значением $\langle\tilde a_j\rangle=\langle\tilde b_j\rangle=0$ и ковариационной матрицей $\langle\tilde a_i\tilde a_j\rangle=\langle\tilde b_i\tilde b_j\rangle=\sigma^2\delta_{ij}$. Эти векторы статистически зависимы так, что $\langle a_ib_j\rangle=r^2\varepsilon_{ijk}s_k$ и шестимерный случайный вектор $\langle\tilde a_j,j=1,2,3;\tilde b_j,j=1,2,3\rangle$ является гауссовским с ковариационной матрицей

$$\mathcal{G}=\begin{pmatrix}\sigma^2\mathbf{1} & \mathcal{F}\\ \mathcal{F}^{\mathrm{T}} & \sigma^2\mathbf{1}\end{pmatrix}\,,\qquad F_{ij}=r^2\varepsilon_{ijk}s_k\,.$$

Эта матрица симметрична и неотрицательна при $|\mathbf{s}|r^2\le\sigma^2$,

$$\Big(\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle,\mathcal{G}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\Big)=\sigma^2(\mathbf{u}^2+\mathbf{v}^2)+r^2\Big((\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{s}])-(\mathbf{v},[\mathbf{u},\mathbf{s}])\Big)\ge 0\,,$$

как это необходимо для того, чтобы представлять ковариационную матрицу случайного вектора. Последнее неравенство следует непосредственно из неравенств $(\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{s}])\ge-|\mathbf{s}|\cdot|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$, $(\mathbf{v},[\mathbf{u},\mathbf{s}])\le|\mathbf{s}|\cdot|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$.

Ковариационная матрица каждого из векторов $\varepsilon_{ikl}s_k\tilde a_l$, $\varepsilon_{jmn}s_m\tilde b_n$ равна σ^2S_{ij}, $S_{ij}=\mathbf{s}^2\delta_{ij}-s_is_j$. Так как среднее

$$\varepsilon_{ikl}s_k\varepsilon_{jmn}s_m\langle\tilde a_l\tilde b_n\rangle=-r^2S_{in}\varepsilon_{jmn}s_m\,,$$

то ковариационная матрица соответствующего шестимерного вектора равна

$$\begin{pmatrix}\sigma^2\mathcal{S} & -\mathcal{S}\mathcal{F}\\ -(\mathcal{S}\mathcal{F})^{\mathrm{T}} & \sigma^2\mathcal{S}\end{pmatrix}\,.$$

Определим стохастически трансляционно инвариантное случайное поле

$$\tilde B_j(\mathbf{x})=\tilde a_j\cos(\mathbf{s},\mathbf{x})+b_j\sin(\mathbf{s},\mathbf{x})$$

с дискретным спектром, сосредоточенном на векторах $\mathbf{s}$, -$\mathbf{s}$, с корреляционной функцией

$$R_{j_1,j_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\sigma^2\delta_{j_1j_2}\cos(\mathbf{s},\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)+r^2\varepsilon_{j_1j_2l}s_l\sin(\mathbf{s},\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)$$

и поле $A_j(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ijk} s_j B_k(\mathbf{x})$ с корреляционной функцией $\varepsilon_{i_1 j_1 k_1}\varepsilon_{i_2 j_2 k_2} s_{j_1} s_{j_2} R_{k_1 k_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Отметим появление в корреляционной функции $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ слагаемого, пропорционального $\varepsilon_{j_1 j_2 l} s_l$, на возможность существования гауссовских полей такого типа указывалось в работах [4-7], однако, вопреки примененной в этой работе по отношению к полям такого типа терминологии, реализации рассматриваемого нами поля не обладают какой-либо топологической нетривиальностью. Соответствующее обобщенное случайное поле $\tilde{\tilde{B}}_j(\boldsymbol{\kappa})$ определяется формулой

$$\tilde{\tilde{B}}_j(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2}\tilde{a}_j\big(\delta(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{s}) + \delta(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{s})\big) - \frac{i}{2}\tilde{b}_j\big(\delta(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{s}) - \delta(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{s})\big)\,.$$

Вычисление его корреляционной функции дает

$$C_{ij}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) = \langle \tilde{\tilde{B}}(\boldsymbol{\kappa}_1)\tilde{\tilde{B}}^*(\boldsymbol{\kappa}_2)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\delta(\boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_2)\big[\sigma^2\delta_{ij}(\delta(\boldsymbol{\kappa}_1 - \mathbf{s}) + \delta(\boldsymbol{\kappa}_1 + \mathbf{s})) + ir^2\varepsilon_{ijl}s_l(\delta(\boldsymbol{\kappa}_1 - \mathbf{s}) - \delta(\boldsymbol{\kappa}_1 + \mathbf{s}))\big]\,.$$

Соответственно, корреляционная же функция $D_{ij}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2)$ поля $\tilde{\tilde{A}}_j(\boldsymbol{\kappa})$ равна

$$D_{ij}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) = \frac{1}{2}\delta(\boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_2)\big[\sigma^2 S_{ij}(\delta(\boldsymbol{\kappa}_1 - \mathbf{s}) + \delta(\boldsymbol{\kappa}_1 + \mathbf{s})) + ir^2 S_{ik}\varepsilon_{jkl}s_l(\delta(\boldsymbol{\kappa}_1 - \mathbf{s}) - \delta(\boldsymbol{\kappa}_1 + \mathbf{s}))\big].$$

3. Стохастически симметричные гауссовские поля. Если почти-периодическое в среднем квадратичном случайное поле $\{\tilde{A}_i(\mathbf{x})\}$ – стохастически трансляционно инвариантно (однородно), то его корреляционная функция $K_{i_1 i_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ зависит только от разности $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. В этом случае соответствующее обобщенное случайное поле $\{\tilde{\tilde{A}}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ обладает корреляционной функцией $D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2)$, которая пропорциональна $\delta(\boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_2)$, как это имело место в примере, приведенном выше. Тогда, вследствие (17), таким же свойством обладает корреляционная функция $C_{k_1,k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2)$, то есть корреляционная функция $R_{i_1 i_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv R_{i_1 i_2}(\mathbf{x})$ — также зависит от разности $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. В этом случае формула (7) принимает вид

$$K_{i_1 i_2}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{i_1 j_1 k_1}\varepsilon_{i_2 j_2 k_2}\nabla_{j_1}\nabla_{j_2}R_{k_1 k_2}(\mathbf{x})\,, \tag{18}$$

где градиенты вычисляются по переменной $\mathbf{x}$.

Так как корреляционная функция $D_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2)$ обладает свойством $D_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2)(\boldsymbol{\kappa}_1)_{i_1} = D_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2)(\boldsymbol{\kappa}_2)_{i_2} = 0$, то соленоидальные случайные поля вырождены — корреляционный оператор имеет собственные функции с нулевым собственным значением. Это, в частности, приводит к тому, что эти поля не могут быть *стохастически сферически симметричными*, то есть для них в каждой пространственной точке с радиус-вектором $\mathbf{x}$ поле не может быть стохастически эквивалентно полю $U_{ij}\tilde{A}_j(\mathbf{x})$ (радиус-вектор не поворачивается). Это означает, что корреляционная функция $K_{i_1 i_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ не может обладать свойством

$$U_{i_1 j_1}U_{i_2 j_2}K_{j_1 j_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = K_{i_1 i_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\,,$$

так как в противном случае должно иметь место равенство

$$U_{i_1j_1}U_{i_2j_2}D_{j_1j_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) = D_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)\,,$$

то есть $D_{j_1j_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) = D(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)\delta_{j_1j_2}$, что противоречит существованию собственного вектора с нулевым собственным значением. Напротив, поле с локальной аксиальной стохастической симметрией возможно, у которого корреляционная функция имеет вид

$$D_{j_1j_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) = D_1(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)\Big(\delta_{j_1j_2}\mathbf{s}^2 - s_{j_1}s_{j_2}\Big) + \varepsilon_{j_1j_2l}s_lD_2(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)\,,$$

где $D_1(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) > 0$ и функция $D_2(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$ такова, что имеет место неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} D(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)u_{j_1}(\boldsymbol{\kappa}_1)u_{j_2}(\boldsymbol{\kappa}_2)d\boldsymbol{\kappa}_1d\boldsymbol{\kappa}_2 \geq 0$$

для любой вектор-функции $u_j(\boldsymbol{\kappa})$.

Литература

1. Фат Лам Тан, Вирченко Ю.П. Стохастически однородные и изотропные магнитные поля // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 19(162);32. – С.176-183.
2. Скороход Теория случайных процессов.
3. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / М.: Наука, Физматлит, 1966. – 544 с.
4. Slezova Zh.V., Tur A.V., Yanovskii V.V. Effect of Topologically Non-trivial Magnetic Fields on the Magnetic Moment Evolution / Functional Materials. – 2000. – 7; №3. – P.384-389.
5. Chechkin A.V., Tur A.V., Yanovskii V.V. Anomalous Flow of Passive Admixture in Helical Turbulence / Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. – 1998. – 88. – P.187-213.
6. Тур А.В., Чечкин А.В., Яновский В.В. Аномалии переноса в отражательно неинвариантной теории турбулентности / Электромагнитные явления. – 1998. – 1,№2. – С.233-238.
7. Chechkin A.V., Tur A.V., Yanovskii V.V. Kinetic effects stochastic topological nontrivial fields // Physica A. – 1994. – 208. – P.501-522.

GAUSSIAN ALMOST-PERIODIC IN QUADRATIC AVERAGE SENSE SOLENOIDAL VECTOR FIELDS

Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. Gaussian random vector fields in $\mathbb{R}^3$ with zero average value are under consideration. Their realizations are almost-periodic in the quadratic average sense with the probability one. The general form of the correlation function of such random fields are found when they are smooth and solenoidal with the probability one.

Key words: solenoidal field, almost periodic functions in the quadratic average sense, gaussian random field, correlation function.

MSC 41A10

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ПРИРОДА КУСОЧНО-ПЛАНАРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко

Херсонский национальный технический университет,
Бериславское шоссе, 24, Херсон, 73008, Украина;
Черноморский государственный университет им.Петра Могилы,
68 ул. Десантников, 10, Николаев, 54003, Украина e-mail: mmkntu@gmail.com

Аннотация. В работе показана возможность использования функций-«полукрышек» для конструирования базисных функций высших порядков на треугольных и квадратных конечных элементах.

Ключевые слова: конечный элемент, кусочно-планарная аппроксимация, функции-«полукрышки».

Введение. Статья посвящена кусочно-планарной аппроксимации, предложенной Р. Курант в 1943 г. Это своеобразное посвящение 70-летнему юбилею выхода в свет знаменитой статьи Куранта, положившей начало развитию метода конечных элементов (МКЭ). Дальнейшее обобщение основной идеи Куранта о простых базисных функциях стало решающим шагом в технике МКЭ. К сожалению, не все авторы, профессионально пишущие о методе и развивающие его, по достоинству оценивают идею Куранта о кусочно-планарной аппроксимации. Между тем, именно эта идея обеспечила успешное решение задач, лежащих за пределами возможностей господствующего в середине XX века метода конечных разностей (МКР).

Построение простых элементов полезно само по себе, но еще более важно то, что на этих элементах можно убедительно проиллюстрировать существование глубоких связей между полиномиальной интерполяцией на конечном элементе и теорией вероятностей. В МКЭ, как показывает опыт, вероятностные представления позволяют перейти от «жестких» стандартных моделей к «мягким» (по В.И.Арнольду) альтернативным моделям восполнения финитных функций.

Анализ публикаций. Для изучения вероятностной природы кусочно-планарных функций мы используем геометрический подход. Кстати, геометрическая вероятность появилась намного раньше классической (П. Лаплас) и статистической (Р. Мизес). Принято считать, что впервые геометрическая вероятность появилась в 1777 г., когда Ж. Бюффон опубликовал свою «задачу об игле». Недавно стало известно (из публикаций О. Шейнина), что первое упоминание о геометрической вероятности обнаружено в рукописи И. Ньютона 1664-1666 гг., увидевшей свет лишь в 1967 г. Известно, что Ньютон не очень любил публиковать свои работы, поэтому о многих гениальных открытиях Ньютона мир узнавал с большим опозданием. В задаче Ньютона рассматривается круг, разделенный на два неодинаковых сектора с отношением площадей $2 : \sqrt{5}$.

Внутрь круга наудачу вбрасывается мяч. Необходимо определить вероятность попадания в каждый сектор круга. Ньютон выразил эти вероятности через относительные площади: $2(2+\sqrt{5})^{-1}$ и $\sqrt{5}(2+\sqrt{5})^{-1}$. Любопытно, что Ньютона мало интересовали вероятностные задачи, хотя в XVII веке такими задачами занимались многие физики и математики. По мнению Ф. Мостеллера [1], Ньютон за всю свою жизнь решил только одну вероятностную задачу (по просьбе С. Пепайса). Теперь, благодаря О. Шейнину, мы знаем, что Ньютон решил две вероятностные задачи.

Кусочно-линейные функции часто называют «крышками» («полукрышками»). Их история уходит корнями в глубокую древность. Например, правило рычага Архимеда имеет прямое отношение к функциям-«полукрышкам». Если говорить конкретно о функции Куранта, следует упомянуть А.Мёбиуса, который в 1827 г. открыл барицентрические координаты симплексов. В функциях Куранта легко узнать барицентрические (треугольные) координаты. Эти координаты описаны практически в каждой книге по МКЭ. Мы ограничимся ссылками на статью Куранта [2] и на книги [3-5]. По традиции треугольные координаты определяют путем составления и решения СЛАУ третьего порядка. На примере функции Куранта мы покажем, что кусочно-планарная модель имеет четко выраженную вероятностную природу. Этот результат положен нами в основу иерархической процедуры генерирования аппроксимаций высших порядков. Стоит отметить, что эта процедура эффективна не только на треугольниках. Накоплен немалый опыт конструирования серендиповых поверхностей с помощью «полукрышек».

Целью настоящей статьи является показать, что функции-«полукрышки» служат «строительным материалом» для конструирования базисных функций высших порядков на треугольных и квадратных конечных элементах.

Основная часть. На рис. 1 изображены сетка Куранта (а) и ячейка Куранта (б).

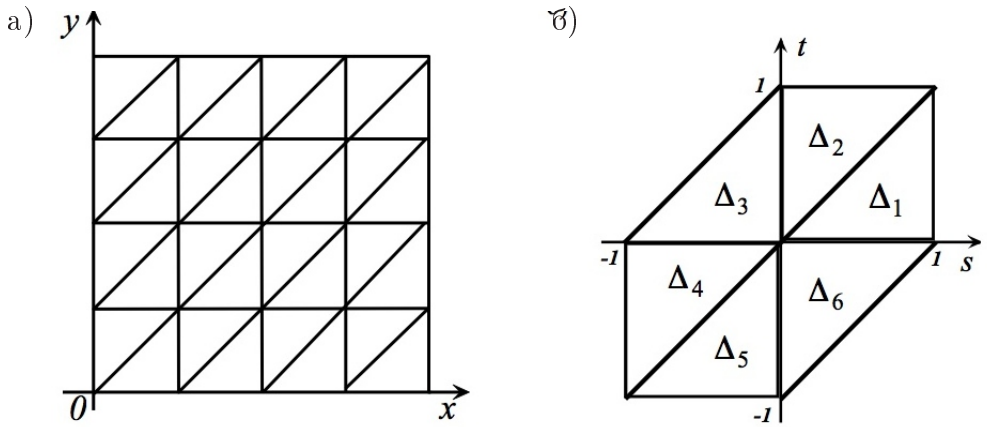

Рис. 1. Сетка Куранта (а) и стандартная ячейка Куранта (б).

Построение базисных (координатных) функций Куранта начинается с построения сетки. Сначала в квадрате Ω построим сетку с квадратными ячейками с помощью прямых $x = x_i = ih$, $y = y_j = jh$, $h = N^{-1}$, $N > 0$ – целое число, $i, j = 0, 1, 2, ..., N$.

Точки (x_i, y_i) называют узлами сетки. Каждую квадратную ячейку сетки разделим на два треугольника диагональю, соединяющей юго-западную вершину квадрата с северо-восточной (рис. 1а). Каждому узлу сетки (x_i, y_j) сопоставим координатную функцию $\varphi_{ij}(x, y)$, равную 1 в данном узле и нулю во всех остальных узлах, линейную в каждом треугольнике триангуляции. Чтобы записать функцию в произвольном узле, рассмотрим стандартную функцию, отличную от нуля только в ячейке Куранта (рис. 1б). Функцию Куранта можно получить как геометрическую вероятность в каждом треугольнике Δ_k $(k = \overline{1,6})$ ячейки Куранта.

Схема, изображенная на рис. 2а, иллюстрирует идею рандомизации функции Куранта. На рис. 2б показана «крышка» Куранта.

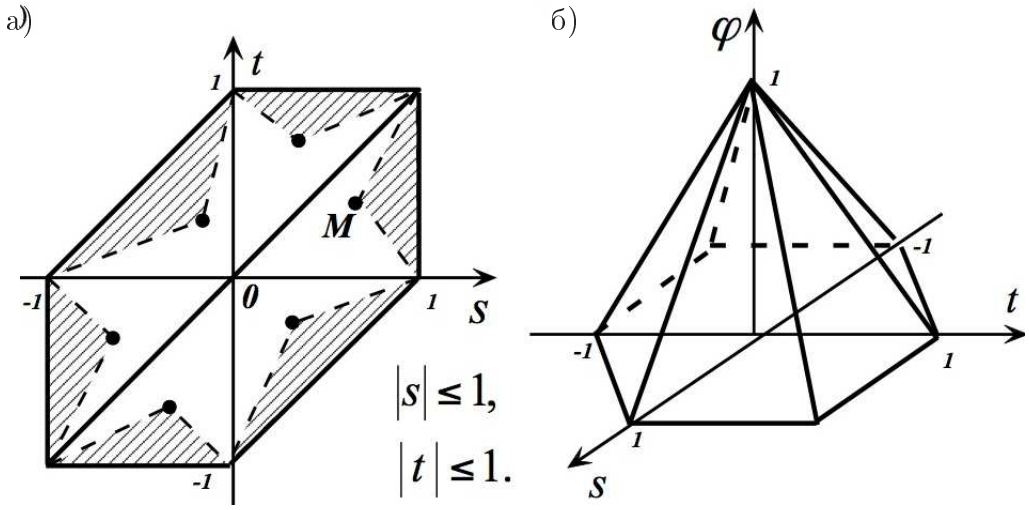

Рис. 2. Вероятностное истолкование «полукрышек» (а), «крышка» Куранта (б).

В каждом треугольнике Δ_k $(k = \overline{1,6})$ возьмём текущую точку $M(s,t)$ – вершину треугольника, противолежащего центру ячейки Куранта (на рис. 2а эти треугольники заштрихованы). Теперь в каждый треугольник Δ_k наугад вбрасываем точку и ставим задачу: найти вероятность попадания случайной точки в заштрихованный треугольник с вершиной $M(s,t)$. Так мы получаем шесть функций-«полукрышек», которые отождествляют с вероятностью. Запишем этот набор:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(s,t) = 1 - s\,, && \varphi_4(s,t) = 1 + s\,, \\ &\varphi_2(s,t) = 1 - t\,, && \varphi_5(s,t) = 1 + t\,, \\ &\varphi_3(s,t) = 1 + s - t\,, && \varphi_6(s,t) = 1 - s + t\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Легко заметить, что функцию-«крышку» Куранта можно записать компактно:

$$\varphi(s,t) = 1 - \frac{1}{2}\big(|s| + |t| + |s - t|\big)\,. \tag{2}$$

Тогда $\varphi_{ij}(x,y) = \varphi\Big(x/h - i, y/h - j\Big)$, $i, j = 0, 1, ..., N$.

Таким образом, кусочно-планарная аппроксимация функции $u(x, y)$ в квадрате Ω обретает вид:

$$\bar{u}(x, y) = \sum_{i,j=0}^{N} u_{ij}\varphi_{ij}(x, y)\,, \tag{3}$$

где $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ – узловые значения $u(x, y)$.

Наиболее содержательным для дальнейшего является рис. 2а. При этом важно обобщить вероятностную процедуру построения «полукрышки» на треугольник, произвольно ориентированный в системе координат Oxy. Такие треугольники называют треугольниками Куранта-Тэрнера. Стоит отметить, что каждая функция (1) в соответствующем треугольнике совпадает с барицентрической координатой треугольника, которая ассоциируется с вершиной $O(0, 0)$.

Заметим, что в любом осевом сечении пирамиды (рис. 2б) мы получаем плоский аналог функции-«крышки». Такие модели используют в задачах кусочно-линейной аппроксимации функций одного аргумента.

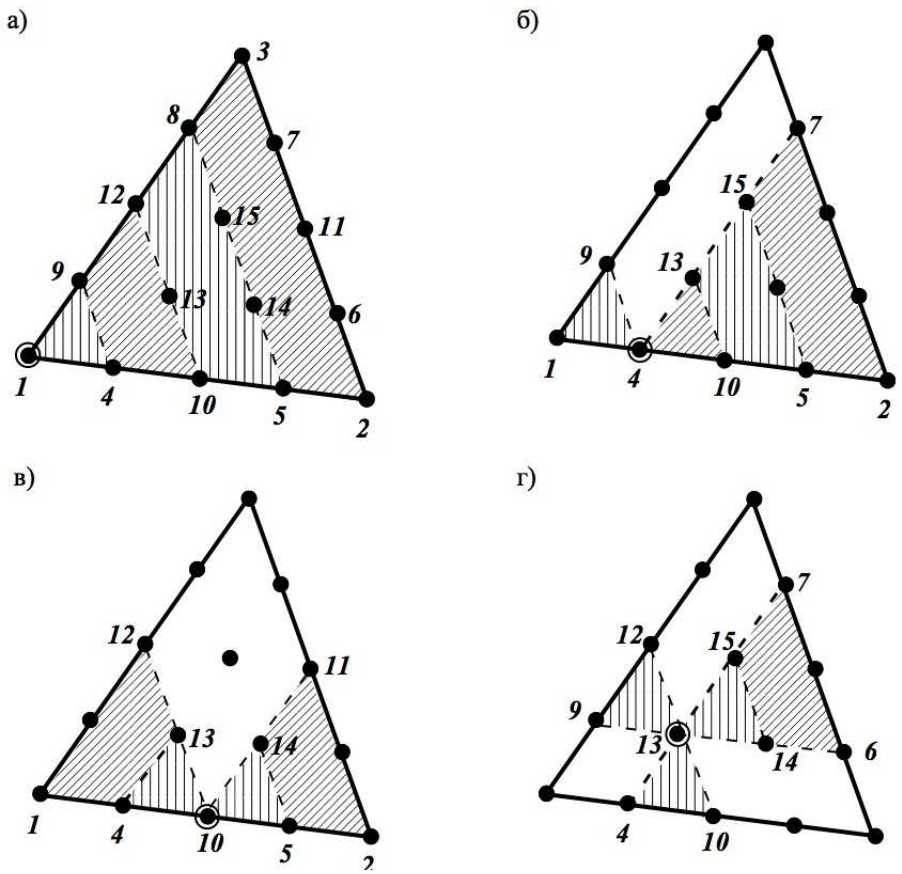

Рис. 3. К построению типичных базисных функций:
а) для угловых узлов; б) для промежуточных узлов на сторонах;
в) для средних узлов на сторонах; г) для внутренних узлов.

Треугольные плоские фрагменты – барицентрические координаты произвольного треугольника очень удобны в конструировании треугольников высших порядков. Ниже в качестве примера мы рассматриваем треугольник четвертого порядка. Интересно построить базис такого элемента на основе вероятностных соображений.

На рис. 3 показаны композиции из треугольников Куранта-Тэрнера, на каждом из которых осуществляется кусочно-планарная аппроксимация. Особенность моделей высших порядков в том, что теперь функции-«полукрышки» перемножаются по правилу умножения вероятностей независимых событий.

Чтобы описать ключевые идеи рандомизированного конструирования базисных функций, достаточно подробно рассмотреть процедуру построения какой-либо одной функции, например, N_4 на рис. 3б. Все базисные функции треугольника высшего порядка можно выразить через три барицентрические координаты основного треугольника 1-2-3. Здесь мы имеем дело с треугольником 4-го порядка. Поэтому каждый раз мы используем четыре треугольника с общей вершиной в контрольном узле. Для построения N_4 нам понадобятся треугольники с общей вершиной 4: 4-10-13, 4-5-15, 4-2-7 и 4-9-1 (рис. 3б). Это комплекс из 4-х симплексов. В терминах геометрической вероятности мы рассматриваем четыре независимых события и находим вероятность совместного наступления этих событий. В каждом из четырех треугольников выбирается точка $M(L_1, L_2, L_3)$, где L_i — барицентрические координаты в основном треугольнике 1-2-3. Теперь в каждый из перечисленных треугольников с общей вершиной 4 вбрасываем случайную точку и вычисляем вероятность попадания случайной точки в треугольник с вершиной и основанием, противоположным вершине 4.

Например, вероятность того, что точка, вброшенная в Δ_{4-2-7}, попала в Δ_{M-2-7}, равна $p_1 = 4L_1/3$. Вероятность того, что точка, вброшенная в Δ_{4-5-15}, попала в Δ_{M-5-15}, равна $p_2 = 2L_1 - 1/2$. Вероятность того, что точка, вброшенная в $\Delta_{4-10-13}$, попала в $\Delta_{M-10-13}$, равна $p_3 = 4L_1 - 2$. Вероятность того, что точка, вброшенная в Δ_{4-9-1}, попала в Δ_{M-9-1}, равна $p_4 = 4L_2$.

Базисная функция N_4 определяется по правилу перемножения найденных вероятностей:

$$N_4 = \frac{16}{3} L_1 L_2 (4L_1 - 1)(2L_1 - 1)\,. \tag{4}$$

С помощью рис. 3а и геометрической вероятности находим

$$N_1 = \frac{1}{3} L_1 (4L_1 - 1)(2L_1 - 1)(4L_1 - 3)\,. \tag{5}$$

Рис. 3в дает

$$N_{10} = 4L_1 L_2 (4L_1 - 1)(4L_2 - 1)\,. \tag{6}$$

Рис. 3г приводит к

$$N_{13} = 32 L_1 L_2 L_3 (4L_1 - 1)\,. \tag{7}$$

По образцу (4) легко составить остальные функции для промежуточных узлов $5, 6, 7, 8, 9$. Функции N_2 и N_3 получаются из N_1, N_{11} и N_{12} – из N_{10}, N_{14} и N_{15} – из N_{13}. Все

15 функций построенного базиса обладают типичными свойствами интерполяционных коэффициентов Лагранжа:

$$N_i(M_k) = \delta_{ik}\,, \qquad \sum_{i=1}^{15} N_i(M) = 1\,, \tag{8}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера; i — номер функции; k — номер узла $(i,k) = \overline{1,5}$; — произвольная точка в Δ_{1-2-3}.

Как видим, модель 4-го порядка — это результат «перемножения» кусочно-планарных моделей.

Интерполяционный полином на треугольнике 4-го порядка (15 узлов) имеет вид:

$$U(M) = \sum_{i=1}^{15} N_i(M) U_i\,, \tag{9}$$

где U_i — известные узловые значения восполняемой функции $U(M)$. Недостатком этой модели является физическая неадекватность поузлового распределения равномерной массовой силы («негативность» некоторых узловых нагрузок). Принято считать, что этот недостаток устранить невозможно. По нашему мнению, это заблуждение связано с выбором метода определения базисных функций. Заметим, что в методе конечных элементов господствует матричная алгебра, роль которой сильно преувеличена. Наша цель — привлечь внимание разработчиков и пользователей МКЭ к нематричным методам конструирования базисных функций. Кстати, кусочно-планарная аппроксимация — это один из способов (есть и другие) устранения «негативности» в поузловых распределениях нагрузок моделей высших порядков. Ниже мы построим альтернативную модель бикубического конечного элемента серендипова семейства (элемент 3-го порядка).

На рис. 4 изображен бикубический элемент серендипова семейства. В отличие от аналогичного элемента лагранжева семейства здесь отсутствуют внутренние узлы (их четыре).

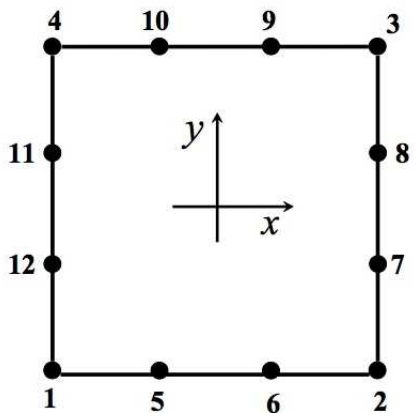

Рис. 4. Рис. 4 Бикубический серендипов КЭ.

Впервые полиномиальный базис этого КЭ был получен подбором в 1968 г. Эргатудис, Айронс, и Зенкевич, которые назвали его стандартным. Приведем две типичные функции (этого достаточно) стандартного базиса:

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= \frac{1}{32}(1-x)(1-y)\big(9(x^2+y^2)-10\big)\,, \\ N_5(x,y) &= \frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(1-3x)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

С учетом того, что узлы на границе расположены равномерно, нетрудно записать остальные функции базиса. Стандартная модель, как известно [6], приводит к физически абсурдному распределению равномерной нагрузки по узлам: в угловых узлах доля нагрузки отрицательна и составляет $-1/8$, в промежуточных узлах она равна $3/16$. Физически неадекватный спектр узловых нагрузок — основной недостаток серендиповых элементов высших порядков. Интересно, что математически безупречные способы построения базисов всякий раз приводили к стандартной модели. В этой связи можно назвать алгебраический (матричный) метод, конденсацию, нематричный метод Тейлора. В 1982 г. с помощью геометрической вероятности [7] удалось построить первую модель бикубического серендипова элемента, свободного от негативности в спектре узловых нагрузок.

Покажем, как использовать кусочно-планарную аппроксимацию для построения альтернативного базиса КЭ (рис. 4). Сначала представим квадрат в виде набора 4-х треугольников: Δ_{1-2-3}, Δ_{1-3-4}, Δ_{1-6-11} и Δ_{1-5-12} с общей вершиной 1. Понятно, что эта композиция предназначена для построения $N_1(x,y)$. В каждом треугольнике выбираем текущую точку $M(x,y)$ и рассматриваем «вложенные» треугольники с вершиной и основанием, противолежащим вершине 1. Далее, решаем задачу на геометрическую вероятность. Вероятность того, что случайная точка, брошенная в Δ_{1-2-3}, попала в Δ_{M-2-3}, равна $p_1 = (1-x)/2$. Аналогично, для Δ_{1-3-4}: $p_2 = (1-y)/2$. Для Δ_{1-6-11}: $p_3 = -(2+3x+3y)/4$. Для Δ_{1-5-12}: $p_4 = -(4+3x+3y)/4$. По формуле умножения вероятностей

$$N_1(x,y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(2+3x+3y)(4+3x+3y)\,. \tag{11}$$

При построении $N_5(x,y)$ рассматриваем треугольники: Δ_{5-2-3}, Δ_{5-4-1}, Δ_{5-6-10} и Δ_{5-3-4}. Соответствующие вероятности таковы:

$$p_1 = \frac{3}{4}(1-x)\,, \qquad p_2 = \frac{3}{2}(1+x)\,, \qquad p_3 = -\frac{1}{2}(3x+y)\,, \qquad p_4 = \frac{1}{2}(1-y)\,.$$

По правилу перемножения вероятностей получаем

$$N_5(x,y) = -\frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(3x+y)\,. \tag{12}$$

Остальные функции альтернативного базиса бикубической интерполяции легко получаются из (11) и (12) перестановкой координат x и y.

Здесь мы имеем дело с естественным дискретным распределением единичной нагрузки по узлам: в угловых узлах по 1/8, в промежуточных — по 1/16. Заметим, что нагрузка распределена поровну между угловыми и промежуточными узлами, и в этом отношении полученный результат вряд ли нуждается в улучшении. Этот результат подтвердил принципиальную возможность получения физически адекватного спектра узловых нагрузок на серендиповом бикубическом элементе. Если потребуется коррекция спектра, можно воспользоваться взвешенным усреднением стандартного (10) и альтернативного (11) и (12) базисов. О других способах генерирования альтернативных моделей серендиповых элементов можно узнать из публикаций [8,9].

Выводы. Глубокая и плодотворная идея Куранта о кусочно-планарной аппроксимации финитных функций получила простое вероятностное истолкование. Это дает наглядный и удобный метод конструирования альтернативных базисов на треугольных и квадратных элементах высших порядков.

Литература

1. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями / М.: Наука, 1985. – 88 с.
2. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations // Bull. Amer. Math.Soc. – № 49. – 1943. – P.1-23.
3. Сильвестер П. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков / М.: Мир, 1986. – 228 с.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / М.: Мир, 1979. – 392 с.
5. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / М.: Наука, 1981. – 416 с.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / М.: Мир, 1975. – 540 с.
7. Хомченко А.Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / Ивано-Франковск: Ивано-Франк. ин-т нефти и газа, 1982. – 9 с. - Деп. в ВИНИТИ 18.03.82, № 1213.
8. Астионенко И.А. О серендиповых элементах с естественным спектром узловых нагрузок // Геом. та комп'ютерне моделювання / Зб. наук. пр. – Вип. 17. – Харків: ХДУХТ, 2007. – С.97-102.
9. Хомченко А.Н. Новый подход к построению базисов серендиповых элементов // Геом. та комп. моделювання / Зб. наук. праць. – Вип. 23. – Харків: ХДУХТ, 2009. – С.90-95.

PROBABILISTIC NATURE OF PEACE-WISE PLANAR APPROXIMATION

I.A. Astionenko, Ye.I. Litvinenko, A.N. Khomchenko

Kherson National Technical University,
24-Berislavskoe Shosse, Kherson, 73008, Ukraine;
Petro Mohyla Black Sea State University,
68 Desantnikov Str., 10, Nikolayev, 54003, Ukraine, e-mail: mmkntu@gmail.com

Abstract. It is shown the possibility of functions-"halflids"application for the construction of higher order basis functions on the triangular and square finite elements.

Key words: finite element, peace-wise planar approximation, functions-"halflids".

MSC 82D60, 74E30

МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ТЕПЛОПЕРЕНОСЕ В ПОЛИМЕРНЫХ НАНОКОМПОЗИТАХ

А.В. Никитин, В.А. Лиопо, С.В. Авдейчик, В.А. Струк

Гродненский государственный университет, Гродно, Белоруссия

Аннотация. Предложены модели теплопереноса в композиционных полимерных материалах, содержащих дисперсные наполнители. Приведены варианты расположения частиц наполнителя в объеме композита. Разработан алгоритм расчета теплофизических характеристик композитов в зависимости от состава и структуры.

Ключевые слова: композит, теплоперенос, полимерные материалы, фрактал.

Введение. Расчет теплопроводности композиционных систем базируется на принципе обобщенной проводимости. В этом методе композиционная система заменяется однородной системой с проводимостью, обеспечивающей одинаковый тепловой поток. Для композиционных микронеоднородных материалов выделяется масштабно-значимый (представительный) элемент, размеры которого много больше характерного размера включения, но намного меньше характерного размера образца композита [1]. Эффективный коэффициент теплопроводности такого элемента может приниматься, как коэффициент теплопроводности композиционной системы.

Структура композиционной системы моделируется на решетках различного типа. Затем, для данной геометрии системы решается задача теплопроводности. В работе [2] предлагается метод численного расчета эффективной теплопроводности и времени установления квазиоднородности для дисперсных материалов, реализуемой в рамках нестационарной тепловой задачи, рассматривается применение метода для расчета характеристик слоистых систем. Стохастическая модель структуры дисперсной системы и ее влияние на процессы переноса предложена в работе [3].

Результаты и обсуждение. Известны модели теплопроводности композиционных систем, которые обеспечивают определение эффективного коэффициента теплопроводности композиционной системы. В основном они сводятся к определению эффективного коэффициента теплопроводности композита по известным значениям этого параметра для отдельных компонентов и с учетом структуры распределения наполнителя. Для определения влияния на эффективный коэффициент теплопроводности теплофизических параметров матрицы и компонентов наполнителя, а также структуры композиционной системы, рассматривается масштабно значимый элемент. В общем случае выбор этого элемента зависит от концентрации компонентов наполнителя, соотношения коэффициентов теплопроводности матрицы и наполнителя, распределения компонентов наполнителя в матрице. Для этого элемента определяется эффективный коэффициент теплопроводности по значениям коэффициентов теплопроводности отдельных компонентов композита. Рассматривается несколько моделей бинарного композита. Модель Максвелла [4]:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_1 \left(\frac{\lambda_2 + 2\lambda_1 - 2\rho_2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_2 + 2\lambda_1 + \rho_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \right), \tag{1}$$

статистическая модель:

$$\lambda_{\text{eff}} = \left(\frac{(3\rho_1-1)\lambda_1+(3\rho_2-1)\lambda_2)}{4}\right) + \left[\left(\frac{(3\rho_1-1)\lambda_1+(3\rho_2-1)\lambda_2)}{4}\right)^2 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{2}\right]^{0,5}, \tag{2}$$

матричная модель:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_1\left(1 + \frac{\rho_2}{(1-\rho_2)/3 + \lambda_1/(\lambda_2-\lambda_1)}\right), \tag{3}$$

модель Максвелла-Бюргера-Эйкена:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_1\left(1 + \frac{1-(1-\lambda_2/\lambda_1)L\rho_2}{1+(L-1)\rho_1}\right), \tag{4}$$

перколяционная модель:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_1\left(\frac{\rho_1-\rho_A}{1-\rho_A}\right)^k, \tag{5}$$

где: λ_{eff} – эффективный коэффициент теплопроводности композиционной системы, λ_1 – коэффициент теплопроводности матрицы, λ_2 – коэффициент теплопроводности наполнителя, ρ_1 – объемная концентрация матрицы, ρ_2 – объемная концентрация наполнителя, ρ_A – порог протекания, k – критический коэффициент, принимаемый равным 1,6. Параметр L в (4) определяет форму частиц наполнителя и равен: $L = (5\lambda_1+\lambda_2)/[3(\lambda_1+\lambda_2)]$ – для цилиндрической формы частиц наполнителя, $L = 3\lambda_1/(2\lambda_1+\lambda_2)$ – для шаровой формы частиц наполнителя; $L = (\lambda_1+2\lambda_2)/3\lambda_1$ – для пластинчатой формы частиц наполнителя.

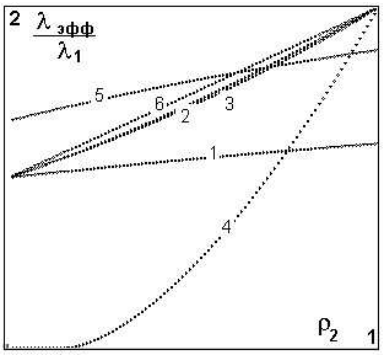

Рис. 1. Относительные значения эффективного коэффициента теплопроводности $\lambda_{\text{eff}}/\lambda_1$ при $\lambda_2/\lambda_1 = 2$ для моделей теплопроводности: 1 – Максвелла, 2 – статистическая, 3-матричная, 4 – Максвелла-Бюргера-Эйкена, 5 – перколяционная.

Были рассчитаны значения относительного эффективного коэффициента теплопроводности композита в зависимости от концентрации наполнителя с использованием различных моделей осреднения: $\lambda_2/\lambda_1 = 2$ (рис. 1), $\lambda_2/\lambda_1 = 20$ (рис. 2), $\lambda_2/\lambda_1 = 200$ (рис. 3).

Для сравнения на рисунках представлена также кривая, соответствующая пропорциональной модели осреднения (6). Сравнение этих результатов с экспериментальными данными и значениями, полученными прямыми численными методами решения задачи теплопроводности, показывают, что наиболее приемлемыми моделями являются 2-4.

Наиболее надежным методом (помимо экспериментального) определения эффективной теплопроводности является метод прямого моделирования. Рассматривается модельная задача определения эффективного коэффициента теплопроводности композиционной системы [5,6]. Теплопроводность композита при одной и той же концентрации наполнителя может изменяться в больших пределах. Это связано с особенностями распределения наполнителя в матрице. Особенно эта зависимость проявляется при большой разнице коэффициентов теплопроводности матрицы и наполнителя.

Композит представляется в виде кубической решетки $N{\times}N{\times}N$, ячейки которой могут быть заполнены либо веществом матрицы, либо веществом наполнителя. Пусть концентрация наполнителя ρ_n, тогда число ячеек, приходящихся на наполнитель $N_n = N^3 \cdot \rho_n$. С помощью генератора случайных чисел определяем координаты ячеек наполнителя x_n, y_n, z_n, и формируем бинарный композит рис. 1 (а, б, в).

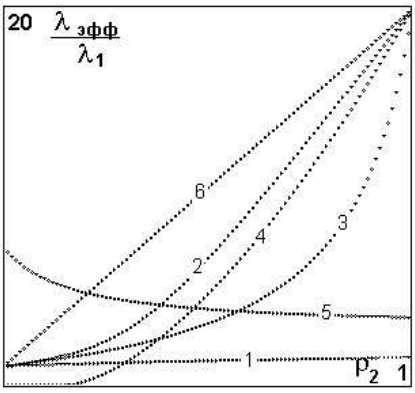

Рис. 2. Относительные значения эффективного коэффициента теплопроводности при $\lambda_2/\lambda_1 = 20$.

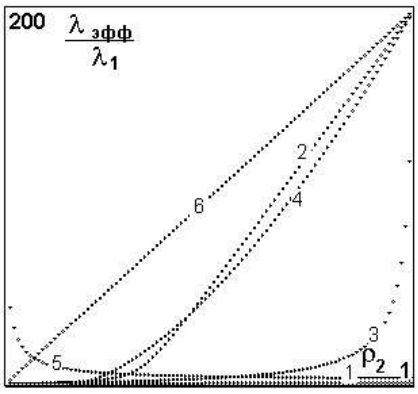

Рис. 3. Относительные значения эффективного коэффициента теплопроводности при $\lambda_2/\lambda_1 = 200$.

Дальнейшее рассмотрение структуры наполнителя будем описывать, опираясь на положения и термины теории перколяции. Каждая ячейка решетки может принадлежать либо матрице, либо наполнителю. На рис. 4 показаны конфигурации частиц наполнителя для концентраций наполнителя 0,005 (а), 0,1 (б), 0,4 (в). Отображается центральное сечение куба. Две или более ячеек, принадлежащие наполнителю и имеющие общие стороны являются связанными. Совокупность связанных ячеек образует кластер. Если концентрация наполнителя мала, то кластеры вообще могут не образовываться (рис. 4 а.) При больших концентрациях наполнителя могут появляться кластеры, простирающиеся от одной стороны решетки до другой (рис. 4 в.).

Такие кластеры называют протекающими. Минимальная концентрация наполнителя, при которой образуется перколяционный кластер является пороговой концентра-

цией p_c. Для квадратной и кубической бесконечных решеток эти значения пороговой концентрации составляют соответственно 0,59 и 0,31 [6]. Пороговая вероятность p_c для решеток малого размера имеет большой разброс в значениях и изменяется в пределах от 0,4 до 0,9

Количественной характеристикой структуры кластера является длина связности ξ. Она может определяться разными способами. Один из них – через радиус циркуляции ξ_q:

$$\xi_q =< r^2 >^{0.5}= \left[\frac{1}{S}\sum_{q=1}^{S}(x_q - x_m)^2 + (y_q - y_m)^2 + (z_q - z_m)^2\right]^{1/2}, \qquad (6)$$

где

$$x_m = \frac{1}{S}\sum_{q=1}^{S} x_q\ , \qquad y_m = \frac{1}{S}\sum_{q=1}^{S} y_q\ , \qquad z_m = \frac{1}{S}\sum_{q=1}^{S} z_q\ ,$$

где S – число частиц в кластере.

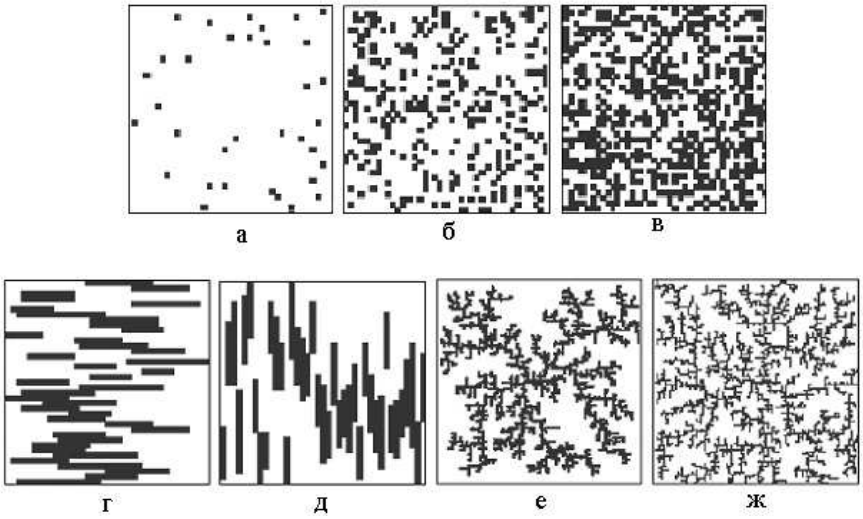

Рис. 4. Варианты конфигурации наполнителя: а, б, в – случайный, концентрация наполнителя 0,005, 0,1, 0,4; г-с — продольными волокнами, концентрации наполнителя 0,3; д-с — поперечными волокнами, 0,3; е – кластерный, 0,3; ж – кластерный из раствора, 0,3.

Как видно из рис. 4, длина связности имеет порядок размера частицы (а), с увеличением концентрации наполнителя она увеличивается (б) и, наконец, при пороговой концентрации имеет размер порядка решетки (в). В этом случае появляется перколяционный кластер. Для генерации кластерной структуры с заданной концентрацией наполнителя, можно использовать следующий алгоритм. Положение ячейки решетки однозначно определяется индексами l, m, n, соответствующими осям x, y, z.

Индексы меняются от 1 до N. Число N – размер решетки, или число ячеек в направлении какой либо из осей координат. Задается значение концентрации наполнителя p_n,

например, равное 0,2. Далее, последовательно перебираются все ячейки решетки. Для каждой из них генерируется случайное число p_ε в пределах от 0 до 1. Если для ячейки выполняется условие, такое что $p_\varepsilon < p_n$, то эта ячейка становится наполнителем. При описанном выше методе генерации кластеров задаваемое значение концентрации наполнителяp_n не совпадает точно с отношением числа ячеек, принадлежащих наполнителю к полному числу ячеек. Однако это несоответствие устраняется выбором большего числа ячеек. Пусть N_p – полное число ячеек решетки. Тогда погрешность отношения N_n/N_p в зависимости от размера решетки N уже при размерах решетки более 30 не превышает 1%. Используя этот метод можно определить порог протекания. Пороговая вероятность p_c для решеток малого размера имеет большой разброс в значениях и изменяется в пределах от 0,4 до 0,9. Для различных типов бесконечных решеток характерные значения p_c приведены в [6]. Так для квадратной и кубической решеток эти значения составляют соответственно 0,59 и 0,31. При генерировании структуры наполнителя по варианту «1-случайный» была использована выше приведенная методика.

В случае генерирования структуры наполнителя в виде волокон на кубической решетке формируется конфигурация наполнителя, как и в варианте со случайным расположением частиц наполнителя. Затем все ячейки в направлении оси X, в которых содержится наполнитель, объединяются в одну нить, состоящую из N_fячеек. Положение начала нити L (значение индекса l) выбирается случайным образом в диапазоне от 1 до N. Если длина нити $N_f > N - L + 1$, то, начиная с позиции L, размещаются только $N - L + 1$ ячеек нити. Остальные $N_f - (N - L + 1)$ ячеек нити размещаются в этом же ряду с позиции 1. На рис. 4 г и 4 д представлены результаты реализации этого алгоритма для формирования структуры наполнителя в виде волокон.

В случае формирования структуры наполнителя в виде кластеров на кубической решетке генерируется конфигурация наполнителя по методу Виттена-Сандера [7]. В результате, создается структура, представленная на рис. 4 е. Этот метод позволяет формировать модельные объекты с фрактальной структурой. На этом же рисунке представлен кластер (рис. 4 ж), полученный методом кластер-кластерной агрегации.

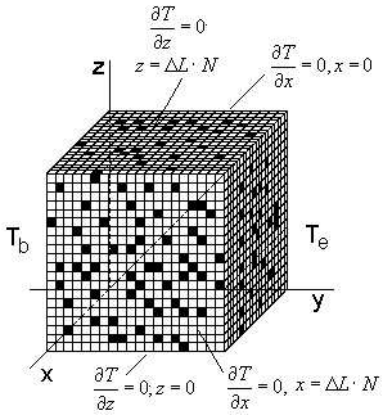

Рис. 5. К постановке задачи теплопроводности.

Рассмотрим расчет эффективного коэффициента теплопроводности бинарной композиционной системы. Состав композиционной системы в общем случае может характе-

ризоваться объемными концентрациями компонентов ρ_i. Введем понятие относительного коэффициента теплопроводности, приняв за 1 коэффициент теплопроводности матрицы:

$$\lambda_i^{'} = \frac{\lambda_i}{\lambda_m}\ , \tag{7}$$

где $\lambda_i^{'}$ – относительный коэффициент теплопроводности i-го компонента; λ_m – коэффициент теплопроводности матрицы.

Опишем алгоритм расчета эффективного коэффициента теплопроводности бинарной композиционной системы. Примем следующие обозначения:ρ_n – концентрация наполнителя; N – линейный размер решетки; N_n – число ячеек, приходящихся на наполнитель; x_n, y_n, z_n – координаты ячеек наполнителя; p_c – пороговая концентрация; ξ – длина связности; ξ_q – радиус циркуляции; S – число частиц в кластере; l, m, n – индексы ячеек, соответствующие осям x, y, z; λ – коэффициент теплопроводности i-го компонента; $\lambda_i^{'}$ – относительный коэффициент теплопроводности i-го компонента; λ_m – коэффициент теплопроводности матрицы; S_t – период решетки; $\Delta x = \Delta y = \Delta z = S$ шаг сетки разбиения для численного расчета температурного поля; N_x, N_y, N_z – число узлов сетки по направлениям осей x, y, z; T_e, T_b – температуры соответственно на плоскостях $x = S_t \cdot N$ и $x = 0$; $T_e^{'}, T_b^{'}$ – относительные температуры соответственно на плоскостях $x = S_t \cdot N$ и $x = 0$; $\lambda_m^{'}, \lambda_n^{'}$ – относительные коэффициенты теплопроводности матрицы и наполнителя; $T_{i,j,k}^{'}$ – относительная температура в узлах сетки; $\lambda_{ijk}^{'}$ – относительный коэффициент теплопроводности в узлах сетки; $q_i, q_i^{'}$ – средний тепловой поток и относительный средний тепловой поток через поверхность, перпендикулярную оси ; $q_{\text{ср.}i}, q_{\text{ср.}i}^{'}$ – средний тепловой поток и относительный тепловой поток в направлении оси ; $\lambda_c, \lambda_c^{'}$ – эффективный коэффициент теплопроводности композита, соответственно размерный и относительный. Структура алгоритма следующая:

1. Задается концентрация наполнителя ρ_n.

2. Задается размер решетки N и ее период S_t.

3. На N-размерной кубической решетке генерируется структура наполнителя с помощью одного из выше описанных методов. Определяются ячейки, принадлежащие наполнителю. Соответствующие маркеры присваиваются элементам трехмерного массива. Маркер наполнителя – 1, матрицы – 0.

4. Задается шаг сетки разбиения для численного расчета температурного поля $\Delta x = \Delta y = \Delta z = S$. Этот шаг либо равен, либо меньше периода решетки S_t. В частном случае, когда $S = S_t$, узлы сетки разбиения размещаются в центрах ячеек.

5. Вычисляется число узлов сетки по направлениям осей: $N_x = N_y = N_z = S_t N/S+1$.

6. В трехмерный массив температур заносим температуры, в соответствии с граничными условиями.

$$T_{i,j,k}^{'} = T_b^{'} = 1, i = 1; N_y >= j >= 1, N_z >= k >= 1;$$

$$T_{i,j,k}^{'} = T_e^{'}, i = N_x; N_y >= j >= 1, N_z >= k >= 1;$$

где $T_e^{'} = T_e/T_b$;$T_e^{'} = T_e/T_b$.

7. В трехмерный массив температур T_1 заносится начальная температура во внутренних узлах сетки $T_0^{'}$.

$$T_{i,j,k}^{'} = T_0^{'}, N_x > i > 1; N_y + 1 >= j >= 0, N_z + 1 >= k >= 0.$$

Начальная температура выбирается произвольно.

8. В трехмерный массив коэффициентов теплопроводностей заносятся коэффициенты теплопроводности $\lambda_{i,j,k}$ в узлах сетки для всех комбинаций индексов i, j, k. По значениям индексов сетки i, j, k вычисляются индексы решетки l, m, n.

$$l = \mathrm{Int}[\Delta x \cdot (i-1)/S] + 1\,, \quad m = \mathrm{Int}[\Delta y \cdot (j-1)/S] + 1\,, \quad n = \mathrm{Int}[\Delta z \cdot (k-1)/S] + 1\,;$$

$$N_x \geq i \geq 1\,, \qquad N_y \geq j \geq 1\,, \qquad N_z \geq k \geq 1\,;$$

$$\lambda_m^{'} = \lambda_m/\lambda_m = 1\,, \qquad \lambda_n^{'} = \lambda_n/\lambda_m\,.$$

9. Заносятся значения начальной температуры во внутренние узлы сетки $T_0^{'}$.

10. Вычисляется температура во внутренних узлах сетки и заносим в трехмерный массив $_2$.

$$T_{ijk}^{'} = \Big\{\Big[T_{i-1,jk}^{'}\frac{\lambda_{ijk}^{'} - \lambda_{i-1,jk}^{'}}{\Delta x^2} + T_{i,j-1,k}^{'}\frac{\lambda_{ijk}^{'} - \lambda_{i,j-1,k}^{'}}{\Delta y^2} + T_{i,j,k-1}^{'}\frac{\lambda_{ijk}^{'} - \lambda_{i,j,k-1}^{'}}{\Delta z^2}\Big] -$$

$$-\lambda_{ijk}^{'}\Big[\frac{T_{i-1,jk}^{'} - T_{i+1,jk}^{'}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1,k}^{'} + T_{i,j+1,k}^{'}}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j,k-1}^{'} + T_{i,j,k+1}^{'}}{\Delta z^2}\Big]\Big\}\times$$

$$\times\Big\{\Big[\frac{\lambda_{ijk}^{'} - \lambda_{i-1,jk}^{'}}{\Delta x^2} + \frac{\lambda_{ijk}^{'} - \lambda_{i,j-1,k}^{'}}{\Delta y^2} + \frac{\lambda_{ijk}^{'} - \lambda_{i,j,k-1}^{'}}{\Delta z^2}\Big] - 2\lambda_{ijk}^{'}\Big[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}\Big]\Big\}^{-1}$$

для $N_x > i > 1$, $N_y \geq j \geq 1$, $N_z \geq k \geq 1$,

11. Вычисляется температура на границах решетки и заносится в трехмерный массив T_2.

$$T_{i,0,k}^{'} = T_{i,2,k}^{'};\ N_x > i > 1, N_z > k > 1;$$

$$T_{i,N_y+1,k}^{'} = T_{i,N_y-1,k}^{'};\ N_x > i > 1, N_z > k > 1;$$

$$T_{i,j,0}^{'} = T_{i,j,2}^{'};\ N_x > i > 1, N_y > j > 1;$$

$$T_{i,j,N_z+1}^{'} = T_{i,j,N_z-1}^{'};\ N_x > i > 1, N_y > j > 1;$$

12. Значения температуры в каждом узле сравниваются на предыдущем и последующем шагах.

Если хотя бы для одного узла выполняется условие:

$$\mid T_{i,j,k}^{'}(\text{массив } T_1) - T_{i,j,k}^{'}(\text{массив } T_2) \mid > \delta\,,$$

то значения элементов массива $_2$ присваиваются элементам массива $_1$ и осуществляется переход к пункту 10. Если для всех узлов сетки выполняется условие:

$$\mid T_{i,j,k}^{'}(\text{массив } T_1) - T_{i,j,k}^{'}(\text{массив } T_2) \mid <= \delta\,,$$

то следует переход к следующему пункту.

13. Рассчитывается средний тепловой поток через плоскости $i = 1, 2 \ldots Nx - 1$

$$q_i = \frac{1}{N_y \cdot N_z} \sum_j^{Ny} \sum_k^{Nz} \frac{(\lambda'_{i,j,k} + \lambda'_{i+1,j,k})\lambda_m}{2} \frac{(T'_{i+1,j,k} - T'_{i,j,k})T_b}{\Delta x}$$

или в безразмерном виде:

$$q'_i = q_i \frac{\Delta x}{\lambda_m T_b} = \frac{1}{N_y \cdot N_z} \sum_j^{Ny} \sum_k^{Nz} \frac{(\lambda'_{i,j,k} + \lambda'_{i+1,j,k})}{2} (T'_{i+1,j,k} - T'_{i,j,k}) \,.$$

14. Рассчитывается средний тепловой поток в направлении оси x

$$\bar{q}_i = \frac{1}{N_x - 1} \sum_{i=1}^{Nx-1} q_i$$

или в безразмерном виде

$$\bar{q}'_i = \frac{1}{(N_G - 1)} \frac{1}{N_y \cdot N_z} \sum_{i=1}^{Nx-1} \sum_j^{Ny} \sum_k^{Nz} \frac{(\lambda'_{i,j,k} + \lambda'_{i+1,j,k})}{2} (T'_{i+1,j,k} - T'_{i,j,k}) \,.$$

15. Рассчитывается эффективный коэффициент теплопроводности композита

$$\lambda_c = \frac{\bar{q}_i \cdot L_x}{T_e - T_b}$$

Предлагаемый метод расчета был реализован в виде компьютерной программы и использован для определения эффективного коэффициента теплопроводности масштабно-значимого элемента композиционной системы (МЗЭ).

Рассматривается несколько вариантов конфигурации наполнителя в матрице: со случайным распределением; с наполнителем в форме продольных волокон; с поперечным расположением волокон; кластерный; кластер-кластерный; блочный, фрактальный. Для всех этих вариантов выполнены численные расчеты относительного эффективного коэффициента теплопроводности бинарного композита $\lambda_{\text{eff}}/\lambda_1$ при различных концентрациях наполнителя ($0.3 \leq \rho_2 \leq 0.55$) и относительных коэффициентах теплопроводности наполнителя ($10 \leq \lambda_2/\lambda_1 \leq 410$).

Были рассчитаны значения относительного эффективного коэффициента теплопроводности композита в зависимости от концентрации наполнителя для различных вариантов расположения наполнителя в матрице: продольное (рис. 6), поперечное (рис. 7) и случайное (рис. 8).

Были также выполнены расчеты по определению зависимости коэффициента теплопроводности масштабно-значимого элемента от фрактальной размерности наполнителя. Предварительно генерировали модельный элемент с заданной фрактальной размерностью. В этом случае элемент представляет собой матрицу с наполнителем, имеющим

структуру перколяционного кластера. Во всех случаях коэффициент теплопроводности для матрицы принимался равным 2, а для наполнителя 200. Вычисления выполнялись на матрицах размером $100 \times 100, 150 \times 150$. Результат исследований представлен на рис. 9, 10 соответственно.

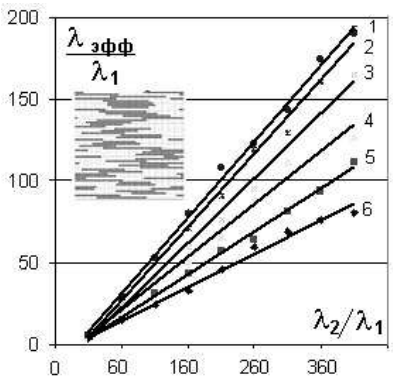

Рис. 6. Относительные значения эффективного коэффициента теплопроводности $\lambda_{\text{eff}}/\lambda_1$ бинарного композита при продольной ориентации наполнителя: 1 – $\rho_2 = 0,55$; 2 – 0,50; 3 – 0,45; 4 – 0,40; 5 – 0,35; 6 – 0,3. Решетка $50 \times 50 \times 4$.

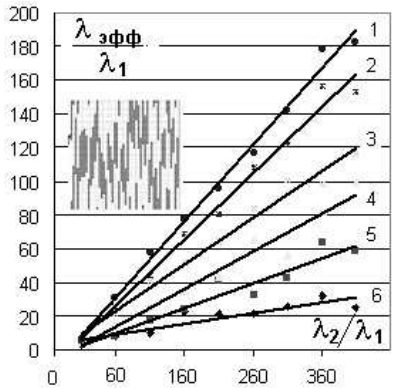

Рис. 7. Относительные значения эффективного коэффициента теплопроводности $\lambda_{\text{eff}}/\lambda_1$ бинарного композита при поперечной ориентации наполнителя: 1 – $\rho_2 = 0,55$; 2 – 0,50; 3 – 0,45; 4 – 0,40; 5 – 0,35; 6 – 0,3. Решетка $50 \times 50 \times 4$.

Из графиков видно, что с ростом фрактальной размерности возрастает также и коэффициент теплопроводности. Чем больше фрактальная размерность, тем плотнее перколяционный кластер, образуемый наполнителем. Теплопроводность наполнителя на два порядка выше теплопроводности матрицы, поэтому с ростом доли наполнителя в композите возрастает и коэффициент теплопроводности всей системы.

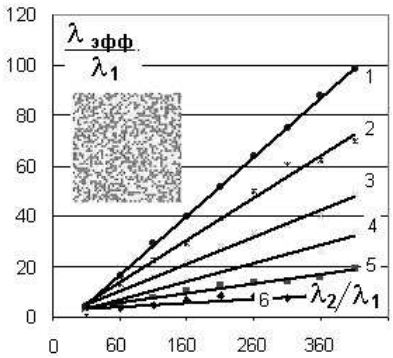

Рис. 8. Относительные значения эффективного коэффициента теплопроводности $\lambda_{\text{eff}}/\lambda_1$ бинарного композита при случайном распределении наполнителя: 1 – $\rho_2 = 0,55$, 2 – 0,50, 3 – 0,45, 4 – 0,40, 5 – 0,35, 6 – 0,3. Решетка $50 \times 50 \times 4$.

Рост такого коэффициента носит степенной характер, причем с увеличением области генерации возрастает также показатель степени. Это можно объяснить тем, что фрактальная размерность перколяционного кластера зависит от размеров области генерации. У матриц, размеры которых меньше 150, фрактальная размерность с ростом области генерации возрастает.

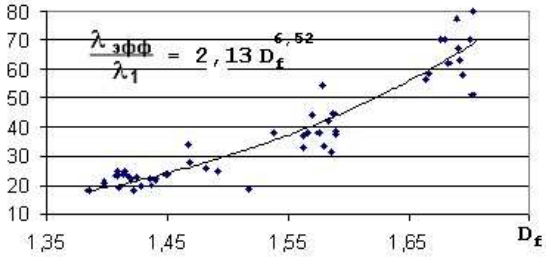

Рис. 9. Зависимость коэффициента теплопроводности от фрактальной размерности D у матрицы 100/100.

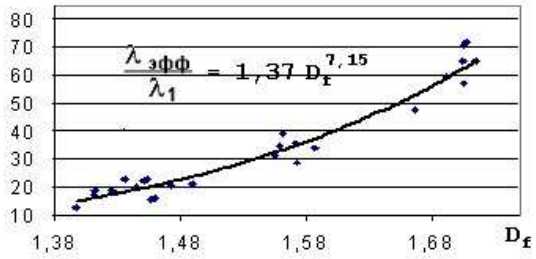

Рис. 10. Зависимость коэффициента теплопроводности от фрактальной размерности D у матрицы 150/150.

Заключение. Предложен алгоритм расчета эффективного коэффициента теплопроводности бинарной композиционной системы с различным характером пространственного расположения наполнителя. Рассчитаны значения относительного эффективного коэффициента теплопроводности композита в зависимости от концентрации наполнителя для различных вариантов расположения наполнителя в матрице: продольного, поперечного и случайного.

Литература

1. Барздокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры / М.: Едиториал УРСС, 2003. – 376 с.
2. Спирин Г.Г. и др. Теплопроводность и критерий квазиоднородности дисперсных материалов // Инженерно-физический журнал. – 1998. – 71, №3. – С.441-446.
3. Маврин С.В. и др. Стохастическая модель дисперсных систем // Инженерно-физический журнал. – 1999. – 72, №2. – С.445-450.
4. Барановский и др. Прогнозирование теплофизических свойств полимерных композиционных материалов с учетом модельных представлений // Пластические массы. – 2004. – №4. – С. 13-18.
5. Никитин Д.А. Моделирование структуры композиционных систем и расчет их коэффициента теплопроводности // Материалы, технологии, инструменты. – 2004. – 9, №2. – С.11-15.
6. Никитин Д.А. и др. Компьютерные модели теплопроводности композиционных систем // Тезисы докладов и сообщений: V Минский международный форум по тепло- и массообмену, Минск, 24-28 мая 2004 / Минск: ИТМО НАН. – 2. – С.270-271.
7. Фракталы в физике.: Пер.с англ. / Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти / М.: Мир, 1988. – 672 с.

MODEL REPRESENTATIONS OF THERMAL CONDUCTANCE IN POLYMER NANOCOMPOSITES

A.V. Nikitin, V.A. Liopo, S.V. Avdeychik, V.A. Struk

Grodno State University, Grodno, Belorus

Abstract. Some models of thermal conductance in composite polymer materials which contains dispersive packings are proposed. It is analyzed some location variants of packing particles in the composite volume. The calculation algoritm of thermal characteristics of composites is developed.

Key words: composite, thermal conductance, polymer materials, fractal.

ФИЗИКА

УДК 621.7:621.217

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ОЦЕНКИ НАНОРАЗМЕРНОСТИ ЧАСТИЦ

В.А. Лиопо, В.А. Струк, Е.В. Овчинников, С.В. Авдейчик, Н.В. Малай

Гродненский государственный университет, Гродно, Белоруссия

Аннотация. Проведена оценка границ применимости дифракционных методов для определения геометрических параметров (крупности) частиц. Показана возможность применения метода рентгеновской дифрактометрии для прямого и относительного расчета параметров наночастиц.

Ключевые слова: дифракционные методы, наночастицы, геометрические параметры.

Введение. Известно, что при анализе поликристаллов дифракционными методами существенное влияние на экспериментальные данные оказывают степень дисперсности частиц и температура [1,2]. Поэтому используя подходы, основанные на формуле Шерера и факторе Дебая-Валлера, можно для частиц одинаковых размеров установить связь температурного и геометрического параметров. Это открывает новые возможности в энергетической оценке наносостояния поликристаллических частиц на базе сравнительно простых экспериментальных данных. Цель настоящей работы состоит в установлении температурного эквивалента геометрических параметров наноразмерных квазикристаллов.

Результаты и обсуждение. При описании рассеяния рентгеновского излучения на объектах с произвольной структурой используют следующую расчетную формулу [1,2]

$$A\left(S\right)=\sum_{j=1}^{N}f_j\left(S\right)\exp(2\pi i\vec{S}\vec{r}_j)\ , \tag{1}$$

где $\vec{r}_j$ – радиус-вектор j-того атома относительно выбранного начала координат, $f(S)$ – атомная амплитуда рассеяния j-того атома; $\vec{S}$ — вектор обратного пространства такой, что $|\vec{S}|=2\sin\upsilon/\lambda$, υ – частота фонона, λ – длина волны рентгеновского излучения, ϑ – брэговский угол $\vartheta=0,5\varphi$, где φ – угол между падающим и рассеянным лучами (угол рассеяния или угол дифракции), $A(S)$ – амплитуда рассеянного луча, N – число атомов в рассматриваемом объеме. Величина $f(S)$ определяется как

$$f\left(S\right)=\int_{V_{am}}\rho\left(\vec{R}\right)dV\,, \tag{2}$$

где $\rho\left(\vec{R}\right)$ – непрерывная функция электронной плотности, определяемая на основе квантово-механических представлений о строении электронных атомных орбиталей. Интегрирование в (2) проводится по объему атома V_{am}. В общем случае, когда атом характеризуется произвольной симметрией, то $f(S)$ будет зависеть от взаимоориентации падающего $\vec{K}_0$ и рассеянного $\vec{K}$ лучей $\left(\left|\vec{K}^0\right|=\left|\vec{K}\right|=1\right)$. Следовательно, в общем случае, $f(S)$ — величина тензорная,

$$f_{\alpha\beta}\left(S\right)=fK_\alpha^0K_\beta\,, \tag{3}$$

где $K_\alpha^0 = k_x^0, k_y^0, k_z^0$, $K_\beta = k_x, k_y, k_z$, то есть определяется проекциями падающего и рассеянного лучей на оси координат (x, y, z). Однако, отличие атомного распределения электронной плотности от сферы практически отсутствует, и, кроме того, картина рассеяния усредняется по множеству атомов. Поэтому в таблицах приведено лишь одно значение для модуля $\left|\vec{S}\right| = 2\sin\upsilon/\lambda$.

Если рассматривается рассеяние рентгеновского излучения на кристалле, то рассеянные лучи имеют ненулевую интенсивность только при выполнении условия Вульфа-Брэгга. Для кристалла значения $\vec{S}$ и $\vec{r}$ в формуле (1) равны

$$\vec{S} \Rightarrow \vec{r}^* = \vec{a}^* \cdot h + \vec{b}^* \cdot k + \vec{c}^* \cdot l = \sum_{m=1}^{3} \vec{a}_m^* h_m \,,$$

$$\vec{r} = \vec{a}x + \vec{b}y + \vec{c}z = \sum_n \vec{a}_n x_n \,, \tag{4}$$

где $\vec{a}_1^* = \vec{a}^*, \vec{a}_2^* = \vec{b}^*, \vec{a}_3^* = \vec{c}^*$; $\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*$ – базис ячейки обратной решетки кристалла; $\vec{a}_1 = \vec{a}, \vec{a}_2 = \vec{b}, \vec{a}_3 = \vec{c}; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – репер Бравэ; h, k, l – кристаллографические индексы плоскости (индексы Миллера), x, y, x – кристаллографические координаты; $\vec{r}^*$ – вектор обратной решетки.

При расчете скалярного произведения $\vec{S}\vec{r}_j$ в формуле (1) необходимо учесть, что

$$\vec{a}_m^* \vec{a}_n = \delta_{mn} \,. \tag{5}$$

Следовательно, для кристаллов уравнение (1) с учетом условий (4) и (5) примет вид:

$$A\,(S) \Rightarrow F\,(h,k,l) = \sum_{j=1}^{N} f_j\,(x,y,z) \cdot \exp 2\pi i\,(hx_j + ky_j + lz_j) \,, \tag{6}$$

где $F\,(h,k,l)$ – структурная амплитуда рефлекса от плоскости (hkl), определяемая как амплитуда рефлекса, рассеянного одной ячейки кристалла, выраженная в электронных единицах, N – число атомов в ячейке кристалла.

В реальных кристаллах атомы колеблются вокруг своих равновесных положений. Причем период этих колебаний несоизмеримо меньше времени эксперимента, то есть рассеяние наблюдается для объемов, в которых колеблется атом. Следовательно, объем атома, как бы, увеличивается, что уменьшает значение электронной плотности в отдельных точках и приводит к уменьшению величины структурной амплитуды. Очевидно, что это ослабление связано с повышением температуры кристалла.

Не нарушая общности подхода, рассмотрим вначале кристалл с P-ячейкой Бравэ. Каждый атом вследствие теплового движения смещается на величину $\Delta\vec{r}$ относительно идеального положения. Так как тепловые колебания не согласованы друг с другом, а рассматривается однородный кристалл с изодесмической межатомной связью, то среднее значение смещения атома, во-первых, не зависит от направления, т.е. $|\Delta\vec{r}|$ описывается сферической симметрией, а, во-вторых, среднее смещение всех атомов за время эксперимента одинаково. Так как в идеальном случае атом находится в начале координат, то в какой-то момент времени структурная амплитуда для P-той ячейки равна

$$F_j\,(h,k,l) = \sum_j f\,(S) \exp\left(2\pi i \vec{S}\Delta\vec{r}_j\right) \,. \tag{7}$$

Весь кристалл будет характеризоваться по всем ячейкам усредненной структурной амплитудой, то есть для кристалла

$$F(h,k,l) = \langle F_j(h,k,l)\rangle = \sum_j f(S)\left\langle \exp\left(2\pi i\vec{S}\Delta\vec{r}\right)\right\rangle , \tag{8}$$

индекс j отсутствует, так как $\Delta\vec{r}$ одинаково для всех атомов. Так как $\exp Q$ $\left(Q = 2\pi\vec{S}\Delta\vec{r}\right)$ при разложении в ряд имеет вид:

$$\exp Q = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q^n}{n!} , \tag{9}$$

а величина Δx и, следовательно, Q достаточно мала, то можно ограничиться двумя членами разложения в ряд. Тогда

$$\langle \exp(2\pi i S\Delta r)\rangle = 1 + 2\pi i\vec{S}\langle\Delta\vec{r}\rangle - 2\pi^2 S^2\langle\Delta r\rangle^2 . \tag{10}$$

В рассматриваемой модели $\langle\Delta x\rangle = 0$. Это значит, что

$$\left\langle \exp\left(2\pi i\vec{S}\Delta\vec{r}\right)\right\rangle = 1 - 2\rho^2 S^2\langle\Delta r\rangle^2 . \tag{11}$$

Так как

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta xz^2 = 3\Delta x^2 ,$$

то, как следует из [1]

$$F_c(h,k,l) = f\left(1 - \frac{2}{3}\pi^2 S^2\delta_x^2\right) , \tag{12}$$

где δ_x – среднее квадратичное смещение атома вдоль координатной оси (y или z).

Обычно структурную амплитуду F_c записывают в экспоненциальной форме. С учетом малости δ_x получим [3, 4]:

$$\langle F(h,k,l)\rangle = f\cdot\exp(-M) , \tag{13}$$

где

$$M = \frac{2\pi^2 S^2}{3}\cdot\delta_x^2 = \frac{8\pi^2\sin^2\vartheta}{\lambda}\frac{\delta_x^2}{3} . \tag{14}$$

Следовательно, интенсивность рефлекса «нагретого» кристалла уменьшается по сравнению с интенсивностью идеального (холодного, с «неподвижными» атомами) кристалла в D раз, где величина

$$D = \exp(-2M) \tag{15}$$

называется фактором Дебая-Валлера (P.Debye, I.Waller).

Если анализируется многоэлементный кристалл с точечной группой, отличной от P, то есть $(I, F, (BC))$, то необходимо рассмотреть вклад от теплового движения каждого атома в уменьшение интенсивности рефлексов. В этом случае δ_x^2, δ_y^2, δ_z^2 будут определять среднее квадратичное отклонение каждого атома вдоль осей x, y, z, соответственно и, если используется усреднение по всем атомам, то и δ_i у них также будут одинаковыми. В этом случае фактор Дебая-Вэллера описывается выражением (14) с учетом (15).

Для расчета структурной амплитуды F в формулу (8) следует ввести значение фактора Дебая-Валлера, тогда среднее значение $\langle F\rangle$ примет вид:

$$\langle F\rangle = \sum f_j \exp\left(-2\pi^2 S^2 \frac{\delta_j^2}{3}\right) \cdot \exp\left(-2\pi i \vec{S}\vec{r}_j\right) \tag{16}$$

или

$$\langle F\rangle = \sum f_j \exp\left(-M\right) \cdot \exp\left(-2\pi i \vec{S}\vec{r}_j\right) , \tag{17}$$

где $\vec{S}$ – вектор обратной решетки, а $M = 2\pi^2 S^2 \delta^2/3$, δ^2 – усредненный квадрат отклонений атомов от положения равновесия, то есть от идеальной модели. Так как период тепловых колебаний много меньше любого дифракционного эксперимента, то становится понятным, почему необходимо говорить о среднем значении структурной амплитуды (см (16) и (17)).

Так как

$$S = \frac{2\sin\vartheta}{\lambda} = \frac{1}{d} , \tag{18}$$

то

$$M = \frac{\pi^2 \cdot 8\sin^2\vartheta}{\lambda^2}\delta^2 = \frac{2\pi^2}{3} \cdot \left(\frac{\delta}{d}\right)^2 . \tag{19}$$

Следовательно, уменьшение интенсивности рефлекса в следствии тепловых колебаний атомов усиливается с увеличением угла рассеяния.

В соответствии с теорией теплоемкости, разработанной Дебаем [1, 5], тепловые колебания атомов рассматриваются как результат суперпозиции распространяющихся в кристалле волн механических возбуждений, кванты которых, называемые фононами, характеризуются распределением энергии

$$E\left(\upsilon\right) = h\upsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp\left(\frac{h\upsilon}{kT}\right) - 1}\right) , \tag{20}$$

где h, k – постоянные Планка и Больцмана соответственно, T – температура. При $= 0$K энергия остаточных колебаний равна $h\upsilon/2$.

При возрастании энергия растет. Но если $kT \gg h\upsilon$, то есть $h\upsilon/kT \ll 1$, то, разложив

$$\exp\frac{h\upsilon}{kT} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{h\upsilon}{kT}\right)^n ,$$

и ограничившись слагаемыми вплоть до второго включительно с учетом, что энергия нулевых (остаточных) колебаний является точкой отсчета значений энергии, получим $E = kT$. Температура, выше которой энергия зависит от температуры линейно, то есть теплоемкость $C_v =$const, называется характеристической или дебаевской температурой θ.

Среднее значение квадрата отклонения атома от положения равновесия в соответствии с температурой Дебая [1, 5] равно

$$\delta^2 = \frac{9h^2}{4\pi^2 mk\theta}\left[\frac{1}{4} + \frac{T}{\theta}f\left(\frac{\theta}{T}\right)\right] = \frac{9h^2T}{4\pi^2 mk\theta^2}\,\Phi\left(\frac{\theta}{T}\right) , \tag{21}$$

где

$$\Phi\left(\frac{\theta}{T}\right) = \frac{T}{\theta}\int_0^{\theta/T}\frac{ydy}{\exp y - 1} . \tag{22}$$

График функции $\Phi(\theta/T)$ в (22) имеет вид, приведенный на рис. 1. Видно, что при $T/\theta > 0,7$ эта функция становится практически линейной. Отклонение от нелинейности не превышает 3% [1, 3, 4]. Следовательно, учитывая условия (18), (21) и рис. 1, значения величины можно определить из следующего уравнения:

$$M = \frac{8\pi^2 \sin^2\vartheta}{3\lambda^2} \cdot \frac{9h^2}{4\pi^2 mk\theta} \cdot \frac{T}{\theta} = \frac{6\pi^2 h^2 \sin^2\vartheta}{mk\theta\lambda^2} \cdot \frac{T}{\theta}\,. \tag{23}$$

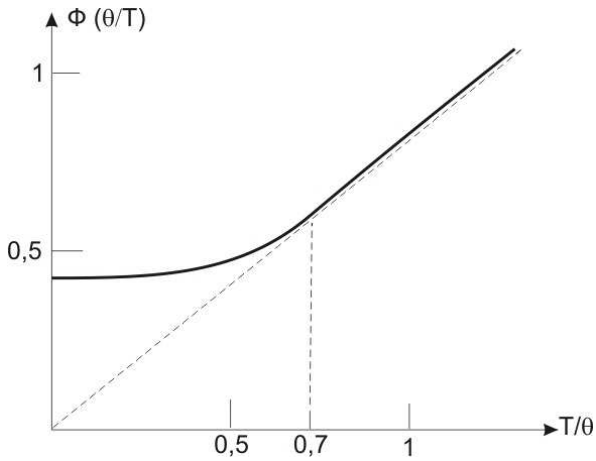

Рис. 1. График функции $\Phi(\theta/T)$ (21, 22).

Следовательно, открывается возможность связать термические эффекты в дифракции с величиной наноразмерности, определяемой условием [6],

$$L_0 = \frac{\sqrt{1,5}h}{\sqrt{km}}\,(\theta_D)^{-1/2}\,. \tag{24}$$

$$M = L_o^2 \cdot \frac{T}{\theta} \cdot \left(\frac{2\pi\sin\vartheta}{\lambda}\right)^2 = L_0^2 \cdot \frac{T}{\theta} \cdot \left(\frac{\pi}{d}\right)^2\,. \tag{25}$$

Интенсивность дифракционного максимума в общем случае определяется выражением [1,2]

$$I(h,k,l) = |F(h,k,l)|^2 \cdot e^{-2M}\,(PLG) \cdot A \cdot p \cdot K\,, \tag{26}$$

где $|F(h,k,l)|^2$ – структурный фактор для плоскости (hkl); (PLG) – фактор пэ-эль-же, объединяющий факторы: поляризации – p, Лоренца – L, геометрический – G, A – фактор поглощения, p – фактор повторяемости, K – фактор, включающий ряд экспериментальных условий, зависящих от техники эксперимента и характеристик образца. Фактор K от угла дифракции зависит в малой степени, его вариации соизмеримы с погрешностью измерения интенсивности. Остальные факторы либо табулированы, либо могут рассчитываться аналитически [6]. Поэтому интенсивность рефлекса обычно выражают уравнением:

$$I(h,k,l) = C \cdot |F(h,k,l)|^2\,. \tag{27}$$

Коэффициент , включающий весь набор факторов, часто рассматривают как нормировочный коэффициент, определив который можно прийти к интенсивности рассеяния как квадрату

структурной амплитуды, то есть как структурный фактор, который определяется условием (8).

На интенсивность рентгеновского рефлекса влияет температура образца T, причем

$$I_T = I_0 \cdot \exp\left(-2M\right), \tag{28}$$

где

$$I_0 = \sum f_j \exp\left(2\pi i \vec{S}\vec{r}_j\right). \tag{29}$$

Величину I_T определяют экспериментально с учетом всей процедуры нормировки [1, 2, 7]. Следовательно

$$\exp\left(-2M\right) = \frac{I_0}{I_T}\ . \tag{30}$$

«Потерянная» вследствие уменьшения интенсивности рефлекса энергия излучения распределяется в фоне [3].

Изменение высоты рефлекса, то есть изменение максимальной интенсивности, определяемой условием (30) может происходить вследствие диспергированности поликристаллического образца. Уменьшение высоты рефлекса приводит к увеличению его полуширины [1, 2]. При этом его интенсивность равна величине I_0 (см. (3)), но

$$I_0 = I_L\left(\Delta 2\vartheta\right), \tag{31}$$

здесь I_L – максимальная высота дифракционного максимума от поликристалла с крупностью частиц L; $(\Delta 2\vartheta)$ – разность полуширины рефлексов образца с «крупными», то есть с не влияющими на профиль рефлекса частицами – кристаллитами, и с кристаллитами с размером L.

Если $I_0/I_T = I_0/I_L$, то уменьшение интенсивности рефлекса при нагревании станет одинаковым с уменьшением высоты максимума рефлекса. Следовательно, с учетом (31) и (31)

$$\left(\Delta 2\vartheta\right) = \exp\left(-2M\right). \tag{32}$$

Величина $(\Delta 2\vartheta)$ определяется формулой Шеррера

$$\Delta 2\vartheta = \frac{\lambda}{L \cdot \cos\vartheta}. \tag{33}$$

Значение определено условием (6), следовательно

$$L = \frac{C}{\Delta\left(2\vartheta\right)} \cdot \frac{2d}{\sqrt{4d^2 - \chi^2}} \tag{34}$$

$$\frac{\lambda}{L\cos\vartheta} = \exp\left[2L_0^2\frac{T}{\theta}\left(\frac{\pi}{d}\right)^2\right] = \exp AT, \tag{35}$$

где

$$A = 2L_0^2\frac{\pi^2}{d^2\theta}. \tag{36}$$

Из (7-9) следует, что

$$L = \exp\left(A \cdot T\right) \cdot \frac{\lambda}{\cos\vartheta}. \tag{37}$$

Параметры, входящие в формулу (9), определяют свойства вещества, но для приблизительной оценки связи между значениями $\Delta L/L$ и температурным (энергетическим) изменением состояния частицы можно принять следующее усредненные значения: $L \approx 15$ нм, $d\,(\vartheta = 30^\circ) = 0,15$ нм, $\theta \approx 500$К, $\lambda = 0,15$ нм, то есть из (8) следует $A \approx 400$.

$$\ln L = \ln \frac{\lambda}{\cos\vartheta} - AT\,. \tag{38}$$

Отсюда

$$\frac{\delta L}{L} = -A\delta T \approx -400\delta T\,. \tag{39}$$

Приведенный пример расчета показывает, что для наночастицы вследствие повышения роли поверхностной энергии по сравнению с массивным образцом и при учете влияния на динамических процессов размерного фактора установлена связь между ее изменениями размеров и энергией, которую можно оценить по температурной шкале. Следовательно, при уменьшении размера образца на 1% произойдет (при предельных значениях параметров), «увеличение температуры» на величину $\delta T = 2,5 \cdot 10^{-5}$К, что эквивалентно уменьшению энергии на величину $\delta E = K\,(\delta T) \approx 3,5 \cdot 10^{-28}$Дж. Изменение энергетических параметров наночастиц по сравнению с их общими аналогами физически обосновано тем, что для частиц спектр колебаний фононов «обрезан» со стороны низких частот, так как длина волны фононных колебаний λ ограничена размерами частицы L ($\lambda \leq 2L$).

Заключение. Выполненный теоретический анализ влияния на профиль и высоту рентгеновского рефлекса температурного и размерного факторов привел к гипотезе о возможности определения энергетического эквивалента изменения размеров наночастиц, который оценивается по температурной шкале. Связь между размерами частиц кристалла и их эффективной температурой отсутствует для массивных образцов и должна учитываться для наносостояния. В качестве основного параметра расчета взята характеристическая (дебаевская) температура.

Литература

1. Глинье А. Рентгенография кристаллов / М.: Гос. изд. физ-мат. лит., 1961. – 604 с.
2. Лиопо В.А., Война В.В. Рентгеновская дифрактометрия / Гродно: Изд. ГрГУ, 2003. – 172 с.
3. Кривоглаз М.А. Теория рассеяния рентгеновских лучей и тепловых нейронов реальными кристаллами / М.: Наука. 1967. – 336 с.
4. Жданова Г.С., Илюшин А.С., Никитина С.В. Дифракционный и резонансный анализ / М.: Наука, 1980. – 254 с.
5. Китель Ч. Введение в физику твердого тела / М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963. – 696 с.
6. Лиопо В.А. Геометрические параметры наночастиц // Низкоразмерные системы 2 / Гродно: Изд. ГрГУ, 2003. – Вып.3. – С.4-11.
7. Васильев Е.К. Рентгенофазовый анализ / Новосибирск.: Наука СОАН, 1986. – 196 с.

ENERGY CRITERIUM OF THE ESTIMATE OF NANOPARTICLE SIZES

V.A. Liopo, V.A. Struk, E.V. Ovchinnikov, S.V. Avdeychik, N.V. Malay

Grodno State University, Grodno, Belorus

Abstract. It is done the estimation of the domain where diffraction methods may be applied for the determination of nanoparticle geometric parameters (their sizes). The possibility of application of the X-ray diffraction method for the straight and relative calculation of nanoparticle parameters is shown.

Key words: diffraction methods, nanoparticles, geometric parameters.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

MSC 01A55

ВКЛАД ВЫДАЮЩИХСЯ УЧЕНЫХ В СТАНОВЛЕНИЕ, РАЗВИТИЕ И ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА С 1879 ПО 1917 гг.

Г.С. Бобрицкая

Украинская инженеро-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, Харьков, 61003, Украина,
e-mail: ikir238@rambler.ru

Аннотация. Кратко излагается научная, педагогическая и организационная деятельность некоторых членов Харьковского математического общества.

Ключевые слова: Харьковское математическое общество, история, XIX столетие.

В 1879 году при Харьковском императорском университете было создано Харьковское математическое общество (ХМО).

Изучая Харьковское математическое общество, невозможно его рассматривать как саморазвивающуюся организацию, со сложившейся структурой и разветвленной системой направлений деятельности, без влияния на развитие и становление общества его отдельных членов. Значительную роль в развитии научных сообществ играют личности ученых, которые в них входят.

В разные периоды существования общества его действительными членами были К.А. Андреев, В.Г. Имшенецкий, Д.М. Деларю, Т.И. Котов, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, Д.М. Синцов, М.А. Тихомандрицкий и др.

Евгений Ильич Бейер — первый председатель Харьковского математического общества, ученик акад. М.В. Остроградского, один из сильнейших преподавателей математики Харьковского университета середины XIX века, учитель Д.М. Деларю, М.Ф. Ковальского, В.П. Алексеева, А.П. Шимкова.

Родился Бейер в Вологде 14 января 1819 г. В 1832 году он поступил в Педагогический институт в Петербурге, где получил среднее и высшее образование. Во время учебы Е.И. Бейера высшую математику в Педагогическом институте преподавал акад. М.В. Остроградский, что повлияло на дальнейшую научную и педагогическую деятельность Евгения Ильича. М.Н. Марчевский писал: «От Остроградского, который учился в Харькове у Осиповского и Павловского, ученики приняли математические традиции, которые затем снова культивировали в Харьковском университете. Среди них и Евгений Ильич Бейер».

Под влиянием М.В. Остроградского самой любимой областью исследований Е.И. Бейера стала высшая алгебра, а особенно, решения числовых уравнений. В 1846 году он сдал магистерские экзамены и в 1849 году защитил магистерскую диссертацию «О решения буквенных алгебраических уравнений».

Кроме диссертации, известны две его работы. Первая – «Об интегрировании линейных дифференциальных уравнений с каким угодно количеством переменных» (1858). Эта работа была напечатана в виде актовой речи, которые были популярны в Харьковском университете

в это время. Эта работа занимает 129 страниц и вряд могла быть произнесена в таком виде, потому что она содержит большое количество формул и непонятна для широкой общественности.

Вторая большая работа «О разностном интегрировании рациональных дробей, когда это возможно» напечатана в Московском математическом сборнике, т. 4 и 5. Эта работа состоит из трех частей и написана простым понятным языком. Первая ее часть полностью посвящена историческому обзору этого вопроса.

Е.И. Бейер печатался мало, и это объясняется тем, что на нем было преподавание почти всех математических курсов. С 1846/1847 учебного года в 1858/1859 учебного года он читал алгебру, тригонометрию, аналитическую геометрию, теорию логарифмических и тригонометрических функций, элементарную теорию конических сечений, интегральное и дифференциальное исчисление.

Впоследствии, когда ситуация с преподавательским составом на кафедре улучшилась, Е.И. Бейер получил возможность читать лекции по теории дифференциальных уравнений, исследованием которой он занимался.

В 70-х годах XIX века вокруг него начинают собираться ученики и другие преподаватели физико-математического факультета Харьковского императорского университета для обсуждения вопросов математического и педагогического характера. Таким образом, возникла идея создания Харьковского математического общества.

С самого начала существования ХМО, в 1879 году, Е.И. Бейер был его членом. На первом заседании, которое состоялось 8 сентября 1879 г., члены общества избрали распорядительный комитет, председателем которого и стал Е.И. Бейер. Через две недели, 22 сентября 1879 г., произошло следующее научное заседание общества, на котором председатель Е.И. Бейер выступил с докладом «О теореме Ферма». Этим докладом и открылась деятельность Харьковского математического общества.

На следующем заседании общества, 6 октября 1879 г., Е.И. Бейер закончил свой доклад «О теореме Ферма» и сдал рукопись в печать, однако эта его работа не была напечатана. Название доклада указывает на то, что Е.И. Бейер, кроме преподавательской деятельности и работ по теории дифференциальных уравнений и интегрального исчисления, продолжал заниматься теорией алгебраических уравнений. Более докладов на заседаниях общества он не делал.

На следующий 1880/81 учебный год председателем ХМО был избран В.Г. Имшенецкий.

Харьковское математическое общество обязано своим возникновением, главным образом, деятельной личности, профессору Харьковского университета, а затем академику Василию Григорьевичу Имшенецкому. Инициатор и организатор общества, В.Г. Имшенецкий в первый год его существования взял на себя обязанности товарища председателя. Со следующего года он стал уже председателем и остался им до избрания в Академию наук. Членом распорядительного комитета ХМО он был непродолжительное время, но оказал значительное влияние на развитие и дальнейшую деятельность общества.

Родился В.Г. Имшенецкий 4 января 1832 г. в семье штаб-лекаря Ижевского оружейного завода в Вятской губернии. В 1853 году окончил физико-математический факультет Казанского университета с золотой медалью и степенью кандидата. В годы его учебы в университете под влиянием Н.И. Лобачевского сложился сильный педагогический коллектив. Традиции Казанского университета В.Г. Имшенецкий поддерживал и в те времена, когда работал на должности профессора в Харьковском университете.

В 1865 году защитил магистерскую диссертацию «Об интегрировании уравнений с частными производными первого порядка». В ней впервые изложен в доступной форме второй

метод Якоби (1862). После защиты диссертации он получил место доцента чистой математики в Казанском университете.

В 1868 году он защищает докторскую диссертацию «Исследование способов интегрирования уравнений с частными производными второго порядка функций двух независимых переменных», в которой излагает метод Монжа-Ампера решения уравнений с частными производными второго порядка. После защиты он получил степень доктора чистой математики и был назначен экстраординарным профессором Казанского университета. В 1869 году его избрали ординарным профессором.

Обе диссертации В.Г. Имшенецкого сыграли важную роль в развитии теории дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядков. Диссертации были переизданы в 1916 году Московским математическим обществом и рекомендованы как учебные пособия. Они были переведены на французский язык в 1869 и 1872 годах. Докторская диссертация была переведена также на немецкий язык.

В 1872 году его пригласили в Харьковский университет на кафедру механики. 25 апреля 1872 г. он, по предложению Д.М. Деларю, был избран на должность экстраординарного профессора, а в декабре 1873 г. утвержден ординарным профессором кафедры прикладной математики. Он читал при университете все курсы по механике, расширив и перестроив их, читал публичные лекции по прикладной механике, курс небесной механики.

Высокие педагогические способности В.Г. Имшенецкого можно определить по количеству учеников, ставших выдающимися учеными, имена которых известны как на родине, так и во всем мире (М.Н. Лагутинский, Н.Н. Салтыков, А.П. Грузинцев и др.). А.П. Грузинцев — ученик В.Г. Имшенецкого по Казанскому университету. Отмечая педагогические качества учителя, А.П. Грузинцев писал: «Лекции его отличались необычайной ясностью, последовательностью и полнотой, и врезались в память внимательного слушателя надолго. Читал он спокойно, не спеша, что давало возможность следить за развитием его идей и среднему слушателю — его лекция всегда была посвящена студентам». Лекции привлекали не только тех студентов, которые были обязаны посещать их, но и студентов с других курсов и даже лиц, которые уже имеют высшее образование.

В.Г. Имшенецкий уделял внимание и общественной деятельности: исполнял обязанности члена совета при попечителе учебного округа. Он был одним из основателей и инициатором создания ХМО в 1879 г. Вместе с Д.М. Деларю он составил первый устав общества, благодаря которому были заложены основы деятельности общества.

Со второго года существования общества (с 1880 г.) В.Г. Имшенецкий стал председателем ХМО и оставался им до отъезда в Петербург.

Общество во многом обязано В.Г. Имшенецкому своей популярностью фактически с момента создания. В.Г. Имшенецкий имел много друзей в научном мире как в России, так и за рубежом, что повлияло на создание научных связей ХМО с другими научными центрами и отдельными учеными в России и Европе.

В.Г. Имшенецкий первый поднимает на заседаниях вопросы педагогического и методического характера. На заседании ХМО 22 января 1881 году В.Г. Имшенецкий выносит на обсуждение вопрос об учительских экзаменах в университете. К тому времени звание учителя получали как воспитанники вузов, так и лица, не получившие вообще высшего образования, причем как от тех, так и от других никакой специальной педагогической подготовки не требовали, если не учитывать двух пробных лекций. В ответ на такое положение ХМО выдвинуло предложение ввести для студентов, желающих быть учителями специальную педагогическую подготовку. Если лица, которые планируют быть учителями, не прошли курс, то их экзаме-

нуют по программе этого курса.

На заседании, состоявшемся 17 октября 1881 г., В.Г. Имшенецкий представил книгу датского профессора Петерсона. Он предложил использовать ее как руководство для решения геометрических задач на построение в гимназиях.

Начиная уже с первой серии «Сообщений Харьковского математического общества», В.Г. Имшенецкий печатал большое количество работ по механике и динамике, элементарной математике и интегральном исчислении. На заседаниях ХМО он сделал 13 докладов, из которых 11 были напечатаны:

1. Определение силы, которая движет по коническим сечениям материальную точку, в функции ее координат.

2. Задача: разделить площадь данной трапеции на n равных частей прямыми, параллельными двум ее параллельным сторонам.

3. М.Е. Ващенко-Захарченко «Начала Евклида» с пояснительным вступлением и толкованием.

4. Канонические дифференциальные уравнения гибкой, нерастяжимой нити и брахистохроны, в случае потенциала сил.

5. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка, интегрируемые с помощью множителя.

6. Заметка о функциях комплексной переменной.

7. О неравенстве, ограничивающем значение определенного интеграла от произведения функций.

8. Элементарный вывод закона больших чисел теории вероятностей.

9. Новое аналитическое доказательство параллелограмма сил.

10. Решение уравнений четвертой степени на основе симметричного омографичного соотношения, которое существует между корнями.

11. Сравнение образа проф. М.В. Бугаева с другими способами поиска рациональных дробных решений дифференциальных уравнений.

В 1881 году он был избран ординарным профессором Петербургской Академии Наук. 20 февраля 1882 г. избрание было утверждено и в мае В.Г. Имшенецкий переезжает в Петербург.

Протоколы заседаний ХМО после отъезда Василия Григорьевича из Харькова свидетельствуют, что он не прерывал отношений с обществом и продолжал активно сотрудничать с харьковскими математиками.

Как инициатор создания, организатор общества, руководитель его направлений деятельности, активный деятель, в 1888 году В.Г. Имшенецкий был избран ХМО в почетные члены.

Деятельная натура В. Имшенецкого, как выдающегося ученого, педагога и организатора, стала одной из движущих сил для создания в Харькове математического общества, его начального развития, популяризации ХМО и формированию связей с другими научными обществами мира и отдельными учеными.

Одним из основателей Харьковского математического общества и разработчик первого устава общества был Д.М. Деларю.

Даниил Михайлович Деларю родился в Одессе в 1839 г. Его отец, дворянин, был инспектором Ришельевского лицея, на базе которого в 1865 г. был создан Новороссийский университет. Начальное и высшее образование получил дома. В 1856 – 1860 учился в Харьковском университете, закончил его со степенью кандидата, а с 1861 г. работал там в течение 24 лет.

Учителем Д.М. Деларю был Е.И. Бейер (1819 – 1889). Любимой областью математики Е.И. Бейера была высшая алгебра. Она стала ведущей и для магистерского исследования Д.М. Деларю. В 1864 г. защитил в Харьковском университете магистерскую диссертацию «Общая теория алгебраического решения уравнений», а в 1868 г. — докторскую диссертацию «О нахождении особых решений дифференциальных уравнений первого порядка, которые зависят от двух переменных» и был назначен ординарным профессором. Диссертации Д.М. Деларю носили обзорный характер. Большой интерес представляет магистерская диссертация (1864 г.), в ней он впервые изложил основы теории групп французского математика Э. Галуа (1811 – 1832). В те годы эта теория была еще мало известной во Франции, пока в 1870 г. не вышел «Трактат о подстановке и алгебраических уравнениях» К. Жордана с разъяснениями и дополнениями.

Во время работы в Харьковском университете Деларю читал почти все курсы на математическом отделении физико-математического факультета. Его лекции занимали по сути все разделы математики, некоторые его курсы были литографированны, а два курса напечатаны: «Курс дифференциального исчисления и теория алгебраических функций» в 1869 г. и «Курс теории дифференциальных уравнений» в 1880 г. Когда в 70-х годах ситуация с составом кафедры улучшилась, у Д.М. Деларю появилась возможность создать новые курсы. В 1874-1875 учебном году он начинает преподавать студентам теорию вероятностей, теорию функции мнимой переменной, теорию решения многочисленных уравнений, вычисления бесконечно малых.

Д.М. Деларю сыграл значительную роль в создании ХМО, разработав совместно с В.Г. Имшенецким первый устав общества. Именно этот устав заложил начало деятельности ХМТ, направления его деятельности, которые включали не только разработку математических вопросов, но и педагогических.

В первый год существования общества (1879) Д.М. Деларю выступил с докладом «Заметка об одном предложении по теории сходимости бесконечных рядов». Этот доклад был напечатан в «Сообщениях ХМО».

Долгое время, с 1879 года по 1896 год, Д.М. Деларю был не просто членом общества, а входил в состав его распорядительного комитета, занимал должность товарища председателя.

Другой член ХМО, М.А. Тихомандрицкий, в отличие от вышеупомянутых, не являлся учредителем общества, но сыграл значительную роль в его развитии.

Матвей Александрович Тихомандрицкий родился в 1844 году в Киеве в семье профессора-математика А.Н. Тихомандрицкого. Начальное и среднее образование получил дома. В 1861 году поступил в Петербургский университет на физико-математический факультет. В 1865 году окончил его с золотой медалью за сочинение о параболическом интерполировании. Несколько лет был преподавателем математики в гимназии. В 1879 году в Петербурге защитил диссертацию «О гипергеометрических рядах» и остался преподавать в университете. В 1883 году был избран доцентом Харьковского университета, а в 1885 году защитил докторскую диссертацию «Вращение гиперэллиптических интегралов».

М.А. Тихомандрицкий с начала работы в Харьковском университете стал членом и активным деятелем ХМО. В первый год работы (1883 – 1884), сразу после вступления в общество, он выполняет обязанности секретаря. После защиты докторской диссертации стал товарищем председателя (1886-1889). На определенном этапе развития общества его члены поняли, что устав общества тормозит его дальнейшее развитие. В 1887 году М.А. Тихомандрицким, вместе с В.Л. Кирпичевым, был разработан, а затем утвержден в министерстве второй устав общества, который на протяжении многих лет оставался неизменным.

М.А. Тихомандрицкий активно принимал участие в научной деятельности общества. Лю-

бимой областью математики для него была алгебра. В «Сообщениях ХМО» печатал свои научные исследования, из них:

1. Заметка о введении тета-функций в теорию эллиптических функций.
2. Вывод основных тезисов теории эллиптических функций.
3. Выделение алгебраической части гиперэллиптических функций.
4. Относительно теории радиуса кривизны.
5. Отыскание особых точек плоских алгебраических кривых.
6. Разложение тригонометрических и эллиптических функций на частные дроби и в бесконечное произведение.

Как член распорядительного комитета М.А. Тихомандрицкий поддерживает связи харьковских математиков с иностранными обществами и отдельными учеными.

Третьим председателем ХМО был Константин Алексеевич Андреев, профессор Харьковского, а затем Московского университетов, член-корреспондент Петербургской АН. Значение его вклада в развитие ХМО можно определить с помощью сведений, найденных в общих описаниях деятельности общества.

К.А. Андреев — один из выдающихся геометров конца XIX – начала XX в. С харьковским периодом связаны его первые геометрические исследования. До отъезда из Харькова он был одним из основателей и постоянным членом распорядительного комитета ХМО, занимая в разное время должности секретаря, товарища председателя и председателя общества. С переездом в Москву он становится почетным членом общества.

К.А. Андреев родился в Москве 14 марта 1848 г. Потеряв в детстве способность видеть одним глазом, он только в 12 лет поступил в гимназию, а по окончании ее в 1867 г. — в Московский университет на математическое отделение физико-математического факультета. В 1873 г. он защитил кандидатскую диссертацию «О таблицах смертности». В 1875 он уже представил физико-математическому факультету Харьковского университета работу «О геометрических преобразованиях плоских кривых» для защиты в качестве магистерской диссертации. В 1879 г. Защитил докторскую диссертацию «О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий», после чего был избран советом Харьковского университета в экстраординарные профессора, а в 1881 г. — в ординарные.

Как свидетельствуют протоколы заседаний ХМО, К.А. Андреев принимал энергичное участие в его работе. Он стал первым секретарем ХМО, уже через год занял пост товарища председателя общества, а в 1884 г. возглавил его и был неизменным председателем и редактором «Сообщений ХМО» в течение 15 лет.

В обязанности секретаря и председателя общества входили доклады научных исследований, которые присылали математики из разных концов света, и разъяснения их содержания.

К.А. Андреев довольно часто на заседаниях ХМО обнародовал результаты исследований других ученых: О.П. Фролова, П. Стефаноса, акад. П.Л. Чебышева, И. Пташицкого, А.А. Маркова, П. Новикова, К.А. Поссе, П.С. Флорова, И.И. Иванова, А.А. Маркова, В.Г. Имшенецкого, П.А. Некрасова, В.И. Шифф.

По результатам собственных научных исследований К.А. Андреев на заседаниях ХМО регулярно делал доклады до 1899 г. За 20 лет пребывания действительным членом общества сделал 32 доклада.

Основными направлениями научных исследований в Харьковский период были аналитическая и проективная геометрия и теория дифференциальных уравнений. К.А. Андреев значительно повлиял на направление научной деятельности членов общества. В период председа-

тельства К.А. Андреева именно в этих областях математики велась работа на заседаниях ХМО. Это дает возможность говорить о становлении в Харькове первой математической школы как творческого общества исследователей, объединенных общей идеей и программой исследования под руководством признанного лидера.

Когда научные интересы математиков совпадали, на страницах «Сообщений ХМО» начинались математические дискуссии, которые иногда превращались в прочное научное сотрудничество. Примером такого сотрудничества может служить переписка К.А. Андреева и чешского профессора Эмиля Вейера, касающихся проективной геометрии и вопросов построения синтетической теории кривых третьего порядка.

Как член распорядительного комитета К.А. Андреев проводил анализ научной работы других математиков: «О геометрическом определении геометрического соответствия» по поводу заметки Ф. Клейна, «Несколько слов по поводу теоремы П.Л. Чебышева и В. Имшенецкого об определенных интегралах от произведения функций», «Несколько обобщений по вопросу о разложении определенного интеграла по формуле, предложенной П.Л. Чебышевым», сделал анализ научных трудов Н.И. Лобачевского, проанализировал научную деятельность Е.А. Роговского. Такие работы свидетельствуют о высоком уровне знаний К.А. Андреева из различных областей математики, его широте кругозора и эрудированности.

Кроме чисто научных исследований, К.А. Андреев на страницах «Сообщений ХМО» печатал очерки жизни и научной деятельности известных ученых, некрологи. Н.М. Кушлакова в своем исследовании приводит следующие работы К.А. Андреева: о жизни и деятельности Я. Буняковского, краткий обзор жизни и деятельности П.Л. Чебышева, К. Штаудта, М. Шаля, В. Имшенецкого.

Андреев принимал активное участие в научных дебатах, которые создавали благоприятную атмосферу для развития различных направлений математических знаний. Он также принимал активное участие в общественной деятельности ХМО, в 1880 г. был, как представитель общества, отправлен в Москву на открытие памятника А.С. Пушкина.

В 1894 г. Московское математическое общество праздновало свое 25-летие. Представителем ХМО в Москве был К.А. Андреев.

В качестве члена распорядительного комитета К.А. Андреев брал на себя решение организационно-научных вопросов. На посту товарища председателя вместе с Д.М. Деларю составляли подробную записку об учительских экзаменах, обсуждению которых были посвящены два предыдущих заседания, и выступили с ней 9.02.1881 г.

Исполняя обязанности председателя общества, в годовом заседании 22.09.1885 г. К.А. Андреев отметил, что устав общества, который был принят в 1879 г. уже устарел и тормозит дальнейшее развитие ХМО, и отметил необходимость изменения устава. Со следующего 1887 года общество уже работало по второму уставу.

В 1898 г. К.А. Андреев переводится в Московский университет. Одновременно с работой в университете, он работает (до 1907 г.) директором Александровского коммерческого училища. Такая загруженность работой не останавливала К.А. Андреева в его научных исследованиях. Он продолжал поддерживать тесную связь с Харьковским математическим обществом.

Вклад К.А. Андреева в формирование и становление ХМО, как организованного объединения и научного общества, был значителен. Во время работы в Харькове он повлиял на направление научной деятельности общества, закрепил статус общества в научном мире, создавая новые связи общества в научном мире. После отъезда он поддерживает тесную связь с членами ХМО, продолжает популяризацию его деятельности.

Во время председательства К.А. Андреева почти все время секретарем общества был

А.П. Грузинцев. Секретарь общества играл в его деятельности значительную роль, в его обязанности входило тщательно готовить заседания, вести протоколы, поддерживать переписку с другими учеными.

Алексей Петрович Грузинцев — физик и математик, профессор Харьковского университета. В 1872 г. он окончил математическое отделение физико-математического факультета Казанского университета и стал стипендиатом Министерства народного образования. Свою преподавательскую деятельность он начал в Пермской гимназии учителем математики и физики. Параллельно вел естественную историю и гигиену в женской гимназии. В 1874 г. он был переведен в Нижний Новгород.

Учителем А.П. Грузинцева по Казанскому университету был В.Г. Имшенецкий. Это сыграло важную роль в переезде в 1879 г. А.П. Грузинцева в Харьков, где он начал преподавать в первой харьковской гимназии. С самого начала основания ХМО он становится его деятельным членом.

Членство в ХМО открыло А.П. Грузинцеву путь к научной деятельности. Практически с первых заседаний общества молодой ученый начинает выступать с результатами своих научных исследований. По данным Н.М. Кушлаковой, на заседаниях ХМО он сделал 42 доклада, из которых 29 было опубликовано, из них:

1. Расчет хода лучей в кристалле с двумя преломлениями.
2. Доклад по вопросу об отражении и преломлении света на границе двух изотопных середин.
3. Аналитическое доказательство основной теоремы теории упругости.
4. Распространение образа Абуль–Джуда.
5. Опыт изучения стационарного состояния упругой изотопной среды.
6. Об использовании закона сохранения энергии.
7. О теории дисперсии Фохта.
8. О минимуме отклонения луча призмой.

А.П. Грузинцев докладывал о своих научных исследованиях несколько раз в год, один-два раза в год его работы печатались. Он передает в библиотеку ХМО собственные журналы: «Wiedemann's Annalen» (35 томов, «Записки Видемана», журнал посвящен вопросам электричества), «Journal de Physique» (7 томов, «Журнал по физике»), «Annalen de Physique et de Chimie» (1 том, « Записки из физики и химии»).

А.П. Грузинцев много внимания уделяет вопросам методики преподавания математики и физики, что связано с многолетним опытом работы в средних учебных заведениях, в том числе и первой Харьковской гимназии. Среди его докладов на заседаниях ХМО есть доклады методического характера: анализ учебников по элементарной алгебре для гимназий, доклады по элементарной геометрии «О новой геометрии треугольника», ответ проф. А.П. Соколову на его рецензию книги А.П. Грузинцева «Электромагнитная теория света», прорецензировал и подготовил отзывы на книги К.Я. Мостовича «Основы современной термодинамики» и С. Петровича «Основы механики сплошного тела». Свои методические работы А.П. Грузинцев также печатает на страницах журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики».

А.П. Грузинцев принимал активное участие в общественном мероприятии общества — праздновании 100-летия со дня рождения выдающегося математике Н.И. Лобачевского.

Выполняя обязанности секретаря общества, А.П. Грузинцев составляет протоколы заседаний общества, готовит ежегодные отчеты о деятельности общества, переписывается от имени общества с другими научными учреждениями, рецензирует присланные в адрес общества науч-

ные статьи. Выполняя параллельно обязанности кассира общества, А.П. Грузинцев составляет финансовые отчеты ХМО и учет средств общества.

В 1908 г. А.П. Грузинцев ушел в отставку из Харьковского университета. По уставу общества действительными его членами могли быть только преподаватели учебных заведений Харькова, все остальные могли быть членами-корреспондентами или почетными членами. В связи с активным участием А.П. Грузинцева в деятельности общества в 1908 году его избрали почетным членом.

После выхода в отставку А.П. Грузинцев не прерывает своей научной работы и деятельности в обществе. В период с 1908 г. по 1915 г. 6 его докладов было напечатано на страницах «Сообщений ХМО».

После А.П. Грузинцева длительное время секретарем общества был В.А. Стеклов, а товарищем председателя А.М. Ляпунов. То есть в период с 1891 г. по 1899 г. членами распорядительного комитета общества были три выдающиеся личности, которые сыграли значительную роль не только в деятельности общества, но и в мировой науке. Это К.А. Андреев, А.М. Ляпунов и В.А. Стеклов.

Жизнь и научная деятельность В.А. Стеклова и А.М. Ляпунова широко освещены в литературе. Мы рассмотрим тот период их жизни, который связан с Харьковом и их деятельностью в Харьковском математическом обществе.

Александр Михайлович Ляпунов — выдающийся математик и механик конца XIX – начала XX в. А.М. Ляпунов родился 25 мая 1857 г. в Ярославле. Его отец до переезда в Ярославль много лет работал в Казанском университете астрономом и директором астрономической обсерватории.

Начальное образование А.М. Ляпунов получил дома, а после смерти отца поступил в 1870 г. в гимназию Нижнего Новгорода сразу в третий класс. В гимназии он был одним из лучших учеников и закончил ее в 1876 г. с золотой медалью.

В 1880 окончил физико-математический факультет Петербургского университета, остался при университете и в 1884 г. защитил магистерскую диссертацию «Об устойчивости эллиптических форм равновесия вращающейся жидкости».

В следующем 1885 А.М. Ляпунов назначается доцентом на кафедру теоретической механики в Харьковском университете, где проработал до 1902 г. По словам В.А. Стеклова, Александр Михайлович с особым чувством вспоминал 17 лет жизни в Харькове и называл это время самым счастливым. Вместе с началом работы в Харьковском университете А.М. Ляпунов поступил в ХМО и принимал активное участие в его деятельности с первых дней членства.

Деятельность А.М. Ляпунова в Харьковском математическом обществе охватывает 33 года его жизни:

- с 1885 по 1891 он — действительный член общества;
- с 1891 по 1899 занимает должность товарища председателя общества во время председательства К.А. Андреева;
- с 1899 по 1902 становится председателем общества;
- с 1902 г. его избирают почетным членом общества.

В качестве члена распорядительного комитета (товарища председателя и председателя) А.М. Ляпунов, кроме научной работы, занимается организационной деятельностью общества (организует работу заседаний) и решает вопрос издательской деятельности (рецензирует статьи, правит корректуры уже готовых к изданию работ, выполняет обязанности редактора «Сообщений ХМО»).

А.М. Ляпунов принимал активное участие в научной работе общества. За период своего членства в обществе А.М. Ляпунов сделал 30 докладов на заседаниях общества, которые можно разделить на три основные группы:

• докладывал статьи коллег (А.А. Маркова, П.И. Сомова, Н.Е. Жуковского, И.В. Мещерского, Д.К. Бобылева, Д.А. Граве);

• результаты собственных научных исследований по теории устойчивости движения, теории интегрирования систем дифференциальных уравнений, астрономии, теории потенциалов, теории вероятностей и др.;

• предлагал свои решения проблем, рассмотренных в работах других членов общества.

Из общего круга научных интересов А.М. Ляпунова, работы об устойчивости движения принесли ему всемирную известность, потому что являются фундаментальными не только в области математики, но и в тех разделах механики и физики, где изучаются колебания механических и физических систем. Результаты исследований А.М. Ляпунова отвечали также насущным потребностям астрономов того времени, которые работали над вопросами астрофизики и небесной механики.

В 1891 г. в «Сообщениях ХМО» была опубликована его работа «Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах». Это была вторая работа ученого из цикла работ об устойчивости движения. В ней автор рассматривает устойчивость некоторой специальной системы линейных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами, вычисляет две постоянные, аналогичные выбранной постоянной величине, приводит два способа для приближения вычисления этих постоянных и решает некоторые вопросы об устойчивости. Краткий анализ этой работы сделано в статье Н.М. Меркулова и П.Б. Соколова.

В 1892 г. ХМО издает большой труд Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения». После защиты ее в этом же году А.М. Ляпунов, получив степень доктора, занимает должность ординарного профессора в Харьковском университете.

Используя личные связи, он привлек к работе в обществе М.Н. Лагутинского, Е.М. Коссерата, А.П. Котельникова.

В 1900 г. А.М. Ляпунов становится членом-корреспондентом Петербургской АН, а в 1901 — ординарным академиком. В связи с тем, что ординарные академики обязаны были постоянно находиться в Петербурге, весной 1902 А.М. Ляпунов выезжает из Харькова в Петербург, где он полностью посвятил себя научной деятельности.

В 1902 г. в связи с отъездом А.М. Ляпунова было созвано срочное заседание математического общества. Признавая заслуги А.М. Ляпунова перед обществом, его активное участие в деятельности ХМО Александра Михайловича избрали почетным членом общества.

Владимир Андреевич Стеклов — известный математик и механик — родился 28 декабря 1863 г. в Нижнем Новгороде. Среднее образование В.А. Стеклов получил в Нижегородском Александровском институте. После его окончания поступил на физико-математический факультет Московского университета. В 1883 г. В.А. Стеклов перешел в Харьковский университет на тот же факультет. Обучение в Харьковском университете значительно повлияло на дальнейшую жизнь и деятельность ученого. Во время его учебы на третьем курсе в Харьковский университет прибыл молодой преподаватель А.М. Ляпунов, знакомство с которым стало определяющим в выборе В.А. Стеклова своей дальнейшей научной деятельности.

В 1887 г. В.А. Стеклов окончил Харьковский императорский университет с степенью кандидата математических наук. Он был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию по кафедре механики. Результатом стала магистерская диссертация «О дви-

жении твердого тела в жидкости» (1894, Москва). В 1902 г. защитил докторскую диссертацию «Общие методы решения основных задач математической физики».

Свою преподавательскую деятельность В.А. Стеклов начал в 1891 г. в качестве приват-доцента Харьковского университета, в 1896 г. стал экстраординарным профессором, а в 1902, после защиты диссертации, ординарным профессором Харьковского университета.

С Харьковским университетом связано 23 года жизни В.А. Стеклова. Во время работы в университете он был активным деятелем Харьковского математического общества. Проанализировав протоколы заседаний общества и статистические данные, представленные в работе А.П. Пшеборского, можно выделить следующие периоды работы В.А. Стеклова в Харьковском математическом обществе:

- с 1888 г. по 1891 г. он был действительным членом общества;
- с 1891 г. по 1899 г. исполнял обязанности секретаря общества;
- с 1899 г. по 1902 г. занимал должность товарища председателя;
- с 1902 г. по 1906 г. стал председателем общества;
- с 1906 г. был избран почетным членом общества.

Большую часть своей деятельности в обществе В.А. Стеклов входил в состав распорядительного комитета, деятельность в котором накладывала некоторые обязанности, которые он выполнял: составлял протоколы заседаний общества и ежегодные отчеты о деятельности ХМО, исполнял обязанности кассира и вел учет средств общества, переписывался от имени общества с другими научными объединениями и учреждениями, рецензировал направленные обществу статьи, докладывал результаты научных исследований членов-корреспондентов и почетных членов общества, был редактором «Сообщений ХМО» и занимался издательской деятельностью общества.

Научная деятельность, касающаяся приближенных квадратур, динамики твердого тела и динамики жидкости, главным образом, была посвящена разработке теории фундаментальных функций, которую В.А. Стеклов присоединил к ряду вопросов теоретической физики.

На всех этапах своей деятельности в ХМО он регулярно выступает на заседаниях с результатами собственных исследований. Он выступил с 37 докладами, касающимися его собственных научных исследований и охватывающими различные разделы математики и физики: алгебра, анализ, дифференциальные уравнения, теория рядов, теория функций, механика, гидродинамика, гидравлика, аэродинамика и др.

Как член распорядительного комитета В.А. Стеклов докладывал на заседаниях общества статьи членов-корреспондентов и почетных членов. Среди них работы А.А. Маркова, А. Кнесера и В.П. Ермакова.

Достаточно известной стала научная переписка В.А. Стеклова с немецким математиком А. Кнесером, которая началась в Харькове. Она касалась вопросов математической физики. Было найдено 22 письма, по которым можно проследить эволюцию взглядов и идей ученых, а также определить влияние этой переписки на развитие исследований ученых.

Благодаря личным отношениям В.А. Стеклова к работе в ХМО были привлечены такие известные ученые, как Кнесер, Пуанкаре, Пикар, Апель, Адамар, Гурвиц.

Значительный этап деятельности Харьковского математического общества связан с именем выдающегося ученого и педагога Д.М. Синцова. Это этап развития не только научной, но и педагогической и общественно-просветительской деятельности общества.

Дмитрий Матвеевич Синцов родился в городе Вятка 8 (20) ноября 1867 г. в семье земского врача. Домашнее образование получил под руководством матери, еще в детстве овладел

несколькими иностранными языками. Среднее образование получил в Казанский гимназии, окончив курс обучения с золотой медалью в 1886 г. Осенью того же года поступил на математическое отделение физико-математического факультета Казанского университета. На четвертом курсе получил золотую медаль за работу на тему «О функциях Якова Бернулли». Занимался преимущественно математикой и астрономией.

По окончании университетского курса и после сдачи экзаменов в испытательной комиссии осенью 1890 г. Д.М. Синцов был оставлен при кафедре математики для подготовки к профессорскому званию.

С 1895 г. Д.М. Синцов защитил магистерскую диссертацию «Теория коннексов в пространстве в связи с теорией дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка». В 1898 г. Д.М. Синцов защитил диссертацию на степень доктора чистой математики. Диссертация посвящена актуальной проблеме нахождения рациональных интегралов линейных уравнений.

В Харьковский университет в 1903 г. пришел уже сформированный ученый-педагог с богатым опытом научно-педагогической деятельности. Большая часть, 43 года, научно-педагогической деятельности ученого были отданы Харьковскому университету.

В Харьковском университете Дмитрий Матвеевич читал курсы аналитической и дифференциальной геометрии, интегрирование дифференциальных уравнений. По этим предметам им были изданы курсы лекций, которые потом переиздавались. Кроме этого, он периодически читал проективную геометрию, теорию групп непрерывных преобразований, уравнений в частных производных, историю математики.

В 1903 г. он становится действительным членом Харьковского математического общества. Д.М. Синцов, как цельная и многогранная личность, значительно повлиял на деятельность общества и его развитие.

Свой первый доклад на заседании ХМО «Об особенных элементах коннексов» Д.М. Синцов представил в 1902 г., когда еще не был действительным членом общества и работал ординарным профессором в Екатеринбургском высшем горном училище.

Вскоре после перехода в Харьковский университет его избирают действительным членом ХМО. В 1905 г. он становится членом распорядительного комитета (товарищем председателя), а со следующего года (1906 г.) его избирают председателем общества.

Как председатель Д.М. Синцов направлял деятельность общества. Д.М. Синцов много внимания уделял решению педагогических вопросов, ознакомлению с опытом преподавания других профессоров, в том числе и иностранных, организации преподавания математики в средней и высшей школе. С приходом Д.М. Синцова было восстановлено педагогическую деятельность ХМО.

Дмитрий Матвеевич проявил глубокую заинтересованность к вопросам реформы преподавания математики, в докладах и на съездах, а также в учебных руководствах.

На IV Международном математическом конгрессе, проходившем в апреле 1908 г., была создана международная комиссия по вопросам преподавания математики, в состав которой вошел Д.М. Синцов. Это событие отражено в протоколах заседания общества по 17.12.1908 г. На этом заседании обсуждался вопрос возобновления педагогической деятельности общества.

Уже на следующем заседании (21.01.1909 г.) было решено проводить заседания, посвященные проблемам преподавания математики и физики в средних и высших учебных заведениях, и выделены следующие главные задачи: обсуждение вопросов реформирования программы математики и физики в средней школе; разъяснения различных практических вопросов преподавания; знакомство с современным состоянием различных вопросов математики и физи-

ки, полезных с точки зрения преподавателей средних учебных заведений. Для выполнения этих задач было принято решение проводить педагогические заседания дважды в месяц, а результаты и протоколы таких заседаний печатать в журналах «Вестник опытной физики и элементарной математики» и «Физическое обозрение».

Определив задачи на заседании от 21.01.1909 г., общество активно приступило к их решению. Сам Дмитрий Матвеевич читал несколько раз математику на курсах по подготовке преподавателей для средней школы.

По инициативе Д.М. Синцова при обществе было организовано педагогическое отделение с укомплектованной педагогической библиотекой при нем, которое занималось разработкой педагогических вопросов высшей и средней школы. К упорядочению библиотечного фонда Д.М. Синцов относился серьезно, контролировал новые поступления и следил за пополнением фонда работами самих членов общества, занимался вопросами обмена изданиями с другими общественно-научными учреждениями.

Общество пыталось организовать математический кабинет для студентов. Благодаря улучшению математической базы физико-математического факультета эту идею удалось реализовать.

Д.М. Синцов с большой энергией добивался в управлении университетом ассигнований на пополнение математического кабинета литературой, а геометрического кабинета — моделями. Как книги, так и модели он лично выписывал и сам же вел записи в инвентарных книгах. Занимаясь проблемой наглядности, в работе «О роли интуиции в преподавании высшей математики» он обосновывает необходимость создания атласа кривых.

Понимая роль классических произведений математики в подготовке молодых ученых, Д.М. Синцов добивается отделения факультетом средств на издание «Харьковской математической библиотеки». За счет собственных средств ХМО начало издавать серию книг библиотеки. В первую серию «Харьковской математической библиотеки» планировалось включать классические произведения, доступные и необходимые преподавателям. Во вторую серию — обзоры и монографии по отдельным разделам математических знаний.

Как председатель общества Д.М. Синцов занимал должность редактора журнала «Сообщения ХМО», решал финансовые вопросы, занимался вопросами издательства.

Деятельность Д.М. Синцова была достаточно широкой и разноплановой. Он планировал, готовил и проводил заседание ХМО, организовывал и контролировал издательскую деятельность общества и выступал редактором всех изданий, реферировал журналы и работы, присланные в распорядительный комитет общества. Он был в составе редакций «Сообщения ХМО», «Ученых записок Харьковского университета», «Сборника трудов института математики АН УССР».

Отдавая много времени на организационную и педагогическую деятельность ХМО, Д.М. Синцов не оставлял и занятий наукой. На заседаниях он докладывал результаты научных исследований своих коллег, присланные в адрес общества, среди них работы В.П. Ермакова, М.А. Тихомандрицкого, В.А. Стеклова, Д.Д. Мордухай-Болтовского, К.А. Поссе, А.А. Маркова, А.А. Фридмана и М. Петлина, Я.В. Успенского, Н.С. Кошлякова, Б.Н. Делоне.

Некоторую часть своих работ он посвятил жизни и деятельности других математиков. Среди них доклады на заседаниях общества о С.В. Ковалевской и ее трудах, доклады, посвященные памяти Н.Е. Жуковского, А.М. Ляпунова, А.П. Грузинцева, Л.А. Струве, некрологи К.А. Андреева, А.А. Маркова. На заседаниях общества он выступал с отчетами о работе математической секции на XII съезде естествоиспытателей и врачей, о втором Всероссийский съезд преподавателей математики, о выходе из печати «Российской математической библиографии»

под его редакцией, о математической деятельности в Москве и Петрограде, о новостях иностранной математической литературы.

Собственные научные исследования Д.М. Синцова, которые он докладывал на заседаниях общества, касались теории коннексов, алгебраических кривых, евклидовой геометрии, термодинамики.

Организация научных исследований по геометрии в Харьковском университете связана с именем Д.М. Синцова. По его инициативе в университете начали читать такие курсы, как неевклидова геометрия, риманова геометрия, проективно-дифференциальная геометрия, сферическая геометрия, линейная геометрия, теория алгебраических кривых, теория непрерывных групп преобразований, топология и др.

В 1912 — 1913 впервые в Харьковском университете Д.М. Синцов объявляет семинар по дифференциальной геометрии (необязательный и бесплатный). Ему удается привлечь к научным исследованиям по геометрии большую группу своих учеников. Этому способствовала организация сначала научного геометрического семинара, затем научно-исследовательской кафедры геометрии университета и сектора геометрии Харьковского научно-исследовательского института математики и механики. Таким образом, можно говорить о создании Харьковской геометрической школы, которая становится ведущей на Украине.

Д.М. Синцов возглавлял ХМО течение почти 40 лет. За это время в стране происходили сложные политические и социальные события: Первая мировая война, революции, постоянная смена власти, становление Советского государства. Харьковское математическое общество продолжало работать, хотя уже не набирало большого количества людей и заседания проводились нерегулярно. После официального обновления общества в 1925 г. за год было проведено 10 заседаний с 17 докладами, среди которых 5 принадлежало Д.М. Синцову.

Д.М. Синцов определил направления педагогической деятельности общества. Под его руководством члены общества разные по возрасту и опытом работы работали над общей педагогической задачей: реформирование школьного образования. Это дает основание считать, что под руководством Д.М. Синцова сформировался творческий коллектив, который разрабатывал общую педагогическую проблему, то есть сформировалась научная педагогическая школа.

Влияние Д.М. Синцова на деятельность общества и его членов было значительным. Он возродил педагогическую деятельность общества, по его инициативе был создан педагогическое отделение при ХМО, он привлек к решению педагогических и методических вопросов широкий круг харьковских ученых, расширил издательскую деятельность общества и проводил активную политику привлечения и подготовки молодых ученых в атмосфере научного поиска и активной гражданской позиции.

Литература

1. Ахиезер Н.И. Харьковское математическое общество // Записки математического отделения физико-математического факультета ХГУ им. А.М. Горького и Харьковского математического общества. – 1956. – Серия 4, т.XXIV. – С.31–39.
2. Бахмутская Э.Я. Математика в Харьковском университете. Харьковское математическое общество // История отечественной математики. – К.: Наукова думка, 1967. – Т.2. – С.460–472.
3. Марчевский М.Н. История математических кафедр в Харьковском университете за 150 лет // Харьков: ХУ, 1956. – С.22–25.
4. Марчевский М.Н. Харьковское математическое общество за 75 лет // Историко-математические исследования. – 1956.

5. Пшеборский А.П. Математическое общество при Харьковском университете /Харьков: ХУ, 1911. – 26 с.
6. Рыжий В.С. Из истории механико-математического факультета Харьковского университета / Харків: Издательство ХНУ им. В.Н. Каразина, 2001. – 180 с.
7. Синцов Д.М. Харьковское математическое общество за 50 лет // Труды Первого Всесоюзного съезда математиков (Харьков 1930), Харьков: ОНТИ, 1936. – 376 с.
8. Тарапов И.Е. Харьковский университет. Страницы истории: Сб. Актовых речей на торжественных заседаниях Ученого совета. 1976–1993 / Харьков: Фолио, 1997. – 272 с.
9. Тихомандрицкий М.А. Опыт истории физико-математического факультета Харьковского университета за первые 100 лет его существования // ЗХУ. – 1904. – Кн.4. – С.1–80.
10. Указатель к Сообщениям (Запискам) Харьковского математического общества при ХУ / Х.: ХУ. – 1955. – 42 с.
11. Указатель статей, помещенных в первых 18 выпусках Сообщений математического общества при Императорском Харьковском Университете 1879-1887 гг. // СХМО. – 1888. – №2. – С.109–122.
12. Ученые общества и учебно-вспомогательные учреждения Харьковского университета (1805-1905) / Под ред. Багалея Д.И. – Харьков, 1911. – 282 с.

INTRODUCTION OF OUTSTANDING SCIENTISTS INTO GENERATION, DEVELOPMENT AND ACTIVITY OF KHARKOV MATHEMATICAL SOCIETY FROM 1879 TO 1917

G.S. Bobritskaya

Ukrainian engineering and pedagogical academy,
Universitetskaya St., 16, Kharkov, 61003, Ukraine,
e-mail: ikir238@rambler.ru

Abstract. It is proposed shortly the science, pedagogical and organizing activity of some members of Kharkov mathematical society.

Key words: Kharkov mathematical society, history, XIX century.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

MSC 34M50

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ КОШИ-РИМАНА И С СИНГУЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

***С.М. Мухсинова, **А.Б. Расулов**

*Худжанд, Таджикистан, e-mail: mirzodaler@mail.com
**Москва, Россия, rasulov-abdu@rambler.ru

Аннотация. Представлена теорема о разрешимости эллиптической граничной задачи с операторами Коши-Римана, которые сингулярны на границе области.

Ключевые слова: задача Коши-Римана, эллиптические уравнения на плоскости, сингулярные условия.

Пусть $S^+ = \{(x,y) : y > 0, -\infty < x < +\infty\}, L = \{(x,y) : y = 0, -\infty < x < +\infty\}$. В области $S^+_\varepsilon = \{(x,y) : y > \varepsilon, -\infty < x < +\infty\}$ рассмотрим уравнение с сингулярной линией вида

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\partial_{\overline{z}} - \frac{a_j(z)}{z-\overline{z}}\right)U = f(z)\,, \qquad m = 1,2,3\,; \tag{1}$$

где $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$–оператор Коши-Римана, $a_j(z) \in C^{j-1}(\overline{S^+}), j = \overline{1,3}, U(z)$ – искомая функция $F(z) \in L^{p,2}(S^+), p > 2$ — фиксированные заданные функции.

Необходимую информация по истории развитии уравнения (1) и методика исследования граничных задач изложена в [1-6]. В дальнейшем для компактного изложения материала введем следующие обозначения:

$$L_j \equiv \frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \frac{a_j(z)}{|\overline{z}-z|^n}\,; \qquad (Ta_j)(z) \equiv -\frac{1}{\pi}\int_G \frac{(a_j(\zeta) - a_j^0(\zeta))d\xi d\eta}{|\zeta-\overline{\zeta}|^n(\zeta - z)}\,; \quad j = 1,2,3. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) функции $a_j(z) \in C^2(S^+), j = 1,2,3$ ограничены в $\overline{S^+}$, и в окрестности ∂S^+ удовлетворяют условиям*

$$1) \quad a_j(z) - a_j^0(z) = O(1)|z-\overline{z}|^{\gamma_j}\,, \qquad \gamma_j > n, \quad 1 \le j \le 3\,. \tag{3}$$

Кроме того, функции $a_j(z), 1 \le j \le 3$ таковы, что выполнено условия:

$$2) \quad a_j(z) - a_j^0(z) = O(1)|\overline{z}-z|^{\gamma_j}\,, \qquad \gamma_j > 0, \quad y \to 0, \quad 1 \le j \le 3\,; \tag{4}$$

$$\mathrm{Re}a_1^0 > \mathrm{Re}a_2^0 > \mathrm{Re}a_3^0 > 0\,, \qquad y \to 0\,, \tag{5}$$

$$a_j(z) = o(|z|^{\varepsilon_j})\,, \quad \varepsilon_j > 1\,, \quad y \ne 0, |z| \to \infty\,, \quad 1 \le j \le 3\,; \tag{6}$$

$$|\overline{z}-z|^{a_3-3}f(z) \in L^{p,2}(S^+)\,, \qquad p > 2\,. \tag{7}$$

Тогда и для любых функций $\Phi_j(z) \in C(S^+ \bigcup \partial S^+)$, $\Phi_j(z) = o(r^{-2})$, $r \to \infty, 1 \le j \le 3$, *аналитических в области* S^+ *формула*

$$U(z) = |\overline{z} - z|^{a_1} e^{(T(a_1))(z)} \left(\Phi_1(z) + \left(T\left(|\overline{z} - z|^{\beta} e^{(T(q_\beta))(\zeta)} \Phi_2(\zeta) \right) \right)(z) - \right.$$

$$\left(T\left(\left(K_{a_1}(\zeta) - K_{a_1}(z) \right) |\overline{z} - z|^{a_1(\zeta_1) - a_3(\zeta_1)} e^{-(T(q_{a_1 - a_3}))(\zeta)} \Phi_3(\zeta) \right) \right)(z) +$$

$$\left(T\left(\left(K_{a_1, a_2 - a_3}(t) - K_{a_1, a_2 - a_3}(z) \right) |\overline{t} - t|^{a_3(t) - 3} e^{-(T(q_{a_3}))(\zeta)} f(\zeta) \right) \right)(z)$$

определяет решение уравнения (1) из класса $D^{3,p}(S^+ \backslash L)$, *где*

$$K_{a_1}(t) = T(|\zeta - \overline{\zeta}|^{a_1} e^{T_{a_1}})(t)\,, \quad \beta = a_1 - a_2\,,$$

$$K_{a_1, a_2 - a_3}(z) = T((K_{a_1}(t) - K_{a_1}(z)) |\zeta - \overline{\zeta}|^{a_2 - a_1} e^{T_{a_2 - a_3}(\zeta)})(z)\,.$$

В дальнейшем, в основном будем пользоваться классом функций $D^{j,p}(S^+), p > 2$, $j = 1, 2, 3$, имеющих обобщенную производную j-го порядка по $\overline{z}$, ограниченных при $r \to \infty$ по любым направлениям. В работе найдено интегральное представление решений уравнения (1) и исследована задача типа Римана -Гильберта.

Задача типа Римана-Гильберта. Задача Римана-Гильберта состоит в том, что требуется найти решение $U(z) \in D^{3,p}(S^+)$ уравнения (1) по заданному краевому условию

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}[\lambda_1 |z - \overline{z}|^{-a_1} U]_{\partial S^+} = g_1(t)\,, \\ &\mathrm{Re}[\lambda_2 |z - \overline{z}|^{-a_2} L_1 U]_{\partial S^+} = g_2(t)\,, \\ &\mathrm{Re}[\lambda_3 |z - \overline{z}|^{-a_3} L_2 L_1 U]_{\partial S^+} = g_3(t)\,, \end{aligned} \tag{G}$$

где функция $\lambda_j(t) = \alpha_j(t) + i\beta_j(t) \in H(\partial S^+)$, причем $\lambda_j(t) \ne 0, t \in \partial S^+$, $g_j(t) = o(|t|^{-h_j})$, $h_j > 0, j = 1, 2, 3$.

Наш результат состоит в следующем:

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и условий задача* G. *Если* $æ_k = \mathrm{Ind} G_k(t) \ge 0, k = \overline{1,3}$, *то задача* $(1) - (G)$ *на полуплоскости безусловно разрешима и её решение содержит* $\sum\limits_{j=1}^{3} æ_j + 3$ *произвольных постоянных. Если для какого-нибудь* $k = k_0$, $æ_{k_0} < -1$, *а для остальных номеров* $æ_k \ge 0$, *то задача* $(1) - (G)$ *разрешима лишь при выполнении* $-æ_{k_0} - 1$ *условий разрешимости, и ее решение зависит от* $\sum\limits_{k=1}^{3} æ_k + 2 - æ_{k_0} \ge 0$ *произвольных постоянных. Если* $æ_k = -1, k = \overline{1,3}$, *тогда задача* $(1) - (G)$ *разрешима, безусловно.*

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.

3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Наука, 1968. – 512 с.
4. Михайлов Л.Г. Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами / Душанбе: ТаджикНИИНТИ, 1963. – 184 с.
5. Солдатов А.П. Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости / Изв. РАН. – 2006. – 70,№6. – С.161-192.
6. Раджабов Н.Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами / Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992. – 236 с

INTEGRAL REPRESENTATIONS AND BOUNDARY PROBLEMS FOR EQUATIONS WITH CAUCHY-RIEMANN OPERATORS AND WITH SINGULAR LINE ON HALF-PLANE

***S.M. Mukhsinova, **A.B. Rasulov**

*Khujand, Tajikistan, e-mail: mirzodaler@mail.com
**Mscow, Russia, rasulov-abdu@rambler.ru

Abstract. The solubility theorem of elliptic boundary problem with Cauchy-Riemann's operators which are singular at the domain boundary is proposed.

Key words: Cauchy-Riemann's problem, elliptic equations on plane, singular conditions.

MSC 65Y99

ПОВЫШЕНИЕ РАЗРЕШЕНИЯ ЦИФРОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СУБПИКСЕЛЬНОГО СКАНИРОВАНИЯ

С.В.Блажевич, Е.С. Селютина

Белгородский государственный университет,
ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: blazh@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе демонстрируется метод синтеза цифрового изображения высокого разрешения на основе группы изображений того же объекта с низким разрешением (метод получения сверхразрешения) на примере одномерной задачи.

Ключевые слова: синтез цифрового изображения, субпиксельное сканирование, сверхразрешение.

Методы повышения качества цифровых изображений направлены на улучшение восприятия изображения технической или художественной картины человеком. При этом понятие «повышение качества» связывается как с характером передаваемой зрителю (читателю) посредством этого изображения информации, так и со спецификой человеческого зрения. В этой связи обработка цифрового изображения, необходимая для улучшения его качества, в зависимости от указанных специфик может значительно варьироваться, чтобы соответствовать вытекающим из них весьма различным целям. Например, важным для восприятия может быть обеспечение «правильной» передачи цветности изображения. Кроме того изображение может содержать шумовую составляющую, частично маскирующую полезную информацию, для передачи которой оно предназначалось, и улучшение качества изображения в таком случае достигается его обработкой, направленной на выделение и последующее вычитание фоновой составляющей. Важной характеристикой качества изображения является пространственное разрешение, т.е. количество пикселей, которыми оно формируется. В некоторых случаях, например, для визуальной передачи простой информации, достаточно использовать изображения очень низкого разрешения, что обеспечит и высокую скорость ее восприятия. В других случаях, например, для восприятия большого количества мелких деталей картинки или схемы, требуется высокое пространственное разрешение цифрового изображения. Может оказаться, что пространственное разрешение, которое может обеспечить детектирующая матрица, недостаточно для получения требуемой детализации изображения. Это означает, что нужное цифровое изображение не может быть получено в течение одной экспозиции. В этом случае возникает задача его синтеза на основе группы изображений одной и той же картинки, имеющих более низкое разрешение, т.е. так называемая задача «сверхразрешения».

Проблема получения изображения высокого разрешения за счет обработки нескольких исходных исследуется в течение последних двадцати лет. Для решения этой задачи предложены различные подходы, которые можно классифицировать по разным критериям. Если в качестве основания классификации использовать критерий смещения регистрирующей системы, то выделяют подходы с использованием смещения изображения объекта на фиксирующей его матрице детекторов (motion-based techniques) и подходы без смещения (motion-free approaches). По типу обрабатываемых характеристик изображения можно выделить методы, основанные на использовании частотных [1] или пространственных [2-4] характеристик изображения.

В настоящей работе рассматривается метод решения задачи сверхразрешения, основанный на смещении изображения объекта [3-4] на фиксирующей его матрице детекторов с последующей обработкой полученных изображений в пространственной области.

Будем рассматривать задачу повышения разрешения растрового изображения. Растровое изображение имеет определенную структуру. Наименьшим логическим элементом изображения является пиксель. Из определения пикселя следует, что максимальная детализация растрового изображения задаётся при его создании исходным количеством точек. При увеличении масштаба изображения, пиксели превращаются в крупные зёрна за счет окрашивания в один цвет соседних элементов изображающей системы (например, монитора). Чтобы уменьшить размер пикселя, необходимо дополнить количество точек, определяющих параметры соответствующих им пикселей, а значит, нужна дополнительная информация о синтезируемом изображении. Где же ее получить, если исходные изображения уже имеют предельное разрешение, ограниченное существующим техническим пределом? Тем не менее, синтезированное изображение может иметь более высокое разрешение, а значит, само изображение может содержать больше информации, чем каждое из исходных изображений объекта съемки. Оказывается, что эта дополнительная информация содержится во взаимных субпиксельных смещениях исходных изображений. И задача получения сверхразрешения сводится к поиску алгоритма синтеза изображения высокого разрешения на основе группы исходных изображений, сдвинутых относительно друг друга на доли пиксела. Соответствующая этому алгоритму обработка исходных изображений называется и является по сути субпиксельной обработкой. Субпиксельная обработка в данном случае предполагает получение нового значения пикселя на основе обработки нескольких других, частично сходных между собой пикселей.

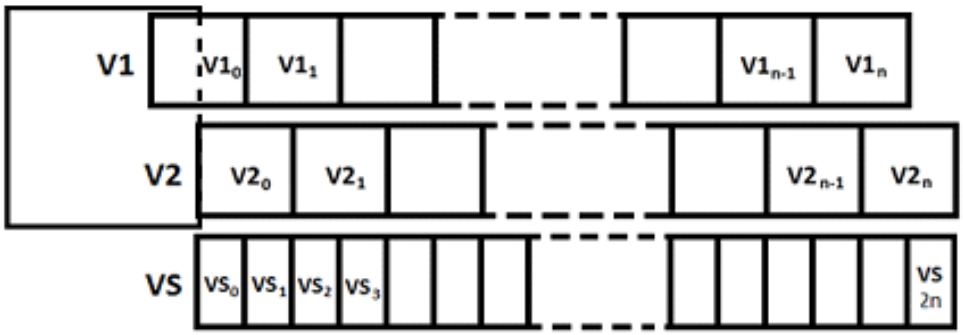

Рис. 1. Схема взаимного пространственного расположения пикселей исходных и синтезированного изображений. Случай сдвига на 1/2 пикселя.

Одномерный случай. В качестве простейшего примера синтеза рассмотрим синтез одномерного изображения на основе двух изображений, сдвинутых на полпикселя на матрице детекторов, содержащей N пикселей (стрипов) (см. рис. 1.). Два исходных одномерных изображения будут представлены векторами размером N элементов, например, V1 и V2. Для однозначного решения задачи сверхразрешения потребуем выполнения граничного условия для синтезируемого вектора VS.

Одним из подходящих для этого методов является экранировка первой половины первого пикселя $V1_0$. При этом возникает краевое условие $VS_0{=}V1_0$. Другие значения пикселей синтезируемого изображения определяются согласно следующему простому алгоритму, представленному в виде программы пакета MathCad:

$$
\begin{array}{l}
\text{synthesis1}(a1, a2) := \left|\begin{array}{l}
n \leftarrow \text{rows}(a1) - 1 \\
vs_0 \leftarrow a1_0 \\
\text{for } i \in 1..n \\
\quad \left|\begin{array}{l} vs_{2\cdot i-1} \leftarrow a2_{i-1} - vs_{2\cdot i-2} \\ vs_{2\cdot i} \leftarrow a1_i - vs_{2\cdot i-1} \end{array}\right. \\
vs
\end{array}\right.
\end{array}
\qquad (1)
$$

В результате такой субпиксельной обработки векторов V1 и V2 получаем вектор изображения VS с увеличенным вдвое пространственным разрешением.

Если детектор, регистрирующий одномерное изображение, сдвигать не на половину пиксела, а на его треть, то можно получить три вектора, соответствующие съемки изображения в трех положениях детектора: V1, V2 и V3. Схема пространственного расположения пикселей регистрирующей матрицы в трех указанных положениях показана на рис. 2.

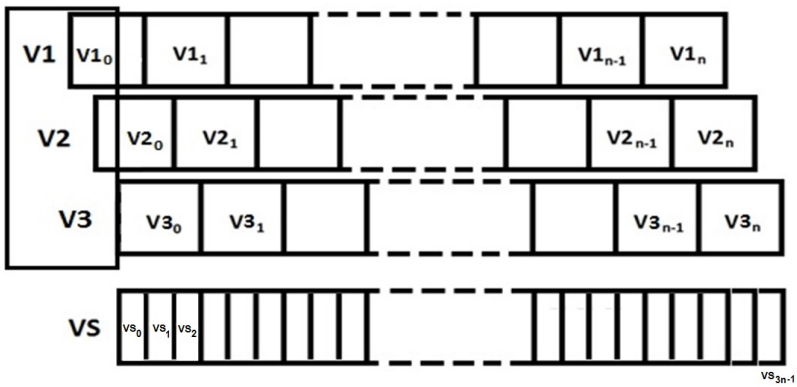

Рис. 2. Схема расположения пикселей исходных и синтезированного изображений для сдвигов на 1/3 пикселя. Краевое условие определяется частичным экранированием изображения на первом пикселе.

Алгоритм синтеза на основе этих векторов вектора изображения с разрешением в три раза более высоким представлен следующей программой:

```
synthesis3(a1, a2, a3) := | n ← rows(a1) − 1
                          | vs0 ← a10
                          | vs1 ← a20 − a10
                          | vs2 ← a30 − a20
                          | for i ∈ 1..n
                          |   | vs3·i ← a1i − a3i−1 + vs3·i−3
                          |   | vs3·i+1 ← a2i − a1i + vs3·i−2
                          |   | vs3·i+2 ← a3i − a2i + vs3·i−1
                          | vs
```
(2)

Рассмотрим в качестве примера синтез изображения заданного функции $f(x) = \sin(x)$. Изображение регистрируются матрицей пикселей размером d. Сигналы i-того пикселя в разных положениях детектора определяются интегралами:

$$\mathrm{V1}_i := \int\limits_{i\cdot d}^{(i+1)\cdot d} f(x)dx\,, \quad \mathrm{V2}_i := \int\limits_{i\cdot d+\frac{d}{3}}^{(i+1)\cdot d+\frac{d}{3}} f(x)dx\,, \quad \mathrm{V3}_i := \int\limits_{i\cdot d+\frac{2d}{3}}^{(i+1)\cdot d+\frac{2d}{3}} f(x)dx\,.$$

Начальные условия для данной задачи определяем условиями экранирования части первого пикселя в первом и втором положениях:

$$\mathrm{V1}_0 := \int\limits_{\frac{2\cdot d}{3}}^{d} f(x)dx\,, \qquad \mathrm{V2}_0 := \int\limits_{\frac{2\cdot d}{3}}^{d+\frac{d}{3}} f(x)dx\,.$$

На рис. 3 представлены векторы исходных цифровых изображений V1, V2, V3 и вектор синтезированного изображения VS = synthesis3((V1, V2, V3).

Из приведенного примера видно, что синтезированный вектор, описывающий одномерное изображение, имеет количество элементов больше (в данном случае втрое), чем исходные векторы.

Подобная процедура может быть обобщена и на случай двумерных изображений.

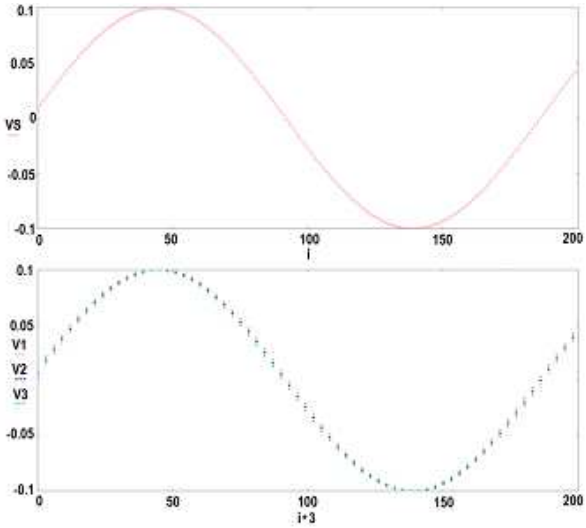

Рис. 3.

Литература

1. Alldrin N. Super-Resolution // http://vision.ucsd.edu/ nalldrin/research/super resolution/
2. Chaudhuri S; Manjunath J. Motion-Free Super-resolution / Hardcover, 2005. – 240 p.
3. Блажевич С.В., Винтаев В.Н., Ушакова Н.Н. Синтез космического изображения с улучшенной разрешающей способностью на основе субпиксельного сканирования // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса: сб. научных статей ИКИ РАН. – 2010. – 7;№ 2. – М.: ДоМира, 2010. – С.9-13.
4. Блажевич С.В., Винтаев В.Н., Селютина Е.С., Ушакова Н.Н. Синтез цифровых изображений субпиксельного уровня разрешения с использованием расфокусировки // Техническое зрение в системах управления: сб. тезисов научно-технической конф. // М.: ИКИ РАН, 2011. – С.55-56.

SUB-PIXEL SCANNING TO PRODUCE SUPER-RESOLUTION DIGITAL IMAGES

S.V. Blazhevich, E.S. Selyutina

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: blazh@bsu.edu.ru

Abstract. It is proposed the method of high-resolution digital image synthesis on the basis of the set of low-resolution images of the same object (the method of super-resolution). The method is exemplified in the case of the one-dimensional image.

Key words: synthesis of digital images, sub-pixel scanning, superresolution.

УДК 620.1.72:532.783

ВИЗУАЛИЗВАЦИЯ ПОТОКА НЕМАТИКА В ОКРЕСТНОСТИ ДЕФЕКТА ДИЭЛЕКТРИКА В СТРУКТУРЕ Si/SiO_2/НЕМАТИК/ЭЛЕКТРОД

С.И. Кучеев, Н.В. Малай, Ю.С. Тучина

Белгородский государственный университет,
ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: skucheev@yahoo.com

Аннотация. Исследуется поведение нематического жидкого кристалла в окрестности дефекта диэлектрической пленки в структуре Si/SiO_2/нематик/электрод в постоянном электрическом поле. Показано, что поток жк материала в окрестности дефекта, обусловленный ионным током, вызывает изменение ориентации ориентированного нематика, и визуализируется в поляризованном свете в виде концентрических интерференционных колец с крестообразным полем погашения света.

Ключевые слова: дефект SiO_2, нематик, периодическая деформация, микронасос.

Основным базовым элементом кремниевых приборов является структура Si/SiO_2 благодаря уникальным электрическим свойствам границы [1]. При этом, некоторые типы дефектов SiO_2 указанной структуры, например, микроскопические участки не окисленной поверхности кремния, при условии их низкой концентрации на поверхности, представляют собой значительные трудности при обнаружении их высокоразрешающими методами контроля, такими как, например, растровая электронная и атомная силовая микроскопии. Поэтому требуются более простые экспресс-методы предварительного картирования поверхности, когда на сравнительно большой площади исследуемой поверхности, фактически методами низкого разрешения (оптическая микроскопия) локализуются дефекты пленки SiO_2 для дальнейшего изучения высокоразрешающими методами. В качестве одного из таких методов картирования может рассматриваться метод основанный на электрооптических свойствах жидких кристаллов (жк). Благодаря вязко упругим свойствам жк материалов, локальные возмущения, обусловленные микроскопическими дефектами (или другими локальными причинами) сопровождаются изменением ориентации молекул жк в большем масштабе, и вследствие двулучепреломления, могут быть оптически зарегистрированы, т.е. другими словами, реализуется принцип «оптического усиления». Для дефектов типа не окисленной поверхности, возмущающими жк факторами могут служить неоднородное электрическое поле в окрестности не изолированной диэлектриком поверхности кремния и (или) локальный сквозной ионной ток через слой жк, формирующийся благодаря инжекции электронов [2].

В ряде работ было показано, что деформация нематика в окрестности дефектов диэлектрической пленки имеет место только при отрицательной полярности приложенного к ячейке напряжения относительно кремниевой подложки. При этом в основу предложенных моделей поведения жк в области деформации были положены эффект динамического рассеяния света [3], полевые эффекты обусловленные накоплением ионного заряда [4], флексоэлектрический эффект [5]. В настоящем сообщении мы указываем, что сквозной локальный ионный ток, протекающий через слой жк, приводит к деформации ориентированного нематика благодаря ориентации молекул жк в потоке.

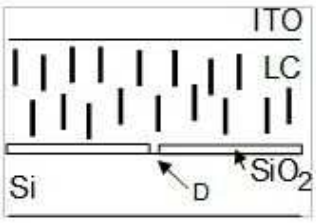

Рис. 1. Сечение жк ячейки (не в масштабе).
D — дефект диэлектрической пленки SiO_2 на Si.

На рис. 1 схематически представлено сечение жк ячейки использованной в работе. В качестве подложки использовался монокристаллический кремний p-типа проводимости (удельное сопротивление 4,5 Ом·см) с пленкой окиси кремния SiO_2 толщиной 350 мкм. Гомеотропная ориентация нематического жидкого кристалла 5CB (Монокристалллреактив, Харьков) достигалась обработкой раствором лецитина в толуоле обоих поверхностей прозрачного электрода ITO и диэлектрической пленки SiO_2. Толщина жк слоя варьировалась в пределах 5-100 мкм с помощью фторопластовых прокладок. Наблюдение проводилось в поляризационный микроскоп со скрещенными поляризаторами.

Деформация нематика, при действии соответствующей величины напряжения, начинает регистрироваться в виде светлой кольцевой полосы с крестообразным полем погашения, рис. 2a. «Крест» гашения света связан с поглощением света поляризаторами. Он показывает, что распределение ориентации молекул аксиально симметричное с осью, проходящей через дефект, при этом изменение ориентации молекул лежат в плоскостях, перпендикулярных плоскости ячейки.

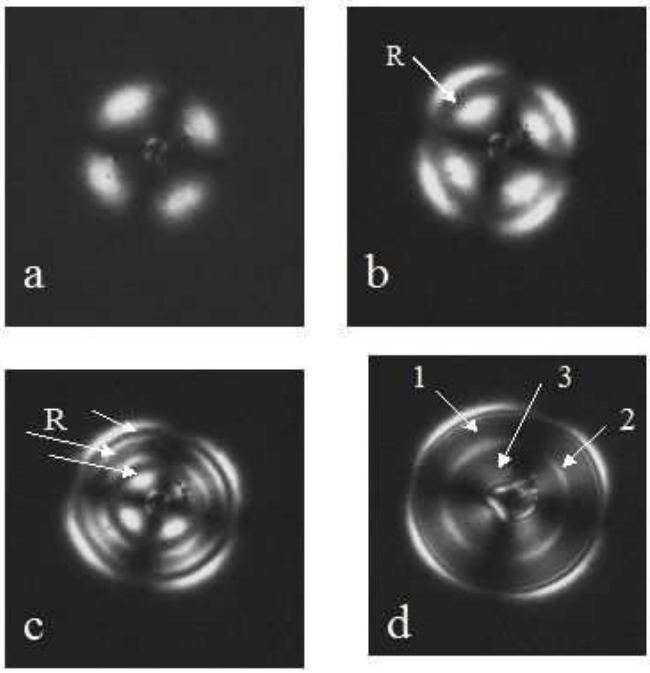

Рис. 2. Деформация нематика в окрестности дефекта. R-красное интерференционное кольцо. Напряжение, В: a – 4; b – 4,4; c – 4,7; d – 7,3. Толщина жк слоя 50 мкм.

Обращает внимание на себя факт, что кольцевая деформация локализована на заметном удалении от самого дефекта, который расположен в центре области деформации. Последнее косвенно указывает на не определяющую роль электрического поля в механизме описываемого электрооптического эффекта. Согласно геометрии ячейки, рис. 1, электрическое поле максимально в центре и начальное просветление поля зрения ожидалось бы также ближе к центру.

На начальных стадиях деформации, рис. 2a, светлое кольцо не имеет цветной окраски, которая является признаком интерференции поляризованного света. Окрашенные интерференционные кольца появляются далее с увеличением напряжения, рис. 2 b-d. Сначала появляется одно кольцо (R), месторасположение которого также удалено от оси симметрии (дефекта), рис. 2b, а затем, в процессе деления этого кольца и последующих, в конечном итоге, в результате уплотнения колец друг к другу, формируются два кольцевых образования (1,3) с узкой светлой кольцевой полосой между ними (2), рис. 2d. В кольцевых образованиях 1 и 2 содержится равное число интерференционных колец, а ход порядка интерференционных цветов относительно центральной светлой кольцевой полосы (2), противоположный. Уместно сравнить последовательность расположения интерференционных цветов в кольцевом образовании (например, в 1-м от периферии к центру) с последовательностью изменения интерференционной окраски в классической ячейке с прозрачными электродами при В-эффекте [2]. Хорошо известно, что при реализации В-эффекта, при пороговом напряжении, наблюдается смена темного поля, которое обусловлено исходной гомеотропной ориентацией нематика, на светлое, а только потом (при увеличении напряжения) появляются чередующиеся друг за другом интерференционные цвета поля зрения. По всей видимости, при начальном не значительном отклонении директора от нормали, не выполняются условия интерференции между обыкновенным и необыкновенным лучами, возможно, вследствие нарушения пространственной когерентности, и первый интерференционный цвет, для которого начинают выполняться условия интерференции, является красный. В нашем случае, первое интерференционное кольцо (R) также имеет красный цвет. Отметим, светлая каемка (не цветная), по периферии деформированной области нематика, так и остается не цветной при любом действующем напряжении, и может рассматриваться аналогом перехода от темного поля к светлому при В-эффекте. Таким образом, распределение цветных интерференционный колец представляет собой, своего рода, развертку в плоскости ячейки последовательности интерференционных цветов, имеющих место при В-эффекте. При этом роль электрического поля (для В-эффекта), как показано ниже, выполняет поток жк материала.

Измерения ширины интерференционных колец, проведенные в ячейках с разной толщиной жк слоя (10-100 мкм) (для 5 мкм ячеек эффекты гидродинамической неустойчивости не позволяют получить приемлемое количество интерференционных колец) показывают, что в некотором диапазоне напряжений, их ширина, практически, не зависит от толщины ячейки и является только функцией приложенного напряжения.

Поворот ячейки на любой угол (0-360 °) вокруг оси, перпендикулярной плоскости ячейки, не сопровождается изменением цвета интерференционных колец. Это подтверждает вышесказанное, что изменение ориентации молекул жк происходит в плоскостях перпендикулярных плоскости ячейки, т.е. изменяются полярные углы молекул, но не азимутальные.

Вышепредставленные экспериментальные факты позволяют предложить модель деформации ориентированного нематика в окрестности дефекта диэлектрика. При прикладывании напряжения к жк ячейке, через слой жк от дефекта (D) к электроду ITO течет ионный ток j (рис. 3), который вовлекает в движение вещество жидкого кристалла в том же направлении.

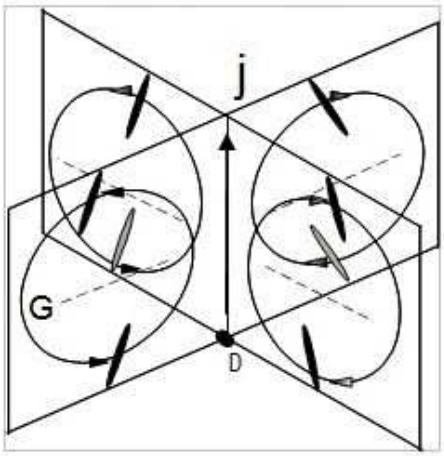

Рис. 3. Ориентация (отклонение от нормали) молекул в потоках жк материала. D – дефект пленки SiO_2. j -– сквозной ионный ток в жк слое от катода (поверхность не окисленного участка кремния (D) к аноду (поверхность электрода ITO (не показана)). G — пограничный слой.

Другими словами, ионный ток можно рассматривать своего рода микронасосом, перекачивающим жк материал, интенсивность перекачки которого управляется напряжением. При малых напряжениях устанавливается замкнутый ламинарный поток жк материала от центра вдоль поверхности электрода ITO и возврат жк материала обратно к центру (D) вдоль поверхности пленки SiO_2 окиси кремния (рис. 3). Пограничный слой G в объеме жк слоя, где относительная скорость этих встречных потоков равна нулю, по всей видимости, первоначально плоский. В такой ситуации просветление гомеотропно ориентированного нематика (рис. 2a) объясняется ориентацией директора в потоке жк вещества [5] (рис. 3). У верхнего электрода молекулы отклоняются от центра, а у нижней поверхности SiO_2 — к центру в радиальном направлении (рис. 3). При увеличении напряжения, пограничный слой G теряет устойчивость, превращаясь из плоского в периодически деформированный, навязывая соответствующую периодическую ориентацию нематику (рис. 2d). Необходимо заметить, что принятие пограничным слоем волнообразного профиля — довольно широко распространённое явление на границе встречных потоков в разных средах [6].

Исследование движения микрочастиц, взвешенных в жк, действительно показывает, что они перемещаются циркулярным образом от центра, где расположен дефект, к периферии и обратно в радиальном направлении, пересекая при этом выше указанные кольцевые образования (1, 2, 3, рис. 2d), иногда заходя за границу деформированной области нематика (в область гометропной ориентации) на расстояние 20-30 мкм.

В заключении необходимо отметить два обстоятельства. Первое касается существенного ограничения при использовании выше описанного электрооптического эффекта для регистрации дефектов пленки SiO_2, а второе — применение в дифракционной оптике. Принимая во внимание, что переориентация нематика в окрестности дефекта пленки обусловлена ионным током и существенно определяется величиной этого тока, наличие вскрытых окон в окисле, имеющих значительно большую площадь, чем площадь дефектов, в значительной мере, может снизить токи непосредственно через микроскопические дефекты, вплоть до не возможности реализации деформации нематика. Другими словами, дефекты пленки могут быть в наличии, но не визуализироваться, т.к. основная доля ионного тока будет протекать через участки

ячейки со вскрытыми окнами в окисле. И второе – минимальный размер периода электрически управляемой деформации нематика, достигнутый в работе, сравним (и даже меньше) со стандартными размерами пикселов электрически управляемых коммерческих модуляторов света (например [7, 8]), выполненных по технологии LCoS (жк на кремний). Такое сравнение показывает потенциальную перспективность получения периодического распределения директора, основанное на самоорганизованном эффекте волнообразного распределения директора возникающем при потере устойчивости пограничного слоя между потоками жк вещества в предлагаемой геометрии жк ячейки.

Литература

1. Muller R., Kamins T. Device electronics for integrated circuits / New York: Wiley, 1986.
2. Блинов Л.М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов / М.: Наука, 1978. – 384 с.
3. Zakzouk A.K.M. Time dependent MOS gate oxide defects using nematic liquid crystals // J. Electrochem. Soc. – 1980. – 127, № 4. – P.932-937.
4. Gritsenko N.I., Kucheev S.I., Moshel N.V. A model nonuniform electric field in nematic liquid crystal over a dielectric defect // Mol. Cryst. Liq. Cryst. – 1990. – 193. – P.43-46.
5. Невская Г.Е. Рубцов А.Е. Дефектоскопия диэлектрических пленок с помощью нематических жидких кристаллов // Микроэлектроника. – 1987. – 45. – С.74-80.
6. Forster D. Microscopic theory of flow alignment in nematic liquid crystal // Phy. Rev. Lett. – 32, № 21. – P.1161-1164.
7. Ламб Г. Гидродинамика / Москва: ИЛ, 1947.– 928 с.
8. Duran V., Clemente P., Matinez-Leon LI., Climent V., Lancis J. // J.Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2009. – 11. – P.085403.
9. Sakakura V., Sawano T., Shimotsuma Ya., Miura K., Hirao K. // Jpn. J. Appl. Phys. – 2009. – 48. – P.126507.

VISUALIZATION OF NEMATIC FLOW IN THE VICINITY OF DEFECT OF DIELECTRIC IN Si/SiO_2/NEMATIC/ELECTROD STRUCTURE

S.I. Kucheev, N.V. Malai, Yu. S. Tuchina

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: skucheev@yahoo.com

Abstract. Behavior of homeotropically oriented nematic liquid crystal (5CB, Single Crystal Institute, Kharkiv, Ukraine) in the vicinity of defect in SiO_2 dielectric film at Si/SiO_2/nematic/electrod structure under the direct voltage action is investigated. It is shown that liquid crystal flow that is associated with through-like ion current between defect and ITO electrode causes the change of initial orientation of the nematic and it is visualized via concentric interference rings with cross-like quenching of polarized light.

Key words: SiO_2 defect, nematic, period deformation, micropump.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика» выходит четыре раза в год. В журнале печатаются статьи по всем направлениям чистой и прикладной математики (за исключением текстов, имеющих чисто компьютерное содержание и вычислительной эмпирики).

Редколлегия журнала принимает от авторов рукописи статей, написанные на русском или на английском языках. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора(ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором(ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности и с таким расчетом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором(ами) направлению исследований, но более широкому кругу математиков. Ни в коем случае рукопись не должна представлять собой краткий отчет о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи. В связи с этим, рукопись должна быть структурирована — разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае, рукопись должна содержать введение и заключение. Разделы должны быть пронумерованы и иметь заголовки.

Во введении должны быть описаны: проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объёме физико-математического знания, представлены краткая история вопроса и полученный автором(ами) результат. В заключении работы должна быть дана характеристика полученного результата с указанием его значения для дальнейшего развития темы исследования.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются и для обзорной статьи, с той лишь разницей, что их содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Возможна также публикация статьи, носящей методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается редколлегией отдельно.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в чисто математических текстах должны быть четко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объём рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата А4. Она должна быть написана шрифтом 12pt через два интервала. Объём обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлегией журнала.

После подготовки одним из членов редколлегии заключения о соответствии рукописи нормам журнала «Научные ведомости» она рассматривается на общем собрании редколлегии. В отдельных случаях редколлегией может быть принято решение о более тщательном изучении рукописи внешним (не входящем в состав редколлегии журнала) рецензентом. Редколлегия оставляет за собой право на мелкие стилистические исправления текста рукописи после принятия решения о её публикации.

В редакцию присылается следующая информация:

1) основная содержательная часть статьи, представляемая на русском или английском языках. При этом название статьи должно состоять не более чем из 20 слов.

2) индекс MSC (см. Mathematical Subject Classification) того научного направления, которому посвящена статья;

3) список авторов с указанием порядка их размещения при публикации статьи;

4) аннотация на русском языке; её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;

5) список ключевых слов (не более 10-12);

6) текст перевода заголовка статьи, аннотации и ключевых слов на английском языке;

7) список литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;

8) данные об авторах статьи с указанием места их работы, точного почтового адреса предприятия. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить также на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;

9) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи.

Порядок оформления этой информации в электронном файле указан в приложении в конце настоящих правил (см. п.5) требований к электронному набору).

В редакцию присылается электронный файл работы. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). **Файлы, приготовленные в другом редакторе, рассматриваться редколлегией не будут**. При этом нужно присылать файл работы с расширением «tex» и pdf-копию файла с расширением «dvi» работы, для того, чтобы редакция имела возможность сравнения его с авторским оригиналом при редактировании и верстке журнала. Присылать сам dvi-файл при этом не нужно.

Особые требования к электронному набору в редакторе LaTeX (и тому подобным редакторам) следующие.

1) Нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды.

2) «Выключные» формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерации соответствующих номеров формул в тексте. Допускается применение для меток формул цифр, снабженных штрихами (или цифр совместно с буквами латинского алфавита). Однако этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста.

3) В случае, если в статье имеются разделы в виде *приложений* в конце основного текста работы, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть независимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложения. Каждый из разделов-приложений начинается словом ПРИЛОЖЕНИЕ с порядковым номером этого приложения. Это слово должно быть выровнено по правому полю страницы. Затем следует заголовок этого приложения.

4) Литературные источники в ссылках на основе команд cite (или непосредственно) в электронном тексте рукописи нужно обозначать цифрами, соответствующими их порядковому номеру появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.

5) Ниже прилагается шаблон, согласно которому должен оформляться файл статьи. Для авторов **следование этому шаблону обязательно**.

Шаблон для приготовления файла с рукописью

```
\setcounter{figure}{0}
\setcounter{equation}{0}
MSC XXX (по индекс научного направления Mathematical Subject Classification)
\vskip 0.3cm

\begin{center}
{\bf НАЗВАНИЕ СТАТЬИ}
\medskip
{\bf И.О. Автор1, И.О. Автор2, ... }
\medskip
{\small {\sf  Учреждение,\\
ул. Название улицы (пр. Название проспекта, пл. Название площади и т.д.),
Номер дома, Город, Индекс, Страна, e-mail: \underline{имя@адрес}}}
\end{center}

{\small {\bf Аннотация.} Текст аннотации.
\medskip
{\bf Ключевые слова:} слово1, слово2, ...\ .}
\vskip 1 cm

Текст статьи
\vskip 1 cm

\renewcommand\baselinestretch{0.6}

{\small
\centerline{{\bf Литература}}

\def\sk{\vskip - 0.25cm}

\begin{enumerate}
\bibitem{1}     Источник 1
\bibitem{2} \sk Источник 2
...
\end{enumerate}
\vskip 0.5cm

\begin{center}
{\bf TITLE 1st line \\
\vskip 0.1cm

2d   line \\
\vskip 0.1cm and so on }\medskip
```

```
{\bf  N.N. Author1, N.N. Author2, ...}
\medskip
{\small  {\sf Enterprize,\\
Street St. (Avenue Av., Square Sq. and so on), Number, City, Index, Country,
e-mail: \underline{name@address}}}
\end{center}

{\small {\bf Abstract.} Text of abstract. {\bf Key words:} word1, word2, ...\ .}}
\newpage

\renewcommand\baselinestretch{1.0}
```

Рисунки

Особое внимание при подготовке рукописи к печати должно быть уделено рисункам, если они имеются в тексте работы. Они должны быть качественно выполнены и представлены в редакцию в электронной форме в виде отдельных файлов в формате «ps». Файлы рисунков необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам. При этом в название каждого из файлов рисунков, чтобы избежать путаницы при верстке выпуска журнала, должна входить фамилия одного из авторов, записанная латиницей (например, Ivanov1.ps, Petrov2.ps и т.д.).

На представляемых в электронном формате рисунках **не следует** наносить те комментирующие их подписи, которые присылаются в редколлегию отдельным списком.

Внимание! В случае присылки в редакцию работы с некачественно выполненными рисунками, она **будет возвращена автору(ам) на доработку**.

Таблицы

Если в тексте работы есть таблицы, то их следует формировать на основе программы LaTeX и ни в коем случае не оформлять в виде рисунков.

Список литературных источников

Обращаем внимание авторов на требование к качественному оформлению списка используемых в работе литературных источников. В связи с тем, что требования, предъявляемые ГОСТом, при оформлении такого списка весьма сложны и ориентированы на решение задач, связанных с централизованным поиском и хранением научной информации, которые не специфичны для научно-исследовательской практики, в журнале используется собственная система его оформления. Типы литературных источников качественно довольно разнообразны. Поэтому редакция не предлагает универсальный рецепт их оформления. Единственным общим принципом, которым должен руководствоваться автор, состоит в том, литературная ссылка должна оформляться так, чтобы читатель имел максимально точную информацию о том, как найти и ознакомиться с научным результатом, на который опирается его работа.

Несмотря на отсутствие общего рецепта оформления списка, редакция требует соблюдение строгих правил оформления ссылок на литературные источники двух типов, которые являются наиболее распространенными. Это касается статей в регулярных периодических изданиях

(в журналах) и книг (монографий и учебников). Принятые в журнале правила оформления литературных источников указанных двух типов демонстрируются следующими примерами:

Журнальные статьи –

```
\item  Цегельник В.В. Гамильтонианы, ассоциированные с третьим и пятым уравнениями

Пенлеве~// Теоретическая и математическая физика.~-- 2010.~-- 162;1.~-- С.69-74.

\item Demidov A.S., Kochurov A.S., Popov A.Yu. To the problem of the recovery of

non-linearities in equations of mathematical physics~// Journal of Mathematical

Sciences.~-- 2009.~-- 163;1.~-- P.46-77.
```

Книги (в частности, многотомные издания) –

```
Рытов~С.М., Кляцкин Ю.А., Татарский~В.И. Введение  в статистическую радиофизику~/

Случайные поля, т.2~/ М.: Наука, 1978.~-- 464~с.
```

(если издание однотомное, то позиция между двумя слэш-черточками становится ненужной и, поэтому исчезает).

Обращаем внимание на то, что:

1) должны быть указаны полные названия журнальных статей, а также указаны не только начальные страницы этих статей, но обязательно также и конечные;

2) при указании журнальных статей после года издания стоит номер (обязательно арабскими цифрами) тома журнала (если он имеется) и через точку с запятой стоит дополнительная информация (номер внутри тома, в частности, номер выпуска и т.д.); при этом номер тома может иметь сложное начертание и не выражаться только одним числом;

3) название журнала нужно давать полностью без сокращений;

4) каждая из книг в списке цитируемой литературы обязательно должна быть дана с указанием полного числа страниц.

При несоблюдении описанных правил оформления литературных источников **работа будет возвращена автору(ам) на доработку**.